6.1

$\boxed{1}$ $\mathscr{L}[2t+8] = \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s}$

$\boxed{12}$ La

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Det gir

$$\mathscr{L}[f(t)] = \begin{cases} \mathscr{L}[t] & 0 < t < 1 \\ \mathscr{L}[1] & 1 \leq t < 2 \\ \mathscr{L}[0] & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}[f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{s^2} & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$\boxed{23}$ Bruker definisjonen av Laplace-transformasjonen, i lag med variabelbytte $r = ct$.

$$\mathscr{L}[f(ct)] = \int_0^\infty f(ct)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(r)e^{-(s/c)r}\frac{dr}{c} = \frac{1}{c}F(s/c)$$

Dette resultatet kan vi bruke til å finne

$$\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{\omega}F(s/\omega) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

der vi bruker

$$\mathscr{L}[\cos(t)] = F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$\boxed{26}$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2+25}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s}{s^2+5^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5^2}\right] = 5\cos(5t) - \sin(5t)$$

$\boxed{36}$ Bruker eksponentialdefinisjonen til $\sinh(t)$, samt skift langs s-aksen.

$$\mathscr{L}[\sinh(t)\cos(t)] = \frac{1}{2}\mathscr{L}[e^t\cos(t) - e^{-t}\cos(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]$$

Dette utrykket kan ved litt bokføring forenklest til

$$\mathscr{L}[\sinh(t)\cos(t)] = \frac{s^2-2}{s^4+4}$$

$\boxed{40}$ Starter med å bearbeide brøken.

$$\frac{4}{s^2-2s-3} = \frac{4}{s^2-2s+1-4} = \frac{4}{(s-1)^2-2^2}$$

Det gir

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)^2-2^2}\right] = 2e^t\sinh(2t)$$

Har brukt skift langs s-aksen, samt kjennskap om Laplacetransformen til $\sinh(\omega t)$.

6.2

$\boxed{4}$ Laplacetransformerer likningen og får

$$s^2Y + 9Y = \frac{10}{s+1}$$

Løser så for Y

$$Y = \frac{10}{(s+1)(s^2+9)}$$

Ved delbrøkoppspaltning kan vi forenkle dette, og finne invers Laplacetransform.

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1-s}{s^2+9} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{3}\sin(3t) - \cos(3t) - e^t$$

$\boxed{13}$ Laplacetransformerer likningen:

$$sY - y(0) - 6Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{y(0)}{s-6}$$

Dette kan vi enkelt finne inverstransformen av.

$$y(t) = y(0)e^{6t}$$

Bruker så initialverdien:

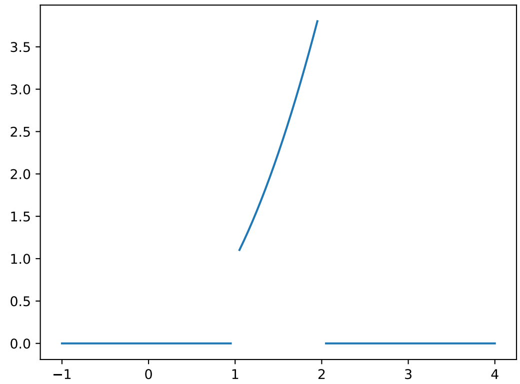
$$y(-1) = y(0)e^{-6} = 4 \Rightarrow y(0) = 4e^6$$

Kan så løse for $y(t)$:

$$y(t) = 4e^{6t+6}$$

6.3

8 Har brukt python til å lage en figur:



Vi kan konstruere denne funksjonen med stegfunksjoner. Vi vil at stegfunksjonene skal være "på" i intervallet $1 < t < 2$, og 0 ellers. Dette oppnår vi slik:

$$f(t) = t^2(u(t-1) - u(t-2))$$

Kan finne Laplacetransformen ved å bruke definisjonen

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_1^2 te^{-st}dt$$

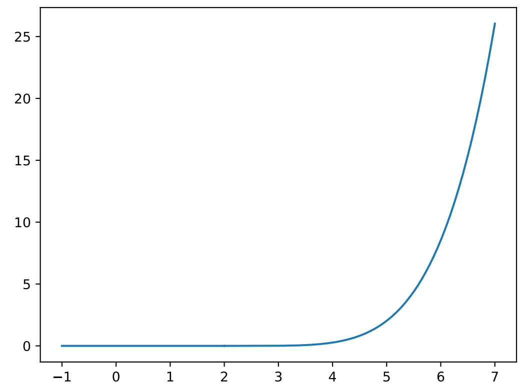
Gjennon noen steg med delvis integrasjon blir dette

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{2e^{-s}}{s^3} - \frac{2e^{-2s}}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{4e^{-2s}}{s}$$

15 Ser at vi kan bruke t-skift for å finne inverstransformen.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^6}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2s}\mathscr{L}\left[\frac{t^5}{5!}\right]\right] = \frac{(t-2)^5}{5!}u(t-2)$$

Lager en enkel skisse i python.



$\boxed{25}$ Gitt at y er løst utenfor $0 < t < 1$, fokuserer vi på å løse difflikningen for dette intervallet. Bruker Laplacetransformen og får

$$s^2 Y + 2 + Y = \frac{2}{s^2} \Rightarrow Y = \frac{2}{s^2(s^2+1)} - \frac{4}{s^2+1}$$

Ved delbrøkoppspaltning kan dette forenklest til

$$Y = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2+1}$$

Dette kan vi finne inverstransformen til, og det gir

$$y(t) = 2t - 4\sin(t) \ , \ 0 < t < 1$$