Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

13.4

$\boxed{2}$ Gitt $f(z) = iz\overline{z} = i|z|^2 = i(x^2 + y^2)$ for $z = x + iy$. Sjekker om dette oppfyller Cauchy-Riemann med $u(x, y) = 0$ og $v(x, y) = x^2 + y^2$.

$$u_x = 0 \neq 2y = v_y$$
$$u_y = 0 \neq 2x = -v_x$$

Ser at dette ikke er oppfylt, som betyr at $f(z)$ ikke er analytisk.

$\boxed{10}$ Har $f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}z = \text{Ln}(z)$. Lar $z = re^{i\theta}$, slik at vi på polarform får $f(z) = \ln(r) + i\theta$. Bruker Cauchy-Riemann på polarform, som gir

$$u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}v_\theta$$
$$u_\theta = 0 = v_x$$

Siden $\text{Arg}(z)$ er diskontinuerlig på negativ reell akse, kan heller ikke $f(z)$ være analytisk her. Samtidig er ikke $f(z)$ definert for $z = 0$, så vi står igjen med at $f(z)$ er analytisk på positiv reell akse, bortsett fra i $z = 0$.

$\boxed{18}$ Sjekker først at $u = x^3 - 3xy^2$ oppfyller Laplace ligning.

$$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$$

Konstruerer så en analytisk funksjon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ved å bruke Cauchy-Riemann.

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \Rightarrow v = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2y - y^3 + g(x)$$
$$u_y = -6xy = -v_x \Rightarrow v = \int 6xydx = 3x^2y + h(y)$$

Velger $g(x) = 0$ og $h(y) = -y^3$, og ser at dette gir den analytiske funksjonen

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$$

Kan dobbeltsjekke at denne er harmonisk. Vet at $u_{xx} + u_{yy} = 0$, så trenger bare å sjekke

$$v_{xx} + v_{yy} = 6y - 6y = 0$$

$f(z)$ er altså både harmonisk og analytisk.

$\boxed{30}$ **b)** $\mathrm{Im} f(z) = \text{konst} \Rightarrow v(x,y) = \text{konst}$. Bruker Cauchy-Riemann, og får

$$u_x = v_y = 0 \Rightarrow u = h(y)$$
$$u_y = -v_x = 0 \Rightarrow u = g(x)$$

Dette kan bare stemme dersom $g(x) = h(y) = \text{konst}$, som betyr at hele $f(z)$ også må være konstant.

c) Fra Cauchy Riemann får vi at

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

Dermed må $u_x = v_x = 0$, og følgelig $u_y = v_y = 0$ slik at $f(z)$ må være konstant.

13.5

$\boxed{20}$ Begynner med å skrive høyre side på polar form:

$$4 + 3i = 5e^{i(\arctan(3/4)+2\pi n)}$$

Har bakt inn periodisiteten til den komplekse eksponentialfunksjonen slik at alle løsninger kommer med til slutt. Setter dette inn i ligningen fra oppgaven

$$e^x e^{iy} = 5e^{i(\arctan(3/4)+2\pi n)}$$

Dette gir to ligninger:

$$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5)$$
$$e^{iy} = 5e^{i(\arctan(3/4)+2\pi n)} \Rightarrow y = \arctan(3/4) + 2\pi n$$

Setter dette sammen, som gir løsningen

$$z = \ln(5) + i(\arctan(3/4) + 2\pi n)$$

13.6

$\boxed{10}$ Bruker identiteter for hyperbolske funksjoner med komplekse argument, som gir

$$\sinh(3 + 4i) = \sinh(3)\cos(4) + i\cosh(3)\sin(4)$$
$$\cosh(3 + 4i) = \cosh(3)\cos(4) + i\sinh(3)\sin(4)$$

$\boxed{19}$ Skrive om til polar form

$$\sinh(z) = 0 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Rightarrow e^{2z} = 1$$

Bruker logaritme, og får

$$z = \frac{\ln(1)}{2} = \frac{0 + 2i\pi n}{2} = i\pi n$$

13.7

$\boxed{15}$ Bruker regler for logaritme, som gir

$$\ln(e^i) = i\ln(e) = i + 2\pi ni$$

$\boxed{17}$ Bruker at $\ln(z) = \text{Ln}|z| + i\text{arg}z$, og regner ut de oppgitte logaritmene.

$$\ln(i^2) = \text{Ln}|-1| + i\text{arg}(-1) = 0 + i\pi + 2\pi in = i\pi(2n+1)$$
$$2\ln(i) = 2\text{Ln}|i| + 2i\text{arg}(i) = 0 + i\pi + 4\pi in = i\pi(4n+1)$$

Dette sser vi er ulikt, som skulle vises.

$\boxed{30}$ **a)** Vi har at

$$\cos(w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

Vil så finne inversen ved å løse dette for w. Fra siste likhet får vi

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

Ved substitusjonen $u = e^{iw}$ får vi et vanlig andregradsuttrykk

$$u^2 - 2zu + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

Dette gir

$$w = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Og kan dermed konkludere at

$$\arccos(z) = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

som skulle vises.