

# Euler problem 07

于船长

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟

# 本期内容

- 一. 题目讲解
- 二. 代码演示
- 三. 素数筛算法
- 四. 线性筛算法

# 一. 题目讲解

# 一. 题目讲解

10001st prime

By listing the first six prime numbers: 2, 3, 5, 7, 11, and 13, we can see that the 6th prime is 13.

What is the 10 001st prime number?

---

-----

第10001个质数

前6个质数分别是2、3、5、7、11、和13。

第10001个质数是多少？

# 一. 题目讲解

思考如下问题：

- 1、已知，题目中求第 10001 个素数
- 2、通过估算，第 10001 个素数的大小不会超过 20 万
- 3、如果通过枚举 2--20 万以内的所有数字，并且判断其是不是素数，这个算法的复杂度将是  $O(n * \sqrt{n})$
- 4、请先自行编程实现到目前为止你能想到的**运行速度最快**的方法

## 二. 代码演示

## 二. 代码演示

### 三. 素数筛算法



# 三. 素数筛算法

## 素数筛

- 1、标记一个范围内的数字是否是合数，没有被标记的则为素数
- 2、算法的空间复杂度为  $O(N)$ ，时间复杂度为  $O(N * \log\log N)$
- 3、总体思想是用素数去标记掉不是素数的数字，例如我知道了  $i$  是素数，那么  $2*i$ 、 $3*i$ 、 $4*i$ ……就都不是素数

# 三. 素数筛算法

## 素数筛

- 1、用 `prime[i]` 来标记 `i` 是否是合数
- 2、标记为1的数字为合数，否则为素数
- 3、第一次知道2是素数，则将2的倍数标记为1
- 4、向后找到第一个没有被标记的数字 `i`
- 5、将 `i` 的倍数全部标记为合数
- 6、重复4--6步，直到标记完范围内的所有数字

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Prime numbers
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	

# 三. 素数筛算法

## 素数筛代码

```
#include <stdio.h>
#define MAX_N 200000

int prime[MAX_N + 5] = {0};
void init_prime() {
    for (int i = 2; i <= MAX_N; i++) {
        if (prime[i]) continue;
        prime[++prime[0]] = i; //精髓
        for (int j = 2; j <= MAX_N / i; j++) {
            prime[i * j] = 1;
        }
    }
    return ;
}
```

# 三. 素数筛算法

## 素数筛-练习题

- 1、请写一个程序，快速求出一个范围内（假设为10000）所有数字的最小素因子
- 2、请写一个程序，快速求出一个范围内（假设为10000）所有数字的最大素因子

# 四. 线性筛算法

## 素数筛-思考

- 1、6被标记了几次？
- 2、30被标记了几次？
- 3、如果一个数字 $N$ 的素数分解式中含有 $m$ 种不同的素数， $N$ 被标记了几次？
- 4、有没有一种方法使得范围内的每个数字，仅被标记1次

# 四. 线性筛算法

## 素数筛-思考

- 1、6被标记了几次？
- 2、30被标记了几次？
- 3、如果一个数字 $N$ 的素数分解式中含有 $m$ 种不同的素数， $N$ 被标记了几次？
- 4、有没有一种方法使得范围内的每个数字，仅被标记1次

## 四. 线性筛算法

### 素数筛-思考答案

- 1、2次，2标记一次，3标记一次
- 2、3次，2、3、5各标记一次
- 3、m 次
- 4、有，他的名字叫做 **【线性筛】**

# 四. 线性筛算法

## 线性筛

- 1、标记一个范围内的数字是否是合数，没有被标记的则为素数
- 2、算法的空间复杂度为  $O(N)$ ，时间复杂度为  $O(N)$
- 3、总体思想是用一个整数  $M$  去标记合数  $N$ ，其中  $N$  和  $M$  具有如下性质
  - 1)  $N$  中最小的素数为  $p$
  - 2)  $N$  可以表示成为  $p * M$
  - 3)  $p$  一定小于等于  $M$  中最小的素因子
  - 4) 利用  $M * P'$  (所有不大于  $M$  中最小素数的集合) 标记  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3 \dots$



# 四. 线性筛算法

## 线性筛-练习

- 1、若  $N=30$ ，则算法中的  $M$ 、 $p$  各为多少？
- 2、若  $N=8$ ，则算法中的  $M$ 、 $p$  各为多少？
- 3、若  $N=45$ ，则算法中的  $M$ 、 $p$  各为多少？
- 4、若  $M=4$ ，可以标记的  $N$  都有哪些？
- 5、若  $M=25$ ，可以标记的  $N$  都有哪些？
- 6、若  $M=45$ ，可以标记的  $N$  都有哪些？
- 7、能标记90的  $M$  等于多少？

## 四. 线性筛算法

### 线性筛-练习答案

- 1、若  $N=30$ ，则算法中的  $M=15$ 、 $p=2$
- 2、若  $N=8$ ，则算法中的  $M=4$ 、 $p=2$
- 3、若  $N=45$ ，则算法中的  $M=15$ 、 $p=3$
- 4、若  $M=4$ ，可以标记的  $N$  只有8
- 5、若  $M=25$ ，可以标记的  $N$  有50、75、125
- 6、若  $M=45$ ，可以标记的  $N$  有90、135
- 7、能标记90的  $M=45$

## 四. 线性筛算法

### 线性筛代码

```
#include <stdio.h>
#define MAX_N 200000
//N = M * p1
int prime[MAX_N + 5] = {0};
void init_prime() {
    for (int i = 2; i <= MAX_N; i++) {
        if (!prime[i]) prime[++prime[0]] = i;
        for (int j = 1; j <= prime[0]; j++) {
            if (prime[j] * i > MAX_N) break;
            prime[prime[j] * i] = 1;
            if (i % prime[j] == 0) break;
        }
    }
    return ;
}
```