12.6

$\boxed{11}$ Vi har oppgitt en del informasjon:

$$
\begin{aligned}
u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0 \\
u(x,t) &= f(x) \\
u_t &= c^2 u_{xx}
\end{aligned}
$$

Lar $u(x,t) = F(x)G(t)$, som gir

$$
\begin{aligned}
F'' + p^2 F &= 0 \\
G' c^2 p^2 G &= 0
\end{aligned}
$$

Kan løse for F

$$
\begin{aligned}
F(x) &= A\cos(px) + B\sin(px) \\
F'(x) &= -pA\sin(px) + pB\cos(px)
\end{aligned}
$$

Setter inn initialbetingelser, som gir

$$
\begin{aligned}
F'(0) &= pB = 0 & &\Rightarrow B = 0 \\
F'(L) &= -pA\sin(pL) & &\Rightarrow p = \frac{n\pi}{L}
\end{aligned}
$$

Løser tilsvarende for G, og står igjen med

$$
u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}
$$

der $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, slik at

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-(cn\pi/L)^2 t}
$$

Gitt at $u(x,t) = f(x)$, ser vi at A_n tilsvarer Fourierkoeffisientene til $f(x)$, og kan uttrykkes som oppgave ber om.

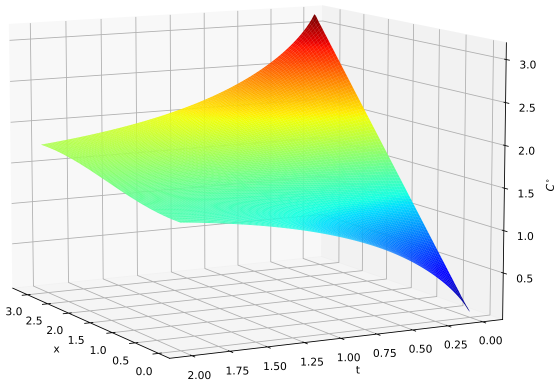
$\boxed{12}$ Vi har gitt $f(x) = x$, og kan løse oppgaven ved å finne Fourierkoeffisientene.

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2\cos(\pi n) - 2}{\pi n^2}$$

Skriver ut noen ledd av summen

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(\pi x)e^{-t} + \frac{1}{9}\cos(3\pi x)e^{-9t} + \frac{1}{25}\cos(5\pi x)e^{-25t} + ...\right]$$

Plotter funksjonen i python for å se tidsutviklingen



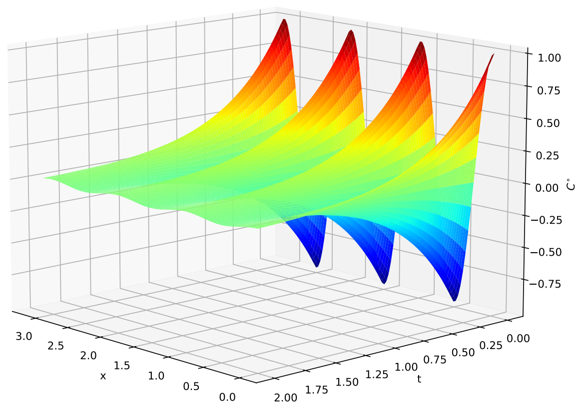
$\boxed{14}$ Vi har gitt $f(x) = \cos(2x)$, og kan løse oppgaven ved å finne Fourierkoeffisientene.

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)dx = 0$$
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)\cos(nx)dx = 1, n = 0$$

Vi kjenner til siste integralet, som er null i alle verdier utenom $n = 2$, da det blir 1. Dette gir den noe enkle funksjonen

$$u(x,t) = \cos(2\pi x)e^{-2t}$$

Plotter funksjonen i python for å se tidsutviklingen



16 Nytter hintet, som sier at $u = v - Hx(x-\pi)/(2c^2)$. Setter dette inn i den oppgitte differensialligningen $u_t = u_{xx} + H$.

$$\begin{aligned} u_t &= v_t \\ u_{xx} &= v_{xx} - \frac{H}{c^2} \\ \Rightarrow v_t &= c^2\left(v_{xx} - \frac{H}{c^2}\right) + H = c^2 v_{xx} \end{aligned}$$

Ser at vi får varmeligningen på en form vi kjenner til. Løsningen blir som vanlig

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda^2 t}$$

med $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)dx$. Gitt $u(x,0) = f(x)$ definerer vi

$$f(x) = v(x,0) - Hx(x-\pi)/(2c^2) \Rightarrow g(x) = u(x,0) + Hx(x-\pi)/(2c^2)$$

21 Bruker varmeligningen for to dimensjoner:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u \qquad\qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Antar $u(x,y) = F(x)G(y)$, som ved Laplaceligningen gir

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} = -k$$

Ved initialbetingelsene blir dette

$$\begin{aligned} F_n(x) &= B\sin\frac{n\pi x}{a} \\ G_n(y) &= A_n e^{n\pi y/a} - A_n e^{-n\pi y/a} = 2A_n \sinh\frac{n\pi y}{a} \end{aligned}$$

Videre har vi

$$u(x,a) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh(n\pi)$$

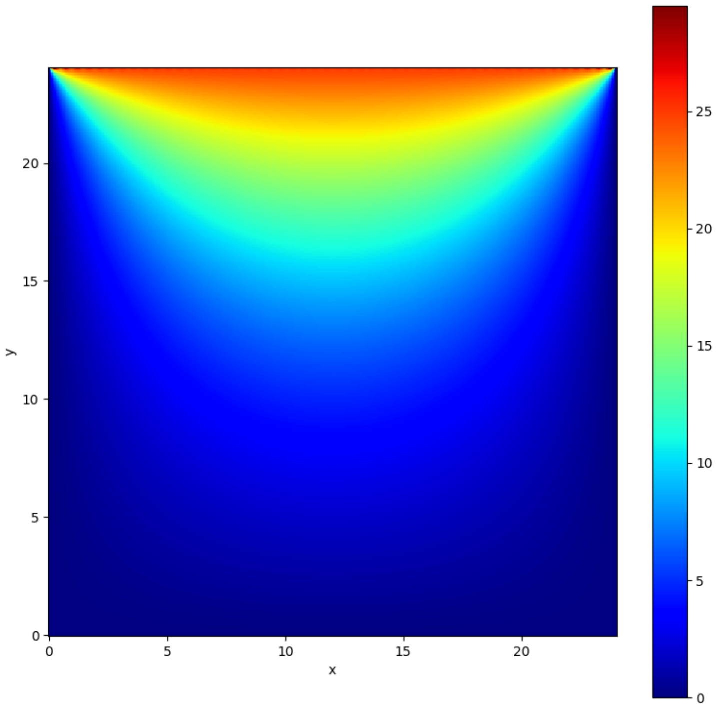
C_n i lag med sinh faktoren, utgjør Fourierkoeffisientene til $f(x)$, som kan løses ved

$$C_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

Med $a = 24$ og $f(x) = 25$, blir den ferdige løsningen

$$u(x,t) = \frac{100}{\pi}\sum_{n=1, n \text{ odde}}^{\infty} \frac{1}{n\sinh(n\pi)}\sin\frac{n\pi x}{24}\sinh\frac{n\pi y}{24}$$

Lager et heatmap i python for å illustrere/verifisere løsningen



12.7

$\boxed{1}$ Bruker Fouriertransformasjon på ligningen:

$$2u_x + 3u_t = 0 \Rightarrow 3\mathcal{F}(u_x) + 2\mathcal{F}(u_t) = 0$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}(u_t) = -\frac{2}{3}wi\hat{u}$$

Kan vise at Fouriertransformasjonen ser over derivasjon med hensyn på tid, og får

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{2}{3}wi\hat{u}$$

Løser denne, som gir

$$u(x,t) = C(w)e^{-\frac{2}{3}iwt}$$

Med $u(x,0) = f(x)$ ser vi at $C(w) = \hat{f}(w)$.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-\frac{2}{3}iwt} e^{iwx} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}iwt} e^{i(wx+wv)} dw dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}iwt} [\cos(wx+wv) + i\sin(wx+wv)] dw dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}iwt} \cos(wx+wv) dw dv
\end{aligned}
$$

Dette kan løses for en gitt $f(x)$, som igjen vil løse differensialligningen for $u(x,t)$.

$\boxed{2}$ Går frem helt tilsvarende forrige oppgave. Til å begynne med finner vi Fouriertransformen til ligningen, og løser denne. Transformasjon gir

$$
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{2}{3} iwt\hat{u} \Rightarrow \hat{u} = \hat{f}(w) e^{-\frac{1}{3}iwt^2}
$$

Bruker samme argumentasjon som i forrige oppgave

$$
u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}iwt^2} \cos(wx+wv) dw dv
$$

$\boxed{3}$ Med samme metode som i de forrige oppgavene, har vi

$$
u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-\frac{1}{2}w^2t^2} e^{iwx} dw
$$

Definerer

$$
\hat{g}(w) = e^{-\frac{1}{2}w^2t^2}
$$

slik at

$$
u(x,t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w) e^{iwx} dw
$$

Ved definisjon av konvolusjon har vi

$$
(f * g)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds
$$

Litt usikker på hvorfor det står $f(x-st)$ i oppgaveteksten, og jeg klarte ikke vise dette, men tar utgangspunkt i konvolusjonen over likevel. Kan med dette avgjøre $g(s)$. Bruker formelen

$$
\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}
$$

Dette passe oss godt dersom $a = 1/(2t^2)$, slik at

$$
\mathcal{F}\left(e^{-x^2/(2t^2)}\right) = te^{-\frac{1}{2}w^2t^2)} = t\hat{g}(w)
$$

Dermed har vi funnet inversen til $\hat{g}(w)$, som er

$$g(x) = \frac{1}{t}e^{-(x/t)^2/2}$$

som gir

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)e^{-(x/t)^2/2}$$