

abc403_f Shortest One Formula 题解

题目描述

由若干个各位均为 1 的整数， $+$ ， $*$ 和小括号 $($ 和 $)$ 组成一个算式，使得算式的结果为 n 。

求：结果为 n 的最短算式。

解题思路

考虑构造结果是 n 。

如果 n 各位均为 1，那么 n 本身就是答案。

不然的话，考虑最后一次运算是 $+$ 还是 $*$ 。

如果最后一次是加法操作，则两个加数对应的算式不需要加括号。

如果最后一次是乘法操作，即 $A*B$ 的格式，则需要考虑 A 和 B 最后一次的操作是加法还是乘法：

1. A 最后一次操作是 $+$ ， B 最后一次操作是 $+$ ：此时 A 和 B 都得套括号，形如 $(A)*(B)$
2. A 最后一次操作是 $+$ ， B 最后一次操作是 $*$ ：此时仅 A 需要套括号，形如 $(A)*B$
3. A 最后一次操作是 $*$ ， B 最后一次操作是 $+$ ：此时仅 B 需要套括号，形如 $A*(B)$
4. A 最后一次操作是 $*$ ， B 最后一次操作是 $*$ ：此时 A 和 B 都不用套括号，形如 $A*B$

定义状态 $f_{a,x}$ ，其中 $x = 0$ 或 1 ：

- 当 $x = 0$ 时， $f_{a,0}$ 表示最后一次运算是 $+$ 时结果为 n 的算式的最短长度；
- 当 $x = 1$ 时， $f_{a,1}$ 表示最后一次运算是 $*$ 时结果为 n 的算式的最短长度。

特殊地，当 a 本身各位均为 1 时， $f_{a,x}$ 的值就是 a 的位数。

在求解 $f_{a,x}$ 的时候维护一个字符串的状态 $s_{a,x}$ ，它记录算式。

最终，

- 若 $f_{n,0} \leq f_{n,1}$ ，则输出 $s_{n,0}$ ；
- 否则，输出 $s_{n,1}$ 。