9.2 利用分式化与乘积可交换以及 Dedekind 整环中理想可分解为素理想的乘积, 我们可以看出这个等式是一个局部性质. 不失一般性我们可以假设 A 是一个离散赋值环,v 为其离散赋值. 由理想的乘积定义显然有 $c(fg) \subseteq c(f)c(g)$. 假设 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 由 x 生成, 记 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, a_i, b_j \in A$. 由假设 A 中理想 $c(f) = x^sA, c(g) = x^tA$, 那么 $v(x) = 1, \min\{v(a_0), v(a_1), \cdots v(a_n)\} = s, \min\{v(b_0), v(b_1), \cdots, v(b_m)\} = t$, 则存在 $0 \le n_0 < n, 0 \le m_0 < m$ 使得 $v(a_{n_0}) = s, v(b_{m_0}) = t$, 并且 $\forall i < n_0, j < m_0, v(a_i) > s, v(b_j) > t$. 此时 $x^{n_0+m_0}$ 在多项式 fg 中的系数为

$$c_{n_0+m_0} = \sum_{i+j=n_0+m_0} a_o b_j$$

这里我们约定 $a_i = b_j = 0$ 如果 $i > n$ 或 $j > m$. 那么 $v(a_{n_0}b_{m_0}) = s + t$, 并且由 n_0, m_0 的选取可知其他项的值严格大于 $s + t$. 因此 $v(c_{n_0+m_0}) = s + t$, 这说明 $c(fg) \supseteq c_{n+0+m_0}A = x^{s+t}A = c(f)c(g)$.

9.5 利用 Chap3.EX13,Chap7EX16, 我们有 M 为平坦模 $\Leftrightarrow$ 对于任意素理想 $\mathfrak{p}, M_{\mathfrak{p}}$ 自由 $\Leftrightarrow$ 对于任意素理想 $\mathfrak{p}, M_{\mathfrak{p}}$ 无扭.

9.6 取 A 的一个素理想 $\mathfrak{p}$; 那么 $M_{\mathfrak{p}}$ 是主理想整环 $A_{\mathfrak{p}}$ 上的有限生成扭型模. 如果 $Ann(M) \neq 0$, 由于 M 是一个扭子模, 那么 $Ann(M) = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m}, n_i > 0$, 然而 $Supp(M) = V(Ann(M)) = \{\mathfrak{p}_1 \cdots, \mathfrak{p}_m\}$. 由主理想整环上的扭模分解给出

$$M_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{t} (A/\mathfrak{p}^{m_i})_{\mathfrak{p}}$$

记 D 为右边的模, 实际上 $D_{\mathfrak{p}} = D$. 这是由于如果 A 是 Dedekind 整环,$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ 为 A 的非零素理想, 对于 $m > 0$ 有,$(A/\mathfrak{p}^m)_{\mathfrak{p}} \simeq A/\mathfrak{p}^m, (A/\mathfrak{p}^m)_{\mathfrak{q}} = 0$. 对每个 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} \in Supp(M)$, 记 D_i 为相应的给出 $M_{\mathfrak{p}}$ 如上式分解的 D, 那么 $(D_i)_{\mathfrak{p}_j} = \delta_{ij}D_i$. 令

$$D = \bigoplus_{i=1}^{t} D_i$$

观察合成

$$M \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq 0} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{m} D_i$$

在 A 的任一非零素理想处做局部化时是一个同构. 所以原来的映射是同构.

9.7 先假设 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}$ 为一素理想, 那么当 $n>0$ 时,$A/\mathfrak{p}^n \simeq (A/\mathfrak{p}^n)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$, 为主理想整环的商环, 自然也是主理想环. 而对于一般的 $\mathfrak{a}$, 有分解 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{n_1}\cdots\mathfrak{p}_m^{n_m}$. 注意到

$$A/\mathfrak{a} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq 0}(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{m}(A/\mathfrak{p}_i^{n_i})$$

由之前的练习可知 $A/\mathfrak{a}$ 是主理想整环的积, 也是主理想整环.

9.9 如果 $x\equiv x_i(\mod \mathfrak{a}_i), x\equiv x_j(\mod \mathfrak{a}_{\mathrm{j}})$, 那么 $x-x_i\in\mathfrak{a}_i, x-x_j\in\mathfrak{a}_j$, 从而 $x_i-x_j\in\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j$, 亦即 $x_i\equiv x_j(\mod \mathfrak{a}_{\mathrm{i}}+\mathfrak{a}_j)$

另一个方向, 由提示考虑映射的合成

$$A \xleftarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i<j} A/(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j)$$

这里 $\phi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,\cdots,x+\mathfrak{a}_n)$ 的第 (i,j) 分量等于 $x_i-x_j+\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j$. 那么左边的条件等价于说之前的图表是正合列. 注意到这个序列的正合性是个局部性质, 通过做关于任一 A 的非零素理想的局部化, 我们可以假设 A 是一个离散赋值环.

在这个假设之下,A 有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$, 并且 $\mathfrak{a}_i$ 是 $\mathfrak{m}$ 的幂, 即 $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{m}^{m_i}$. 我们可以重新排列使得 $m_i\leq m_{i+1}$, 亦即 $\mathfrak{a}_i\supseteq\mathfrak{a}_{i+1}$. 设 $(x_1+\mathfrak{a}_1,\cdots,x_n+\mathfrak{a}_n)\in\ker\psi$; 那么我们可以得到当 $i<j$ 时 $x_i\equiv x_j(\mod \mathfrak{a}_i)$. 特别的 $x_n\equiv x_1(\mod \mathfrak{a}_1), x_n\equiv x_2(\mod \mathfrak{a}_2),\cdots x_n\equiv x_{n-1}(\mod \mathfrak{a}_{n-1})$, 这样 $x=x_n$ 为该方程的一个解.

EX1.M 为整环 A 的可逆理想, 则对任意的素理想 $\mathfrak{p}\subset A$, 有 $(A:M)_{\mathfrak{p}}=(A_{\mathfrak{p}}:M_{\mathfrak{p}})$ 将 A,M 视为 A-模 $Q(A)$ 的子模, 由于 M 可逆, 所以 M 是有限生成的. 由阿蒂

亚书上系理 3.15 即可得出结论.

EX2.EX3 暂时没有想法, 在下次作业时补上.