2.1 证明：$\Theta(f(n))+\Theta(g(n))=\Theta(f(n)+g(n))$。

2.2 证明：$f(n)=\Theta(g(n))\Leftrightarrow g(n)=\Theta(f(n))$。

2.3 证明：$f(n)=o(g(n))\Leftrightarrow g(n)\in w(f(n))$。

2.4 证明以下所有命题：

（1）传递性

$(a)\ f(n)=\Theta(g(n))\cap g(n)=\Theta(h(n))\Rightarrow f(n)=\Theta(h(n))$。

$(b)\ f(n)=\mathrm{O}(g(n))\cap g(n)=\mathrm{O}(h(n))\Rightarrow f(n)=\mathrm{O}(h(n))$。

$(c)\ f(n)=\Omega(g(n))\cap g(n)=\Omega(h(n))\Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$。

$(d)\ f(n)=\mathrm{o}(g(n))\cap g(n)=\mathrm{o}(h(n))\Rightarrow f(n)=\mathrm{o}(h(n))$。

$(e)\ f(n)=w(g(n))\cap g(n)=w(h(n))\Rightarrow f(n)=w(h(n))$。

（2）自反性：

$$f(n)=\Theta(g(n))\ iff\ \ g(n)=\Theta(f(n))$$

（3）反对称性：

$$f(n)=\mathrm{O}(g(n))\ iff\ \ g(n)=\Omega(f(n))$$
$$f(n)=\mathrm{o}(g(n))\ iff\ \ g(n)=w(f(n))$$

2.5 证明：对任意正整数常数 k，$\log^{k} n=o(n)$。

2.6 证明：$\log(n!)=\Theta(n\log n)$

2.7 对于任意实数 $r>1$，令 $\mathrm{H}_r(n)=\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+...+\frac{1}{n^r}$。证明：$\mathrm{H}_r(n)=\Theta(1)$。

2.8 证明：$\lceil\log(n+1)\rceil=\lfloor\log n\rfloor+1$ 对任意正整数 n 成立。

2.9 证明：对于任意正整数 a、b 均有

（a）$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor\le\frac{a+(b-1)}{b}$

（b）$\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil\ge\frac{a-(b-1)}{b}$

2.10 利用命题：

（1）如果 $f(x)$ 单调递增，则 $\int_{m-1}^{n} f(x)dx\le\sum_{k=m}^{n} f(k)\le\int_{m}^{n+1} f(x)dx$。

（2）如果 $f(x)$ 单调递减，则 $\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$。

证明：对于任意正整数 k，$\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \Theta(n^{k+1})$。

2.11 证明：设 $f(x)$ 是单调递增函数且 $f(x)$ 取整数时 x 必为整数，则 $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$，$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$。

2.12 求解递归方程：

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} \mathrm{d} & \mathrm{n} \le 34 \\ 2\mathrm{T(n/2+17)} + \mathrm{n} & \mathrm{n} > 34 \end{cases}$$

2.13 证明：用迭代法解递归方程 $\mathrm{T}(n) = 2T(n/2) + n\log n$，$\mathrm{T}(1) = 1$。

2.14 求解下列递归方程：

（1）$\mathrm{T}(n) = 3T(n-1)$，$\mathrm{T}(0) = 5$；

（2）$\mathrm{T}(n) = 2T(n-1)$，$\mathrm{T}(0) = 2$；

（3）$\mathrm{T}(n) = 5T(n-1) - 6T(n-2)$，$\mathrm{T}(0) = 1$，$\mathrm{T}(1) = 1$；

（4）$\mathrm{T}(n) = T(n-2)$，$\mathrm{T}(0) = 0$，$\mathrm{T}(1) = -1$；

（5）$\mathrm{T}(n) = 57(n-1) - 3T(n-2)$，$\mathrm{T}(0) = 1$，$\mathrm{T}(1) = 1$；

（6）$\mathrm{T(n) = nT(n\text{-}1) + 1}$，$\mathrm{T}(0) = 1$；

（7）$\mathrm{T}(n) = 3T(n-1) + 2^{n}$，$\mathrm{T}(0) = 3$；

（8）$\mathrm{T}(n) = 2T(n-1) + n^{2}$，$\mathrm{T}(0) = 1$；

（9）$\mathrm{T}(n) = 5T(n/3) + n$，$\mathrm{T}(1) = 1$；

（10）$\mathrm{T}(n) = 4\mathrm{T}(n/2) + n$，$\mathrm{T}(1) = 1$；

（11）$\mathrm{T}(n) = 2T(n/2) + n^{1/2}$，$\mathrm{T}(n) = 1$ 对 $n < 4$ 成立；

（12）$\mathrm{T}(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor 3n/4 \rfloor) + n$，$\mathrm{T}(n) = 4$，对 $\mathrm{n} < 4$ 成立；

（13）$\mathrm{T}(n) = 2\mathrm{T}(n/2) + n^{2}$，$\mathrm{T}(1) = 1$；

（14）$\mathrm{T}(n) = T(n/2) + n^{1/2}$，$\mathrm{T}(n) = 2$ 对 $\mathrm{n} < 4$ 成立；