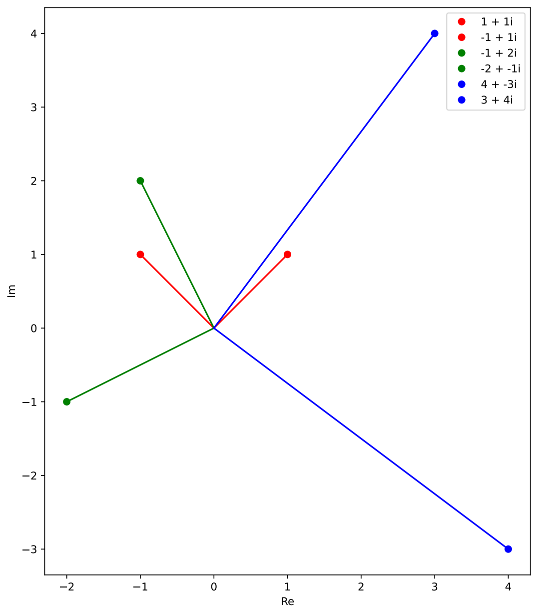
Innlevering 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

13.1

$\boxed{2}$ Plotter de komplekse tallene, og ser at de korresponderende fargene har rett vinkel mellom seg.



$\boxed{3}$ Bruker teknikken i (7).

$$\begin{aligned}\frac{26-18i}{6-2i} &= \frac{(13-9i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{39-27i+13i+9}{10} \\ &= \frac{24}{5}-\frac{7}{5}i\end{aligned}$$

Ved å bruke formelen i (7) blir svaret

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{26 \cdot 6 + (-18) \cdot (-2)}{6^2 + (-2)^2} + i\frac{6 \cdot (-18) - 26 \cdot (-2)}{6^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{24}{5} - \frac{7}{5}i \end{aligned}$$

$\boxed{14}$ Har $z_1 = -2 + 5i$ og $z_2 = 3 - i$. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{-2 - 5i}{3 + i} \\ &= \frac{-(2 + 5i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} \\ &= \frac{-6 + 2i - 15i - 5}{9 + 1} \\ &= -\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-2 + 5i}{3 - i} \\ &= \frac{(-2 + 5i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} \\ &= \frac{-6 - 2i + 15i - 5}{9 + 1} \\ &= \frac{-11 + 13i}{10} \\ \Rightarrow \overline{\frac{z_1}{z_2}} &= -\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i \end{aligned}$$

$\boxed{16}$ Begynner med å løse brøkene gitt $z = x + iy$.

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

Dermed er

$$\mathrm{Im}(1/z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Tilsvarende blir

$$\frac{1}{(x + iy)^2} = \frac{1}{(x^2 - y^2) + i2xy} = \frac{(x^2 - y^2) - i2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{(x^2 - y^2) - i2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

og

$$\mathrm{Im}(1/z^2) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

13.2

$\boxed{1}$ Har $z = 1 + i$. Det gir

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) = \arctan(1) = \pi/4$$
$$r = \mathrm{Abs}(z) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

som betyr at

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$\boxed{8}$ Begynner med å dele brøken opp i reell og imaginær del.

$$\begin{aligned}\frac{7+4i}{3-2i} &= \frac{(7+4i)(3+2i)}{3^2+2^2} \\ &= \frac{21+14i+12i-8}{13} \\ &= 1+2i\end{aligned}$$

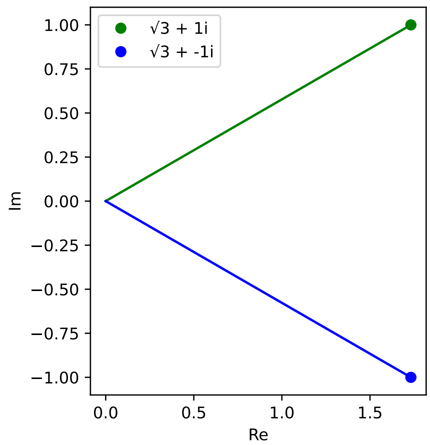
Dette gir

$$z = \sqrt{5}e^{i\arctan 2}$$

$\boxed{11}$ Har $z = \sqrt{3} \pm i$, som gir

$$\mathrm{Arg}(z) = \arctan\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\pi}{6}$$

Slik ser det ut i det komplekse plan:



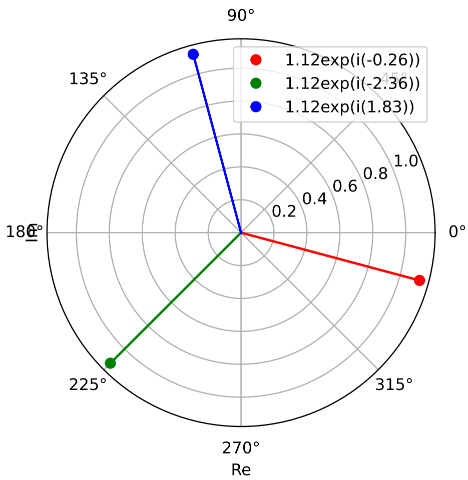
$\boxed{21}$ Finner først $z = 1 - i$ på polar form.

$$z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

Ved De Moivres formel finner vi tredjerøttene

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[6]{2}\exp\left[\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)i\right], k \in \{0,1,2\}$$

Kan plotte disse røttene i det komplekse plan:



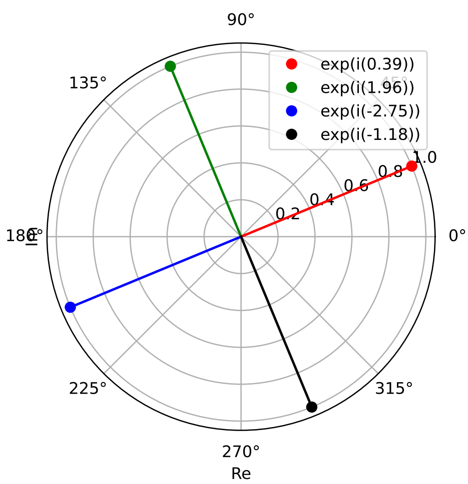
$\boxed{25}$ Finner først $z = 1 - i$ på polar form.

$$z = e^{i\pi/2}$$

Ved De Moivres formel finner vi fjerderøttene

$$\sqrt[4]{i} = \exp\left[\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi k}{4}\right)i\right], k \in \{0,1,2\}$$

Kan plotte disse røttene i det komplekse plan:



13.3

$\boxed{6}$ Skriver om

$$\mathrm{Re}(1/z) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow x > x^2 + y^2$$

Ser at vi kan skrive dette om til

$$(x - 1/2)^2 + y^2 > (1/2)^2$$

Dermed tilsvarer det oppgitte området det komplekse planet ekskludert en sirkel med radius 0.5, med senter i (1,0).

$\boxed{15}$ Forenkler uttrykket

$$|z^2|\mathrm{Im}(1/z) = (x^2+y^2)\frac{-y}{x^2+y^2} = -y$$

Ser tydelig att dette vil gå mot null i origo, slik at funksjonen er kontinuerlig.

$\boxed{16}$ Forenkler til

$$\frac{\mathrm{Im}(z)^2}{|z|^2} = \frac{r^2\sin(2\theta)}{r^2} = \sin(2\theta)$$

Ser at denne grenseverdien ikke er veldefinert når $r \to 0$, slik at funksjonen ikke er kontinuerlig.

$\boxed{18}$ Vil finner den deriverte til

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Bruker kjente derivasjonsregler, som gir

$$f'(z) = \frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

Evaluerer dette i $z = i$:

$$f'(i) = \frac{2i}{(2i)^2} = -\frac{i}{2}$$