TMA4120
Haust 2022

Innlevering 4

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

11.4

$\boxed{2}$ Starter med å finne Fourierrekken til $f(x)$. Siden funksjonen er odde, blir $a_n = 0$, og koeffisientene blir

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

Bruker videre at

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

Setter inn for koeffisientene, og får

$$\begin{aligned} E^* &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - \sum_{n=1}^{N}\frac{4\pi}{n^2} \\ &= \frac{2\pi^3}{3} - \sum_{n=1}^{N}\frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

Regner ut noen verdier i python

N	E^*
1	8.104480505840705
2	4.962887852250912
3	3.5666244506554463
4	2.7812262872580007
5	2.278571462683633
10	1.1958954441865721
100	0.1250374819660962
1000	0.012560089523425688

$\boxed{3}$ Starter med å finne Fourierrekken til $f(x)$. Siden funksjonen er like, blir $b_n = 0$, og koeffisientene blir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = -\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Setter inn for koeffisientene, og får

$$
\begin{aligned}
E^* &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - \pi \left[\frac{2\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{((-1)^n - 1)^2}{n^4} \right] \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{((-1)^n - 1)^2}{n^4}
\end{aligned}
$$

Regner ut noen verdier i python

N	E^*
1	0.07475460110931831
2	0.07475460110931831
3	0.011878574208815884
4	0.011878574208815884
5	0.0037298411225110684

$\boxed{9}$ Finner koeffisienten

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\
&= \frac{ix}{2\pi n} \left[e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \\
&= \frac{i}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{2\pi n^2} \left[e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{i}{n} \cos(n\pi) - \frac{i}{\pi n^2} \sin(n\pi) \\
&= i \frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

Fra dette kan vi skrive ut Fourierrekken som

$$
f(x) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}
$$

$\boxed{13}$ Tar utgangspunkt i funksjonen

$$
f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{if } x > 0 \\ \pi + x & \text{if } x < 0 \end{cases}
$$

Dette er en like funksjon, så Fourierkoeffisientene blir

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n^2}
\end{aligned}
$$

Setter disse koeffisientene inn i Parsevals identitet, som gir

$$\begin{aligned}
2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \\
\Rightarrow \qquad \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4} &= \frac{\pi^2}{3} \\
\Rightarrow \qquad \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4} &= \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

Dersom vi skriver ut summen, ser vi at det stemmer med oppgaven.

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + ... = \frac{\pi^4}{96}$$

11.7

$\boxed{1}$ Begynner med å se på de enkleste tilfellene. Dersom $x = 0$, får vi integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2}$$

som stemmer med oppgaven.
Videre ser vi at funksjonen er definert som et integral fra 0 til ∞, slik at funksjonsverdien blir 0 for alle $x < 0$.
Til sist har vi tilfellet der $x > 0$. Vi deler opp integralet i sinus- og cosinusledd, og bruker deretter (4) og (5) fra Kreyzsig for å sjekke opp den oppgitte funksjonen stemmer.

$$\begin{aligned}
A(w) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-v}\cos(wv)dv = \frac{1}{1+w^2} \\
B(w) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-v}\sin(wv)dv = \frac{w}{1+w^2}
\end{aligned}$$

Disse integralene kjenner vi uansett løsningene på fra Laplacetransformasjoner. Vi ser at svarene stemmer overens med $A(w)$ og $B(w)$ fra integralet, og kan dermed konkludere at likheten i oppgaven er korrekt.

11.9

I denne seksjonen brukes det at Fouriertransformen

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

$\boxed{5}$ Finner Fouriertransformen ved definisjonen over.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{(1-iw)x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)} \left[e^{(1-iw)x} \right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)} \left[e^{(1-iw)a} - e^{-(1-iw)a} \right]
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Finner Fouriertransformen.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} x e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{ix}{w} e^{-iwx} \right]_0^a - \frac{i}{w\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-iwx} dx \\
&= \frac{ixe^{-iwa}}{w\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{w^2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-iwx} \right]_0^a \\
&= \frac{iwae^{-iwa} + e^{-iwa} - 1}{w^2\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{e^{-iwa}(1+iwa) - 1}{w^2\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Observerer at

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} |x| e^{-iwx} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 x e^{-iwx} dx$$

Vi har dermed et integral på samme form som i forrige oppgave, men $a = 1$. Utnytter resultatet vi allerede har funnet.

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-iw}(1+iw) - 1) = \frac{1}{w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos(w) - w\sin(w) - 1)$$

Ved siste likhet brukes Eulers formel, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$