算法作业 第二章

1. 证明：$\Theta(f(n))+\Theta(g(n))=\Theta(f(n)+g(n))$。

2. 证明：对任意正整数常数 k，$\log^{k} n=o(n)$。

3. 证明：$\log(n!)=\Theta(n\log n)$

4. 证明：$\lceil\log(n+1)\rceil=\lfloor\log n\rfloor+1$ 对任意正整数 n 成立。

5. 利用命题：

（1）如果 $f(x)$ 单调递增，则 $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$。

（2）如果 $f(x)$ 单调递减，则 $\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$。

证明：对于任意正整数 k，$\sum_{i=1}^{n} i^{k}=\Theta(n^{k+1})$。

6. 求解递归方程：

$$\mathrm{T(n)}=\begin{cases} \mathrm{d} & \mathrm{n}\le 34 \\ 2\mathrm{T(n/2+17)}+\mathrm{n} & \mathrm{n}>34 \end{cases}$$

7. 证明：用迭代法解递归方程 $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$，$T(1)=1$。

8. 求解下列递归方程，若没有给初始值，则假设对于足够小的 n，T(n)是常量。

(1) $T(n)=3T(n-1)$，$T(0)=5$；

(2) $T(n)=2T(n-1)$，$T(0)=2$；

(3) $T(n)=5T(n-1)-6T(n-2)$，$T(0)=1$，$T(1)=1$；

(4) $T(n)=T(n-2)$，$T(0)=0$，$T(1)=-1$；

(5) $T(n)=57(n-1)-3T(n-2)$，$T(0)=1$，$T(1)=1$；

(6) $T(n)=nT(n-1)+1$，$T(0)=1$；

(7) $T(n)=3T(n-1)+2^{n}$，$T(0)=3$；

(8) $T(n)=2T(n-1)+n^{2}$，$T(0)=1$；

(9) $T(n)=5T(n/3)+n$，$T(1)=1$；

(10) $\mathrm{T}(n)=4\mathrm{T}(n/2)+n$，$\mathrm{T}(1)=1$；

(11) $\mathrm{T}(n)=2T(n/2)+n^{1/2}$，$\mathrm{T}(n)=1$ 对 $n<4$ 成立；

(12) $\mathrm{T}(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+T(\lfloor 3n/4 \rfloor)+n$，$\mathrm{T}(n)=4$，对 $\mathrm{n}<4$ 成立；

(13) $\mathrm{T}(n)=2\mathrm{T}(n/2)+n^{2}$，$\mathrm{T}(1)=1$；

(14) $\mathrm{T}(n)=T(n/2)+n^{1/2}$，$\mathrm{T}(n)=2$ 对 $\mathrm{n}<4$ 成立；

(15) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$

(16) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

(17) $T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$

(18) $T(n) = 5T(n/5) + n/lgn$

(19) $T(n) = T(n-2) + 2lgn$

(20) $T(n) = 3T(n/2) + nlgn$

(21) $T(n) = 2T(n/2) + n/lgn$

(22) $T(n) = T(n-1) + lgn$

(23) $T(n) = T(n-1) + 1/n$

(24) $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$

(25) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$