11.1

$\boxed{2}$ Finner fundamental periode til oppgitte funksjoner.

$$\cos nx : p = \frac{2\pi}{n}$$
$$\sin nx : p = \frac{2\pi}{n}$$
$$\cos \frac{2\pi x}{k} : p = k$$
$$\sin \frac{2\pi x}{k} : p = k$$
$$\cos \frac{2\pi nx}{k} : p = \frac{k}{n}$$
$$\sin \frac{2\pi nx}{k} : p = \frac{k}{n}$$

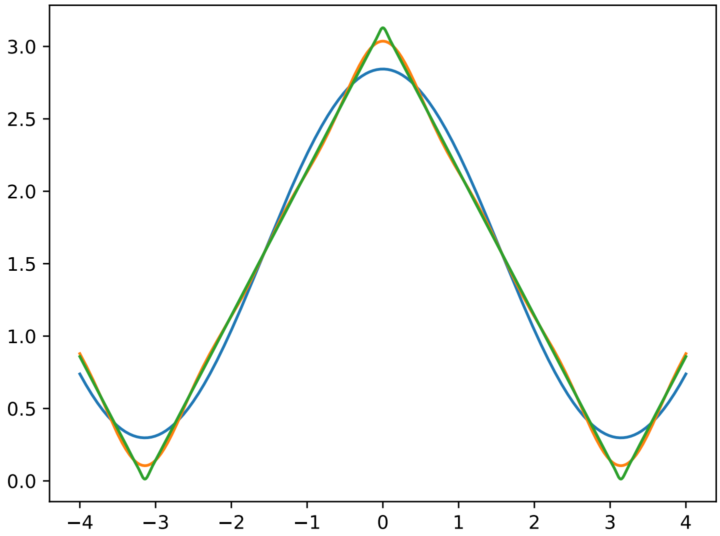
$\boxed{15}$ Ser at funksjonen er hverken like eller odde i det gitte intervallet, så vi kan ikke bruke symmetriargument til å finne Fourierkoeffisienter.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{8\pi^2}{3}$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^3}{3}$$

$\boxed{17}$ Vi har en like funksjon, så $b_n = 0$. Regner ut koeffisientene.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{\pi}{2}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx) dx = \frac{2 - 2\cos(\pi n)}{\pi n^2} = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n^2}$$

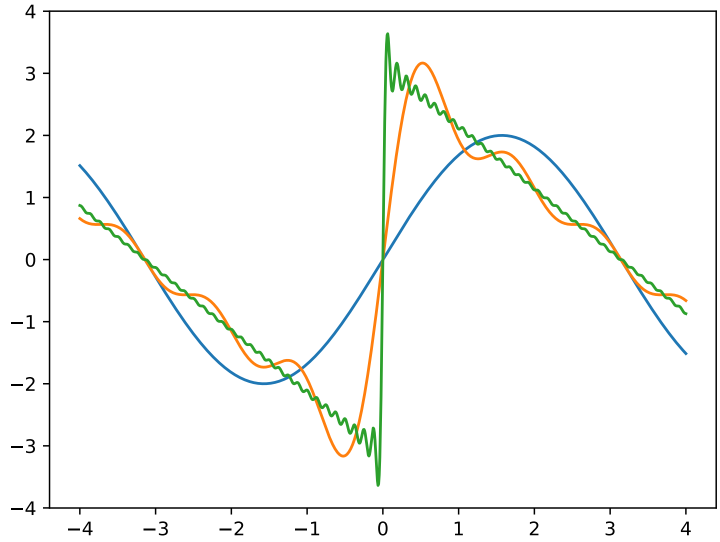
Bruker disse koeffisientene til å tegne $f(x)$ for $n = 1$, $n = 5$ og $n = 50$:



$\boxed{21}$ Vi har en odde funksjon, så $a_n = 0$. Regner ut koeffisientene.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx = \frac{2\pi n - 2\sin(\pi n)}{\pi n^2}$$

Bruker disse koeffisientene til å tegne $f(x)$ for $n = 1$, $n = 5$ og $n = 50$:



11.2

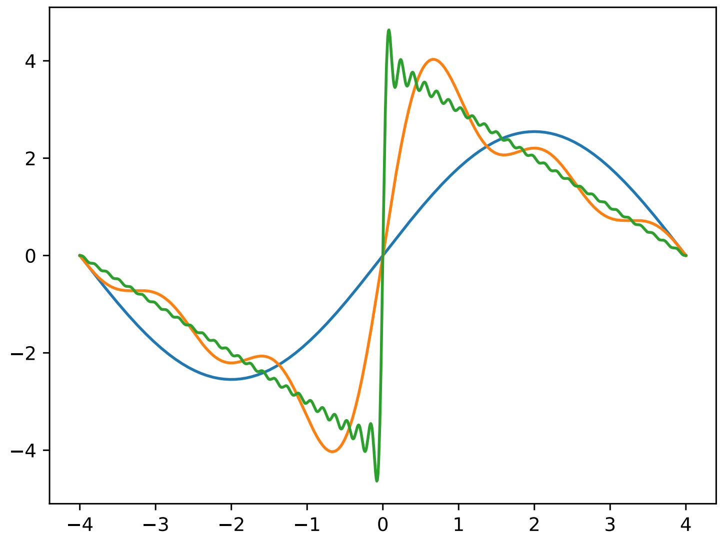
$\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\text{Odde} &: x^3\cos(nx), x^2\tan(\pi x)\\ \text{Like} &: e^{-|x|}\\ \text{Hverken} &: e^x, \sinh(x)-\cosh(x)\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Dette ligner veldig på oppgave 21. Gjør akkurat det samme, men med litt annen periode $L = 4$.

$$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4}(4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{8\pi n - 8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}$$

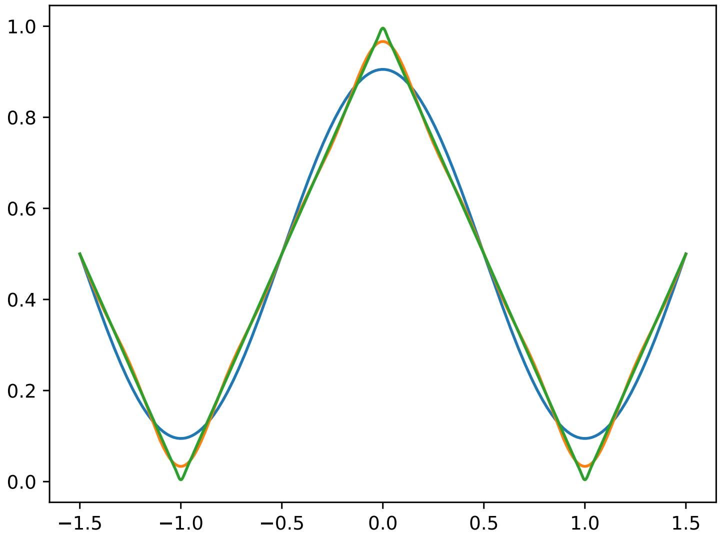
Dette ser vi stemmer ved å plotte summen i python.



$\boxed{17}$ Igjen har vi en funksjon som ligner veldig på en tidligere oppgave. Her har vi periode $L = 1$. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}(1-x)dx = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(n\pi x)dx = \frac{2-2\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \frac{2-2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Plotter summen og får



$\boxed{24}$ Deler oppgaven inn i a) og b), som henholdsvis svarer til Fourier cosinus- og sinusrekken til funksjonen.

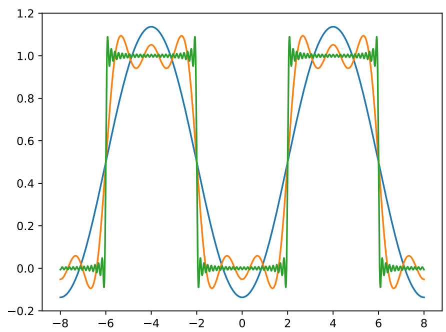
a) Funksjonen er like og har periode med $L = 4$. Ser at den har midtpunkt i $y = 1/2 \Rightarrow a_0 = 1/2$. Regner så ut koeffisientene.

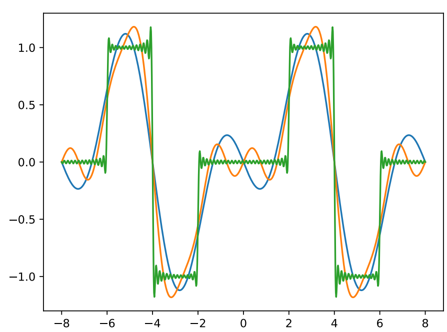
$$a_n = \frac{1}{2}\int_2^4 \cos\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{2(\sin(\pi n) - \sin\frac{\pi n}{2})}{\pi n} = -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

b) Denne funksjonen blir odde, men har fortsatt periode med $L = 4$. Koeffisientene blir

$$b_n = \frac{1}{2}\int_2^4 \sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{2(\cos\frac{\pi n}{2} - \cos(\pi n))}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (1)^n\right)$$

Under er Fourier cosinus- og sinusrekken skissert i python.

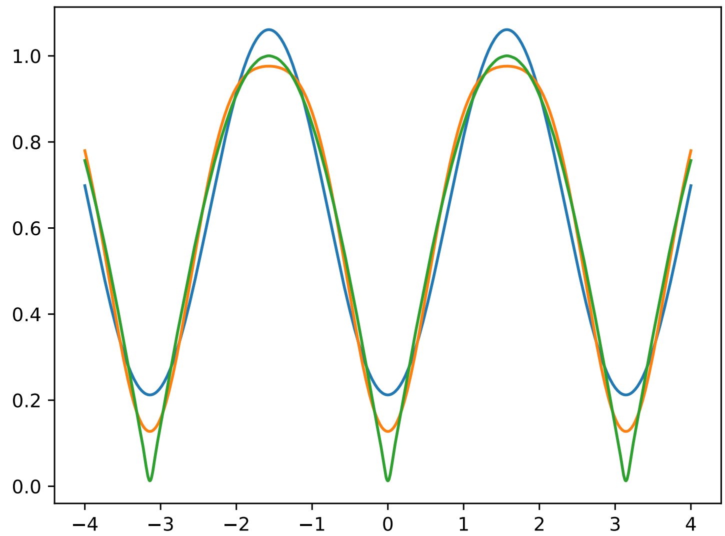




29 Ser ganske greit at Fourier sinusrekken i dette tilfellet gir $\sin(x)$. Fourier cosinusrekken, derimot, krever litt regning. Vi har en like funksjon med periode $p = 2\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx = \frac{2(\cos(\pi n)+1)}{\pi - \pi n^2} = \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi - \pi n^2}$$

Plotter i python for å sjekke at det er riktig.



11.3

15 Begynner med å finne Fourierrekken til $r(t)$. Observerer at $r(t)$ er odde, slik at $a_n = 0$. Får da

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t(\pi^2 - t^2)\sin(nt)dt = -\frac{12(-1)^n}{n^3}$$

Det betyr at

$$r(t) = 12\sin(t) - \frac{12}{2^3}\sin(2t) + \frac{12}{3^3}\sin(3t) - \ldots$$

Har da

$$y'' + cy' + y = -\frac{12(-1)^n}{n^3}\sin(nt)$$

med

$$y_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)$$