第七章

Tree Searching Strategies

骆吉洲
计算机科学与工程系

提要

参考资料

《计算机算法设计与分析》
- 第5章，第6章

《网站资料》
- 第七章

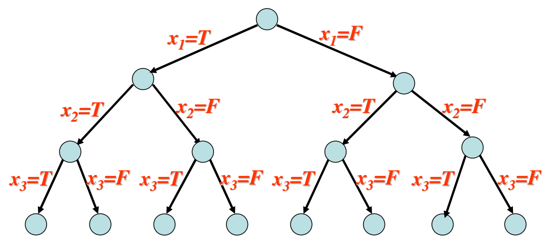
7.1 *Motivation of Tree Searching*

很多问题可以表示成为树.
于是，这些问题可以使用树
搜索算法来求解

布尔表达式可满足性问题

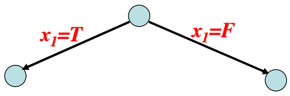
- 问题的定义
  - 输入：n个布尔变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$
    关于$x_1, x_2, \ldots, x_n$的k个析取布尔式
  - 输出：是否存在一个$x_1, x_2, \ldots, x_n$的一种赋值
    使得所有k个布尔析取式皆为真

- 把问题表示为树
  - 通过不断地为赋值集合分类来建立树
  (以三个变量(x_1, x_2, x_3)为例)



HIT
CS&E

- 求解问题
  - 设有布尔式：$-x_1$, x_1, $x_2 \vee x_5$, x_3, $-x_2$



HIT
CS&E

8-Puzzle问题

- 问题的定义
  - 输入：具有8个编号小方块的魔方

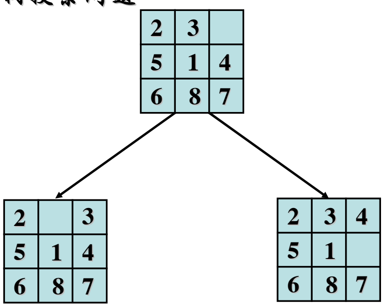
2	3	
5	1	4
6	8	7

  - 输出：移动系列，经过这些移动，魔方达如下状态

1	2	3
8		4
7	6	5

HIT
CS&E

- 转换为树搜索问题



HIT
CS&E

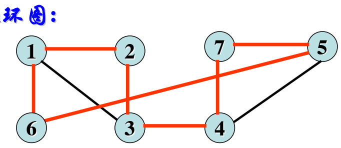
Hamiltonian环问题

- 问题定义
  - 输入：具有n个节点的连通图$G=(V, E)$
  - 输出：G中是否具有Hamiltonian环

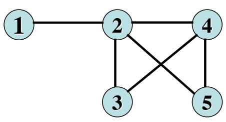
沿着G的n条边经过每个节点一次，并回到起始节点的环称为G的一个Hamiltonian环。

HIT
CS&E

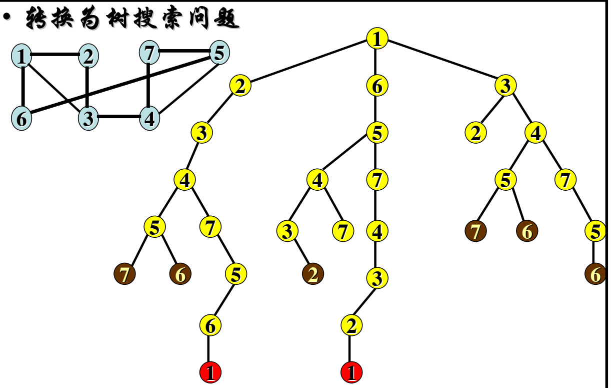
有Hamiltonian环图：



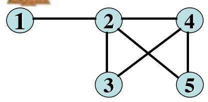
无Hamiltonian环图：

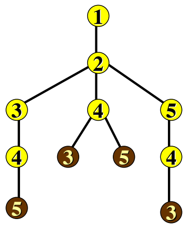


- 转换为树搜索问题



HIT
CS&E





HIT
CS&E

7.2 Basic Tree Searching Strategies

- Breadth-First Search
- Depth-First Search

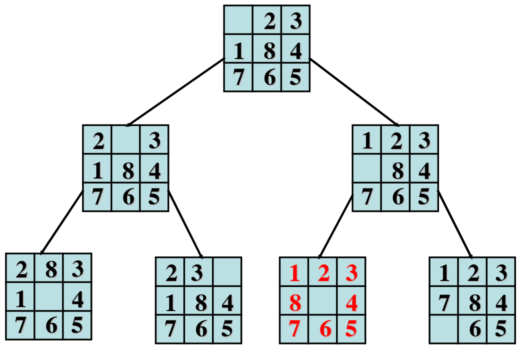
HIT
CS&E

Breadth-First Search

- 算法

 1. 构造由根组成的队列Q;
 2. If Q的第一个元素x是目标节点 Then 停止;
 3. 从Q中删除x，把x的所有子节点加入Q的末尾;
 4. If Q空 Then 失败 Else *goto* 2.

- 例：求解8-Puzzle问题



HIT
CS&E

Depth-First Search

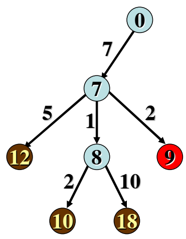
- 算法

 1. 构造一个由根构成的单元素栈S;
 2. If $Top(S)$是目标节点 Then 停止;
 3. $Pop(S)$，把$Top(S)$的所有子节点压入栈顶;
 4. If S空 Then 失败 Else *goto* 2.

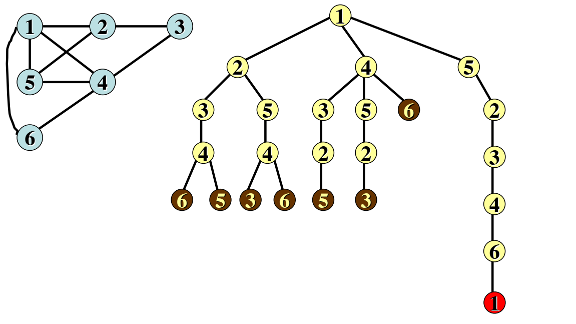
- 例1. 求解子集合和问题

 输入：S={7, 5, 1, 2, 10}

 输出：是否存在$S'\subseteq S$，使得$Sum(S')=9$



- 例2. 求解Hamiltonian环问题



HIT
CS&E

7.3 Optimal Tree Searching Strategies

- Hill Climbing
- Best-First Search Strategy
- Branch-and-Bound Strategy

HIT
CS&E

Hill Climbing

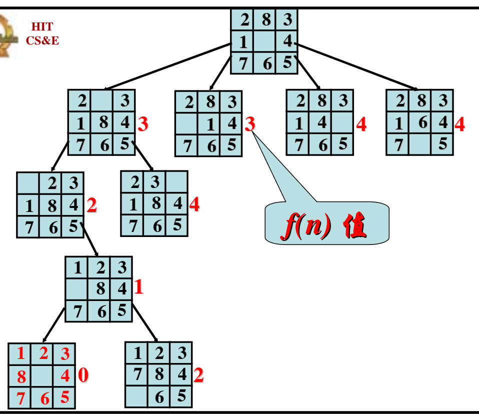
- 基本思想
  - 在深度优先搜索过程中，我们经常遇到多个节点可以扩展的情况，首先扩展哪个?
  - 爬山策略使用贪心方法确定搜索的方向，是优化的深度优先搜索策略
  - 爬山策略使用启发式测度来排序节点扩展的顺序

HIT
CS&E

- 用8-Puzzle问题来说明爬山策略的思想
  - 启发式测度函数：$f(n)=W(n)$, $W(n)$是节点n中处于错误位置的方块数.
  - 例如，如果节点n如下，则$f(n)=3$, 因为方块1、2、8处于错误位置.

2	8	3
1		4
7	6	5

HIT
CS&E



HIT
CS&E

- Hill Climbing算法
  1. 构造由根组成的单元素栈S;
  2. If $Top(S)$是目标节点 Then 停止;
  3. Pop(S);
  4. S的子节点按照其启发测度由大到小的顺序压入S;
  5. If S空 Then 失败 Else *goto* 2.

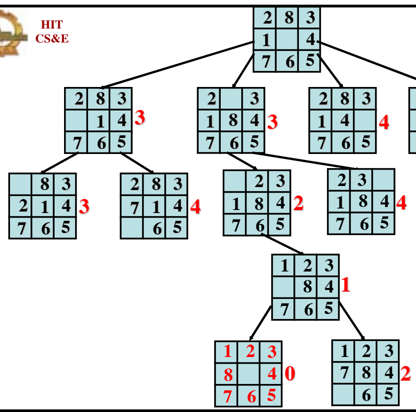
Best-First Search Sttrategy

- 基本思想
  - 结合深度优先和广度优先的优点
  - 根据一个评价函数，在目前产生的所有节点中选择具有最小评价函数值的节点进行扩展.
  - 具有全局优化观念，而爬山策略仅具有局部优化观念.

- BesT-First Search算法

1. 使用评价函数构造一个堆H，首先构造由根组成的单元素堆；
2. If H的根r是目标节点 Then 停止；
3. 从H中删除r，把r的子节点插入H；
4. If H空 Then 失败 Else *goto* 2.

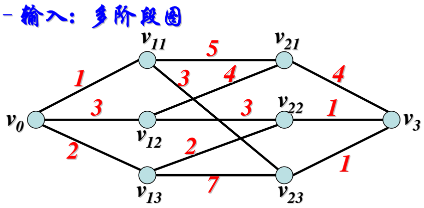
- 8-Puzzle问题实例



Branch-and-Bound Strategy

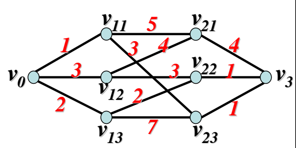
- 基本思想
  - 上述方法很难用于求解优化问题
  - 分支界限策略可以有效地求解组合优化问题
  - 发现优化解的一个界限
  - 缩小解空间，提高求解的效率
- 举例说明分支界限策略的原理

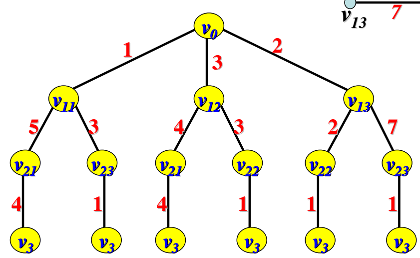
- 多阶段图搜索问题
  - 输入：多阶段图



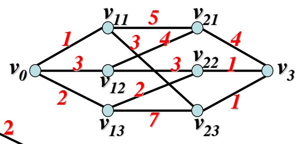
  - 输出：从v_0到v_3的最短路径

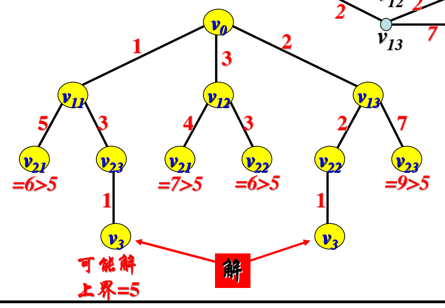
- 问题的树表示





- 使用爬山策略进行分支界限搜索





HIT
CS&E

- 分支界限策略的原理
  - 产生分支的机制(使用前面的任意一种策略)
  - 产生一个界限(可以通过发现可能解)
  - 进行分支界限搜索,即剪除不可能产生优化解的分支.

HIT
CS&E

7.4 Personnel Assignment Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 求解问题的分支界限搜索算法

HIT
CS&E

问题的定义

- 输入
  - 人的集合$P=\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, $P_1<P_2<\ldots<P_n$

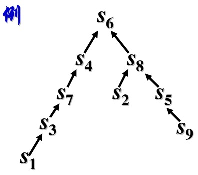
例. 给定P=$\{P_1, P_2, P_3\}$,$J=\{J_1, J_2, J_3\}$, $J_1 \leq J_3, J_2 \leq J_3$.
$P_1 \rightarrow J_1$、$P_2 \rightarrow J_2$、$P_3 \rightarrow J_3$是可能的解.
$P_1 \rightarrow J_1$、$P_2 \rightarrow J_3$、$P_3 \rightarrow J_2$不可能是解.

  - 如果$f(P_i) \leq f(P_j)$, 则$P_i \leq P_j$

HIT
CS&E

转换为树搜索问题

- 拓扑排序
  - 输入:偏序集合$(S, \leq)$
  - 输出:S的拓朴序列是$<s_1, s_2, \ldots, s_n>$,
    满足:如果$s_i \leq s_j$, 则s_i排在s_j的前面.
  - 例



拓朴排序:

s_1 s_3 s_7 s_4 s_9 s_5 s_2 s_8 s_6

- 问题的解空间

命题1. $P_1 \rightarrow J_{k1}$、$P_2 \rightarrow J_{k2}$、…、$P_n \rightarrow J_{kn}$是一个可能解,当且仅当J_{k1}、J_{k2}、…、J_{kn}必是一个拓朴排序的序列.

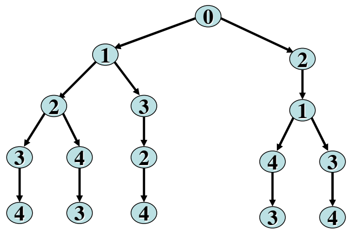
问题的解空间是所有拓朴排序的序列集合,
每个序列对于一个可能的解

对 (J_1, J_2, J_3, J_4)、(J_1, J_2, J_4, J_3)、(J_1, J_3, J_2, J_4)、
(J_2, J_1, J_3, J_4)、(J_2, J_1, J_4, J_3)是拓朴排序序列

(J_1, J_2, J_4, J_3)对应于$P_1 \rightarrow J_1$、$P_2 \rightarrow J_2$、$P_3 \rightarrow J_4$、$P_4 \rightarrow J_3$

HIT
CS&E

• 问题的树表示(即用树表示所有拓朴排序序列)



HIT
CS&E

● 拓朴序列树的生成算法

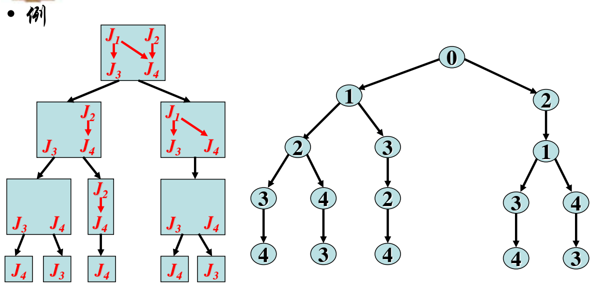
输入：偏序集合S，树根$root$.

输出：由S的所有拓朴排序序列构成的树.

1. 生成树根$root$;
2. 选择偏序集中没有前序元素的所有元素，作为$root$的子节点;
3. For $root$的每个字节点v Do
4. $S=S-\{v\}$;
5. 把v作为根，递归地处理S.

HIT
CS&E

• 例



HIT
CS&E

求解问题的分支界限搜索算法

• 计算解的代价的下界

命题2. 把代价矩阵某行(列)的各元素减去同一个数，不影响优化解的求解.

– 代价矩阵的每行(列)减去同一个数(该行或列的最小数)，使得每行和每列至少有一个零，其余各元素非负.

– 每行(列)减去的数的和即为解的下界.

HIT
CS&E

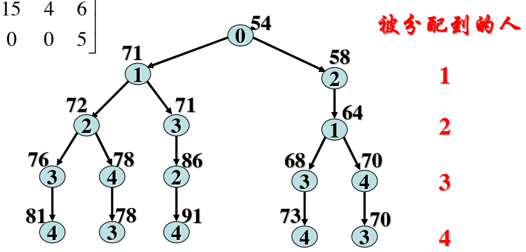
例.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
 & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\
P_1 & 29 & 19 & 17 & 12 \\
P_2 & 32 & 30 & 26 & 28 \\
P_3 & 3 & 21 & 7 & 9 \\
P_4 & 18 & 13 & 10 & 15 \\
 & & -3 & &
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ -12 \\ -26 \\ -3 \\ -10 \\ \\
\end{array}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
17 & 4 & 5 & 0 \\
6 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 15 & 4 & 6 \\
8 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

解代价下界=12+26+3+10+3=54

解空间的加权树表示

$$
\begin{bmatrix}
17 & 4 & 5 & 0 \\
6 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 15 & 4 & 6 \\
8 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

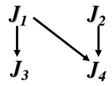


HIT CS&E

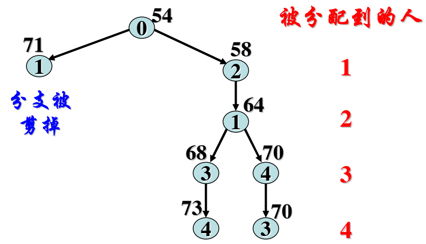
- 分支界限搜索(使用爬山法)算法
  1. 建立根节点，其权值为解代价下界；
  2. 使用爬山法，类似于拓朴排序序列树生成算法求解问题，每产生一个节点，其权值为加工后的代价矩阵对应元素加其父节点权值；
  3. 一旦发现一个可能解，将其代价作为界限，循环地进行分支界限搜索：剪掉不能导致优化解的子解，使用爬山法继续扩展新增节点，直至发现优化解。

- 例

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$



$$\begin{bmatrix} 17 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$



HIT CS&E

7.5 Traveling Salesperson Optimization Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法

HIT CS&E

问题的定义

输入：无向连通图$G=(V, E)$，
每个节点都没有到自身的边，
每对节点之间都有一条非负加权边.

输出：一条由任意一个节点开始
经过每个节点一次
最后返回开始节点的路径，
该路径的代价(即权值只和)最小.

HIT CS&E

转换为树搜索问题

- 所有解集合作为树根，其权值由代价矩阵使用上节方法计算；
- 用爬山法递归地划分解空间，得到二叉树
- 划分过程：
  - 如下选择图上满足下列条件的边(i, j)
    - $\mathrm{Cost}(i, j)=0$ (左子树代价增长为0)
    - $f(i,j)=\min_{k\neq j}\mathrm{Cost}(i, k)+\min_{k\neq i}\mathrm{Cost}(k, j)$
    - (i,j) $\mathrm{cost}(i,j)=0$ 且$f(i,j)$达到最大值

    使右子树代价下界增加最大
  - 所有包含(i, j)的解集合作为左子树
  - 所有不包含(i, j)的解集合作为右子树
  - 计算出左右子树的代价下界

HIT CS&E

分支界限搜索算法

- 在上述二叉树建立算法中增加如下策略：
  - 发现优化解的上界α；
  - 如果一个子节点的代价下界超过α，则终止该节点的扩展.
- 下边我们用一个例子来说明算法

- 构造根节点，设代价矩阵如下

	j=1	2	3	4	5	6	7	
i=1	∞	3	93	13	33	9	57	- 3
2	4	∞	77	42	21	16	34	- 4
3	45	17	∞	36	16	28	25	-16
4	39	90	80	∞	56	7	91	- 7
5	28	46	88	33	∞	25	57	- 25
6	3	88	18	46	92	∞	7	- 3
7	44	26	33	27	84	39	∞	- 26
			-7	-1			-4	

- ➢ 根节点为所有解的集合
- ➢ 计算根节点的代价下界

➢ 得到如下根节点及其代价下界

所有解的集合 L.B=96

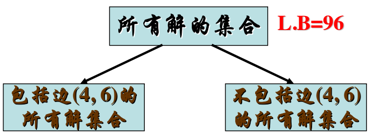
➢ 变换后的代价矩阵为

	j=1	2	3	4	5	6	7
i=1	∞	0	83	9	30	6	50
2	0	∞	66	37	17	12	26
3	29	1	∞	19	0	12	5
4	32	83	66	∞	49	0	80
5	3	21	56	7	∞	0	28
6	0	85	8	42	89	∞	0
7	18	0	0	0	58	13	∞

$f(1,2)=6+1=7$
$f(2,1)=12+0=12$
$f(3,5)=1+17=18$
$f(4,6)=32+0=32$
$f(5,6)=3+0=3$
$f(6,1)=0+0=0$
$f(6,7)=0+5=5$
$f(7,2)=0+0=0$
$f(7,3)=0+8=8$
$f(7,4)=0+7=7$

∞	0	83	9	30	6	50
0	∞	66	37	17	12	26
29	1	∞	19	0	12	5
32	83	66	∞	49	0	80
3	21	56	7	∞	0	28
0	85	8	42	89	∞	0
18	0	0	0	58	13	∞

- 构造根节点的两个子节点
  - ➢ 选择使子节点代价下界增加最大的划分边(4,6)
  - ➢ 建立根节点的子节点：
    - ✓ 左子节点为包括边(4,6)的所有解集合
    - ✓ 左子节点为不包括边(4,6)的所有解集合

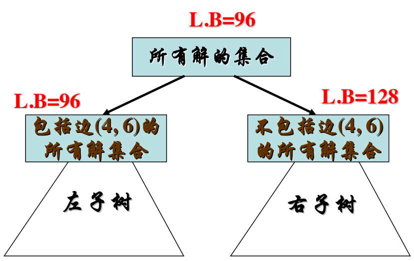


HIT
CS&E

➢ 计算左右子节点的代价下界
- ✓ (4,6)的代价为0，所以左节点代价下界仍为96.
- ✓ 我们来计算右节点的代价下界：
  - ◆ 如果一个解不包含(4,6)，它必包含一条从4出发的边和进入节点6的边.
  - ◆ 由变换后的代价矩阵可知，具有最小代价由4出发的边为(4,1)，代价为32.
  - ◆ 由变换后的代价矩阵可知，具有最小代价进入6的边为(5,6)，代价为0.
  - ◆ 于是，右节点代价下界为：96+32+0=128.

HIT
CS&E

➢ 目前的树为



- 递归地构造左右子树
  - ➢ 构造左子树根对应的代价矩阵
    - ✓ 左子节点为包括边(4,6)的所有解集合，所以矩阵的第4行和第6列应该被删除
    - ✓ 由于边(4,6)被使用，边(6,4)不能再使用，所以代价矩阵的元素$C[6,4]$应该设置为∞.
    - ✓ 结果矩阵如下

	j=1	2	3	4	5	7
i=1	∞	0	83	9	30	50
2	0	∞	66	37	17	26
3	29	1	∞	19	0	5
5	3	21	56	7	∞	28
6	0	85	8	∞	89	0
7	18	0	0	0	58	∞

- **计算左子树根的代价下界**
  - ✓ 矩阵的第5行不包含0
  - ✓ 第5行元素减3，左子树根代价下界为：96+3=99
  - ✓ 结果矩阵如下

$$
\begin{array}{c}
\\ i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
\infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 50 \\
0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 26 \\
29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 5 \\
0 & 18 & 53 & 4 & \infty & 25 \\
0 & 85 & 8 & \infty & 89 & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 58 & \infty
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- **构造右子树根对应的代价矩阵**
  - ✓ 右子节点为不包括边(4,6)的所有解集合，只需要把 $C[4,6]$ 设置为∞
  - ✓ 结果矩阵如下

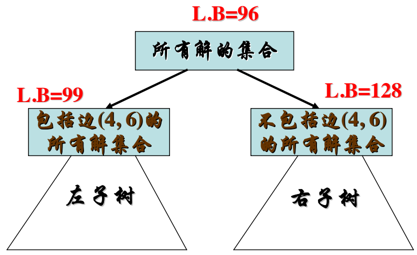
$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
i=1 & \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 \\
2 & 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 \\
3 & 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 \\
4 & 32 & 83 & 66 & \infty & 49 & \infty & 80 \\
5 & 3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 \\
6 & 0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 \\
7 & 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty
\end{array}
$$

- **计算右子树根的代价下界**
  - ✓ 矩阵的第4行不包含0
  - ✓ 第4行元素减32，右子树根代价下界为：128
  - ✓ 结果矩阵如下

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
i=1 & \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 \\
2 & 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 \\
3 & 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 \\
4 & 0 & 51 & 34 & \infty & 17 & \infty & 48 \\
5 & 3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 \\
6 & 0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 \\
7 & 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty
\end{array}
$$

HIT CS&E

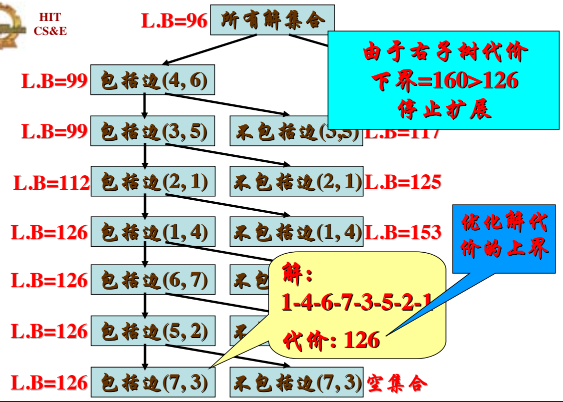
- **目前的树为**



HIT CS&E

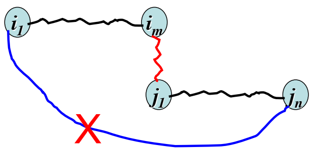
- **使用爬山策略扩展左子树根**
  - ✓ 选择边使子节点代价下界增加最大的划分边(3,5)
  - ✓ 左子节点为包括边(3,5)的所有解集合
  - ✓ 右子节点为不包括边(3,5)的所有解集合
  - ✓ 计算左、右子节点的代价下界：99和117
- **目前树扩展为：**

HIT CS&E



注 意

如果i_1-i_2-…-i_m和j_1-j_2-…-j_m已被包含在一个正在构造的路径中，(i_m,j_1)被加入，则必须避免j_n到 i_1的路径被加入。否则出现环。



7.6 0-1 backpacking problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法

问题定义

给定**n**种物品和一个背包，物品**i**的重量是w_i，价值v_i，背包承重为**C**，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

- 输入：$C>0$, $w_i>0$, $v_i>0$, $1\le i\le n$
- 输出：$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i\in\{0, 1\}$, 满足

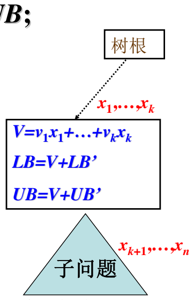
$$\Sigma_{1\le i\le n} w_i x_i \le C,\ \ \Sigma_{1\le i\le n} v_i x_i \text{ 最大}$$

转换为树搜索问题

- 空包为树根，代价下界LB,代价的上界UB;
  - 贪心算法可行解得LB
  - 分数背包问题的优化解代价UB
- 用爬山法依次考虑每个物品的取舍
  递归地划分解空间，得到二叉树
- 划分过程：$(x_1,\ldots,x_k)\rightarrow(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$
  - ✓左子树，将第k+1个物品放入背包$(x_1,\ldots,x_k, 1)$
    计算节点代价的下界LB,上界UB
  - ✓右子树，将第k+1个物品舍弃,$(x_1,\ldots,x_k, 0)$
    计算节点代价的下界LB,上界UB

计算节点的下、上界

- 计算结点的代价下界LB和上界UB;
  已经发现的可行解的代价opt
  $V=v_1x_1+\ldots+v_kx_k$
  待求解的子问题$C-(w_1x_1+\ldots+w_kx_k)$
  $w_{k+1},\ldots,w_n$
  $v_{k+1},\ldots,v_n$
  贪心算法在子问题上的解LB'
  分数背包算法在子问题上的解UB'
- $LB=V+LB'$
- $UB=V+UB'$



LB’:贪心算法可行解

UB’:分数背包算法可行解

分支限界搜索

- 空包为树根，代价下界LB,代价的上界UB;
  - 贪心算法可行解得LB
  - 分数背包问题的优化解代价UB
  - opt=0,用于记录当前发现最优可行解的代价
- 用爬山法取舍第k+1个物品,递归地划分解空间
  划分过程：$(x_1,\ldots,x_k)\rightarrow(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$
  - (1) $C<w_1x_1+\ldots+w_{k+1}x_{k+1}$,$(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$不可行，舍弃
  - (2)$UB=LB$—记录opt=UB,终止扩展$(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$
    - 在剩下的子问题$C-w_1x_1-\ldots-w_{k+1}x_{k+1}$上，贪心策略将得到最优解
    - 贪心算法的解$(x_{k+2},\ldots,x_n)$,与$(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$构成优化解
  - (3)UB<opt, 扩展$(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$得不到优于opt的解，舍弃
  - (4)其他情况，继续扩展

HIT
CS&E

0-1背包问题搜索实例

构造树根

C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

Opt=0

V=0, LB=190, UB=240

V=0

LB=0+(60×1+100×1+120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

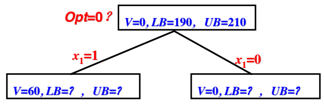
UB=0+(60×1+100×1+120×(50-10-20)/30

=240

HIT
CS&E

第一个物品的取舍

Opt=0 ?



C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

左子树 V=60 C'=50-10=40

LB=60+(100×1+120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

UB=60+(100×1+120×(40-20)/30

=240

右子树 V=0 C'=50-0=50

LB=0+(100×1+120×1+140×0+30×0+40×0)

=220

UB=0+(100×1+120×1

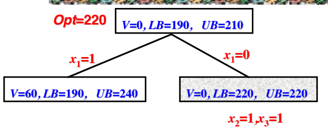
=220

HIT
CS&E

0-1背包问题搜索实例

第一个物品的取舍

Opt=220



C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

左子树 V=60 C'=50-10=40

LB=60+(100×1+120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

UB=60+(100×1+120×(40-20)/30

=240

右子树 V=0 C'=50-0=50

LB=0+(100×1+120×1+140×0+30×0+40×0)

=220

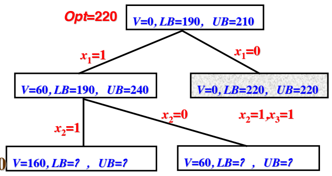
UB=0+(100×1+120×1

=220

爬山法

第二个物品的取舍

Opt=220



C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

左子树 V=160 C'=50-10-20=20

LB=160+(120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

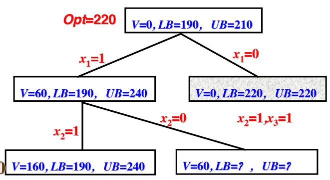
UB=160+(120×20/30)

=240

爬山法

第二个物品的取舍

Opt=220



C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

左子树 V=160 C'=50-10-20=20

LB=160+(120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

UB=160+(120×20/30)

=240

右子树 V=60 C'=50-10=40

LB=60+(120×1+140×0+30×1+40×0)

=210

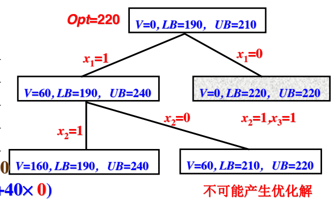
UB=160+(120×1+140×(40-30)/35)

=220

爬山法

第二个物品的取舍

Opt=220



C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

左子树 V=160 C'=50-10-20=20

LB=160+(120×0+140×0+30×1+40×0)

=190

UB=160+(120×20/30)

=240

右子树 V=60 C'=50-10=40

LB=60+(120×1+140×0+30×1+40×0)

=210

UB=160+(120×1+140×(40-30)/35)

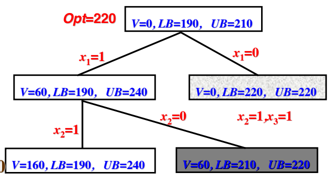
=220

爬山法

第二个物品的取舍

C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2



左子树　V=160　C'=50-10-20=20

LB=160+(120 × 0+140× 0+30× 1+40× 0)

=190

UB=160+(120 ×20/30)

=240

右子树　V=60　C'=50-10=40

LB=60+(120 × 1+140× 0+30× 1+40× 0)

=210

UB=160+(120 ×1+140×(40-30)/35)

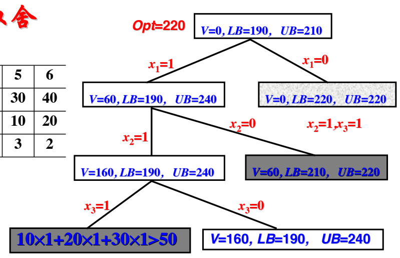
=220

爬山法

第二个物品的取舍

C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2

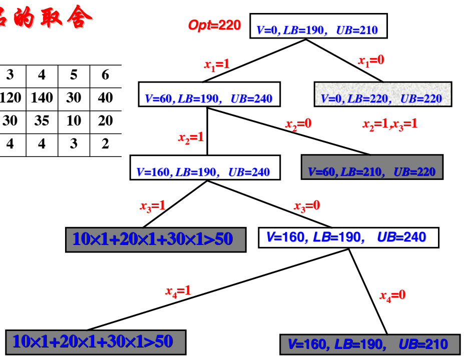


爬山法

第二个物品的取舍

C=50

编号i	1	2	3	4	5	6
价值v_i	60	100	120	140	30	40
重量w_i	10	20	30	35	10	20
v_i/w_i	6	5	4	4	3	2



7.7 The A* Algorithm

- A*算法的基本思想
- A*算法的规则
- 应用A*算法求解最短路径问题

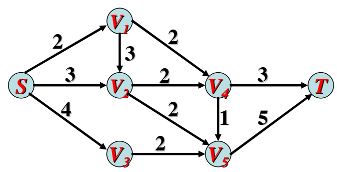
A*算法的基本思想

- A*算法与分支界限策略的比较
  - 分支界限策略是为了剪掉不能达到优化解的分支
  - 分支界限策略的关键是"界限"
  - A*算法的核心是告诉我们在某些情况下,我们得到的解一定是优化解,于是算法可以停止
  - A*算法试图尽早地发现优化解
  - A*算法经常使用Best-first策略求解优化问题

- A*算法关键—代价函数
  - 对于任意节点n
    - $g(n)$＝从树根到n的代价
    - $h^*(n)$＝从n到目标节点的优化路径的代价
    - $f^*(n)$＝$g(n) + h^*(n)$是节点n的代价
  - What is the value of $h^*(n)$?
    - 不知道!
    - 于是,$f^*(n)$也不知道
  - 估计$h^*(n)$
    - 使用任何方法去估计$h^*(n)$,用$h(n)$表示$h^*(n)$的估计
    - $h(n) \le h^*(n)$总为真
    - $f(n)=g(n)+h(n) \le g(n)+h^*(n)=f^*(n)$定义为$n$的代价

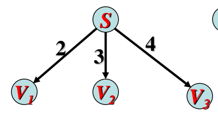
例1. 最短路径问题:

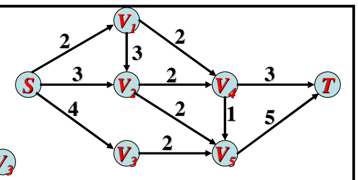
– 输入:



–输出: 发现一个从S到T的最短路径

– 求解树的第一阶段





$g(V_1)=2$, $g(V_2)=3$, $g(V_3)=4$

~~$h^*(V_1)=5$, $f^*(V_1)=g(V_1)+h^*(V_1)=7$~~

– 估计$h^*(n)$

- 从V_1出发有两种可能: 代价为2, 代价为3, 最小者为2
- $h^*(V_1)\geq 2$, 选择$h(n)=2$为$h^*(V_1)$的估计值
- $f(V_1)=g(v_1)+h(V_1)=4$为V_1的代价

- A*算法本质—已经发现的解是优化解

定理1. 使用Best-first策略搜索树, 如果A*选择的节点是目标节点, 则该节点表示的解是优化解.

证明.

令n是任意扩展到的节点, t是选中目标节点.

往证$f(t)=g(t)$是优化解代价.

(1). A*算法使用Best-first策略, $f(t)\leq f(n)$.

(2). A*算法使用$h(n)\leq h^*(n)$估计规则, $f(t)\leq f(n)\leq f^*(n)$.

(3). $\{f^*(n)\}$中必有一个为优化解的代价, 令其为$f^*(s)$.

我们有$f(t)\leq f^*(s)$.

(4). t是目标节点$h(t)=0$, 所以$f(t)=g(t)+h(t)=g(t)\leq f^*(s)$.

(5). $f(t)=g(t)$是一个可能解, $g(t)\geq f^*(s)$, $f(t)=g(t)=f^*(s)$.

HIT CS&E

A*算法的规则

(1). 使用Best-first策略搜索树;

(2). 节点n的代价函数为$f(n)=g(n)+h(n)$, $g(n)$是从根到n的路径代价, $h(n)$是从n到某个目标节点的优化路径代价;

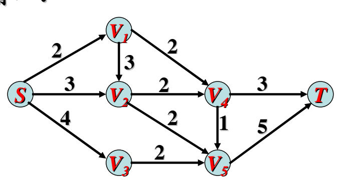
(3). 对于所有n, $h(n)\leq h^*(n)$;

(4). 当选择到的节点是目标节点时, 算法停止, 返回一个优化解.

HIT CS&E

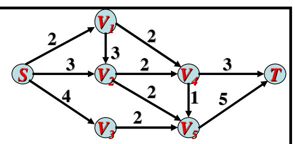
应用A*算法求解最短路径问题

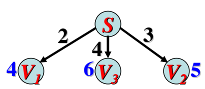
- 问题的输入:



- A*算法的执行全过程

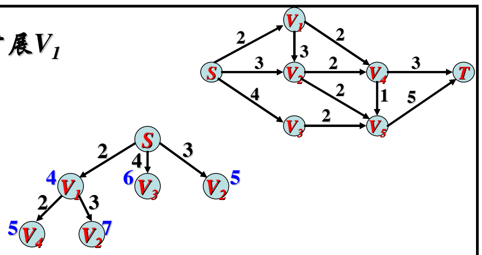
Step 1





$g(V_1)=2$	$h(V_1)=min\{2,3\}=2$	$f(V_1)=2+2=4$
$g(V_3)=4$	$h(V_3)=min\{2\}=2$	$f(V_3)=4+2=6$
$g(V_2)=3$	$h(V_2)=min\{2,2\}=2$	$f(V_2)=2+2=5$

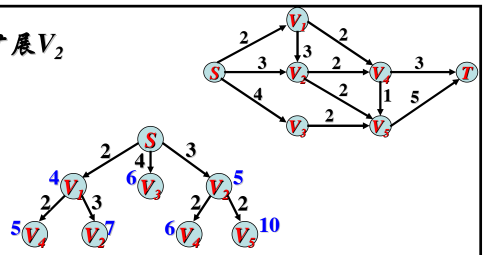
Step 2. 扩展V_1



$g(V_4)$=2+2=4 $h(V_4)$=min{3,1}=1 $f(V_4)$=4+1=5

$g(V_2)$=2+3=5 $h(V_2)$=min{2, 2}=2 $f(V_2)$=5+2=7

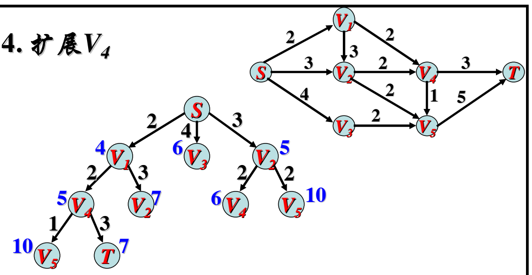
Step 3. 扩展V_2



$g(V_4)$=3+2=5 $h(V_4)$=min{3,1}=1 $f(V_4)$=5+1=6

$g(V_5)$=3+2=5 $h(V_5)$=min{5}=5 $f(V_2)$=5+5=10

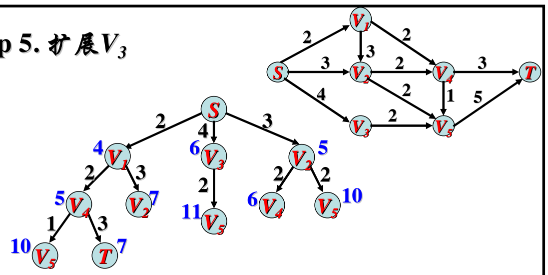
Step 4. 扩展V_4



$g(V_5)$=2+2+1=5 $h(V_5)$=min{5}=5 $f(V_5)$=5+5=10

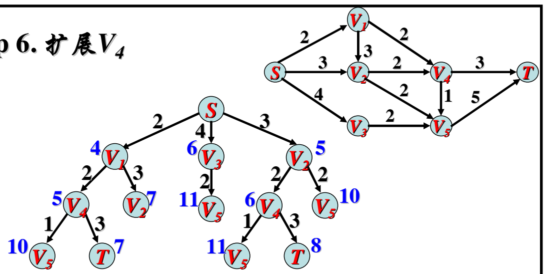
$g(T)$ =2+2+3=7 $h(T)$=0 $f(V_2)$=7+0=7

Step 5. 扩展V_3



$g(V_5)$=4+2=6 $h(V_5)$=min{5}=5 $f(V_5)$=6+5=11

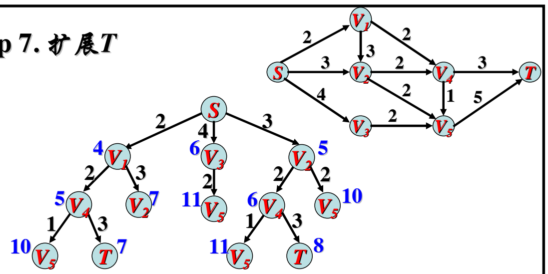
Step 6. 扩展V_4



$g(V_5)$=3+2+1=6 $h(V_5)$=min{5}=5 $f(V_5)$=6+5=11

$g(T)$ =3+2+3=8 $h(T)$=0 $f(T)$=8+0=8

Step 7. 扩展T



因为T是目标节点，所以我们得到解：

$S \rightarrow V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow T$