NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TIØ4120 - Operasjonsanalyse, grunnkurs

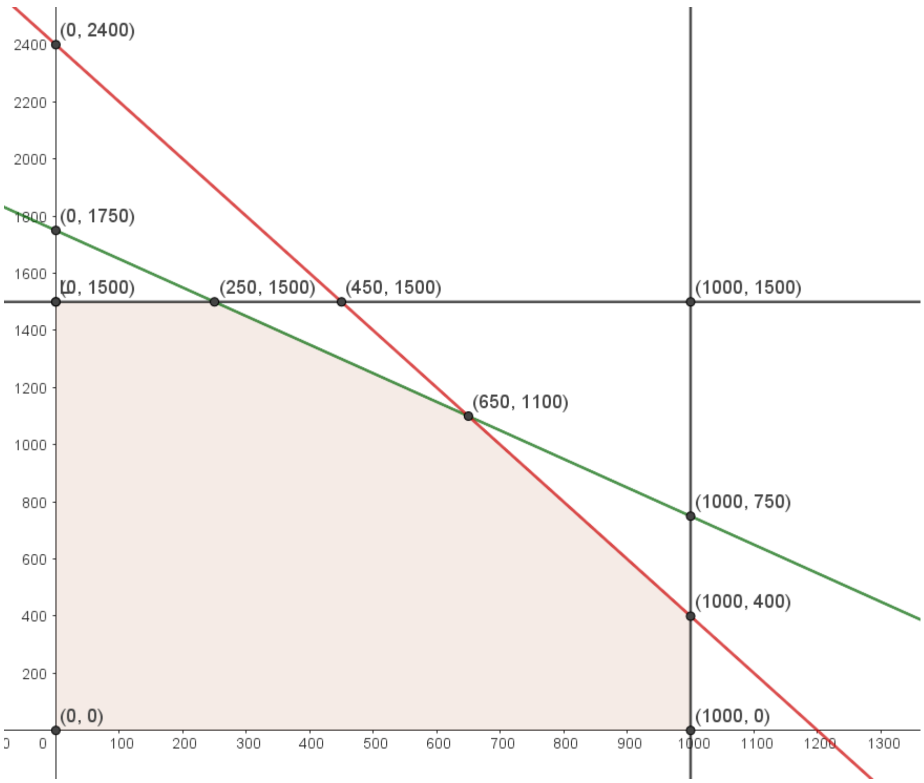
Exercise #2

Author:
Sondre Pedersen

September 8, 2024

Oppgave 1

a)



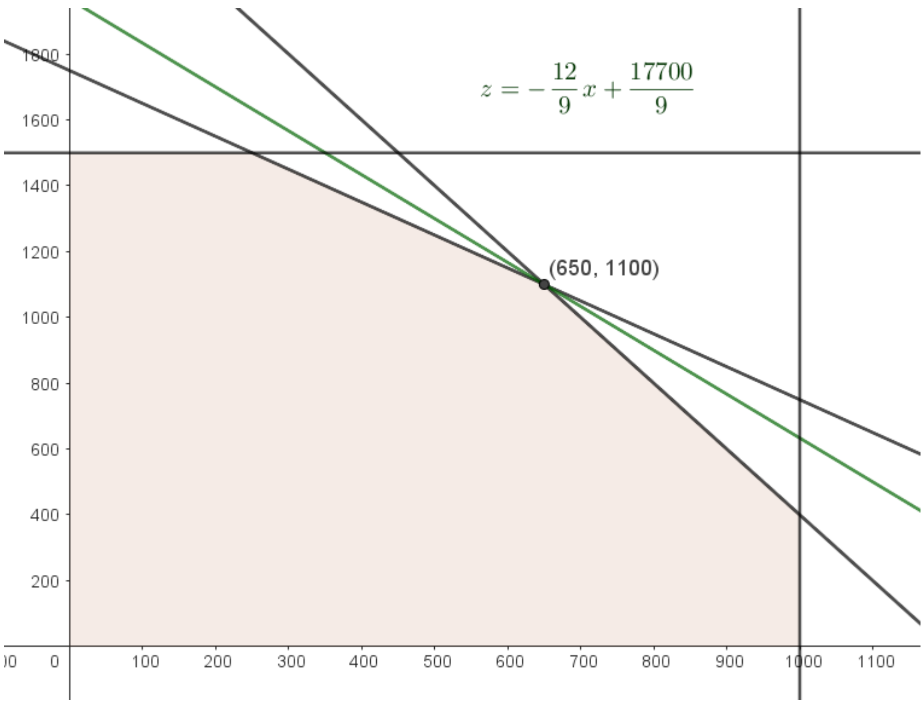
Her er alle hjørnepunktene som omfavner det beige området en lovlig løsning. (0, 0), (0, 1500), (250, 1500), (650, 1100), (1000, 400), (1000, 0).

b)

x_1	x_2	$12x_1 + 9x_2$
0	0	0
0	1500	13500
250	1500	16500
650	1100	17700
1000	400	15600
1000	0	12000

Vi vet at dersom en optimal løsning finnes, er denne løsningen et av hjørnepunktene. Siden $x_1 = 650$ $x_2 = 1100$ er den beste løsningen blant alle lovlige hjørnepunkt, følger det at det er den beste løsningen på problemet. Målfunksjonsverdien blir da 17700. De bindende restriksjonene er $4x_1 + 2x_2 <= 4800$ (blå) og $x_1 + x_2 <= 1750$ (rød).

c)

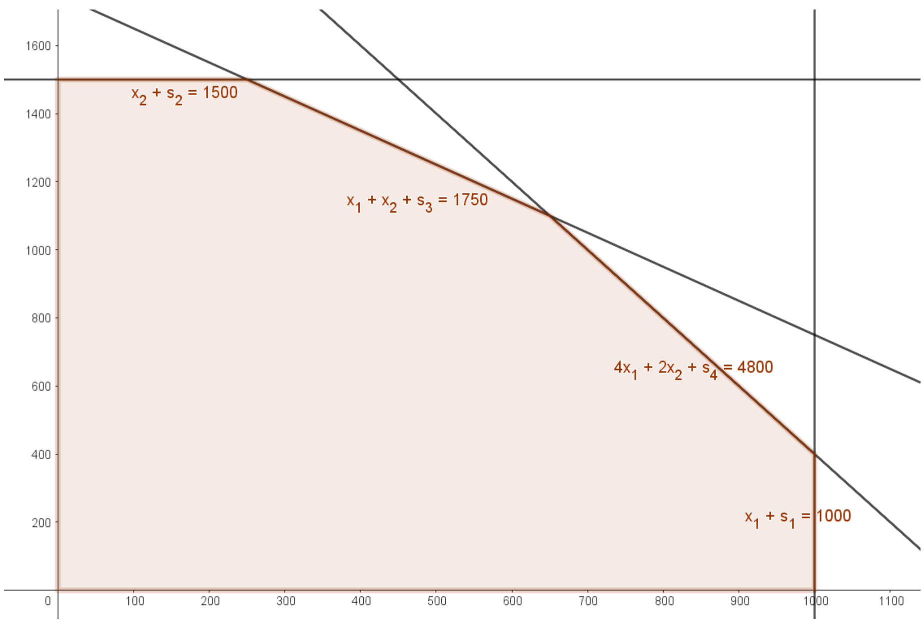


Målfunksjon gjennom optimal verdi

Simplex-metoden vil følge denne stien: (0, 0) – (1000, 0) – (1000, 400) – (650, 1100). Den baserer seg på hvilken retning som gir raskest økning i z per enhet. Den vil stoppe i (650, 1100), ettersom ingen nabo øker målfunksjonsverdien.

d)

$$
\begin{aligned}
x_1 + s_1 &= 1000 \\
x_2 + s_2 &= 1500 \\
x_1 + x_2 + s_3 &= 1750 \\
4x_1 + 2x_2 + s_4 &= 4800 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &>= 0
\end{aligned}
$$



Graf i a) der restriksjoner uttrykkes ved slakkvariablene.

e)

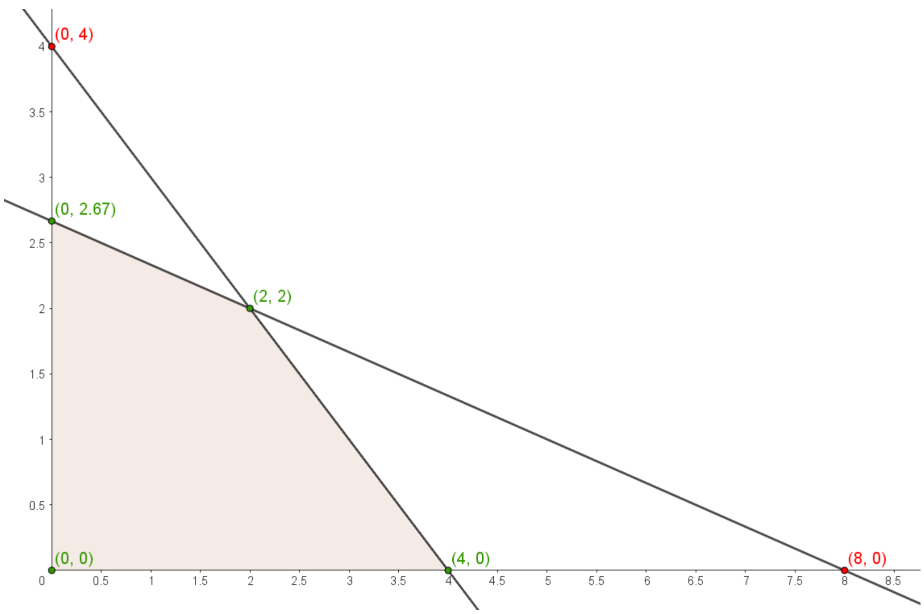
x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	0	1000	1500	1750	4800
0	1500	1000	0	250	1800
250	1500	750	0	0	800
650	1100	350	400	0	0
1000	400	0	1100	350	0
1000	0	0	1500	750	800

Tabellen viser basisløsningen for alle lovlige verdier.

Restriksjon (2) og (4) møtes i punkt (450, 1500). Her blir basisløsningen 450, 1500, 550, 0, -200, 0.
Vi kan se at denne løsningen ikke er gyldig siden en av slakkvariablene er negativ. Dette er det samme som å bruke for mye av en ressurs.
f)
s_3 og s_4 er ved nedre grense i optimal løsning. x_1, x_2, s_1, s_2 er da basis.

Oppgave 2

a)



Alle hjørnepunktløsninger er markert. Tillatte er grønne, mens ikke-tillatte er røde.
b)

x_1	x_2	z = $x_1 + 2x_2$
0	0	0
0	8/3	16/3
2	2	6
4	0	4

Vi ser at $x_1 = 2, x_2 = 2$ gir optimal løsning.
c)
Sekvensen som brukes av Simplex metoden er (0, 0) – (0, 8/3) – (2, 2). Her antar vi at iterasjonen starter i (0, 0).

d)

$$z - x_1 - 2x_2 = 0 \quad (1)$$
$$x_1 + 3x_2 + s_1 = 8 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 + s_2 = 4 \quad (3)$$

e)

Løsning index	x_1	x_2	s_1	s_2	Basis	Ikke-basis	z
1	0	0	8	4	s_1, s_2	x_1, x_2	0
2	0	8/3	0	4/3	x_2, s_2	x_1, s_1	16/3
3	2	2	0	0	x_1, x_2	s_1, s_2	6
4	4	0	4	0	x_1, s_1	x_2, s_2	4

f)
Demonstrerer at basisløsningen oppfyller likningssystemet ved å sette inn verdiene i likning (1), (2), (3)

Løsning 1
(1): 0 - 0 - 2 × 0 = 0
(2): 0 + 3 × 0 + 8 = 8
(3): 0 + 0 + 4 = 4

Løsning 2
(1): 16/3 - 0 - 2 × 8/3 = 0
(2): 0 + 3 × 8/3 + 0 = 8
(3): 0 + 8/3 + 4/3 = 4

Løsning 3
(1): 6 - 2 - 2 × 2 = 0
(2): 2 + 3 × 2 + 0 = 8
(3): 2 + 2 + 0 = 4

Løsning 4
(1): 4 - 4 - 2 × 0 = 0
(2): 4 + 3 × 0 + 4 = 8
(3): 4 + 0 + 0 = 4

Siden alle uttrykkene er gyldige, vet vi at basis-løsningen er en løsning på likningssystemet.

g)

Løsning index	x_1	x_2	s_1	s_2	Basis	Ikke-basis	z
5	0	4	-4	0	s_1, x_2	x_1, s_2	8
6	8	0	0	-4	x_1, s_2	x_2, s_1	8

h)

Løsning 5
(1): 8 - 0 - 2 × 4 = 0
(2): 0 + 3 × 4 + -4 = 8
(3): 0 + 4 + 0 = 4

Løsning 6
(1): 8 - 8 - 2 × 0 = 0
(2): 8 + 3 × 0 + 0 = 8
(3): 8 + 0 + -4 = 4

i)
For å systematisere den algebraiske metoden har jeg gjort noen endringer fra det som ble gjennomgått i video. Jeg fører opp hele problemet (på utvidet form) i en matrise, men utfører bare Gauss-Jordan på kolonnene som er i basis (hvite). Kolonnene som ikke er i basis (grå) "henger bare med", slik at de kan brukes i neste iterasjon. Kolonnene representerer koeffisientene til z, x_1, x_2, s_1, s_2 og konstanten i likning (1), (2), (3).

Starter med x_1, x_2 som ikke-basis.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Løsningen er ikke optimal, fordi en økning i disse vil øke z. Tar x_2 inn i basis fordi koeffisienten er større for x_2 enn for x_1. Tar s_1 ut av basis fordi $\frac{8}{3} < \frac{4}{1}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

Forklaring:
Steg 1: (ii) = (ii) / 3
Steg 2: (i) = (i) + 2(ii), (iii) = (iii) - (ii)

Løsningen er ikke optimal, fordi A_{12} er negativ. Tar dermed x_1 inn i basis. Tar s_2 ut av basis, ettersom $\frac{4/3}{2/3} < \frac{8/3}{1/3}$.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 1/2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{array}\right]$$

Forklaring:
Steg 1: (iii) = 3(iii) / 2, bytter plass (ii) og (iii)

Steg 2: (i) = (i) + (ii) / 2, (iii) = (iii) - (ii) / 2

Denne løsningen er optimal. Både A_{14} og A_{15} er positive. Kan lese av resultatet: z = 6, $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (2, 2, 0, 0)$.

j)

Jeg oppdager nå at simplex-metoden i tabellform er *veldig* lik min variant av den algebraiske formen. Jeg ser derfor ikke hensikten med å gjøre oppgaven på nytt, spesielt ved tanke på at det tar fryktelig lang tid å føre inn i Latex. Jeg får heller bruke tabellformen en annen gang.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right]$$