Phan Nhật Huy

2024-07-16

Lê Thái Thanh - Giáo Trình Toán I

Mục lục

1 Tập hợp - Ánh xạ - Quan hệ

1.1 Mệnh đề

1.2 Tập hợp

1.3 Ánh xạ

1.3.1 Tóm tắt

Định nghĩa 1.3.1 (Ánh xạ)

Cho X, Y là hai tập hợp. Một *ánh xạ* f đi từ $X \longrightarrow Y$ là phép cho tương ứng sao cho với mỗi phần tử $x \in X$, tồn tại duy nhất một phần tử xác định, kí hiệu là $y = f(x) \in Y$. Ta viết

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tập X được gọi là là tập nguồn và Y được gọi là là tập đích của ánh xạ f. Phần tử $y = f(x)$ được gọi là là ảnh của X qua ánh xạ f, khi đó x được gọi là tạo ảnh của y. Tập hợp tất cả các ánh xạ đi từ X vào Y được kí hiệu là Y^X.

Định lý 1.3.2

Tích của hai ánh xạ có tính kết hợp.

Chứng minh. Giả sử ta có $f : X \longrightarrow Y, f : Y \longrightarrow Z, h : Z \longrightarrow T$. Khi đó $f \circ g : X \longrightarrow Z, g \circ h : Y \longrightarrow T$ và $(f \circ g) \circ h : X \longrightarrow T, f \circ (g \circ h) : X \longrightarrow T, (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f(g(h(x)))$, và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 1.3.3

Tích của hai đơn/toàn/song ánh là một đơn/song/toàn ánh.

Định lý 1.3.4

Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $g : Y \longrightarrow Z$ là hai ánh xạ. Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh, còn nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.

Định lý 1.3.2

Ánh xạ ngược nếu có là duy nhất.

Định lý 1.3.6

Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ có ánh xạ ngược khi và chỉ khi f là song ánh.

Định lý 1.3.7

Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ và $g : Y \longrightarrow Z$ là các song ánh. Khi đó $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Định nghĩa 1.3.8 (Tập được đánh số, tập chỉ các số và họ tập hợp)

Cho $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \neq \varnothing$ và X là một tập tuỳ ý. Xét ánh xạ $f : I \longrightarrow X$ cho ứng với mỗi phần tử của I với một phần tử $x \in X$, kí hiệu là $f(\alpha) = x_\alpha$. Khi đó ta nói X *được đánh số bởi tập hợp I* và tập I được gọi là *tập các chỉ số.* Ta cũng có thể viết $X = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Nếu các phần tử X là các tập hợp thì ta gọi X là một *họ các tập hợp.*

Định nghĩa 1.3. (Phép hợp và giao của một họ các tập hợp)

Cho một các tập hợp $\chi = (X_\alpha)_{\alpha\in I}$. Khi đó phép toán hợp và giao của một họ các tập hợp như sau:

- $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha = \{x \mid \exists\ \alpha \in I, x \in X_\alpha\}$;
- $\bigcap_{\alpha\in I} X_\alpha = \{x \mid \forall\ \alpha \in I, x \in X_\alpha\}$.

1.4 Quan hệ hai ngôi

1.4.1 Tóm tắt

Định nghĩa 1.4.1 (Quan hệ hai ngôi)

Cho X và Y là hai tập hợp. Ta gọi một *quan hệ hai ngôi* $\mathscr{R}$ của X và Y là bộ ba $\mathscr{R} = (X, \Gamma, Y)$ với Γ là một tập của tích Descartes $X \times Y$. Hai phần tử $x \in X, y \in Y$ là *có quan hệ với nhau theo quan hệ* $\mathscr{R}$ nếu $(x, y) \in \Gamma$ và ta viết $x\mathscr{R}y$. Nếu $X = Y$ thì $\mathscr{R}$ là mối quan hệ hai ngôi trong X.

Mệnh đề 1.4.2 (Tính chất của quan hệ hai ngôi)

Trong tập X, quan hệ hai ngôi có các tính chất sau:

a. $\forall\ x \in X, x\mathscr{R}x$;
b. $\forall\ x \in X, x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$;
c. $\forall\ x, y \in X \Longrightarrow x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x \Longrightarrow x = y$;
d. $\forall\ x, y, z \in X, x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z$.

Định nghĩa 1.4.3 (Quan hệ tương đương)

Một quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên X được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có tính phản xạ, đối xứng và bắt cầu.

Định nghĩa 1.4.4 (Lớp tương đương)

Lớp tương đương của x theo quan hệ $\mathscr{R}$ là một tập con $Cl(x)$ và được xác định như sau:

$$Cl(x) = \{y \in X \mid x\mathscr{R}y\}.$$

Định nghĩa 1.4.5 (Tập thương)

Tập thương của X theo quan hệ $\mathscr{R}$, ký hiệu là X/R là tập tất cả các lớp tương đương $Cl(x)$:

$$X/R = \{Cl(x), \forall\ x \in X\}.$$

Định nghĩa 1.4.6 (Quan hệ thứ tự)

Một quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên X được gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó có tính phản xạ, phản đối xứng, và bắt cầu và thường được kí hiệu là $<$. Nếu trong X có quan hệ thứ tự thì ta nói X là được sắp thứ tự.

Định nghĩa 1.4.7 (Quan hệ thứ tự toàn phần)

Cho X là tập được sắp thứ tự với quan hệ thứ tự $<$. Hai phần tử $x, y \in X$ được gọi là *so sánh được với nhau* nếu $x < y \vee y < x$. Nếu mọi cặp phần tử của X đèu có thể so sánh dược với nhau thì khi đó $<$ là một quan hệ thứ tự toàn phần và tập X là tập được sắp thứ tự toàn phần.

1.5 Bài tập

Bài tập 1.5.4

Cho X, Y là 2 tập hợp, $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$ là hai ánh xạ. Giả sử $g \circ f \circ g \circ f$ là toàn ánh và $f \circ g \circ f \circ g$ là đơn ánh. Chứng minh rằng f, g là các song ánh.

Bài tập 1.5.8

Cho X là một tập hợp và $\mathscr{R}$ là một quan hệ phản xạ trong X sao cho

$$\forall\ (x, y, z) \in X^3, [(x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}Z)] \Longrightarrow (z\mathscr{R}x).$$

Chứng tỏ rằng $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh tính phản xạ và bắc cầu của $\mathscr{R}$.
- Đối xứng: $x\mathscr{R}y \Longrightarrow x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$;
- Bắc cầu: $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z \Longrightarrow z\mathscr{R}x \Longrightarrow x\mathscr{R}z$.

Vậy $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương. □

Bài tập 1.5.9

Trên $\mathbb{R}$, xét quan hệ $\mathscr{R}$ xác định như sau:

$$x\mathscr{R}y \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

Chứng tỏ rằng $\mathscr{R}$ là quan hệ tương đương $\forall\, x \in \mathbb{R}$; tìm $Cl(x)$.

Chứng minh. $\mathscr{R}$ là quan hệ tương đương. Thật vậy, ta có:

- Phản xạ: $\forall\, x \in \mathbb{R}, x\mathscr{R}x \iff (0 = 0)$.
- Đối xứng: $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$;
- Bắc cầu: $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z \iff (x^2 - z^2 = x - z) \iff x\mathscr{R}z$.

Vậy ta có $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương theo định nghĩa.

Lớp tương đương $Cl(x)$ của $\mathscr{R}$ thoả mãn $x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$, trong đó $f(x) = x^2 - x$. Vậy $Cl(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1/2 \\ \frac{1}{2} & x = 1/2 \end{cases}$ □

2 Cấu trúc đại số

2.1 Phép toán hai ngôi

Định nghĩa 2.1.1 (Phép toán hai ngôi)

Một *phép toán hai ngôi* trong một tập hợp E là ánh xạ $f : E^2 \longrightarrow E$. Phần tử $f(x, y)$ được gọi là cái hợp thành của hai phần tử $x, y \in E$

Quy ước 2.1.2

Thông thường phép toán hai ngôi được kí hiệu bằng các dâu $*$, $\circ$, $\perp$, $\cdot$, $\times$, $+$, ... Trong trường hợp tổng quát, ta sẽ sử dụng dấu $*$.

Định nghĩa 2.1.3 (Phỏng nhóm)

Một tập hợp E mà trên đó có xác định một phép toán $*$ được kí hiệu là $(E, *)$ và được gọi là một *phỏng nhóm.*

Định nghĩa 2.1.4 (Tính kết hợp và giao hoán)

Phép toán $*$ có tính chất *kết hợp* nếu $\forall\, (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán nếu $\forall\, (x, y) \in E^2, x * y = y * x$.

Định nghĩa 2.1.5 (Tính chính quy trái/phải)

Phần tử $a \in E$ được gọi là *chính quy trái (giản ước được bên trái)* đối với $*$ nếu $\forall\, (x, y) \in E^2, a * x = a * y \Longrightarrow x = y$.

Phần tử $a \in E$ được gọi là *chính quy phải (giản ước được bên phải)* đối với $*$ nếu $\forall\, (x, y) \in E^2, x * a = y * a \Longrightarrow x = y$.

Phần tử $a \in E$ được gọi là *chính quy (giản ước được)* đối với $*$ nếu nó vừa chính quy trái và phải.

Định nghĩa 2.1.6 (Tính trung hoà trái/phải)

Phần tử $a \in E$ được gọi là *trung hoà trái* đối với $*$ nếu $\forall\, (x, y) \in E^2, a * x = a * y \Longrightarrow x = y$.

Phần tử $a \in E$ được gọi là *trung hoà phải* đối với $*$ nếu $\forall\, (x, y) \in E^2, x * a = y * a \Longrightarrow x = y$.

Phần tử $a \in E$ được gọi là *trung hoà* đối với $*$ nếu nó vừa trung hoà trái và phải.

Định lý 2.1.7

Cho $(E, *)$ là một phỏng nhóm với e là trung hòa trái và e' là trung hòa phải của phép toán $*$. Khi đó $e = e'$.

Định lý 2.1.8

Cho $(E, *)$. Nếu có phần tử trung hoà thì nó là duy nhất.

Lưu ý 2.1.9

Một phỏng nhóm $(E, *)$ với phép toán $*$ có tính kết hợp và E có phần tử trung hoà e được gọi là một *vị nhóm.*

Định nghĩa 2.1.10 (Phần tử khả nghịch)

Cho $(E, *)$ là một vị nhóm với phần tử trung hoà là e. $x \in E$ được gọi là *khả nghịch (khả đối xứng* nếu $\exists\, y \in E : x * y = y * x = e$. Nếu tồn tại y như thế thì nó được gọi là phần tử nghịch đảo của x đối với $*$ và kí hiệu là x^{-1}.

Định lý 2.1.11

Trong một vị nhóm, phần tử nghịch đảo, nếu tồn tại, là duy nhất.

Định lý 2.1.12

Cho $(E, *)$ là một vị nhóm và $x, y \in E$. Nếu x, y khả nghịch đối với $*$ thì $x * y$ khả nghịch và

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Định nghĩa 2.1.13 (Phép toán phân phối)

Cho E là một tập hợp và $*, \perp$ là hai phép toán trên E.

Phép toán $*$ được gọi là *phân phối trái đối với* $\perp$ nếu $\forall\ x, y, z \in E^3, x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z)$.

Phép toán $*$ được gọi là *phân phối phải đối với* $\perp$ nếu $\forall\ x, y, z \in E^3, (y \perp z) * x = (y * x) \perp (z * x)$.

$*$ được gọi là *phân phối đối với* $\perp$ nếu nó vừa phân phối trái và phân phối phải.

Định nghĩa 2.1.14 ((Tự) đồng/đẳng cấu phỏng nhóm)

Cho hai phỏng nhóm $(E, *), (F, \perp)$.

Một *đồng cấu phỏng nhóm từ* $(E, *) \longrightarrow (F, \perp)$ là một ánh xạ $f : E \longrightarrow F$ sao cho $\forall\ (x, y) \in E^2, f(x * y) = f(x) \perp f(y)$.

Một *tự đồng cấu phỏng nhóm* của $(E, *)$ là một đồng cấu phỏng nhóm từ $(E, *) \longrightarrow (E, *)$.

Một *đẳng cấu phỏng nhóm từ* $(E, *) \longrightarrow (F, \perp)$ là một đồng cấu song ánh từ $f : E \longrightarrow F$ sao cho $\forall\ (x, y) \in E^2, f(x * y) = f(x) \perp f(y)$.

Một *tự đẳng cấu phỏng nhóm* của $(E, *)$ là một tự đồng cấu song ánh từ $(E, *) \longrightarrow (E, *)$.

Định lý 2.1.15

1) Nếu $f : (E, *) \longrightarrow (F, \perp)$ và $g : (F, \perp) \longrightarrow (G, \top)$ là hai đẳng cấu phỏng nhóm, thì $g \circ f : E \longrightarrow G$ là một đồng cấu phỏng nhóm từ $(E, *) \longrightarrow (G, \top)$.
2) $\forall\ (E, *)$, ánh xạ đồng nhất Id_E là một tự đẳng cấu phỏng nhóm.
3) Nếu $f : (E, *) \longrightarrow (F, \perp)$ là một đẳng cấu phỏng nhóm thì $f^{-1} : (F, \perp) \longrightarrow (E, *)$ cũng là một đẳng cấu phỏng nhóm.

2.2 Nhóm

Định nghĩa 2.2.1 (Nhóm)

Tập hợp G với một phép toán hai ngôi $*$ trong G được gọi là một *nhóm* nếu phép toán $*$ có tính kết hợp, G có phần tử trung hoà e đối với $*$ và mọi phần tử của G đều có phần tử nghịch đảo đối với $*$.

Lưu ý 2.2.2

Nếu $*$ có tính giao hoán thì ta nói G là *nhóm giao hoán (nhóm Abel).* Nếu tập hợp G là hữu hạn thì G là *nhóm hữu hạn* và số phần tử của G được gọi là *cấp* của nhóm, kí hiệu là $\#G$ hoặc $\mathrm{Card}\,(G)$.

Đang chuyển hết tất cả tài liệu từ LaTeX sang Typst
Gõ chắc cũng phải 60 chục trang cỡ chữ 12
Ba ngày, tính từ thứ Bảy
May là cũng được gần 80% rồi, chứ thấp hơn nữa thì chắc khùng quá
Sao mình rảnh dữ vậy ta

Định lý 2.2.3

Trong một nhóm, mọi phần tử đều chính quy.

2.3 Vành

Định nghĩa 2.3.1 (Vành)

Cho A là một tập hợp trang bị hai phép toán $+$ và $\times$. Ta nói $(A, \times, +)$ là một *vành* nếu

a. $(A, +)$ là một nhóm giao hoán;
b. $\times$ có tính chất kết hợp và phân phối đối với phép toán $+$
c. A có phần tử trung hoà đối với $\times$.

2.4 Thể

Định nghĩa 2.4.1 (Thể)

Một tập hợp K trang bị phép toán $+$ và $\cdot$ được gọi là một *thể* nếu

a. $(K, +, \cdot)$ là một vành

b. $0_K = 1_K$;

c. Mọi phần tử khác 0 đều có một nghịch đảo đối với phép nhân.

Lưu ý 2.4.2

Nếu phép nhân có tính giao hoán trong K thì ta nói K là một thể giao hoán, thường được gọi là một trường.

2.5 Bài tập

Bài tập 2.5.2

Cho $(E, *)$ là một phỏng nhóm kết hợp, $a \in E$. $\perp$ là một phép toán xác định bởi

$$x \perp y = x * a * y.$$

Chứng minh rằng $\perp$ có tính kết hợp.

Bài giải. $\forall\ (x, y, z) \in E^3$,

$$\begin{aligned}(x \perp y) \perp z &= (x * a * y) \perp z \\ &= x * a * y * a * z\end{aligned} \tag{0}$$

$$\begin{aligned}x \perp (y \perp z) &= x \perp (y * a * z) \\ &= x * (y * a * z) \\ &= x * a * y * a * z\end{aligned} \tag{1}$$

Từ (1), (2), ta có được điều phải chứng minh. □

Bài tập 2.5.3

Cho $(E, *)$ là một phỏng nhóm sao cho $\forall\ (x, y) \in E^2, x * (x * y) = (y * x) * x = y$. Chứng minh rằng có tính giao hoán.

Bài giải. $x * y = [(x * y) * x] * x = [(x * y) * ((x * y) * y)] * x = y * x$ □

Bài tập 2.5.4

Cho $(E, *)$ là một phỏng nhóm sao cho

$$\begin{cases} \forall\, x \in E & x * x = x \\ \forall\, (x, y, z) \in E^3 & x * (y * z) = (y * z) * x \end{cases}$$

Chứng minh rằng $*$ có tính giao hoán.

Bài giải. Ta có $x * y = (x * x) * x = y * (x * x) = y * x$ (điều phải chứng minh). ☐

Bài tập 2.5.5

Cho $(E, \cdot)$ là một phỏng nhóm kết hợp sao cho $\exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ thoả

$$\forall\, (x, y) \in E^2, (xy)^n = yx.$$

Chứng minh phép toán $\cdot$ có tính giao hoán.

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned} (xy)^n x &= xyxy\ldots xyx \\ &= x(yx)(yx)\ldots(yx) \\ &= x(yx)^n \\ \iff y(xx) &= (xx)y \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng chứng minh tính giao hoán của $\cdot$. ☐

Bài tập 2.5.8

Cho $E = (0, +\infty)$ và phép toán $*$ xác định bởi

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a. Khảo sát tính kết hợp, giao hoán và tồn tại phần tử trung hoà của $*$.
b. Với $n \in \mathbb{N}, a \in E$, tính $\underbrace{a * a \ldots * a}_{n \text{ nhân tử}}$.

Bài giải.

a. Dễ dàng kiểm chứng được rằng $*$ có tính kết hợp, giao hoán và phần tử trung hoà là $e = 0$.

b. Dùng phép quy nạp, ta có $\underbrace{a * \ldots * a}_{\boldsymbol{n} \text{ nhân tử}} = a\sqrt{n}$.

□