Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120
Haust 2022

Innlevering 5

12.1

$\boxed{15}$ Vi har gitt $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) = b$, og vil vise at den oppfyller Laplaceligningen. Staret med å finne andrederiverte.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2ax}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2ay}{x^2+y^2}\right) = \frac{2a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dermed har vi vist at ligningen er oppfylt. Videre setter vi inn initialbetingelsene, og finner at

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow u = a\ln(1) + 1 = 110 \qquad \Rightarrow b = 110$$
$$x^2+y^2 = 100 \Rightarrow u = a\ln(100) + 110 = 0 \qquad \Rightarrow a = -\frac{110}{\ln(100)}$$

Dermed har vi

$$u(x,y) = 110 - \frac{110}{\ln(100)}\ln(x^2+y^2)$$

som oppfyller Laplaceligningen.

12.3

$\boxed{5}$ Vi har gitt initialbetingelsene

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x) = k\sin(3\pi x)$$
$$u_t(x,0) = g(x) = 0$$
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Vi lar $u(x,t) = F(x)G(t)$, og bruker resultat fra forelesning (eventuelt kapittel 12.3 i boken).

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)G_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t))\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Vi har at

$$B_n^* \lambda_n = 2\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)dx = 0 \Rightarrow B_n^* = 0 \Rightarrow B_n^* = 0$$

Videre ser vi at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = \tilde{B_n}\sin(n\pi x) = k\sin(3\pi x) \Rightarrow F_3 = f(x)$$

Dermed er $F_n = 0$ for alle $n \neq 3$. Det gir

$$u(x,t) = u_3 = F_3(x)G_3(t) = k\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$$

$\boxed{7}$ Tilsvarende forrige oppgave kan vi argumentere for at $B_n^* = 0$. Dermed er

$$u_n = B_n \cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$$

Vi finner

$$B_n = 2\int_0^1 kx(1-x)\sin(n\pi x) = -\frac{4k}{\pi^3 n^3}(\cos(\pi n) - 1)$$

Da har vi alt vi trenger, og skriver ut

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^3}\left(\cos(\pi t)\sin(\pi x) + \frac{1}{27}\cos(3\pi t)\sin(3\pi x) + \frac{1}{125}\cos(5\pi t)\sin(5\pi x) + ...\right)$$

$\boxed{15}$ Lar $u(x,t) = F(x)G(t)$. Setter dette inn i differensialligningen, som gir

$$FG'' = -c^2 F^{(4)} G \Rightarrow \frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{G''}{c^2 G} = konst = \beta^4$$

Dette må være konstant dersom de to funksjonene av ulike variable skal være like til en hver tid. Kaller så denne konstanten β^4 for å følge konvensjonen brukt i oppgaven. Fra dette kan vi lage ligningene

$$F^{(4)} - \beta^4 F = 0$$
$$G'' + c^2\beta^4 = 0$$

Den siste av disse kan løses ved bruk av metoder fra Matematikk 3, som gir

$$G(t) = a\cos(c\beta^2 t) + b\sin(c\beta^2 t)$$

Var litt usikker på hvordan jeg skulle løse den andre direkte, men kan uansett vise likheten i oppgaven ved innsetting. Det gir

$$F(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x)$$
$$F^{(4)}(x) = \beta^4 A\cos(\beta x) + \beta^4 B\sin(\beta x) + \beta^4 C\cosh(\beta x) + \beta^4 D\sinh(\beta x)$$

Vi ser enkelt at $F^{(4)}(x) = \beta^4 F(x)$, slik at ligninen er oppfylt, og vi har vist det oppgaven spurte om.

11.4

$\boxed{19}$ Begynner med å skrive opp betingelser gitt i oppgaven.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(0,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_x(x,L) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Antar $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

$$\begin{aligned} F'' - kF = 0 \qquad & \Rightarrow F(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \\ G'' - kc^2G = 0 \qquad & \Rightarrow G(t) = B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t), \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \end{aligned}$$

Bruker at $u(0,t) = F(0) = 0$ til å sette $A = 0$. Ved $u_x(x,L) = 0$ får vi

$$F'(L) = pB\cos(pL) = 0 \Rightarrow pL = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

Fra $u_t(x,0) = 0$ får vi

$$G'(0) = \lambda_n B_n^* = 0 \Rightarrow B_n^* = 0$$

Vi har til slutt

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos(p_n ct)\sin(p_n x)$$

der vi har byttet ut λ_n med $p_n c$. Vi kan avgjøre B_n ved at

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(p_n x)$$

slik at B_n blir koeffisientene til Fourier sinusrekken til $f(x)$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(p_n x)dx$$

12.Rev

$\boxed{18}$ Vi har gitt $u_{xx} + u_x = 0$. Lar $v(x,t) = u_x(x,t) \Rightarrow v_x + v = 0$. Dette er en vanlig separabel differensialligning.

$$\int \frac{1}{v_x}dv = \int -1dx \Rightarrow v(x,t) = D(y)e^{-x}$$

Dermed blir

$$u(x,t) = \int v(x,t)dx = C(y)e^{-x} + h(y)$$

Siden funksjoner av y oppfører seg konstant ved derivasjon med hensyn på x, ser vi at $h(y)$ blir derivert bort i u_x. $C(y)$ avhenger av y, men spiller ingen rolle i derivasjon mhp x.