1. 充分性: 若 $s \in S$ 使得 $sM = 0$, 固定 $m \in M$, 利用 $s(tm - sm_2) = 0$ 可知 $\forall (m_2, t), (m_2, t) \simeq (m, s)$, 所以 $S^{-1}M = 0$; 然后我们证明必性, 当 $S^{-1}M = 0$ 时, 那么 $S^{-1}A = Ann(S^{-1}M) = S^{-1}(Ann(M))$, 考虑 $S^{-1}A$ 中单位元, 则存在 $m \in Ann(M), s_1, s_2 \in S$ 使得 $s_1(m - s_2) = 0$ 从而 $s_1 m = s_1 s_2 \in S$, 取 $s = s_1 m$ 就完成了证明.

2. 记 $x = a/(1+c) \in S^{-1}\mathfrak{a}$, 对于任意的 $y = b/(1+d) \in S^{-1}A$. 注意到 a, c, d 均为理想 $\mathfrak{a}$ 中元素, 我们有 $1 + xy = 1 + ab/(1 + c + d + cd)$ 在 $S^{-1}A$ 上有逆 $(1 + c + d + cd)/(1 + ab + c + d + cd)$. 所以 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 包含在 $S^{-1}A$ 的大根中.

14. 记 $f : A \to A/\mathfrak{a}$ 为自然投射. 由于 f 是满射，那么对于 $A/\mathfrak{a}$ 的任意一个极大理想 m,$f^{-1}(m)$ 都是 A 中的极大理想. 对于任意的 $m + \mathfrak{a}M$ 存在 $a \in A/f^{-1}(m)$ 使得 $am = 0$ 那么 $(a + \mathfrak{a})(m + \mathfrak{a}M) = \mathfrak{a}M$. 所以 $(M/\mathfrak{a}M)_m = 0$, 由 3.8 我们有 $M/\mathfrak{a}M = 0$ 那么 $M = \mathfrak{a}M$.

15.（此证明为习题后提示）令 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 是一个生成元集,$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 F 的典范基. 由 $\phi(e_i) = x_i$ 定义 $\phi : F \to F$ 同态. 那么 ϕ 是满射，我们只需证明它是单射即可. 由 (3.9) 我们可以设 A 为局部环，设 N 为 ϕ 的核，令 $k : A/m$ 为 A 的同余类域. 由于 F 是平坦 $A-$ 模. 正合序 $0 \to N \to F \to F \to 0$ 产生正合序列 $0 \to k \otimes N \to k \times F \to k \otimes F \to 0.k \otimes F = k^n$ 为 k 上 n 维向量空间；$1 \otimes \phi$ 是满的，因而是单的，所以 $k \otimes N = 0$. 又由第二章习题 12，N 是有限生成的，因此由 $Nakayama$ 引理我们得到了 $N = 0$, 所以 ϕ 为同构.

4. 由于 $\mathbb{Z}[t]/(2, t) = \mathbb{Z}_2$ 是一个域，那么 $\mathfrak{m}$ 为极大理想. 而由 $\mathbb{Z}[t]/(4, t)$ 只有一个零因子 (自然是幂零的) 我们得到 $\mathfrak{p}$ 为素理想. 很显然 $r(\mathfrak{q}) = m$ 并且对于每一个 n,$\mathfrak{m}^n \neq q$.

5. 我们计算得到 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = (x, yz)$,所以 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2 = (x, yz) \cap (x^2, xy, yz, y^2, yz, z^2)$

$(x^2, xy, xz, yz) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, 故 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ 为准素分解. 容易验证分解是约简的. 而 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ 是孤立的，$\mathfrak{m}$ 是嵌入的.

7.(1) 由于 $a[x]$ 包含在 a 在 $A[x]$ 中生成的理想 $\sum aA[x]$ 中, 再加之 $a[x]$ 为理想, 我们得到 $a^e = a[x]$.

(2) 由第二次作业可知.$A[x]/p[x] \cong (A/p)[x]$; 再由 (A/p) 为整环, 我们得到 $(A/p)[x]$ 也为整环，从而 $p[x]$ 为素理想.

(3) 同样我们有 $A[x]/\mathfrak{q}[x] \cong (A/\mathfrak{q})[x]$. 设 $f \in (A/\mathfrak{q})[x]$ 为零因子, 由提示我们利用第一章练习 2(iii) 我们知道存在非零的 $a \in A/\mathfrak{q}$ 使得 $af = 0$, 所以 f 的每个系数都是 $A/\mathfrak{q}$ 中的零因子。由于 $\mathfrak{q}$ 是准素的, 从而 f 的每个系数都是幂零的. 由第一章练习 2(ii)f 是 $(A/\mathfrak{q})[x]$ 中的幂零元, 从而 $\mathfrak{q}[x]$ 是准素的.

(4) 利用 (1) 有 $\mathfrak{q}_i^e = \mathfrak{q}_i[x]$, 我们得到 $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}[x] = (\cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i)[x] = \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i[x] = \cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i^e$. 然后利用 (2)(3) 我们知道 $\cap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i[x]$ 确实是一个准素分解, 而极小性容易验证.

(5) 我们有 $r(\mathfrak{q}^e) \subset r(\mathfrak{q})^e$, 即 $r(\mathfrak{q}[x]) \subset \mathfrak{p}[x]$, 另一部分包含是显然的. 所以我们证明了 $r(\mathfrak{q}[x]) = \mathfrak{p}[x]$, 再利用 r 运算的单调性以及 (4) 的分解形式, 我们得到 $\mathfrak{p}$ 确实为极小素理想.

8. 由于 $k[x_1, \cdots, x_n][x_{n+1}] = k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$,$(x_1, \cdots, x_i)[x_{i+1}] = (x_1, \cdots, x_{i+1})$, 再利用习题 7 我们只需要证明 k 是 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 素理想就可以了, 这是显然的.

再利用 $(x_1, \cdots, x_n)^m[x_{n+1}^m] = (x_1, \cdots, x_{n+1})^m$, 同样利用习题 7, 我们类似的给出了准素的证明.