

I. การหารพหุนาม

ขั้นตอนการหาร

ตัวตั้ง = ตัวหาร \times ผลหาร + เศษ

$$P(x) = Q(x) T(x) + R(x) \quad \heartsuit \quad \text{โดยที่ตัวเศษจะมีดีกรีน้อยกว่าตัวหารอยู่ 1}$$

หารสังเคราะห์

\heartsuit ตัวหารต้องมีดีกรีเป็น 1

\heartsuit หาได้ทั้งผลหารและเศษ

Ex จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $3x^4 + 6x^3 + x - 2$ ด้วย $x - 2$

Sol

2	3	6	0	1	-2	← เรียงดีกรีจากมากไปน้อย
		6	24	48	98	
↓	3	12	24	49	96	← เศษ
		$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ผลหาร}} \quad 3x^3 + 12x^2 + 24x + 49 $				

ตัวหาร
 $x - 2 = 0$
 $x = 2$

ข้อควรรู้

ถ้าตัวหารอยู่ในรูป $ax + b$ จะต้องนำผลหารจากการหารสังเคราะห์มาคูณด้วย $\frac{1}{a}$ ก่อนถึงจะได้ผลหารที่แท้จริง

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

\heartsuit ตัวหารต้องมีดีกรีเป็น 1

\heartsuit หาเศษจากการหารเท่านั้น

- ถ้า $P(x)$ หารด้วย $x - c$ เศษจะเท่ากับ $P(c)$
- ถ้า $P(c) = 0$ จะได้ว่า $x - c$ หาร $P(x)$ ลงตัว หรือเป็นตัวประกอบของ $P(x)$

II. การแยกตัวประกอบตรรกยะ

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ขั้นตอนการแยกตัวประกอบ

1. หาตัวประกอบของ a_n และ a_0 สมมติว่าเป็น m และ k ตามลำดับ
2. หาค่า $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $P\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ แล้ว $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
3. นำ $\left(x - \frac{k}{m}\right)$ ไปหารสังเคราะห์ $P(x)$ แล้วนำผลหารไปแยกตัวประกอบต่อตามขั้นตอน 1 - 3 ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนแยกตัวประกอบได้ทั้งหมด

Ex จงแยกตัวประกอบ $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$

Sol ขั้นตอนที่ 1 $a_0 = -3$ ตัวประกอบของ a_0 คือ $\pm 1, \pm 3$ ให้เป็น k

$a_n = 2$ ตัวประกอบของ a_n คือ $\pm 1, \pm 2$ ให้เป็น m

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

หาค่า $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $P\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะได้ว่า $\frac{k}{m} = \frac{1}{2}$

ขั้นตอนที่ 3

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 2 & -7 & 1 & 7 & -3 \\ & & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & -6 & -2 & 6 & 0 \\ & & 2 & -4 & -6 & \\ \hline & 2 & -4 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)(2x^2 - 4x - 6) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)(2x + 2)(x - 3) \end{aligned}$$

III. การแก้สมการพหุนามหนึ่งตัวแปร

กรณีพหุนามดีกรีสอง

วิธีที่ 1 แยกสองวงเล็บ

วิธีที่ 2 ใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 : \text{มี 2 คำตอบที่เป็น } R \\ = 0 : \text{มี 1 คำตอบที่เป็น } R \\ < 0 : \text{ไม่มีคำตอบที่เป็น } R \end{cases}$$

สูตรที่ควรรู้

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Trick!!

	$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
ผลบวกของราก	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$
ผลคูณของราก	$\frac{c}{a}$	$-\frac{d}{a}$
ผลบวกของผลคูณของราก	-	$\frac{c}{a}$

IV. การแก้อสมการพหุนามหนึ่งตัวแปร

1. จัดรูปให้ฝั่งหนึ่งเป็นศูนย์แล้วแยกตัวประกอบ
2. ทำ ส.ป.ส หน้าตัวแปรให้เป็น $+$ ทุกวงเล็บ และแต่ละวงเล็บยกกำลังเลขคี่
3. หาค่าตัวแปรที่ทำให้แต่ละวงเล็บเท่ากับ 0
4. นำค่าตัวแปรที่ได้มา *plot* บนเส้นจำนวน และใส่เครื่องหมาย $+$ - $+$ - ไปเรื่อยๆ โดยเริ่มจากขวาไปซ้าย
5. ถ้า $> 0, \geq 0$ ให้ตอบช่วง $+$
ถ้า $< 0, \leq 0$ ให้ตอบช่วง $-$
6. ตรวจสอบคำตอบ ตัวส่วน $\neq 0$
!! การคูณหรือหารด้วยจำนวนลบ ต้องกลับเครื่องหมายอสมการเสมอ
และห้าม \times, \div ทั้งอสมการด้วยตัวแปร

V. ค่าสัมบูรณ์

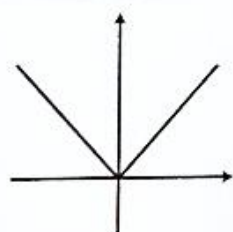
นิยาม

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } a = 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

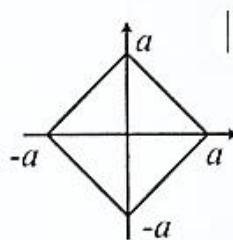
สมบัติค่าสัมบูรณ์ที่ควรรู้

1. $ a \geq 0$	4. $ a \cdot b = a \cdot b $ $\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$
2. $ x < a \rightarrow -a < x < a$ $ x \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$	5. $x^2 = x ^2 = x^2 $
3. $ x > a \rightarrow x < -a$ หรือ $x > a$ $ x \geq a \rightarrow x \leq -a$ หรือ $x \geq a$	6. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a; n \in \text{เลขคู่} \\ a ; n \in \text{เลขคี่} \end{cases}$

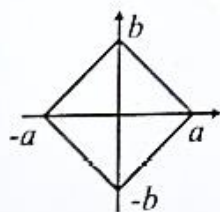
กราฟค่าสัมบูรณ์



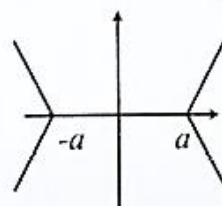
$$y = |x|$$



$$|x| + |y| = a$$



$$\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1$$



$$\frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b} = 1$$

VI. การแก้สมการ/ อสมการ ค่าสัมบูรณ์

ถ้า...	แล้ว...
1. $\left. \begin{array}{l} P(x) = Q(x) \\ P(x) < Q(x) \\ P(x) > Q(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ตรวจคำตอบ} \\ Q(x) \geq 0 \end{array}$	$P(x) = \pm Q(x)$ $-Q(x) < P(x) < Q(x)$ $P(x) < -Q(x) \text{ หรือ } P(x) > Q(x)$
2. $\left. \begin{array}{l} P(x) = P(x) \\ P(x) = -P(x) \end{array} \right\}$	$P(x) \geq 0$ $P(x) \leq 0$
3. $ P(x) = Q(x) $	$(P(x))^2 = (Q(x))^2$
4. มีหลายค่าสัมบูรณ์	ปลดค่าสัมบูรณ์, แยกกรณีคิด
5. $ a + b = a + b $	$ab \geq 0$
$ a + b = a - b $	$ab \leq 0$
$ a + b > a + b $	$ab < 0$
$ a + b \geq a + b $	R