

abc416_e Development 题解

题目大意

有一个国家共有 N 座城市，一开始有 M 条道路和 K 个机场。

第 i 条道路连接 A_i, B_i 两座城市，道路是双向的，通行需要花费 C_i 个小时。

机场会建在城市的内部，只要两座城市都有机场，那么就可以花费固定的1小时在这两座城市之间通过飞机进行通行。

有 Q 个操作，按顺序进行，共三种类型：

- 1 x y t：表示 x, y 两座城市之间要新建一条双向道路，通行时间为 t 小时。
- 2 d：表示 d 这座城市要建机场
- 3：询问目前任意两座城市之间的最短通行时间的总和，如果无法到达则以 0 替代。

解题思路

本题的解题关键在于 $N \leq 500, Q \leq 1000$

如果不带修改操作，仅处理全源最短路，直接采取 Floyd 算法即可。在建图过程中需要注意以下几点：

- 由于有机场的城市之间的通行时间固定为 T ，直接做最短路不大好处理，不如可以建立一个虚点 0，然后我们假设任意两座城市之间如果使用飞机进行通行，会先花 T 小时的时间来到虚点 0 的位置，然后再花 0 小时的时间前往目的地，两趟时间总和恰好为 $T + 0 = T$ 。这样我们就可以跑共 $N + 1$ 个点的全源最短路了。

然后我们考虑建图动态建图，也就是本题的 1、2 两种类型的操作。根据上面的建图方法，可以发现这两种操作无非都是往图中再新增两条边（因为我的上述操作，这个图其实已经是无向图了）。

假设现在新增的这条边是连接 a, b 两个点，距离(时间)为 c ，那么对于整张图的任意两点 i, j 其最短距离 $f_{i,j}$ 与新增的这条边的关系可以是以下三种：

- 与新边无关，即 $f_{i,j}$ 不变
- 与新边有关，也就是 $i \rightarrow j$ 的最短路需要经过 $a \rightarrow b$ 这条边，继续分为两种情况讨论：
 - 以 $a \rightarrow b$ 方向经过这条边，全程走法为 $i \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow j$ ，总距离为 $f_{i,a} + f_{a,b} + f_{b,j}$
 - 以 $b \rightarrow a$ 方向经过这条边，全程走法为 $i \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow j$ ，总距离为 $f_{i,b} + f_{b,a} + f_{a,j}$

只需要在以上三种情况中取最小值当作最新的最短路长度即可时间复杂度 $O(N^3 + Q \cdot N^2)$ 。