

递推

汪船长

初航我带你，远航靠自己

《船说：算法竞赛通关班》
递推

递推的定义

递推算法是一种基于已知条件，通过重复应用相同的规则或公式来逐步计算出后续结果的算法策略。它就像是沿着一条路径，一步一步地根据前面的脚印（已知的信息）来找到下一个位置（新的结果）。例如，在数学中，数列的递推公式就是递推算法的一种体现。给定数列的初始值（如数列的第一项或前几项）和一个递推关系（如从第 $n - 1$ 项推出第 n 项的公式），就可以通过不断地运用这个递推关系来求出数列的后续各项。

递推的基本原理

递推算法的核心是递推关系。它是从一个或多个初始状态出发，按照一定的规律，用前面的结果来计算后面的结果。

- 例如，斐波那契数列是一个经典的递推数列。它的递推关系是

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ 其中 } F(0) = 0, F(1)=1。$$

这个递推关系表明，要计算斐波那契数列的第 n 项，需要先知道第 $n - 1$ 项和第 $n - 2$ 项的值，然后将它们相加。从最初的 $F(0)$ 和 $F(1)$ 这两个初始状态开始，就可以逐步计算出后续的各项。

- 再比如，计算整数 n 的阶乘 $n!$ 也可以用递推算法。阶乘的递推关系是 $n! = n \times (n - 1)!$ ，初始状态是 $0!=1$ 。从 $0!$ 这个初始值开始，就可以通过不断地乘以当前的整数来计算出更大整数的阶乘。

递推的基本原理 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……

递推算法的核心是递推关系。它是从一个或多个初始状态出发，按照一定的规律，用前面的结果来计算后面的结果。

- 例如，斐波那契数列是一个经典的递推数列。它的递推关系是

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ 其中 } F(0) = 0, F(1)=1。$$

这个递推关系表明，要计算斐波那契数列的第 n 项，需要先知道第 $n - 1$ 项和第 $n - 2$ 项的值，然后将它们相加。从最初的 $F(0)$ 和 $F(1)$ 这两个初始状态开始，就可以逐步计算出后续的各项。

- 再比如，计算整数 n 的阶乘 $n!$ 也可以用递推算法。阶乘的递推关系是 $n! = n \times (n - 1)!$ ，初始状态是 $0!=1$ 。从 $0!$ 这个初始值开始，就可以通过不断地乘以当前的整数来计算出更大整数的阶乘。

递推与递归的区别

递推是从初始条件开始，通过循环结构逐步向前推进计算，它是一种迭代的过程。而递归是函数自己调用自己，将问题分解为更小的相同问题，直到达到一个基本情况（终止条件）。

例如，对于斐波那契数列的计算。递推方式是通过一个循环，从最开始的两项 0 和 1 逐步计算出后面的项。而递归方式是定义一个函数 $F(n)$ ，在函数内部通过 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ 来调用自身，直到 $n=0$ 或 $n=1$ 时返回固定的值。递归可能会导致大量的函数调用开销，并且如果没有正确的终止条件，可能会陷入无限递归；递推相对来说在效率上可能会更高，尤其是在计算大量的结果时。

递推的实际应用场景

- **数学计算：**如计算各种数列（除了斐波那契数列，还有卡特兰数列等）、组合数、排列数等。例如，计算杨辉三角中的元素，杨辉三角中第 n 行第 k 列的元素可以通过递推关系 $C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$ （其中 $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ ）来计算。
- **动态规划：**递推是动态规划的重要基础。在解决诸如背包问题、最长公共子序列问题等动态规划问题时，首先要建立递推关系。例如，在0 - 1背包问题中，设 $dp[i][j]$ 表示前 i 个物品放入容量为 j 的背包中所能获得的最大价值，其递推关系为 $dp[i][j] = \max(dp[i - 1][j], dp[i - 1][j - w[i]] + v[i])$ （其中 $w[i]$ 是第 i 个物品的重量， $v[i]$ 是第 i 个物品的价值）。
- **数据处理与分析：**可以用于计算数据的累积和、移动平均值等统计量。比如，计算一个数列的前缀和，递推关系是 $sum[i] = sum[i - 1] + data[i]$ （其中 $sum[i]$ 表示前 i 项的和， $data[i]$ 是数列中的第 i 项数据）。

十四、递推

1. XY0J-9367: 平面分割2
2. XY0J-1698: 铺地板
3. XY0J-8172: 三角形计数
4. XY0J-3687: 做蛋糕
5. XY0J-9914: 小猫吃鱼
6. XY0J-9402: Maoge走台阶
7. XY0J-9400: Maonumber
8. XY0J-9403: Maoge的塔
9. XY0J-9834: 传纸条
10. XY0J-8166: 矩阵行走