第一章 Noether 环,Hilbert 基本定理

定义 1.1. 称环 A 为 Noether 环, 如果 A 的每个理想都是有限生成的.

性质 1.2. *R 为 Noether 环 $\Leftrightarrow$ R 中理想满足升链条件.*

性质 1.3. *$f: R \to S$ 为满同态. 若 R 为 Noether 环, 则 S 也是 Noether 环.*

定理 1.4 (Hilbert 基本定理)**.** *设 R 为 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环.*

推论 1.5. *$k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中每个理想都是有限生成的.*

推论 1.6. *若 R 为 Noether 环.S 为 f.g. R-代数, 那么 S 为 Noether 环.*

推论 1.7. *R 为 Noether 环,M 为 f.g. R-模, 则 M 为 Noether 模 (子模有限生成).*

第二章 Hilbert 零点定理

定义 2.1. $I \subseteq k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为理想,k 为代数闭域. 称 $V(I) := \{\rho \in \mathbb{A}^n | f(\rho) = 0, \forall f \in I\}$ 为 I 定义的代数簇.

定理 2.2. *k 为代数闭域,$I \subseteq k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为任一理想, 那么 $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

弱形式 $I \subsetneq k[x_1, x_2, \cdots, x_n] \Rightarrow V(I) \neq \emptyset$

定理 2.3 (零点定理弱形式的代数表述)**.** *设 k 为域,A 为有限生成 k-代数, 若 A 为域, 则 A 在 k 上代数.*

定理 2.4 (Hilbert 零点定理)**.** *设 k 为代数封闭域, 则:*
(1)$R = k[x_1, \cdots, x_n]$ 的任意极大理想都形如 $(x_1 - a_1. \cdots, x_n - a_n), a_i \in k$;
(2)$J \subseteq R$ 为理想. 若 $J \neq R$, 则 $V(J) \neq \emptyset$;
(3)$J \subseteq R$ 为理想, 则有 $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

性质 2.5. *设 $A \subseteq B \subseteq C$ 为环;*
(1) 若 B 为有限生成 A-代数,C 是有限生成 B-代数, 则 C 是有限生成 A-代数;
(2) 若 B 是有限 A-代数,$x \in B$, 则 x 在 A 上整.
(3) 若 $x \in B$ 在 A 上整, 则 $A[x]$ 是有限 A-代数.

第三章　有限生成模,Nakayama 引理

例　3.1. 环 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$ 是一个 A-模, 特别地,A 本身是一个 A-模

对于任意 A-模, 有自然同构 $Hom(A, M) \cong M$;
记 $Ann(M) = \mathfrak{a}$, 则 A-模 M 可以看作忠实的 $A/\mathfrak{a}$-模.

性质　3.1. *A-模 M 有限生成 $\Leftrightarrow M$ 同构于 A^n 的一个商模.*

性质　3.2. *设 M 有限生成的 A-模,$\mathfrak{a}$ 为 A 的一个理想,φ 是一个 $A-$ 模自同态, 满足 $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. 那么 φ 满足下面的方程*

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

其中所有的 a_i 都属于 $\mathfrak{a}$.

推论　3.3. *M 为有限生成 R-模,$\alpha : M \to M$ 为满的 R-模同态, 则 α 为同构.*

推论　3.4. *M 为有限生成 R-模,$M \cong R^n$, 则 M 中任何一组由 n 个元素组成的 M 的生成元构成 M 的一组自由基.*

推论　3.5. *设 M 有限生成的 A-模,$\mathfrak{a}$ 为 A 的一个理想,$\mathfrak{a}M = M$, 那么存在元素 $x \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$ 使得 $xM = 0$.(或者存在 $x \in \mathfrak{a}, (1-x)m = 0, \forall m \in M$.)*

引理　3.6 (Nakayama 引理)**.** *设 M 有限生成的 A-模,$\mathfrak{a}$ 为 A 的一个包含在 A 的大根 $\mathfrak{R}$ 中的理想. 如果 $\mathfrak{a}M = M$, 则 $M = 0$.*

推论 3.7. 设 M 有限生成的 A-模,N 是 M 的一个子模,$\mathfrak{a}$ 为 A 的一个包含在 A 的大根 $\mathfrak{R}$ 中的理想, 那么

$$M = \mathfrak{a}M + N \Rightarrow M = N$$

设 A 为局部环,$\mathfrak{m}$ 为其极大理想,$k = A/\mathfrak{m}$ 是它的同余类域, 设 M 有限生成的 A-模. 由于 $\mathfrak{m}$ 零化 $M/\mathfrak{m}M$, 所以 $M/\mathfrak{m}M$ 可以自然的看作 $A/\mathfrak{m}$ 模, 即 k-向量空间. 它是有限维的.

性质 3.8. 设 $x_i(1 \le i \le n)$ 为 M 的一组元素, 它们在 $M/\mathfrak{m}M$ 中的象组成这个向量空间的一组基, 则 x_i 生成 M.

第四章 张量积

定义 4.1. 设 M, N 为两个 A-模, 那么存在一个 A-模 T 和一个双线性映射 $g : M \times N \to T$ 所构成的对 (T, g) 满足
对任意的 A-模 P 和 A-双线性映射 $f : M \times N \to P$, 都存在唯一的一个 A-双线性映射 $f" : T \to P$ 使得 $f = f' \circ g$(换句话说 $M \times N$ 的任意双线性映射都可以通过 T 分解)

性质 4.2. 设 M, N, P 均为 R-模

(1)$R \otimes_R M \cong M$;

(2)$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$;

(3)$(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$;

(4)$(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$.

性质 4.3. 设 A, B 是环,M 是一个 A-模,P 是一个 B-模, 而 N 是一个 (A, B)-双模 (即同时赋予 N 一个 A-模结构和一个 B-模结构. 而它们在以下意义下是协调的:$a(xb) = (ax)b, \forall a \in A, b, \in B, x \in N$). 那么 $M \otimes_A N$ 有自然的 B 模结构, 而 $N \otimes_B P$ 有 A-模结构, 并且

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

定理 4.4. 设 M, N, P 为 R-模, 则有自然的 $R-$ 模同构

$$\hom_R(M \otimes_R N, P) \cong \hom(M, \hom_R(N, P))$$

张量函子 $-\otimes_R M$ 是共变右正合函子,$\hom_R(M,-)$ 是共变左正合函子,$\hom_R(-,M)$ 是反变右正合函子.

第五章　分式环与分式模

5.1　分式化的性质

性质　5.1. 设 $S \subseteq A$ 为乘法封闭子集,M 为 $A-$ 模, 则有自然的 $S^{-1}A$-模同构,$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$.

推论　5.2. $S^{-1}A$ 是平坦的 $A-$ 模

性质　5.3. S^{-1} 与张量积 $\otimes_A$ 可交换, 即

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$$

性质　5.4. 设 $\mathfrak{p}$ 为环 A 的素理想, 于是 $S := A/\mathfrak{p}$ 为乘法封闭自己, 设 M 为 A-模, 记 $S^{-1}M$ 为 $M_\mathfrak{p}$, 称为 M 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化, 则 $(M \otimes_A N)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$.

5.2　局部性质

定义　5.5. 环 A 或 A-模 M 的一个性质 P 称为局部性质, 若 A(或 M) 具有性质 $P \Leftrightarrow \forall$ 素理想 $\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}$ 或 $M_\mathfrak{p}$ 具有性质 P.

性质　5.6. 设 M 为 A-模, 则下列叙述等价:

(1)$M = 0$;

(2)$\forall A$ 的素理想 $\mathfrak{p}$,$M_{\mathfrak{p}}=0$.

(3)$\forall A$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$,$M_{\mathfrak{m}}=0$.

性质 5.7. 设 $\phi: M\to N$ 为 A-模同态, 则下列叙述等价:

(1)ϕ 为单射;

(2)$\forall A$ 的素理想 $\mathfrak{p}$,$\phi_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 为单射;

(2)$\forall A$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$,$\phi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 为单射;

对于满射也成立.

性质 5.8. 设 M 为 A-模, 则下列叙述等价:

(1)M 为平坦 A-模;

(2)$M_{\mathfrak{p}}$ 为平坦的 $A_{\mathfrak{p}}$-模,$\forall A$ 的素理想 $\mathfrak{p}$.

(3)$M_{\mathfrak{m}}$ 为平坦的 $A_{\mathfrak{m}}$-模,$\forall A$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$.

设 A 为环,S 为 A 的乘法封闭子集, 有自然的环同态 $f: A\to S^{-1}A, a\mapsto \dfrac{a}{1}$.

性质 5.9. *(1)*$S^{-1}A$ 中每个理想都是扩理想.

(2)$S^{-1}A$ 中素理想在对应 $\mathfrak{p}\leftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$ 之下与 A 中那些与 S 不交的素理想一一对应.

(3) 运算 S^{-1} 与作有限和, 积, 交以及求根的运算可交换.

(4) 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 为 A 中理想. 如果 $\mathfrak{b}$ 有限生成, 那么 $S^{-1}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=(S^{-1}\mathfrak{a}:S^{-1}\mathfrak{b}$.

第六章　理想的准素分解

定义　6.1. 称理想 $\mathfrak{q} \subsetneq A$ 为准素理想, 若 $\mathfrak{q}$ 满足:$\forall x, y \in A$, 若 $xy \in \mathfrak{q}$, 则 $x \in \mathfrak{q}$ 或者存在 $n \in \mathbb{N}, s.t.\ y^n \in \mathfrak{p}$.

注: 素理想是准素理想;$\mathfrak{q} \subsetneq A$ 为准素理想 $\Leftrightarrow A/\mathfrak{q}$ 中的零因子都是幂零的.

性质　6.2. *理想 $\mathfrak{a}$ 的根为一切包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想的交.*

性质　6.3. *若 $\mathfrak{p}$ 为 A 中准素理想, 则 $\sqrt{\mathfrak{p}}$ 为包含 $\mathfrak{p}$ 的最小素理想.*

性质　6.4. *$\mathfrak{a} \subsetneq A$ 为; 理想, 若 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 为极大理想, 则 $\mathfrak{a}$ 为准素理想.*

定义　6.5 (不可约理想)**.** 称 $a \subset A$ 为不可约的. 如果 $a = b \cap c$, 其中 $b, c \subset A$ 为理想, 则必有 $a = b$ 或者 $a = c$.

引理　6.6. *A 为 Noether 环, 则不可约理想为准素理想.*

定理　6.7. *Noether 环中每个理想都可表示为一些准素理想的交.*

引理　6.8. *若 $\mathfrak{q}_i (i = 1, \cdots, n)$ 为 $\mathfrak{p}$-准素理想. 则 $\mathfrak{q}_i$ 也是 $\mathfrak{p}$-准素理想.*

引理　6.9. *设 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$-准素理想.$x \in A$ 则*

(1) 若 $x \in \mathfrak{q}$, 则 $(\mathfrak{q} : x) = A$

(2) 若 $x \notin \mathfrak{q}$, 则 $(\mathfrak{q} : x)$ 为 $\mathfrak{p}$-准素理想.

(3) 若 $x \in \mathfrak{p}$, *则* $(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{q}$.

其中 $(\mathfrak{q}:x)=(\mathfrak{q}:(x)),(a:b)=\{x\in A|xb\subseteq a\}$.

定义 6.10. 极小准素分解:$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$,$\mathfrak{q}_i$ 为准素理想. 满足

(1)$\sqrt{\mathfrak{q}_i}(i=1,\cdots,n)$ 互不相同.

(2)$\mathfrak{a}\subsetneq\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j,i=1,\cdots,n$

定理 6.11 (唯一性)**.** *设* $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ *为极小准素分解.*$\mathfrak{p}_i=\sqrt{\mathfrak{q}_i}$*. 则* $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ *与分解无关.*

引理 6.12. *(1) 若素理想* $\mathfrak{p}\supseteq\bigcap_{i=1}^{t}\mathfrak{a}_i$*, 则存在* $i,s.t.\ \mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}_i$*;*

(2) 若素理想 $\mathfrak{p}=\bigcap_{i=1}^{t}\mathfrak{a}_i$*, 则存在* $i,s,t,\ \mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$*.*

定义 6.13. 称 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ 为属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想, 若 $\mathfrak{p}_i$ 是 $\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$ 中的极小元, 则称 $\mathfrak{p}_i$ 为属于 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想.

性质 6.14. $\sum:=\{$ *素理想* $\mathfrak{p}|\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\}$*;*

$\sum_1:=\{$ *属于* $\mathfrak{a}$ *的极小素理想* $\}$*;*

$\sum_2:=\{\sum$ *中的极小元* $\}$*.*

则 $\sum_1=\sum_2$*.*

第七章　整性扩张

定义　7.1. $A \subseteq B$ 为环. 称 B 在 A 上整,$\forall k \in B$, 存在首项为 1 的多项式 $f(x) \in A[x]$ 使得 $f(k) = 0$

推论　7.2. *$A \subseteq B$ 为整扩张, (1)$\mathfrak{b}$ 为 B 任一理想.$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$. 那么 $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow B/b$ 为整扩张.*
(2)$S \subseteq A$ 为乘法封闭子集. 则 $S^{-1}A \hookrightarrow S^{-1}B$ 为整扩张.
(3)$A \subseteq B$ 为环扩张.$C \subseteq B$ 为 A 在 B 中的整闭包.$S \subseteq A$ 为乘法封闭子集. 则 $S^{-1}A$ 在 $S^{-1}B$ 中的整闭包为 $S^{-1}C$.

性质　7.3. *$A \subseteq B$ 为整环的整性扩张. 则 A 为域 $\Leftrightarrow B$ 为整环.$(k \subseteq k[x])$.*

推论　7.4. *$A \subseteq B$ 为整性扩张.$\mathfrak{q}$ 为 B 的素理想.$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$. 则 $\mathfrak{q}$ 极大 $\Leftrightarrow \mathfrak{p}$ 极大.*

推论　7.5. *$A \subseteq B$ 为整性扩张.$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}$ 为 B 的素理想, 使得 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^c$. 则 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.*

这说明了 B 中严格的素理想降链限制在 A 上还是严格的素理想降链.

定理　7.6. *$A \subseteq B$ 为整性扩张.$\mathfrak{p}$ 为 A 的素理想, 则存在 B 的素理想 $\mathfrak{q}$, 使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$*

亦即 A 中素理想可以提升为 B 中素理想, 唯一性没有说明.

推论 7.7 (上升定理). $A \subseteq B$ 为整性扩张.$p_1 \subset \cdots \subset p_n$ 为 A 中素理想升链.$\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m (m < n)$ 为 B 中素理想升链, 满足 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i, \forall i = 1, \cdots, m$, 则 $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ 可以扩充为素理想的升链 $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$, 满足 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i, \forall i = 1, \cdots, n$

定义 7.8 (整闭整环). 称整环 A 为整闭的, 如果 A 在 A 的分式域中的整闭包为 A.

整闭是局部性质

性质 7.9. 令 A 是一个整环, 那么下列断言是等价的*:*

(1)A 是整闭的*;*

(2) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$,$A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的*;*

(3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$,$A_{\mathfrak{m}}$ 是整闭的.

引理 7.10. 设 $A \subseteq B$ 为环扩张,$\mathfrak{a} \subseteq A$ 为理想,C 为 A 在 B 中的整闭包. 记 $\mathfrak{a}^e$ 为 $\mathfrak{a}$ 在 C 中的扩理想, 则 $\mathfrak{a}$ 在 B 中的整闭包为 $\sqrt{\mathfrak{a}^e} = \{b \in B | \exists f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n, a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{a}, s.t.\ f(b) = 0\}$.

性质 7.11. $A \subseteq B$ 为整环,A 是整闭的,$\mathfrak{a} \subseteq A$ 为理想,$\mathfrak{b} \subseteq B$ 在 $\mathfrak{a}$ 上整,K 为 A 的分式域, 则 $\mathfrak{b}$ 在 K 上整, 设 $\mathfrak{b}$ 在 K 上的极小多项式为 $Irr(b, K) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n (a_1, \cdots, a_n \in K)$, 则 $a_1, \cdots, a_n \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

定理 7.12 (下降定理). 设 $A \subseteq B$ 为整环,A 整闭,B 在 A 上整,$\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n$ 为 A 中素理想,$\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ 为 B 中素理想, 且 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i, i = 1, \cdots, m$, 则 $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ 可扩充为素理想降链 $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$, 使得 $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$

第八章 维数理论

定义 8.1 (Krull 维数)**.** 设 A 为 Noether 环, 定义其 (Krull) 维数为:
$\dim A = \max\{A\text{素理想升链}\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n\text{的长度}\}$

定理 8.2. k 为域,$k[x_1, \cdots, x_n]$ 为 n 个变量的多项式环.$\dim k[x_1, \cdots, x_n] = n$

定理 8.3 (Noether 正规化引理)**.** *k 为无限域,A 为有限生成的 k-代数,$I \subseteq A$ 为理想, 则存在自然数 δ 和 $d, (\delta \leq d)$, 以及 $y_1, \cdots, y_d \in A$, 满足:*
(1)$y_1, \cdots, y_d$ 在 A 上代数无关;
(2)A 是有限 $k[y_1, \cdots, y_d]$-代数;
(3)$I \cap k[y_1, \cdots, y_n] = (y_{\delta+1}, \cdots, y_n)$;
(4) 设 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$(即由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的 k-代数). 则 $y_1, \cdots, y_n$ 可选为 $x_1, \cdots, x_n$ 的 k-线性组合.

推论 8.4. *设 A 为有限生成 k-代数.$k[y_1, \cdots, y_d] \subseteq A$ 为 A 的 Noether 正规化, 则 $\dim A = d$.*

性质 8.5. *设 A 为有限生成 k-代数, 且 A 为整环, 则 A 中任一长度极大的素理想链的长度都为 $\dim A$.*

推论 8.6. *设 A 为有限生成 k-代数, 且 A 为整环,$\mathfrak{p}$ 为 A 中素理想, 则 $\dim A = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p}$.*

推论 8.7. *设 A 为有限生成 k-代数, 且 A 为整环,$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ 为 A 中素理想. 则所有始于 $\mathfrak{q}$ 终于 $\mathfrak{p}$ 的长度极大的素理想链的长度相等, 都等于 $\dim A/\mathfrak{q} - \dim A/\mathfrak{p}$.*

性质 8.8. *设 A 为有限生成 k-代数, 则下列叙述等价;*

(1)$\dim A = 0$

(2)A 为 k 上的有限维向量空间;

(3)A 只有有限个素理想.

(4)A 中只有有限个极大理想.

定义 8.9. 素理想 $\mathfrak{p} \subseteq A$ 的高度:$ht(\mathfrak{p}) := \dim A_{\mathfrak{p}} = \max\{$素理想链$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$的长度$\}$

性质 8.10. *设 A, B 为 $Noether$ 环,$A \hookrightarrow B$ 为整性扩张, 则*

(1)$\dim A = \dim B$*;*

(2) 对 B 中任意素理想 $\mathfrak{p}$. 有 $ht(\mathfrak{p}) \leq ht(\mathfrak{p} \cap A), \dim B/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p} \cap A$.

(3) 若 A, B 为整环,A 整闭, 那么 (2) 中不等式的等号成立.

推论 8.11. *设 A 为有限生成 k-代数,A 为整环,$Q(A)$ 为 A 的分式域, 则* $\dim A = tr\ \deg(Q(A)/k), tr\ \deg$ *表示超越次数.*

推论 8.12. *设 A 为有限生成 k-代数, 则 $\dim A = A$ 中在 k 上代数无关的元素个数的极大值.*

推论 8.13. *设 A, A' 为有限生成 k-代数, 则 $\dim A \otimes_k A' = \dim A + \dim A'$.*

第九章　Artin 环

定义　9.1. 设 A 为环,M 为 A 模,$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots M_l$ 为 M 中子模降链. 称其为 M 的一个正规列, 称 l 为其长度. 若进一步有 M_i/M_{i-1} 全为单模, 则称其为 M 的一个合成列.

引理　9.2. $M \neq 0$ 为单模 $\Leftrightarrow M \cong A/\mathfrak{m}$($\mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想).

定义　9.3. A 为环,M 为 A 模, 称 M 为 *Artin* 模, 如果 M 的子模满足降链条件, 即对 M 的任意子模降链 $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ 存在 n, 使得 $M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$, 环 A 称为 Artin 环, 如果 A 作为 A-模是 *Artin* 模.

定义　9.4. 称 A-模为有限长度的模, 如果 M 所有正规列的长度有一个有限的上界.

定理　9.5 (Jordan-Hölder)**.** 设 M 为 A-模, 若 M 有一个合成列, 则 M 是有限长度的模. 而且 M 的任意的两个合成列的长度都相等, 记为 $l(M)$.

推论　9.6 (长度的可加性)**.** 设 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots M_l = 0$ 为 M 的一个正规列,M 为有限长度 $\Leftrightarrow$ M_i/M_{i-1} 都是有限长度的模, 并且此时有 $l(M) = \sum\limits_{i=0}^{l-1} l(M_i/M_{i+1})$

注:(1) 有限长度的模的子模必是有限长度的;

(2) 有限长度模的同态像是有限长度的;

(3) 有限个长度模的直和是有限长度的.

性质 9.7. 设 A 为 *Noether* 环, 则下列断言等价
(1)A 是有限长度的;
(2)A 是 *Artin* 环;
(3)$\dim A = 0$.

推论 9.8. 设 I 为 A 的理想, 则 A/I 为有限长度 $\Leftrightarrow$ 包含 I 的素理想都是极大理想.

性质 9.9. $(A, \mathfrak{m})$ 为局部环,$I \subset \mathfrak{m}$ 为理想, 则 $l(A/I) < \infty \Leftrightarrow$ 存在 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subseteq I$.

性质 9.10. M 为有限生成的 A-模, 则下列断言等价
(1)M 是有限长度的模;
(2)$Supp(M) \subseteq Max(A)$, 其中支撑集 $Supp(M) \triangleq \{\mathfrak{p}\text{为}A\text{的素理想}|M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$, 当 M 为有限生成模时,$Supp(M) = \{\mathfrak{p}\text{为素}|\mathfrak{p} \supseteq Ann(M)\}$
(3)$A/Ann(M)$ 为有限长度的 A-模.

第十章 维数为 1 的环

定理 10.1. *设 A 为整环,$\dim A = 1$, 则下列命题等价:*

(1)A 是整闭的.

(2)A 的每个准素理想都是素理想的方幂;

(3)$\forall A$ 的素理想 $\mathfrak{p}, A_{\mathfrak{p}}$ 都是离散赋值环.

定义 10.2. 设 A 为整环,$Q(A)$ 为 A 的分式域, 若存在映射 $v : Q(A)/\{0\} \to \mathbb{Z}$, 满足:

(1)v 是群的同态 $(v(1) = 0, v(xy) = v(x) + v(y))$;

(2)$v(x + y) \geq \max\{v(x), v(y)\}$;

(3)$\{x \in Q(A)|v(x) \geq 0\} \cup \{0\} = A$

则称 v 为 $Q(A)$ 的一个离散赋值,A 为相应于 v 的离散赋值环.

注: 离散赋值环是局部环,$\mathfrak{m} := \{x \in Q(A)|v(x) > 0\}$ 为 A 中唯一的极大理想.

性质 10.3. *$(A, \mathfrak{m})$ 为局部环,$k := A/\mathfrak{m}$, 若 $x_1, \cdots, x_t \in \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$ 作为 A-模的一组生成元, 则 $x_1, \cdots, x_t$ 在 $A/\mathfrak{m}^2$ 中的像是 k 上线性空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组生成元.*

性质 10.4. *设 A 为整局部环,$\dim A = 1$,$\mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想, 域 $k = A/\mathfrak{m}$, 则下列叙述等价:*

(1)A *为离散赋值环;*

(2)A *是整闭的;*

(3)$\mathfrak{m}$ *为主理想;*

(4)$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$;

(5)A *的每个非零理想都形如* (x^n).

引理 10.5. *设* A *为整局部环*,$\dim A = 1$,$\mathfrak{m}$ *为* A *的极大理想. 若* $\mathfrak{a} \neq 0$ *为* A *的理想, 则* $\mathfrak{a}$ *是* $\mathfrak{m}$*-准素的,*

引理 10.6. *Noether 环* A *中, 任一理想* I *包含* $\sqrt{I}$ *的某个方幂.*

引理 10.7. *设* A *为整局部环*,$\dim A = 1$,$\mathfrak{m}$ *为* A *的极大理想, 则* $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

定理 10.8. A *为整环*,$\dim A = 1$, *则下列断言等价:*

(1)A *整闭;*

(2)A *的每个准素理想都是素理想的方幂;*

(3)$\forall A$ *的素理想* $\mathfrak{p}, A_{\mathfrak{p}}$ *为离散赋值环.*

推论 10.9. A *为 Dedekind 整环, 则* A *中任一非零理想都可唯一分解为一些素理想的乘积*