

Labrapport for semesteroppgave i FY1001 Mekanisk fysikk

Jacob Oliver Bruun^a, Sondre Klyve^a

^aInstitutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

Sammendrag

Et objekts bevegelse ned en kvartsirkel kan beskrives ved ulike modeller, blant annet ved neglisjert friksjon, antatt ren rulling, og både rulling og sluring. Ved numerisk tilnærming fra Euler's metode kan slippvinkelen til objektet tilnærmes i alle disse tilfellene. Sett opp mot eksperimentelle og analytiske resultat viser det seg at den numeriske metoden utgjør en god tilnærming i å beskrive objektets bevegelse.

1. Innledning

I denne rapporten brukes et oppsett hvor objekter ruller og/eller glir ned en kvartsirklet bane med ulike underlag og dermed ulik friksjon. Det vil brukes både analytiske og numeriske metoder for å regne ut vinkelen for å så teste dette mot eksperimentelle verdier. Hensikten med forsøket er å teste hvorvidt numeriske og analytiske resultater vil kunne beskrive observasjoner, og det diskuteres om resultatene er gyldige.

2. Teori og metode

Vi ser først på et objekt med masse m som glir ned en friksjonsfri halvkule med starthastighet $v_0 = 0$ og startposisjon på halvkula i en vinkel ϕ . Vi vil da ha summen av kreftene gitt ved Newtons andre lov for translasjon, og ser så kun i radiell retning. Finner dermed ved sentripitalakselerasjonen

$$mg \cos(\theta) - N = ma_r = \frac{mv^2}{R+r}. \quad (1)$$

Fra Figur 1 ser vi at vi har $h_0 = (R+r) \cos(\phi)$, $h_1 = (R+r) \cos(\theta)$, og kan dermed ved å bruke energibevaring se

$$2mg(\cos(\phi) - \cos(\theta)) = \frac{mv^2}{R+r}. \quad (2)$$

Kan så sette inn i likning (1) og se når $N = 0$ siden det er på dette tidspunktet objektet vil slippe taket på banen, og får dermed

$$\theta = \arccos \left[\frac{2}{3} \cos(\phi) \right]. \quad (3)$$

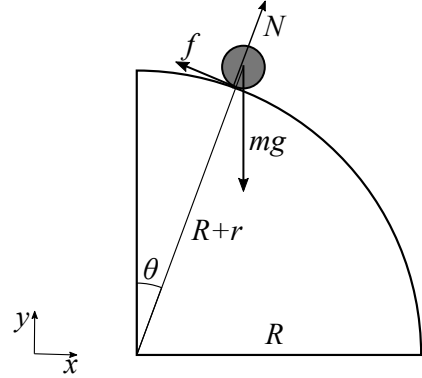
Ser videre på systemet dersom vi også inkluderer friksjon. Vi antar at den statiske friksjonskonstanten μ_s er så stor at friksjonen alltid er statisk og får dermed alltid ren rulling. Vi har fortsatt de samme argumentene som i formel (1), men pga. rulling vil vi ha et annet uttrykk for kinetisk

energi. Bruker $I = cmr^2$ og $\omega^2 = v^2/r^2$, slik at vi ved energibevaring får

$$\frac{2mg}{1+c} [\cos(\phi) - \cos(\theta)] = \frac{mv^2}{R+r}. \quad (4)$$

Setter så inn i likning (1) med $N = 0$ og får

$$\theta = \arccos \left[\frac{2}{3+c} \cos(\phi) \right]. \quad (5)$$



Figur 1: Tegning av rotasjonslegemet med krefter og størrelser

For de numeriske løsningene brukes Eulers metode slik at

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \frac{d\theta(t)}{dt} \Delta t \quad (6)$$

$$\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \frac{d\omega(t)}{dt} \Delta t. \quad (7)$$

Ved ren rulling har vi

$$ma = mg \sin \theta - f \quad (8)$$

og ved

$$\alpha = \frac{\tau}{I} \quad (9)$$

får vi $f = cma$ siden $\tau = rf$ og vi kan dermed ved å sette inn i formel (8) få akselerasjonen som brukes for ren rulling

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{g \sin(\theta)}{1 + c}. \quad (10)$$

Ved sluring vil også formel (8) gjelde. Kan gå fram på en liknende måte, men kan ikke anta $a = \alpha r$ slik som for ren rulling. Må derfor bruke $f = \mu_k N$. Fra likning (1) har vi et uttrykk for N og kan dermed bruke samme framgangsmåte, slik at vi får

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = g \sin(\theta) - \mu_k \left(g \cos(\theta) - \frac{v^2}{R + r} \right). \quad (11)$$

For å eksperimentelt finne vinkelen der objektet slipper banen, filmes bevegelsen, for å så analysere data i “Tracker”. Det brukes forskjellige objekter, i dette tilfellet en kompakt kule, en hul sylinder og en kompakt sylinder, og de slippes uten startfart fra forskjellige startposisjoner. Det brukes et kamera (Panasonic DMC-FZ-200 med serienummer WT6EA006745), og vi valgte å filme med 100 fps (bilder i sekundet). Selv om kameraet kunne ta opp ved 200 fps valgte vi å prioritere bedre lysforhold i bildene fremfor flere bilder. Vurderingen var at dataen ville bli lettere å analysere ved få og gode bilder, fremfor flere potensielt dårligere bilder.

Kan se på usikkerhet i den analytiske metoden ved å bruke Gauss’ feilforplantningslov, og får dermed

$$\Delta\theta = \frac{2 \sin(\phi)}{(c + 3) \sqrt{1 - \frac{4 \cos^2(\phi)}{(c+3)^2}}} \Delta\phi \quad (12)$$

for ren rulling, antatt at treghetsmomentet er uten feilmargin. Dette er dog en liten feil som ikke har spesiell betydning for forsøket. I tillegg er det litt vanskeligere å anslå feilmargin i den numeriske løsningen, så for å få et usikkerhetsintervall antas at alle andre størrelser enn startvinkelen er har neglisjerbare feilmarginer og det testes i ytterpunktene for å finne feilen.

3. Resultat

Vi vil først se på tilfellet der vi ser bort fra friksjon. Dermed vil det kun være translatorisk bevegelse nedover banen. Analytisk løsning for dette finner vi ved å sette aktuell utgangsvinkel inn i likning (3). De numeriske dataene kommer naturligvis fra Euler’s metode, altså fra (6) og (7). Disse resultatene kan finnes sammenliknet i figur 2 og tabell 1.

Tabell 1: Friksjonsløs bane, alle tall er oppgitt i grader (°)

ϕ	Numerisk	Analytisk
1	48.20	48.20
23	52.16	52.14
45	61.89	61.87

Videre gikk vi også eksperimentelt til verks, og gjorde en rekke målinger av utstyret vi brukte. Disse målingene brukes videre i både analytiske og numeriske utregninger. I tabell 2 er en oversikt over relevante måledata.

Størrelse	Måling	Rel. usikkerhet
m_{Kule}	$(168 \pm 1) \text{ g}$	0.6%
r_{Kule}	$(2 \pm 0.5) \text{ cm}$	25%
$m_{\text{H. syl}}$	$(253 \pm 1) \text{ g}$	0.4%
$r_{\text{H. syl}}$	$(4.22 \pm 0.05) \text{ cm}$	1.2%
$m_{\text{K. syl}}$	$(896 \pm 1) \text{ g}$	0.1%
$r_{\text{K. syl}}$	$(3.99 \pm 0.05) \text{ cm}$	1.3%
R	$(50 \pm 0.5) \text{ cm}$	1%
ϕ	$\pm 3^\circ$	

Tabell 2: Målinger fra eksperimentet

Fra dette utførte vi eksperiment med ulike objekter, der målet var å oppnå ren rulling under hele bevegelsen. Dette undersøkes for både kule og kompakt sylinder, og med ulike utgangsvinkler. Tabell 3 viser de målte verdiene, så vel som numeriske og analytiske resultat av samme situasjon.

Tabell 3: Data for ren rulling, alle tall er oppgitt i grader (°)

ϕ	Eksp.	Numerisk	Analytisk
Kule			
1	44 ± 5	54 ± 0.1	53.97 ± 0.04
23	60 ± 5	57 ± 1	57.2 ± 0.8
45	66 ± 5	66 ± 2	64.4 ± 1.3
Sylinder			
2	49 ± 5	55.2 ± 0.1	55.17 ± 0.07
23	58 ± 5	58 ± 1	58.3 ± 0.8
44	64 ± 5	66 ± 2	65.7 ± 1.3

Tabell 4: Data for sluring ved aluminium mot stål. Bruker da $\mu_s = 0.5$ og $\mu_k = 0.45$ [1]. Alle tall er oppgitt i grader (°)

ϕ	Eksp.	Numerisk
Hul sylinder		
1	56 ± 5	55.45 ± 0.05
21	60 ± 5	56.5 ± 0.7
43	63 ± 5	64 ± 2
Sylinder		
1	56 ± 5	53.4 ± 0.1
23	58 ± 5	56.4 ± 0.8
43	64 ± 5	63 ± 2

Til slutt ble det forsøkt å få objektet til å gå over til sluring underveis i bevegelsen. Altså ville vi ha ren rulling frem til et punkt der farten tvingte frem sluring. Eksperimentelt brukte vi da baner med glatt overflate for minimert friksjon, slik at objektet skulle gå over til sluring

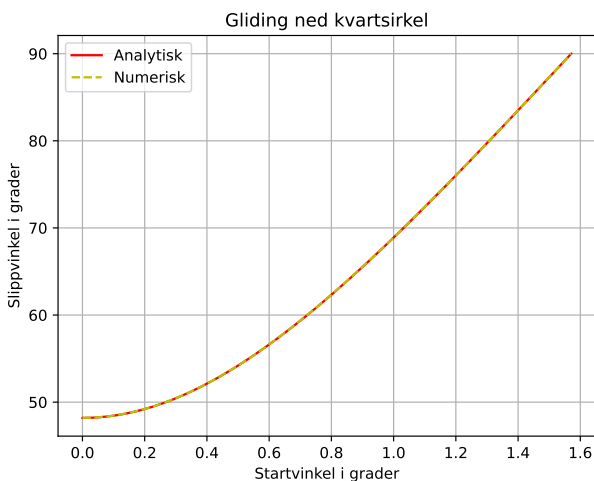
etter hvert. I denne situasjonen har vi ikke analytiske resultater, men fremdeles observerte og numeriske målinger, sett i tabell 4 og 5.

Tabell 5: Data for sluring ved aluminium mot teip. Antatt friksjonskoeffisient som står på stål med smurte overflater, og bruker da $\mu_s = 0.1$ og $\mu_k = 0.08$ [1]. Alle tall er oppgitt i grader (°)

ϕ	Eksp.	Numerisk
Hul sylinder		
0	47 ± 5	50.3 ± 0.1
22	58 ± 5	53 ± 1
43	69 ± 5	61 ± 2
Sylinder		
1	64 ± 5	50.2 ± 0.1
22	68 ± 5	53 ± 1
42	68 ± 5	61 ± 2

4. Diskusjon

Ved antatt friksjonsfri bane er utregningen kun avhengig av utgangsvinkelen til objektet. Det betyr at formen på objektet heller ikke har noe å si. Dette er fordi vi ved null friksjon vil ha ren translatorisk bevegelse, slik at ingen rulling kan fremkomme. Resultatet blir at vi kan se helt bort i fra treghetsmomentet til det relevante objektet. Grunnet lite avhengighet i utregningene er det også rimelig å anta gode tilnærminger numerisk, noe vi fra tabell 1 ser at vi får. Med presisjonen vi har brukt i Euler's metode har vi kommet meget nærme de analytiske verdiene, noe som også er reflektert i figur 2. Merk at alle disse antagelsene gjør modellen for bevegelsen svært virkelighetsfjern.



Figur 2: Graf med analytisk og numerisk unnslipsvinkel til sammenlikning ved friksjonsløst underlag.

Fra tabell 3 ser vi resultatene fra forsøket ved ren rulling. I eksperimentet brukte vi en bane med overflate i filt,

slik at friksjonen skulle være størst mulig. Ved stor friksjon vil objektet oppnå ren rulling gjennom hele bevegelsen. Tilsvarende som ved null friksjon stemmer de numeriske og analytiske verdiene ganske godt, og danner et grunnlag for hva vi kunne forvente oss fra observerte målinger. Som vi kan se, er ikke de observerte målingene like fint i tråd med resten av målingene, men følger i det minste en tilsvarende trend. Dette skyldes nok heller feilmargin i observasjon enn feil i numerisk eller analytisk løsning.

Ved å bruke en baneoverflate dekket av teip og en bane i stål kan en håpe på å oppnå at objektet vil rulle rent først, og etter hvert, ved en tilstrekkelig fart, gå over i sluring. Fra tabell 4 og tabell 5 har vi målinger gjort eksperimentelt, samt en numerisk estimasjon av forsøket. I dette tilfellet har vi altså ikke noen analytisk løsning på problemet. Kun sylindere ble tatt i betraktning, og kan i resultatet se at store deler av observasjonene ikke stemmer helt overens med den numeriske løsningen. Dette har nok mye å gjøre med at det var vanskelig å avgjøre den nøyaktige vinkelen sylindere slipper banen ved videoanalyse. Det fører til en stor feilmargin som kan forklare spriket i dataen.

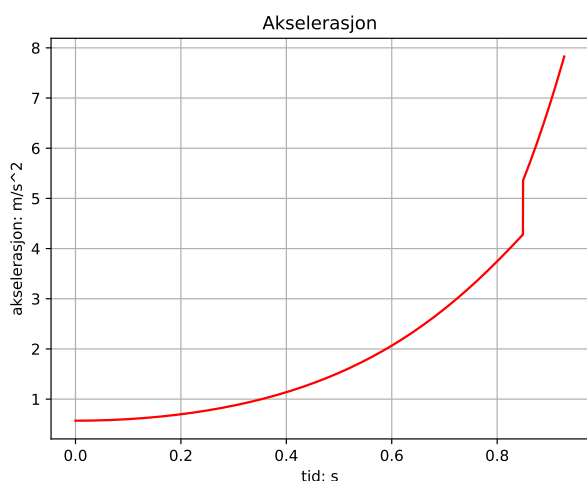
Dersom en ser på sluring med forskjellige overflater, se tabell 4 og tabell 5, så kan en se at ifølge de numeriske dataene og resonnementen som ble gitt tidligere burde objektene slippe taket til banen senere når friksjonskoeffisienten er større. Dette gjenspeiles kun i to av resultatene i disse tabellene. Dette kan komme av den store feilmarginen som vises i den eksperimentelle målingen av unnslipsvinkel, men likevel ser en at det så vidt er overlapp i det estimerte intervallet i en kompakt sylinder som blir sluppet ved ca. 22°. Dette viser også at det finnes store feil i den eksperimentelle dataen, da det i teorien skal være mer slik som numerikken viser. En annen feilkilde i dette tilfellet kan være friksjonskoeffisientene, og at teip mot aluminium har større friksjonskoeffisient enn smurt stål mot stål, men som en ser senere så finnes det ingen μ_s, μ_k som oppfyller den eksperimentelle dataen i tabell 5.

En fellesnemner i måldataene våre er at de observerte målingene tenderer til å avvike fra de analytiske og numeriske estimatene. Dette skyldes i hovedsak vanskelighet rundt å avgjøre nøyaktig når objektet slipper banen. I tilfellet med kulen vil det være spesielt utfordrende, da kulen er senket i sporet på banen. Utover det gjorde vi et valg i vinklingen av kameraet der vi ville filme mest mulig rett på. Det førte til gode målinger undervegs, men gjorde det altså vanskelig å avgjøre slippvinkelen nøyaktig. En annen faktor som spiller inn, og som spesielt målingene i tabell 4 og 5 bærer preg av, er uklarhet i bildet ved høy hastighet på objektet. Som tidligere diskutert spør det om høyere bildefrekvens i videoen ville vært til nytte i dette tilfellet. Antagelig ville det spilt en liten rolle i den allerede betydelige usikkerheten rundt observerte målinger. Det en kan trekke ut av dette er at kodens kredibilitet ikke nødvendigvis burde bli svekket grunnet sprik i data, men at dette heller skyldes unøyaktige observasjoner fra eksperimentet.

Fra tabell 2 ser vi at radiusen til kula har en voldsom

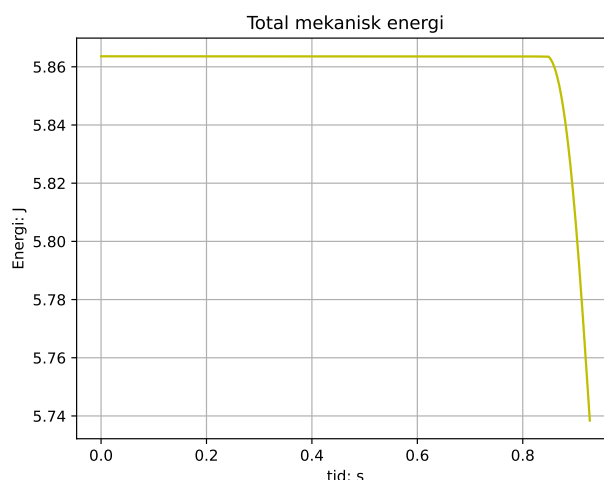
feilmargin. Dette skyldes utformingen av banen, som dannet et spor kula lå i. Siden kula var senket i dette sporet vil ikke den målte radiusen av kula stemme overens med resten av våre antagelser. Dette er forsøkt korrigert ved å anta at kula senket i sporet utgjør en bevegelse tilsvarende den av en mindre kule som ligger fullstendig på banen, altså en kule som ikke faller ned i noe spor. Dette forklarer hvorfor den relative usikkerheten til kulas radius er så stor.

En interessant observasjon en kan gjøre ved å analysere data fra den numeriske løsningen, er at akselerasjonen har et hopp, som vist i Figur 3. Dette skjer når objektet går over fra ren rulling til sluring. Selv om dette ser veldig unaturlig ut, kan det forklares ved at akselerasjonen går fra å være avhengig av den statiske friksjonskoeffisienten, μ_s , til å være avhengig av den kinetiske friksjonskoeffisienten, μ_k . Siden $\mu_s > \mu_k$ vil friksjonskraften plutselig bli mindre fordi den går fra $f \leq \mu_s N$ til $f = \mu_k N$. Det er kun akselerasjonen som oppfører seg slikt, farten kan få et knekkpunkt i dette punktet, men vil ikke hoppe slik som akselerasjonen.



Figur 3: Akselerasjon i for en kompakt sylinder med $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.25$

Et resultat av måten vi har skrevet koden, er at resultatet for slippvinkelen alltid vil falle i et gitt intervall; nemlig mellom ingen friksjon og ren rulling. Ved null friksjon vil det ikke vere noen kraft som virker mot den translatoriske bevegelsen. Dermed vil akselerasjonen være på sitt største, og objektet vil slippe banen tidlig. Motsatt vil ren rulling gjøre all friksjon om til rulling, som bremser den translatoriske akselerasjonen, og gjør at objektet slipper senere. Siden noen av observasjonene våre faller utenfor dette intervallet, vil ikke koden kunne treffe den eksperimentelle dataen. Dette er spesielt aktuelt i oppgave 3, der vi ser på en blanding mellom rulling og sluring.



Figur 4: Mekanisk energi for kompakt sylinder med $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.25$, $m = 1$ kg

I figur 4 kan vi se at den mekaniske energien i systemet er bevart fram til objektet begynner å slure. Siden bevegelsen fram til dette punktet består av ren rulling, vil det kun være konservative krefter som virker, og den mekaniske energien skal dermed være bevart [2]. Vi kan dermed konkludere med at resultatet fra koden stemmer godt overens med det man skulle anta teoretisk sett. Likevel vil en oppdage at dersom en zoomer inn mye på den mekaniske energien vil en se at det ikke er en rett linje, men at den veldig sakte bøyer seg ned. Dette kommer sannsynligvis av at Eulers metode blir brukt, både for å finne hastigheten til objektet og for å finne vinkelhastigheten i legemet under sluring. Kan se at forskjellene er så små at selv ved bruk av liten Δt vil det være en liten feil, men denne er så ubetydelig at en kan se bort fra den.

5. Konklusjon

Vi har sett at en numerisk tilnærming av forsøket ved Euler's metode gir veldig gode resultat sett opp mot analytiske løsninger på problemet. Videre har vi sett at der det ikke er utarbeidet noen analytisk løsning, har den eksperimentelle og numeriske løsningen hatt noe avvik, men fremdeles fulgt en lignende utvikling med hensyn på friksjon og utgangsvinkel. Eventuelle avvik mellom numeriske og observerte målinger ser ut til å i stor grad skyldes unøyaktighet i målingene. Basert på alle situasjoner vi da har tatt for oss i rapporten, kan vi konkludere med at den numeriske løsningen gir en god beskrivelse av forsøket.

Referanser

- [1] J. Haugan og E. Aamot. *Gyldendals tabeller og formler i fysikk*. Gyldendal Norsk Forlag AS, 2. utgave, 2011.
- [2] J. R. Lien og G. Løvholden. *Generell fysikk for universiteter og høyskoler*, bind 1. Universitetsforlaget, 3. opplag, 2010.