Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120
Haust 2022

Innlevering 1

6.4

$\boxed{4}$ Laplacetransformerer likningen.

$$s^2Y - 2s + 16Y = 4e^{-3\pi s} \Rightarrow Y = \frac{4}{s^2+4^2}e^{-3\pi s} + 2\frac{s}{s^2+4^2}$$

Bruker t-skift og får

$$y(t) = 2\cos(4t) + \sin(4(t-3\pi))u(t-3\pi)$$

$\boxed{10}$ Laplacetransformerer likningen.

$$s^2Y + 5sY + 6Y = e^{-\frac{1}{2}\pi s} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

Det gir:

$$Y = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{s^2+5s+6} - \frac{se^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+5s+6)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{s^2+5s+6} - \frac{se^{-\pi s}}{(s^2+1)(s+2)(s+3)}$$

Herfra gjelder det å finne den inverse Laplacetransformen for å ende opp med et uttrykk for $y(t)$.

6.5

$\boxed{12}$ Ser at vi har definisjonen av konvolusjon i likningen, så skriver om til

$$y(t) + y * \cosh(t) = t + e^t$$

Dette kan vi Laplacetransformere.

$$Y + Y\frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Dette kan vi enkelt finne inverstransformen til, og får

$$y(t) = t + 1$$

$\boxed{19}$ Deler uttrykket opp i et produkt, slik at vi kan bruke konvolusjon.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2\pi}{s^2+\pi^2}\frac{s}{s^2+\pi^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{L}[2\sin(\pi t)]\mathscr{L}[\cos(\pi t)]]$$

Ved konvolusjon har vi at dette blir

$$= 2\sin(\pi t) * \cos(\pi t) = \int_0^t 2\cos(\pi\tau)\sin(\pi(t-\tau))d\tau$$

Ved litt trigonometriske identiteter får via

$$= \int_0^t \sin(\pi t)d\tau + \int_0^t \sin(\pi(t-2\tau))d\tau$$

Det første integralet er enkelt fordi det er konstant under τ. Det andre integralet evalueres til 0. Dermed står vi igjen med

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}\right] = t\sin(\pi t)$$

$\boxed{22}$ Gjør tilsvarende som i forrige oppgave.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s(s-1)}\right] = u(t-a) * e^t = \int_0^t u(\tau-a)e^{t-\tau}d\tau$$

Vi utnytter egenskaper til Heavisidefunksjonen og får

$$= \int_a^t e^{t-\tau}d\tau = e^{t-a} - 1 \ , \ t > a$$

Vi må ha $t > a$ fordi konvolusjonen blir 0 ellers. Vi kan skrive det slik:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s(s-1)}\right] = (e^{t-a}-1)u(t-a)$$

6.6

$\boxed{7}$ Begynner med å bruke $\sinh(2t)$ på eksponentialform. Det gir

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}[t^2e^t] - \frac{1}{2}\mathscr{L}[t^2e^{-t}]$$

Bruker så at

$$F'(s) = \mathscr{L}[tf(t)]$$

Lar $f(t) = e^t$, slik at

$$\mathscr{L}[tf(t)] = \left(-\frac{1}{s-2}\right)' = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Lar så $g(t) = te^t$, som tilsvarende gir

$$\mathscr{L}[tg(t)] = \left(-\frac{1}{(s-2)^2}\right)' = \frac{2}{(s-2)^3}$$

Dette kan vi så gjøre nøyaktig tilsvarende for det andre leddet vi vil Laplacetransformen, og vi sitter til slutt igjen med

$$\mathscr{L}[t^2 \sinh(2t)] = \frac{1}{(s-2)^3} - \frac{1}{(s+2)^3}$$

$\boxed{15}$ Velger å bruke konvolusjon. Da får vi

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin(2t) * \cos(2t)$$

Fra seksjon 6.5, oppgave 19, regnet vi ut en lignende konvolusjon, og kan dermed enkelt konkludere hva denne konvolusjonen blir.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{1}{4}t\sin(2t)$$

$\boxed{17}$ Deler opp logaritmen, og bruker lineariteten til den inverse Laplacetransformen.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right] = \mathscr{L}^{-1}[\ln s] - \mathscr{L}^{-1}[\ln s - 1]$$

Bruker integrasjonsregel, som sier at

$$\int_s^\infty F(\bar{s})d\bar{s} = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

Lar $F(s) = -\frac{1}{s}$, slik at

$$\int_s^\infty F(\bar{s})d\bar{s} = -\int_s^\infty \frac{1}{\bar{s}}d\bar{s} = \ln(s)$$

Dermed har vi at

$$\mathscr{L}^{-1}[\ln(s)] = \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = -\frac{1}{t}$$

Tilsvarende får vi at

$$\mathscr{L}^{-1}[\ln(s-1)] = \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = -\frac{e^t}{t}$$

Sitter da igjen med

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right] = \frac{e^t-1}{t}$$

6.7

$\boxed{4}$ Vi begynner med å Laplacetransformere begge likningene:

$$sY_1 = 4Y_2 - \frac{8s}{s^2+16}$$
$$sY_2 - 3 = -3Y_1 - \frac{36}{s^2+16}$$

Kan løse dette for Y_1 og Y_2, og deretter finne den inverse Laplacetransformen til likningene man ender opp med. Det vil gi uttrykk for y_1 og y_2.