1. 由 $(m,n)=1$ 可知 $\exists s,t\in\mathbb{Z}$ 使得 $ms+nt=1$. 由于 $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n$ 由 $1\otimes 1$ 生成, 我们只用证明 $1\otimes 1=0$ 即可. 事实上,$(ms)(1\otimes 1)=(ms)\otimes 1=0\otimes 1=0,(nt)(1\otimes 1)=1\otimes(nt)=1\otimes 0=0$ 但是 $(ms+nt)(1\otimes 1)=1\otimes 1=0$, 故 $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n=0$

2. 取 $f=id_a,g$ 为典范同态, 那么 $a\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A/a\to 0$ 是正合的. 与 M 做张量积得到正合列 $a\otimes M\xrightarrow{\tilde{f}}A\otimes M\xrightarrow{\tilde{g}}(A/a)\otimes M\to 0$. 定义同态 $h:a\otimes M\to a(A\otimes M)$ 为 $h(a\otimes m)=a(e\otimes m)=a\otimes m$, 显然为单射, 再由 $a(A\otimes M)=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(A_i\otimes m_i)\right\}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i'\otimes m_i\right\}$, 故 h 又为满射, 从而是一个同构. 故有 $a\otimes M\cong a(A\otimes M)\cong aM$. 再由 $ker\tilde{g}=Im\tilde{f}=a\otimes M\cong aM, A\otimes M\cong M$, 得到 $(A/a)\otimes M\cong(A\otimes M)/(a\otimes M)\cong M\otimes aM$.

3. 设 m 为 A 的极大理想, 则 $k=A/m$ 为域, 设 $M_k=k\otimes_A M\cong M/mM, N_k=k\otimes_A N\cong N/mN$. 由 $M\otimes_A N=0\Rightarrow M\otimes_A N\otimes_A k=M\otimes_A(N\otimes_A k)=M\otimes_A N_k=0$. 利用习题 2.15 我们有 $M_k\otimes_k N_k=(M\otimes_A k)\otimes_k N_k\cong M\otimes_A(k\otimes_k N_k)\cong M\otimes_A N_k=0$, 注意到 M_k,N_k 为域上向量空间. 故我们有 $M_k=0$, 或 $N_k=0$. 当 $M_k=0$ 时由 $Nakayama$ 引理导出的命题 2.8, 取 $0\in M$, 它在 M_k 中的像为 0 且生成 M_k, 故 0 生成 M, 则 $M=0$. 证毕.

4. 我们先证明: 对于任意的 A 模 N 有 A 模同构

$$\varphi_N:\left(\bigoplus_{i\in I}M_i\right)\otimes_A N\to\sum_{i\in I}(M_i\otimes_A N)$$

$$(x_i)\otimes y\to(x_i\otimes y)$$

其中 $x_i\in M_i,(x_i)\in\bigoplus_{i\in I}M_i, y\in N$. 事实上,$(x_i)\times y\to(x_i\times y)$ 定义了 $\bigoplus_{i\in I}M_i\times N$ 到 $\oplus_{i\in I}(M_i\otimes_A N)$ 的一个双线性映射. 由张量积定义可知 φ_N 是一个良定义的 A 模同态, 反之令 l_i 为 M_i 到 $\bigoplus_{i\in I}M_i$ 的典范嵌入, 则

$l_i \otimes id_N$ 给出由 $M_i \otimes_A N$ 到 $(\oplus_{i\in I} M_i) \otimes_A N$ 的模同态. 故存在模同态

$$\psi_N : \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N) \to \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N$$

$$(x_i \otimes y) \to (x_i) \otimes y$$

易见 φ_N 与 ψ_N 互逆, 故 φ 是模同构. 其次容易验证上述同构 φ_N 是自然的. 对于任意的 A 模的单同态 $\alpha : N \to T$, 显然 $id_{M_i} \otimes \alpha : M_i \otimes_A N \to M_i \otimes_A T$ 都是单射 $(\forall i \in I)$ 当且仅当

$$\alpha^* : \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N) \to \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A T)$$

是单射. 由同构 φ 的自然性 α^* 是单射当且仅当

$$id \otimes \alpha : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \to \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A T$$

是单射, 故 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是平坦的 A 模当且仅当所有的 $M_i(i \in I)$ 是平坦的 A 模.

7. 将正合列 $0 \to p \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A/a \to 0$ 与 $A[x]$ 做张量积, 由习题 5 知 $A[x]$ 是平坦的, 故得到正合列 $0 \to p \otimes A[x] \xrightarrow{f\otimes 1} A \otimes A[x] \xrightarrow{g\otimes 1} (A/p) \otimes A[x] \to 0$, 利用习题 6, 有 $p \otimes A[x] \cong p[x], (A/p) \otimes A[x] \cong (A/p)[x]$. 则上述正合列可以写成 $0 \to p[x] \xrightarrow{\tilde{f}} A[x] \xrightarrow{\tilde{g}} (A/p)[x] \to 0$. 注意到 $(A/p)[x]$ 为整环上的多项式环亦为整环, 故 $A[x])/p[x] \cong (A/p)[x]$ 也为整环, 那么 $p[x]$ 为素理想.

8.u 诱导的同态 $M/aM \to N/aN$ 为 $m + aM \to u(m) + aN$. 由于这是一个满同态, 故 N/aN 每个陪集至少有一个代表元素包含在 $Im\ u$ 中. 所以 $Im\ u + aN = N$ 注意到 $Im\ u$ 为有限生成模 N 的一个子模,a 为包含在大根中的极大理想, 利用系理 2.7 得到 $N = Im\ u$, 故 u 为满同态.

11. 必要性: 设 m 为 A 中的一个极大理想并设 $\varphi : A^m \to A^n$ 是一个同构. 那

么 $1\otimes\varphi:(A/m)\otimes A^m\to(A/m)\otimes A^n$ 利用习题 2, 得到 $(A/m)^m\to(A/m)^n$ 上的一个同构, 注意到这是域上向量空间的同构, 故 $m=n$. 充分性显然.

若 $m<n$ 取 $A^m\xrightarrow{\varphi}A^n\xrightarrow{\psi}A^m$, 其中 ψ 为投影, 则 ψ 为满射, 那么 $\psi\circ\varphi$ 也是满射, 则 $\psi\circ\varphi$ 为单射, 则为同构, 但 ψ 显然不可逆, 故矛盾, 所以 $m\geq n$.

12. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 A^n 的一组基. 由于 $M/ker\ \varphi\cong A^m$, 取 e_i 的一组原像 $\overline{u}_i(1\leq i\leq n)$, 再从陪集中任取一个代表元还记为 u_i. 记 $\{u_1,\cdots u_n\}$ 生成的模为 N. 我们证明 $M=N\oplus ker\ \varphi$ 即可得到原命题. 首先由 N 的构造方法可知 $N\cap ker\varphi$, 且任一 $m\in M$ 都有 $\overline{m}=m+\ker\varphi=u_{i(m)}+\ker\varphi$ 故 $M=N+\ker\ \varphi$