10.28

12. 对于 $x \in A$ 考虑多项式 $f(t) = \prod_{\sigma \in G}(t - \sigma(x))$, 那么 $\forall \sigma_0 \in G$, 有 $\sigma_0(f(t)) = f(t)$, 注意到多项式相等意味着同次系数相等, 于是 $f(t)$ 的系数均在 A^G 内, 而 $f(x) = 0$(G 中有恒同自同构) 这就说明了 A 在 A^G 上整. 然后对于任意的 $\sigma \in G$, 可以给出在 $S^{-1}A$ 上的作用为 $\sigma(a/s) = \sigma(a)/\sigma(s), a \in A, s \in S$, 不难验证这个映射与代表元选取无关. 而 $(S^G)^{-1}A^G \subset (S^{-1}A)^G$ 是显然的, 我们主要证明反包含. 假设 $\sigma(a)/\sigma(s) = a/s$ 对任意的 $\sigma \in G$ 都对, 那么我们可以找到 $t_\sigma \in S$, 使得 $(\sigma(a)s - \sigma(s)a)t_\sigma = 0$. 那么我们便有 (如果有必要, 用 $\prod_{\tau \in G}\tau(t_\sigma)$.)

$$\left(\left(\sum_{\sigma \in G}\sigma(a)\right)s - \left(\sum_{\sigma \in G}\sigma(s)\right)a\right)\prod_{\sigma \in G}t_\sigma = 0$$

因此 $a/s \in (S^G)^{-1}A^G$, 同时注意到他们的乘法由 A 诱导得出, 所以这是一个同构.

13. 利用提示给的思路. 设 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \in P, x_1 \in \mathfrak{p}_1$, 那么 $\prod_\sigma \sigma(x) \in \mathfrak{p}_1 \cap A^G = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_2$, 因此对某个 $\sigma \in G, \sigma(x) \in \mathfrak{p}_2$. 由此我们得到 $\mathfrak{p}_1$ 包含在 $\cup_{\sigma \in G}\sigma(\mathfrak{p}_2)$ 中, 然后运用 (1.11) 和 (5.9) 我们便可以推出结论.

14. 由于 σ 是一个自同构,$\sigma(B) = B$ 是显然的. 由于 $B^G \subseteq K$ 在 A 上整, 所以我们有 $B^G = A$.

11.4

推论 2.A 为有限生成 $k-$ 代数, 且为整环.$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ 为 A 的素理想, 则所有始于 $\mathfrak{q}$ 终于 $\mathfrak{p}$ 的极大长度的素理想链的长度为 $\dim A/\mathfrak{q} - \dim A/\mathfrak{p}$.

仿照推论 1, 的证明, 我们任取将始于 $\mathfrak{q}$ 终于 $\mathfrak{p}$ 的素理想长度极大链, 记长度为 x, 将它扩充为 A 的长度极大的链, 由长度相等, 我们有 $\dim A_\mathfrak{q} + x + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A = \dim A_\mathfrak{q} + \dim A/\mathfrak{q}$, 解得 $x = \dim A/\mathfrak{q} - \dim A/\mathfrak{p}$. 由于是任取的, 所以结论成立.

EX3. A 为有限生成 k-代数, 那么下列断言等价:

(1)$\dim A = 0$;

(2)A 为 k 上有限维向量空间.

(3)A 只有有限个素理想;

(4)A 只有有限个极大理想;

对 A 使用 Noether 正规化引理, 得到 $N = k[y_1, y_2, \cdots, y_d], y_1, y_2, \cdots, y_d$ 在 k 上代数无关,A 在 N 上整.

(1) $\Rightarrow$ (2), 则 $\dim N = \dim A = 0$. 于是 $N = k$, 这说明 A 在 k 上整, 于是 A 为有限生成 $k-$ 模, 记为 k 上有限维向量空间.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由于每个素理想都是向量空间 A 的子空间, 所以不难得知它们的个数是有限的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 每个素理想都是极大理想.

(4) $\Rightarrow$ (1) 由于 A 在 N 上整, 那么对于 N 中的极大理想 $\mathfrak{m}$, 由定理 5.10 可以找到 A 中素理想使得 $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$, 再由系理 5.8 我们知道 $\mathfrak{m}$ 极大等价于 $\mathfrak{p}$ 极大, 而 A 中只有有限个极大理想, 它们在 N 中的限制构成了 N 的全部极大理想. 所以 N 中极大理想个数不超过 A 中极大理想个数. 但我们注意到若 $d \geq 1, \forall a \in k, (x_1 - a, x_2 - a, \cdots, x_d - a)$ 均为 N 中极大理想, 所以 $d = 0$, 那么 $\dim A = \dim N = 0$.

11.9

EX1.A, B 为 Noether 环,$A \hookrightarrow B$ 为整性扩张. 那么

(1)$\dim A = \dim B$;

(2) 对于 B 中任意的素理想 $\mathfrak{q}$, 有 $ht\,(\mathfrak{q}) \leq ht(\mathfrak{q} \cap A), \dim B/\mathfrak{q} = \dim A/(\mathfrak{q} \cap A)$;

(3) 进一步假设 A, B 为整环,B 在 A 上整, 则 (2) 中第一个式子等号成立.

(1) 由于 A 中素理想链可以通过上升定理得到 B 中素理想链, 所以 $\dim A \leq$

$\dim B$, 对于 B 中长度极大的素理想链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$, 我们可以限制得到 A 中的素理想链 $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$. 再由系理 5.9 我们知道这是一条严格的降链, 所以我们有 $\dim A \geq \dim B$, 从而得证.

(2) 对于给定的素理想 $\mathfrak{q}$, 取 B 中终于 $\mathfrak{q}$ 长度极大的素理想升链 $\mathfrak{q}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}$, 我们将之限制在 A 上得到得到 A 中的素理想链 $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q} \cap A$. 由系理 5.9 这是一条严格的素理想降链, 并且终于 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$, 于是我们有 $ht(\mathfrak{q}) \leq ht(\mathfrak{q} \cap A)$. 第二个等式是由于 $B/\mathfrak{q}$ 在 $A/(\mathfrak{q} \cap A)$ 上整, 使用第一问的结论, 有 $\dim B/\mathfrak{q} = \dim A/(\mathfrak{q} \cap A)$.(不等号的产生似乎与固定了链端点有关)

(3)A 中终于 $\mathfrak{p}$ 的素理想链 $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q} \cap A$, 都可以使用下降定理得到 B 中的素理想链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}$, 所以另一半不等号成立.

1. 假设 $\mathfrak{q}_i$ 是一个孤立的准素分支. 那么 $A_{\mathfrak{p}_i}$ 是一个 $Artin$ 局部环, 因此如果 $\mathfrak{m}_i$ 是它的极大理想, 对充分大的 r 有 $\mathfrak{m}_i^r = 0$, 于是对于这些大的 r 有 $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{(r)}$. 若 $\mathfrak{q}_i$ 为一嵌入准素分解, 则 $A_{\mathfrak{p}_i}$ 不是 $Artin$ 环, 因此这些幂次 $\mathfrak{m}_i^r$ 都不相同, 故 $\mathfrak{p}_i^{(r)}$ 也全不同. 因此在一个给定的准素分解中, 我们可用由 $\mathfrak{p}$ 准素理想 $\mathfrak{p}_i^{(r)}, r \geq r_i$ 所构成的无限集合中的任一元素去替换 $\mathfrak{q}_i$, 于是存在 (0) 的无限多个极小准素分解, 这些分解的差别仅在于 $\mathfrak{p}_i$-分支的不同.

3.(1) $\Rightarrow$ (2) 可以使用 8.7 将问题转化到 A 为 $Artin$ 局部环的情形. 由零点定理,A 的同余类域是 k 的有限扩张. 然后利用 A 作为 A-模具有有限长度这一事实.

(2) $\Rightarrow$ (1) 注意到 A 的理想是 k-向量子空间, 因此满足降链条件.

11.11

推论:I 为 A 中理想, 则 A/I 为有限长度 A-模 $\Leftrightarrow$ 包含 I 的素理想都是极大理想.

EX1. $(A, \mathfrak{m})$ 为局部环,$I \subset \mathfrak{m}$ 为极大理想, 则 $l(A/I) < \infty \Leftrightarrow \exists n >> 0$, 有 $\mathfrak{m}^n \subseteq I$

$\Rightarrow$ 记典范同态为 $f: A \to A/I$, 过渡到商环 $(A/I, \mathfrak{m}/I)$. 如果商环中除了 $\mathfrak{m}/I$ 还有其他的素理想 $\mathfrak{p}$, 那么 $\mathfrak{p}$ 在 A 中的原像为包含 I 的素理想, 由 $l(A/I) < \infty$ 我们知道任何包含 I 的素理想极大, 那么只能为 $\mathfrak{m}$. 那么 $f^{-1}(\mathfrak{p}) = m \Rightarrow \mathfrak{p} = f(f^{-1}(\mathfrak{p})) = f(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}/I$, 这说明 $(A/I, \mathfrak{m}/I)$ 中只有一个素理想, 即它为局部 $Artin$ 环, 那么 $\mathfrak{m}/I$ 为 A/I 中幂零理想, 即存在 $n >> 0$, 使得 $(\mathfrak{m}/I)^n = 0$, 回到 A 就可以得到结论.

$\Leftarrow$ 任取包含 I 的素理想 $\mathfrak{p}$, 我们有 $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{p}$, 做求根运算, 有 $\mathfrak{m} \subset \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, 由于 $\mathfrak{m}$ 极大, 故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, 也就是说 $\mathfrak{p}$ 是极大的. 由推论我们有 $l(A/I) < \infty$.

EX2 M 为有限生成 A-模, 那么下列断言等价:

(1)M 是有限长度的 A-模;

(2)$Supp(M) \subset Max(A)$;

(3)$A \backslash Ann(M)$ 是有限长度的 A-模.

其中 $Supp(M) = \{\mathfrak{p}\text{为素理想} | \mathfrak{p} \supseteq Ann(M)\}, Max(A) = \{A\text{中极大理想}\}$.

对理想 $Ann(M)$ 使用推论我们有 (2) $\Leftrightarrow$ (3), 下面我们证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 和 (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3), 取 M 的一组生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 构造 A-模映射 $f: A \mapsto M^n, a \mapsto (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$, 那么 $\ker f = Ann(M)$, 于是 $A/Ann(M) = A/\ker(f)$ 同构于 M^n 的一个子模, 而 M^n 是有限长度的, 所以 $A/Ann(M)$ 也是有限长度的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 命题 6.5: 令 A 是 Noether(或 Artin) 环.M 是有限生成 A-模, 那么 M 是 Noether(或 Artin) 模. 而有限长度模为满足 $a.c.c$ 和 $d.c.c$ 条件的模. 对 $A/Ann(M)$ 和忠实 $A/Ann(M)$-模 M 使用命题, 得到 M 为有限长度的 $A/Ann(M)$ 模. 注意到 A 和 $A/Ann(M)$ 在 M 上的作用是一致的, 通过验证子模的定义可知 M 的 A 子模 M' 同时也是 $A/Ann(M)$ 子模,, 反之亦然, 那么 $a.c.c$ 和 $d.c.c$ 条件在 A-模 M 中也满足. 推出 M 是有限长度的 A-模.

EX3. $(A, \mathfrak{m})$ 为局部环,$k := A/\mathfrak{m}$ 为域, 若 $x_1, \cdots, x_t \in \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的作为 $A-$ 模的一组

生成元, 则 $x_1,\cdots,x_t$ 在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像是 k 上向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组生成元.

由于 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\{\overline{\sum_{i=1}^t x_1 a_i}\ a_i\in A, x_i\in\mathfrak{m}\}=\{\sum_{i=1}^t\overline{a_i}\cdot\overline{x_i}\}$, 其中等价类是相对 $\mathfrak{m}^2$ 来说的. 我们只要说明,a 在 k 中的等价类 $a+\mathfrak{m}$ 与 a 在 $\mathfrak{m}^2$ 中的等价类 $a+\mathfrak{m}^2$ 作用在 x_i 上是一样的, 那么我们就可以将最开始的式子换为 k 系数, 也就证明了 $\{\overline{x_i}\}$ 为 k 向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组生成元. 由于 $(a+\mathfrak{m}^2)(x+\mathfrak{m}^2)=ax+\mathfrak{m}^2$, 注意到 $x_i\in\mathfrak{m}$ 所以 $(a+\mathfrak{m})(x+\mathfrak{m}^2)=ax+x\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2=ax+\mathfrak{m}^2$, 这样就完成了证明.