BÀI GIẢNG
Xác suất và Thống kê

Võ Thị Hồng Vân

Chương 1: Biến cố và xác suất

1.1 Giới thiệu phần mềm R

- Phần mềm R được xây dựng bởi Ross Ihaka và Robert Gentleman tại Đại học Auckland, New Zealand vào năm 1995 và sau đó được phát triển bởi các thành viên trong R Development Core Team.

- Phần mềm R được sử dụng để thực hiện những tính toán từ cơ bản đến phức tạp, đặc biệt là trong phân tích, xử lý số liệu thống kê và đồ thị.

1.1.1 Ưu điểm của R

- R là một phần mềm hoàn toàn miễn phí.

- Chức năng của R không thua kém gì các phần mềm thương mại khác. Đặc biệt, không có phần mềm nào có thể sánh với R về phần biểu đồ.

- R có thể chạy được trên Windows, Linux, Mac OS và cả trên ĐTDĐ với hệ điều hành Android.

- Giao diện của R thân thiện, dễ sử dụng, có thể đọc được dữ liệu từ nhiều file định dạng khác nhau.

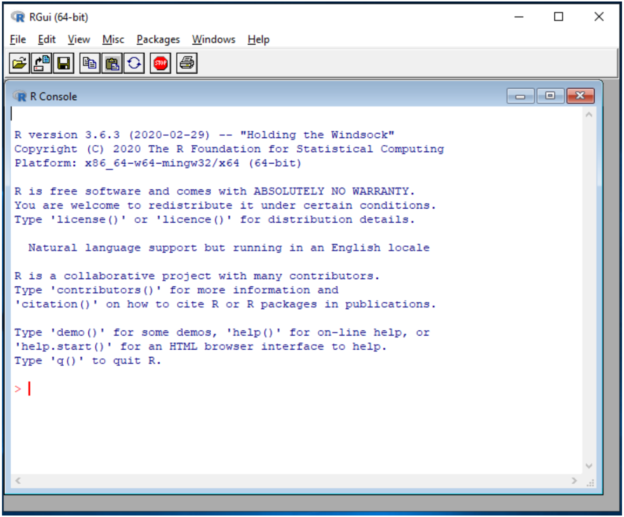
1.1.2 Tải và cài đặt

Người dùng có thể tải R xuống từ trang web

http://cran.R-project.org

sau đó cài đặt vào máy tính như các phần mềm thông thường.

1.1.2 Tải và cài đặt

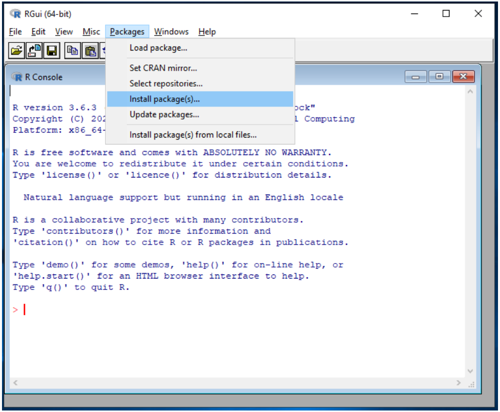


1.1.2 Tải và cài đặt

Với những tính toán thống kê phức tạp, ta cần cài đặt thêm các gói lệnh (package) bổ sung, chẳng hạn gói thống kê cơ bản và phân tích dữ liệu - BSDA.

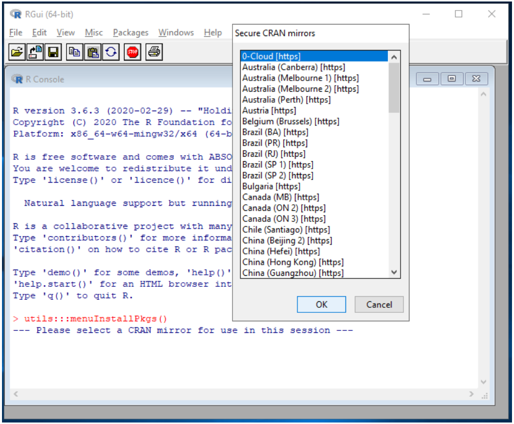
1.1.2 Tải và cài đặt

- Từ giao diện của R, chọn Packages, rồi chọn Install package(s)...



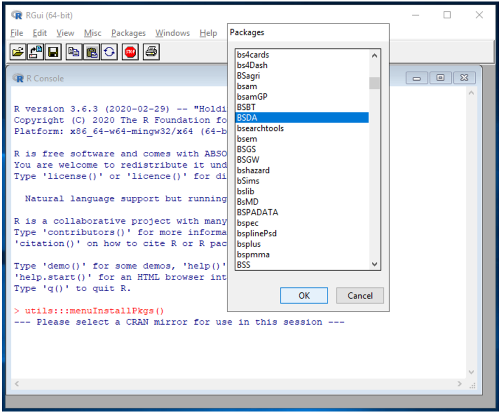
1.1.2 Tải và cài đặt

- Từ cửa sổ hiện ra, có thể chọn bất kỳ server nào, rồi chọn OK.



1.1.2 Tải và cài đặt

- Từ cửa sổ Packages, chọn gói lệnh định cài, rồi chọn OK. Gói lệnh đã được cài đặt xong.



1.1.3 Nhập dữ liệu

Có nhiều cách để nhập dữ liệu vào R, nhưng ở học phần này ta chỉ xét cách nhập trực tiếp, bằng cách sử dụng hàm concatenation:

```
c(giá trị 1, giá trị 2,..., giá trị n)
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Ví dụ 1: Để nhập dãy số liệu 1, 2, 4, 5, 7, 8 ta sử dụng lệnh sau

```
> c(1,2,4,5,7,8)
```

Khi đó, R cho kết quả là

```
[1] 1 2 4 5 7 8
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Ví dụ 2: Để nhập dãy số liệu 1, 2, 4, 5, 7, 8 có tên là x, ta sử dụng lệnh

```
> x=c(1,2,4,5,7,8)
```

Sau đó, khi ta gõ lệnh

```
> x
```

thì R cho kết quả là

```
[1] 1 2 4 5 7 8
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Trong trường hợp dãy số liệu gồm các số được lặp lại, ta kết hợp hàm concatenation và hàm rep. Hàm rep có cú pháp là

```
rep(giá trị, số lần lặp lại)
```

Ví dụ 3: Để nhập dãy số liệu gồm 2 số 1, 4 số 5 và 3 số 8, ta sử dụng lệnh

```
> c(rep(1,2),rep(5,4),rep(8,3))
```

và R cho kết quả là

```
[1] 1 1 5 5 5 5 8 8 8
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Ví dụ 4: Trong Ví dụ 3, nếu dãy số liệu có tên là x, thì ta sử dụng lệnh

```
> x=c(rep(1,2),rep(5,4),rep(8,3))
```

Sau đó, khi ta gõ lệnh

```
> x
```

thì R cũng cho kết quả như Ví dụ 3

```
[1] 1 1 5 5 5 5 8 8 8
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Ngoài ra, trong Ví dụ 4, ta có thể sử dụng liên tiếp 3 lệnh sau đây để nhập x:

```
> gia.tri=c(1,5,8)
> so.lan=c(2,4,3)
> x=rep(gia.tri,so.lan)
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Đối với dãy số liệu có tính quy luật, ta có thể dùng hàm seq.

Ví dụ 5: Để nhập dãy số liệu $1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100$, ta có thể sử dụng 1 trong các lệnh sau

```
> (1:100)
```

```
> seq(100)
```

```
> seq(1:100)
```

```
> seq(1,100)
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Khi đó, R cho kết quả là

```
 [1]   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19
[20]  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36  37  38
[39]  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50  51  52  53  54  55  56  57
[58]  58  59  60  61  62  63  64  65  66  67  68  69  70  71  72  73  74  75  76
[77]  77  78  79  80  81  82  83  84  85  86  87  88  89  90  91  92  93  94  95
[96]  96  97  98  99 100
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Ví dụ 6: Để nhập dãy số liệu $10, 12, 14, \ldots, 98, 100$, ta sử dụng 1 trong các lệnh sau

```
> seq(from=10,to=100,by=2)
> seq(from=10,to=100,length=46)
> seq(from=10,by=2,length=46)
> seq(to=100,by=2,length=46)
```

1.1.3 Nhập dữ liệu

Khi đó, R cho kết quả là

```
 [1] 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46
[20] 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80 82 84
[39] 86 88 90 92 94 96 98 100
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

1) Cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa

Ví dụ 7: $\dfrac{17 + 23 \times 8}{5} - 7^2$

```
> (17+23*8)/5-7^2
[1] -8.8
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

2) Căn bậc hai, mũ

Ví dụ 8: $\dfrac{1}{\sqrt{35}} + e^{-3}$

```
> 1/sqrt(35)+exp(-3)
[1] 0.2188179
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

3) Hoán vị

Ví dụ 9: 8!

Có thể dùng 1 trong các lệnh sau

```
> prod(1:8)
> prod(8:1)
> prod(1,2,3,4,5,6,7,8)
> factorial(8)
```

Kết quả là

```
[1] 40320
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

4) Tổ hợp

Ví dụ 10: C_{10}^5

```
> choose(10,5)
[1] 252
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

5) Các phép toán đối với dãy số liệu

Ví dụ 11: Tính số phần tử của dãy số liệu 5, 10, 15, 20, 25, 30.

```
> x=c(5,10,15,20,25,30)
> length(x)
[1] 6
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

Ví dụ 12: Tính tổng của dãy số liệu 5, 10, 15, 20, 25, 30.

```
> x=c(5,10,15,20,25,30)
> sum(x)
[1] 105
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

Ví dụ 13: Tính tổng bình phương của dãy số liệu 5, 10, 15, 20, 25, 30.

```
> x=c(5,10,15,20,25,30)
> sum(x^2)
[1] 2275
```

1.1.4 Tính toán cơ bản

Bài tập: Sử dụng phần mềm R để tính

a) C_{20}^{3}

b) $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$

c) Trung bình cộng của dãy số 1; 3; 5; 7; ... ; 99

1.2 Bổ túc về giải tích tổ hợp

1.2.1 Quy tắc nhân, quy tắc cộng

Quy tắc nhân: Giả sử

- Để hoàn thành công việc A phải trải qua k giai đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
- Có n_1 cách thực hiện giai đoạn A_1

  Có n_2 cách thực hiện giai đoạn A_2

  $\ldots$

  Có n_k cách thực hiện giai đoạn A_k.

Khi đó, có $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ cách thực hiện công việc A.

1.2.1 Quy tắc nhân, quy tắc cộng

Quy tắc cộng: Giả sử

- Để hoàn thành công việc A có thể dùng 1 trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
- Có n_1 cách thực hiện phương án A_1

  Có n_2 cách thực hiện phương án A_2

  $\ldots$

  Có n_k cách thực hiện phương án A_k.

1.2.1 Quy tắc nhân, quy tắc cộng

- Hai phương án khác nhau không có cách thực hiện chung.

Khi đó, có $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách thực hiện công việc A.

1.2.1 Quy tắc nhân, quy tắc cộng

Ví dụ 1: Từ các chữ số $2, 5, 7, 8$

a) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 3 chữ số khác nhau?

b) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên (các chữ số khác nhau)?

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Hoán vị:

- 1 hoán vị của n phần tử (với $n \in \mathbb{N}$) là 1 cách sắp xếp có thứ tự n phần tử.

- Số hoán vị của n phần tử là

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Tổ hợp:

- 1 tổ hợp chập k của n phần tử (với $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) là 1 cách chọn k phần tử trong n phần tử, sao cho k phần tử đó không lặp và không phân biệt thứ tự.

$\Rightarrow$ 1 tổ hợp chập k của n phần tử là 1 tập con gồm k phần tử của một tập hợp gồm n phần tử.

- Số tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Chỉnh hợp:

- 1 chỉnh hợp chập k của n phần tử (với $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) là 1 cách chọn k phần tử trong n phần tử, sao cho k phần tử đó không lặp và có phân biệt thứ tự.

- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Chỉnh hợp lặp:

- 1 chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử (với $k, n \in \mathbb{N}$) là 1 cách chọn k phần tử trong n phần tử, sao cho k phần tử đó có thể lặp lại và có phân biệt thứ tự.

- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là

$$\widetilde{A}_n^k = n^k$$

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách để 3 sinh viên đăng ký vào các lớp học phần Xác suất và Thống kê, biết

a) có 3 lớp học phần, mỗi sinh viên đăng ký 1 lớp.

b) có 5 lớp học phần, mỗi lớp chỉ còn 1 chỗ trống.

c) có 10 lớp học phần, mỗi lớp còn nhiều hơn 3 chỗ trống.

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Ví dụ 3: Một lô hàng có 12 sản phẩm trong đó có 10 sản phẩm loại I. Hỏi có bao nhiêu cách

a) Lấy ra đồng thời 3 sản phẩm từ lô hàng?

b) Lấy ra đồng thời 3 sản phẩm từ lô hàng trong đó có đúng 2 sản phẩm loại I?

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Bài tập:

Bài 1: Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$

a) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số?

b) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

c) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

1.2.2 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Bài 2: Một nhóm sinh viên gồm 5 nam và 6 nữ.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 2 sinh viên đều là nam?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 sinh viên trong đó có ít nhất 1 nam?

Bài 3: Có hai nhóm sinh viên. Nhóm I có 5 nam và 6 nữ. Nhóm II có 4 nam và 7 nữ. Từ mỗi nhóm chọn ngẫu nhiên ra 2 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn được 4 sinh viên cùng giới tính?

1.3 Phép thử và biến cố

1.3.1 Phép thử và không gian mẫu

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là thí nghiệm, quan sát, hành động, ... mà trước khi tiến hành ta không biết chắc chắn kết quả nào sẽ xảy ra, nhưng ta có thể dự đoán trước được tất cả các kết quả có thể xảy ra.

- Không gian mẫu, ký hiệu Ω, là tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử.

- 1 biến cố sơ cấp là 1 phần tử của Ω, tức là 1 kết quả có thể của phép thử.

1.3.1 Phép thử và không gian mẫu

Ví dụ 1: Tung 1 con xúc xắc và quan sát mặt xuất hiện. Tìm phép thử, không gian mẫu và các biến cố sơ cấp.

1.3.1 Phép thử và không gian mẫu

Ví dụ 2: Xét phép thử là cuộc thi chạy đua của 3 vận động viên A, B, C. Mô tả không gian mẫu về kết quả của cuộc thi, biết rằng không có 2 vận động viên nào về đích cùng lúc.

1.3.1 Phép thử và không gian mẫu

Ví dụ 3: Tung 1 đồng xu cho đến khi xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Tìm không gian mẫu.

1.3.2 Biến cố

- Biến cố là sự kiện có thể xảy ra hoặc không xảy ra trong phép thử tùy thuộc hoàn toàn vào kết quả của phép thử đó.

Ký hiệu: chữ cái in hoa.

- Giả sử A là 1 biến cố và ω là 1 biến cố sơ cấp của phép thử. Ta nói ω thuận lợi cho A, ký hiệu $\omega \in A$, nếu

$$\text{kết quả của phép thử là } \omega \Rightarrow A \text{ xảy ra.}$$

1.3.2 Biến cố

Nhận xét: A là biến cố của phép thử $\Leftrightarrow$ A là tập con của Ω, tập con đó gồm tất cả các biến cố sơ cấp thuận lợi cho A.

- Có 2 biến cố đặc biệt:

- Biến cố không thể: là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử được thực hiện, ký hiệu $\emptyset$.
- Biến cố chắc chắn: là biến cố luôn xảy ra khi phép thử được thực hiện, ký hiệu Ω.

1.3.2 Biến cố

Ví dụ 4: Trong Ví dụ 1, gọi

$A =$ "xuất hiện mặt 7 chấm"

$B =$ "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3"

$C =$ "xuất hiện mặt có số chấm ≤ 8".

Hỏi A, B, C có phải là các biến cố không? Biểu diễn A, B, C qua các biến cố sơ cấp.

1.3.2 Biến cố

Ví dụ 5: Trong Ví dụ 2, gọi

$$D = \{ABC, ACB\}$$

$$E = \{ACB, BCA, CAB, CBA\}.$$

Hỏi D, E có phải là các biến cố không? Gọi tên D, E.

1.3.2 Biến cố

Ví dụ 6: Trong Ví dụ 3, gọi

F = "mặt ngửa không xuất hiện trước lần tung thứ 10"

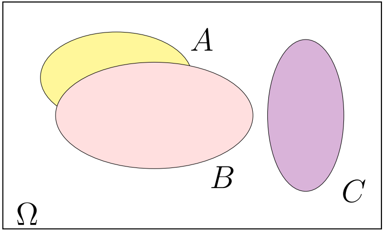
$G = \{N, SSN, SSSSN, \dots\}$.

Hỏi F, G có phải là các biến cố không? Biểu diễn F qua các biến cố sơ cấp và gọi tên G.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Giả sử A, B và $H_1, H_2, \ldots, H_n$ $(n \geq 2)$ là các biến cố của một phép thử.

Không gian mẫu Ω

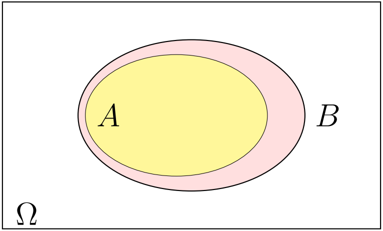


Các biến cố A, B, C

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

1) Quan hệ kéo theo: $A \subseteq B$ nếu

$$A \text{ xảy ra} \Rightarrow B \text{ xảy ra.}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 1: Kiểm tra 1 máy tính. Gọi

A = "máy tính hỏng"

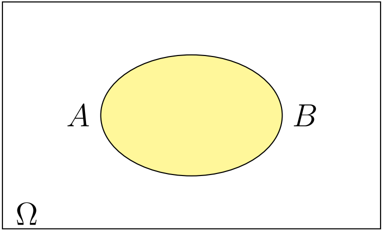
B = "ổ cứng hỏng".

Xét mối quan hệ giữa A và B.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

2) Quan hệ bằng nhau: $A = B$ nếu

$$A \text{ xảy ra} \Leftrightarrow B \text{ xảy ra.}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 2: Tung đồng thời 4 con xúc xắc. Gọi

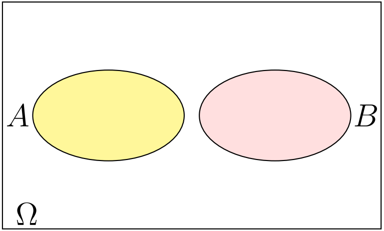
A = "mỗi con xúc xắc đều xuất hiện mặt 1 chấm"

B = "tổng số chấm xuất hiện trên 4 con xúc xắc là 4".

Xét mối quan hệ giữa A và B.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

3) Quan hệ xung khắc: A và B xung khắc $\Leftrightarrow$ A và B không cùng xảy ra.



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 3: Bắn 1 viên đạn vào bia. Gọi

$A =$ "đạn trúng tâm"

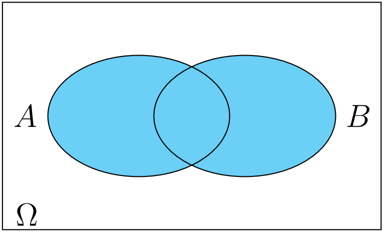
$B =$ "đạn trúng vòng 8".

Xét mối quan hệ giữa A và B.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

4) Phép toán hợp: $A \cup B$ là biến cố thỏa mãn

$$A \cup B \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \text{có ít nhất 1 trong 2 biến cố } A \text{ hoặc } B \text{ xảy ra.}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét:

- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A \cup B$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 4: Có 2 người sử dụng điện thoại di động. Gọi

$A =$ "người thứ nhất dùng mạng Vinaphone"

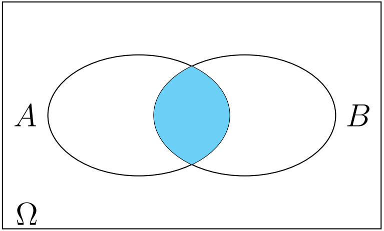
$B =$ "người thứ hai dùng mạng Vinaphone".

Gọi tên biến cố $A \cup B$.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

5) Phép toán tích: AB là biến cố thỏa mãn

$$AB \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \text{cả } A \text{ và } B \text{ xảy ra.}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét:

- $AB \subseteq A$
- $AB \subseteq B$
- $AB \subseteq A \cup B$
- A và B xung khắc $\Leftrightarrow$ $AB = \emptyset$.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 5: Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên từ danh sách lớp. Gọi

$A =$ "chọn được sinh viên ngành kỹ sư ĐTVT"

$B =$ "chọn được sinh viên nam"

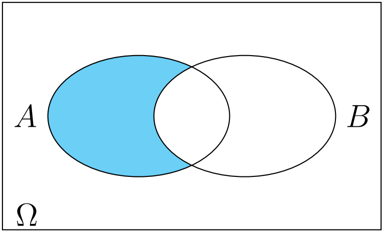
$C =$ "chọn được sinh viên nam ngành kỹ sư ĐTVT".

Hỏi biến cố nào là tích của hai biến cố còn lại?

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

6) Phép toán hiệu: $A \setminus B$ là biến cố thỏa mãn

$$A \setminus B \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ xảy ra} \\ B \text{ không xảy ra} \end{cases}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét:

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \setminus B \subseteq A \cup B$
- $A \setminus B$ và B xung khắc
- $A \setminus B$ và AB xung khắc
- $A \setminus B = A \setminus AB$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 6: Chọn ngẫu nhiên 2 số tự nhiên. Gọi

$A =$ "tích 2 số được chọn là số chẵn"

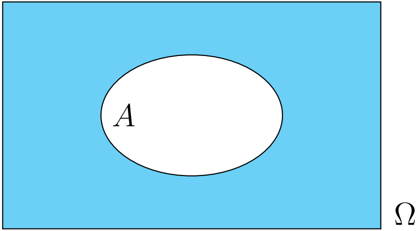
$B =$ "cả 2 số được chọn đều là số chẵn".

Gọi tên biến cố $A \setminus B$.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

7) Biến cố đối: Biến cố đối của A là $\bar{A}$ thỏa mãn

$$\bar{A} \text{ xảy ra} \Leftrightarrow A \text{ không xảy ra.}$$



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét:

- A và $\overline{A}$ xung khắc: $A\bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = \Omega$
- $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- $A \setminus B = A\bar{B}$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 7: Quan sát số người vào một trạm đổ xăng trong 1 ngày. Gọi

A = "có ít hơn 50 người vào trạm đổ xăng trong ngày đó".

Gọi tên biến cố $\bar{A}$.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

8) Nhóm đầy đủ các biến cố: $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ các biến cố nếu

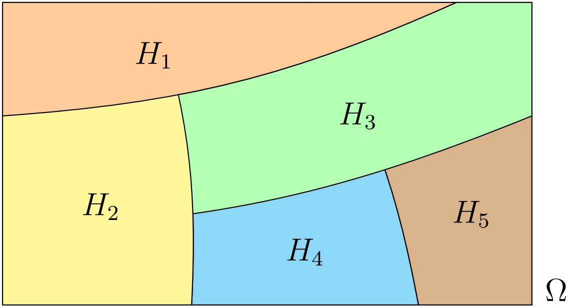
- Chúng xung khắc từng đôi:

$$H_i H_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$$

- Hợp của chúng là biến cố chắc chắn:

$$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố



1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Nhận xét:

- $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ các biến cố $\Leftrightarrow$ khi phép thử được thực hiện thì có đúng 1 biến cố H_i nào đó xảy ra.
- Với biến cố A bất kỳ thì $\{A, \bar{A}\}$ là 1 nhóm đầy đủ các biến cố.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Ví dụ 8: Một kho chứa các thanh thép được sản xuất từ các công ty A, B và C. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 thanh thép trong kho. Gọi

$A =$ "thanh thép đó do công ty A sản xuất"

$B =$ "thanh thép đó do công ty B sản xuất"

$C =$ "thanh thép đó do công ty C sản xuất".

Tìm các nhóm đầy đủ các biến cố.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Tính chất của quan hệ và phép toán giữa các biến cố:

1) Tính chất giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$AB = BA$$

2) Tính chất kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

3) Tính chất phân phối:

$$(A \cup B)C = AC \cup BC$$

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

4) Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

5) $\bar{\bar{A}} = A$

6) Nếu $A \subseteq B$ thì $A \cup B = B$, $AB = A$.

Đặc biệt: $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset A = \emptyset$,

$$\Omega \cup A = \Omega, \ \Omega A = A.$$

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Bài tập:

Bài 1: Xác định không gian mẫu trong các phép thử sau:

a) Kiểm tra giới tính của 1 em bé mới sinh.

b) Tung đồng thời 2 con xúc xắc.

c) Kiểm tra tuổi thọ (tính theo giờ) của một loại thiết bị điện tử.

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

Bài 2: Quan sát các máy bay đang chờ cất cánh tại một sân bay quốc tế. Gọi

A = "có ít nhất 5 máy bay đang chờ để cất cánh",

B = "có nhiều nhất 3 máy bay đang chờ để cất cánh",

C = "có đúng 2 máy bay đang chờ để cất cánh",

D = "có đúng 4 máy bay đang chờ để cất cánh".

1.3.3 Quan hệ và phép toán giữa các biến cố

a) Xác định các cặp biến cố xung khắc.

b) Tìm mối quan hệ giữa B và C.

c) Gọi tên biến cố $A \cup B$.

d) Gọi tên biến cố $\overline{B}$.

e) Gọi tên biến cố $B\overline{C}$.

f) Xác định các nhóm đầy đủ các biến cố.

1.4 Xác suất của biến cố

Xác suất của biến cố A, ký hiệu $P(A)$, là một số biểu thị khả năng xảy ra của A trong phép thử.

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Định nghĩa xác suất dạng cổ điển: Giả sử

- phép thử có hữu hạn các kết quả có thể
- các kết quả đó đồng khả năng.

Nếu A là 1 biến cố của phép thử đó thì

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{số phần tử của } A}{\text{số phần tử của } \Omega}$$

$$= \frac{\text{số kết quả thuận lợi cho } A}{\text{số kết quả có thể của phép thử}}$$

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Ví dụ 1: Tung đồng thời 2 đồng xu cân đối, đồng chất. Tìm xác suất của các biến cố sau

a) $A =$ "đồng thứ nhất ngửa, đồng thứ hai sấp"

b) $B =$ "có ít nhất 1 đồng sấp".

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Ví dụ 2: Một hộp có 20 bóng đèn, trong đó có 11 bóng 110V, còn lại là bóng 220V. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đồng thời ra 3 bóng đèn. Tìm xác suất để

a) Lấy được 3 bóng đèn 220V

b) Trong 3 bóng đèn lấy ra có 1 bóng 110V.

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Ví dụ 3: Hộp thứ nhất có 3 bi trắng và 7 bi đen. Hộp thứ hai có 8 bi trắng và 4 bi đen. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tìm xác suất để lấy được 1 bi trắng và 1 bi đen.

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Định nghĩa xác suất dạng thống kê: Thực hiện một phép thử T lặp đi lặp lại n lần độc lập trong những điều kiện như nhau và giả sử biến cố A xảy ra trong n_A phép thử. Khi đó, $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử. Xác suất của A trong phép thử T được định nghĩa

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$$

Nghĩa là, khi số phép thử tăng lên vô hạn thì tần suất xuất hiện một biến cố dần tới xác suất của nó. Với n đủ lớn, ta có $P(A) \approx f_n(A)$.

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Ví dụ 4: Để tính xác suất xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta đã tiến hành tung đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau

Người tung	Số lần tung	Số lần sấp	Tần suất
Buffon	4.040	2.048	0,5069
Pearson	12.000	6.019	0,5016
Pearson	24.000	12.012	0,5005

$\Rightarrow P(\text{xuất hiện mặt sấp}) \approx 0{,}5.$

1.4.1 Định nghĩa xác suất

Ví dụ 5: Muốn xác định xác suất để một máy sản xuất ra một phế phẩm, người ta theo dõi 100000 sản phẩm do máy đó sản xuất ra và thấy có 200 phế phẩm. Khi đó,

$$P(\text{máy sản xuất 1 phế phẩm}) \approx \frac{200}{100000} = 0{,}002.$$

1.4.2 Tính chất của xác suất

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A

2) $P(\emptyset) = 0$ và $P(\Omega) = 1$

3) $B \subseteq A \ \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

1.4.2 Tính chất của xác suất

4) Công thức xác suất biến cố hiệu:

$$B \subseteq A \;\Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

Do đó,

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB), \text{ với mọi biến cố } A, B$$

5) Công thức xác suất biến cố đối:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ với mọi biến cố } A$$

1.4.2 Tính chất của xác suất

6) Công thức cộng xác suất:

- Với 2 biến cố A và B, ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- Đặc biệt, nếu A và B xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Với 3 biến cố A, B, C, ta có

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

1.4.2 Tính chất của xác suất

- Nếu n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

- Nếu $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ các biến cố thì

$$P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1$$

7) Nếu phép thử là chọn 1 thì $P(A) =$ tỉ lệ của A.

1.4.2 Tính chất của xác suất

Ví dụ 1: Một lớp gồm 30 sinh viên nam và 50 sinh viên nữ trong đó một nửa sinh viên nam và một nửa sinh viên nữ thuê nhà ở trọ. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp thì được sinh viên nam hoặc sinh viên thuê nhà ở trọ.

1.4.2 Tính chất của xác suất

Ví dụ 2: Một hộp đựng 10 lọ thuốc tốt và 5 lọ thuốc hỏng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đồng thời ra 4 lọ thuốc. Tìm xác suất để trong 4 lọ thuốc được lấy ra có ít nhất 1 lọ thuốc tốt.

1.4.2 Tính chất của xác suất

Bài tập:

Bài 1: Tung đồng thời 2 con xúc xắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là 10.

Bài 2: Một hộp đựng 8 bi trắng và 7 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi. Tính xác suất để có đúng 1 bi trắng trong 2 bi được lấy ra.

Bài 3: Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 4 sản phẩm. Tính xác suất để có không quá 1 phế phẩm trong 4 sản phẩm được lấy ra.

1.4.2 Tính chất của xác suất

Bài 4: Rút ngẫu nhiên 3 quân bài từ một bộ bài tú lơ khơ có 52 quân. Tính xác suất để rút được ít nhất 1 quân Át.

Bài 5: Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}7$; $P(A \cup B) = 0{,}9$. Tính $P(\bar{A})$, $P(AB)$, $P(A\bar{B})$.

Bài 6: Cho $\{A, B, C\}$ là nhóm đầy đủ các biến cố thỏa mãn $P(\bar{A}) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}2$. Tính $P(C)$.

1.5 Xác suất có điều kiện

Trong thực tế, chúng ta thường phải tính xác suất của 1 biến cố khi biết 1 biến cố khác đã xảy ra. Xác suất đó được gọi là xác suất có điều kiện.

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa: Giả sử A và B là 2 biến cố của phép thử. Xác suất của biến cố A được tính trong tình huống biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, ký hiệu $P(A|B)$.

Chú ý: Phân biệt $P(A|B)$ và $P(A \setminus B)$.

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 1: Một hộp đựng 36 lá thăm trong đó có 6 lá thăm có thưởng. Giả sử An lên bắt thăm đầu tiên và Bảo là người bắt thăm thứ hai, mỗi người chỉ bắt 1 thăm và bắt xong không trả lại hộp. Tìm xác suất để Bảo bắt được thăm có thưởng biết rằng An đã bắt được thăm không có thưởng.

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Công thức: Cho A, B là 2 biến cố thỏa mãn $P(B) > 0$. Khi đó

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 2: Biết rằng 15% dân số của một nước là phụ nữ thất nghiệp và tổng số người thất nghiệp chiếm 25%. Chọn ngẫu nhiên 1 người dân của nước này. Biết rằng người đó thất nghiệp, tìm xác suất để người đó là phụ nữ.

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 3: Một khảo sát được thực hiện trên các giảng viên và sinh viên để xem họ thích bóng đá hay bóng chuyền, kết quả thu được như sau

	Bóng đá	Bóng chuyền
Sinh viên	33	54
Giảng viên	68	1

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Chọn ngẫu nhiên 1 người trong nhóm trên.

a) Biết người được chọn thích bóng đá, tính xác suất để người đó là sinh viên.

b) Biết người được chọn là sinh viên, tính xác suất để người đó thích bóng đá.

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Tính chất: Xác suất có điều kiện có các tính chất tương tự như xác suất không điều kiện:

Với A, B, C là các biến cố và $P(B) > 0$, ta có

1) $0 \leq P(A|B) \leq 1$

2) a) $AB = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0$. Đặc biệt $P(\emptyset|B) = 0$

b) $B \subseteq A \Rightarrow P(A|B) = 1$. Đặc biệt $P(\Omega|B) = 1$

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

3) $C \subseteq A \;\Rightarrow P(C|B) \leq P(A|B)$

4) $C \subseteq A \;\Rightarrow P(A \setminus C\ |B) = P(A|B) - P(C|B)$

5) $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

6) $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(AC|B)$

7) Nếu phép thử là chọn 1 thì $P(A|B)$ = tỉ lệ A chiếm trong B.

1.5.2 Công thức nhân xác suất

Công thức:

- Với 2 biến cố A, B thỏa mãn $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, ta có

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

- Với n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa mãn $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, ta có

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1.5.2 Công thức nhân xác suất

Ví dụ 1: Áo Việt Tiến trước khi được xuất khẩu phải qua hai lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

1.5.2 Công thức nhân xác suất

Ví dụ 2: Rút ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 3 quân bài từ một bộ bài tú lơ khơ. Tìm xác suất để rút được 3 quân theo thứ tự J, Q, K.

1.5.3 Sự độc lập của các biến cố

Giả sử A và B là 2 biến cố của một phép thử.

Định nghĩa 1: Nếu $P(A|B) = P(A)$, tức là việc biến cố B xảy ra không làm thay đổi khả năng xảy ra biến cố A, thì ta nói A độc lập với B.

Định nghĩa 2:

$$A \text{ và } B \text{ độc lập} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

1.5.3 Sự độc lập của các biến cố

Ví dụ 1: Tung một đồng xu 2 lần. Gọi

$$A_i = \text{“xuất hiện mặt sấp ở lần thứ } i\text{”}, \; i = 1, 2.$$

Hỏi A_1 và A_2 có độc lập không? Vì sao?

1.5.3 Sự độc lập của các biến cố

Tính chất: 4 mệnh đề sau là tương đương

1) A và B độc lập
2) A và $\bar{B}$ độc lập
3) $\bar{A}$ và B độc lập
4) $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập.

1.5.3 Sự độc lập của các biến cố

Ví dụ 2: Có 2 loại virus độc lập xâm nhập vào máy tính qua file đính kèm của email. Virus thứ nhất gây hại cho hệ thống với xác suất 0,3 và virus thứ hai gây hại cho hệ thống với xác suất 0,2. Tìm xác suất để

a) Chỉ có virus thứ nhất gây hại cho hệ thống.

b) Máy tính bị gây hại.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Công thức: Cho $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ các biến cố thỏa mãn $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$ và A là biến cố bất kỳ. Khi đó

Công thức xác suất toàn phần:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = P(H_1)P(A|H_1) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n)$$

Công thức Bayes: Nếu $P(A) > 0$ thì

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \; k = \overline{1, n}$$

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Nhận xét:

- Với $n = 2$, ta có công thức xác suất toàn phần là

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

Đặt $H_1 = H$ thì $H_2 = \bar{H}$. Khi đó, công thức trên được viết lại là

$$P(A) = P(H)P(A|H) + P(\bar{H})P(A|\bar{H})$$

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

- Các dạng toán thường dùng công thức xác suất toàn phần:

Dạng 1: Phép thử được tiến hành qua 2 giai đoạn. Giai đoạn thứ nhất có 1 trong n khả năng xảy ra là các biến cố $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Sau khi thực hiện giai đoạn thứ nhất ta thực hiện giai đoạn thứ hai. Trong giai đoạn thứ hai ta quan tâm đến biến cố A. Khi đó, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ và ta dùng công thức xác suất toàn phần để tính $P(A)$.

1.5.4 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Dạng 2: Một tập hợp chứa n nhóm phần tử. Trong mỗi nhóm ta đều quan tâm đến tính chất P nào đó. Xét phép thử là lấy ngẫu nhiên từ tập hợp ra 1 phần tử. Gọi H_i là biến cố "lấy được phần tử thuộc nhóm i", $i = \overline{1, n}$ và A là biến cố "lấy được phần tử có tính chất P". Khi đó, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ là nhóm đầy đủ và ta dùng công thức xác suất toàn phần để tính $P(A)$.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Ví dụ 1: Hộp thứ nhất chứa 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hộp thứ hai chứa 6 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 6. Hộp thứ ba chứa 5 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 5. Chọn ngẫu nhiên 1 hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên ra 1 thẻ.

a) Tìm xác suất để thẻ lấy ra mang số chẵn.

b) Giả sử đã lấy được tấm thẻ chẵn. Tìm xác suất để nó là của hộp thứ nhất.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Ví dụ 2: Tỉ lệ người dân nghiện rượu ở vùng nọ là 10%. Biết rằng tỉ lệ người bị xơ gan trong số người nghiện rượu là 80%, còn tỉ lệ người bị xơ gan trong số người không nghiện rượu là 1%.

a) Chọn ngẫu nhiên 1 người trong vùng. Tìm xác suất để người đó bị xơ gan.

b) Chọn ngẫu nhiên 1 người trong vùng thì thấy người đó không bị xơ gan. Hỏi xác suất để người đó thuộc nhóm người nghiện rượu là bao nhiêu?

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Bài tập:

Bài 1: Giải Ví dụ 3 câu b) mục 1.5.1.

Bài 2: Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cup B) = 0{,}7$. Tính $P(A|B)$ và $P(B|A)$.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Bài 3: Một hộp có 4 viên bi đỏ, 6 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt có hoàn lại từ hộp ra 2 viên bi. Tìm xác suất để cả hai lần đều lấy được bi trắng.

Bài 4: Hai người ném bóng vào rổ. Xác suất ném bóng trúng rổ của người thứ nhất là 0,7 và của người thứ hai là 0,8. Tính xác suất để có đúng 1 người ném bóng trúng rổ.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Bài 5: Hộp thứ nhất có 8 bi xanh và 2 bi đỏ. Hộp thứ hai có 7 bi xanh và 3 bi đỏ. Chọn ngẫu nhiên 1 hộp rồi từ đó lấy ra 1 bi.

a) Tính xác suất để lấy được bi đỏ.

b) Biết rằng đã lấy được bi xanh. Tính xác suất để bi đó là của hộp thứ hai.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Bài 6: Một cửa hàng máy tính chuyên kinh doanh 3 loại nhãn hiệu là IBM, Dell và Toshiba. Trong cơ cấu hàng bán, tỉ lệ máy IBM là 10%, máy Dell là 25%, còn lại là máy Toshiba. Tất cả máy bán ra có thời gian bảo hành 12 tháng. Kinh nghiệm kinh doanh của chủ cửa hàng cho thấy trong số máy IBM có 2% phải sửa chữa trong thời gian bảo hành và tỉ lệ máy cần sửa chữa của hai hiệu còn lại lần lượt là 3% và 4%.

1.5.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

a) Nếu khách hàng mua 1 máy tính, khả năng để máy đó phải đem lại sửa chữa trong thời gian bảo hành là bao nhiêu?

b) Biết rằng có 1 máy của khách mua phải đem lại sửa chữa trong thời gian bảo hành. Tính xác suất để đó là máy Toshiba.