Euler problem 12

于船长

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟

本期内容

一．题目描述

二．约数个数定理

三．题目讲解

四．代码演示

一. 题目描述

一. 题目描述

题目描述

The sequence of triangle numbers is generated by adding the natural numbers. So the 7^{th} triangle number would be 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28. The first ten terms would be:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Let us list the factors of the first seven triangle numbers:

1: 1
3: 1,3
6: 1,2,3,6
10: 1,2,5,10
15: 1,3,5,15
21: 1,3,7,21
28: 1,2,4,7,14,28

We can see that 28 is the first triangle number to have over five divisors.

What is the value of the first triangle number to have over five hundred divisors?

一. 题目描述

题目描述

三角形数是通过累加自然数所得到的数。例如，第7个三角形数是1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28。前十个三角形数分别是：

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

列举出前七个三角形数的所有约数：

1: 1
3: 1,3
6: 1,2,3,6
10: 1,2,5,10
15: 1,3,5,15
21: 1,3,7,21
28: 1,2,4,7,14,28

可以看出，28 是第一个约数数量超过五的三角形数。

第一个约数数量超过五百的三角形数是多少？

二. 约数个数定理

二. 约数个数定理

数字N的约数个数

- 任一正整数 N 分解质因数，均可表示为如下形式：

$$N = \prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i} = {p_1}^{a_1} * {p_2}^{a_2} * \dots * {p_n}^{a_n}$$

其中，p_i是 N 中第 i 个素因子，a_i是其幂次

例如：72 = $2^3 * 3^2$

二. 约数个数定理

约数个数定理

- 任一正整数 N 分解质因数，均可表示为如下形式：

$$N = \prod_{i=1}^{n} {p_i}^{a_i} = {p_1}^{a_1} * {p_2}^{a_2} * \ldots * {p_n}^{a_n}$$

则其约数个数 F(N) 为：

$$\mathrm{F}(N) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + 1)$$

二. 约数个数定理

课间练习

练习题：

1. 72有几个约数？
2. 7有几个约数？
3. 24有几个约数？
4. 若 A、B 互素，且 C=A*B，则 C 中有多少个约数？

二. 约数个数定理

课间练习

练习题：

1. 72=2*2*2*3*3，所以72有 (3+1)*(2+1)=12 个约数
2. 7=7，所以7有 (1+1)=2 个约数
3. 24=2*2*2*3，所以24有 (3+1)*(1+1)=8 个约数
4. 设F(A)为 A 中约数个数，则 F(C)=F(A)*F(B)

三. 题目讲解

三. 题目讲解

题目讲解

观察 Triangle Number 的通项公式：

$$f(n) = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

其中易得 gcd(n, n + 1) = 1，也就是说 n 和(n+1)互质，且为一奇一偶

当 n 为偶数时，$F[f(n)] = F\left(\frac{n}{2}\right) \times F(n+1)$

当 (n+1) 为偶数时， $F[f(n)] = F(n) \times F(\frac{n+1}{2})$

三. 题目讲解

题目讲解

综上所述：

通过记录已经求得的 F(n) 的值

就可以快速求得第 n 个 Triangle Number 约数的个数

四. 代码演示

四. 代码演示