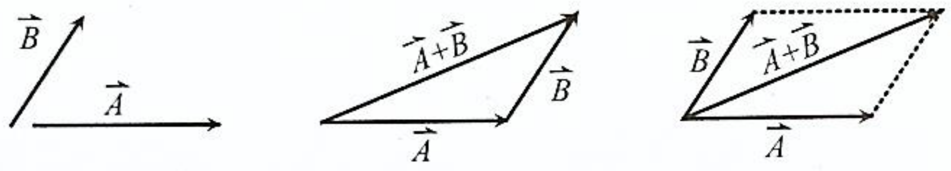
1. การบวกและการลบเวกเตอร์

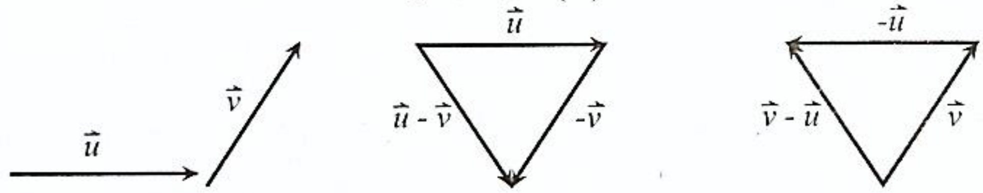
การบวกเวกเตอร์

หางต่อหัว หางต่อหาง



การลบเวกเตอร์

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



TRICK !!!

ปลาย - ต้น

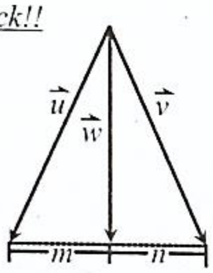
II. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง

	$a > 0$	$a < 0$
$\vec{u}$ $\longrightarrow$	$a\vec{u}$ $\longrightarrow$	$a\vec{u}$ $\longleftarrow$
	$a\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ มีทิศเดียวกัน	$a\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ มีทิศตรงข้ามกัน

Trick!!



$$\vec{w} = \frac{1}{m+n}(n\vec{u} + m\vec{v})$$

ทฤษฎีบทที่สำคัญ

ให้ $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, a \in R$

1. <u>ทฤษฎีบท</u> $\vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \leftrightarrow$ มี $a \neq 0$ ที่ทำให้ $\vec{u} = a\vec{v}$

2. <u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ และ $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

<u>Ex</u> กำหนด $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ ถ้า $x\vec{u} + (3x - 1)\vec{v} = (2y + 1)\vec{u} - 6y\vec{v}$ จงหา $x + y$

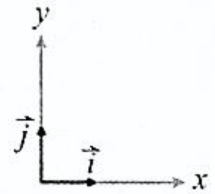
<u>*Sol*</u>

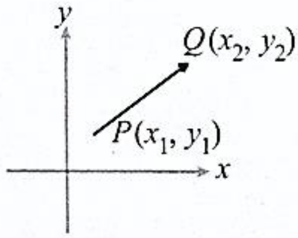
$$(x - 2y - 1)\vec{u} + (3x - 1 + 6y)\vec{v} = \vec{0}$$

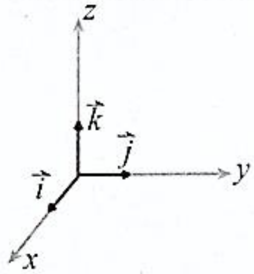
$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x + 6y - 1 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{6}$$

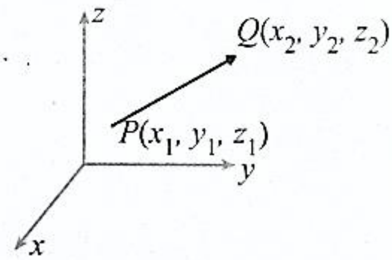
$$\therefore \quad x + y = \frac{1}{2}$$

III. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

<table>
<tr><th></th><th>2 มิติ</th><th>3 มิติ</th></tr>
<tr><td></td><td>

$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$


$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$
$= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$</td><td>

$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$


$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$
$+ (z_2 - z_1)\vec{k}$
$= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>ขนาดของเวกเตอร์</td><td>$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$
$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$</td><td>$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$
$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$</td></tr>
</table>

IV. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)

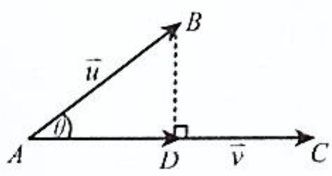
บทนิยาม

ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}, \vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$	ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = ad + be + cf$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\theta$, θ มุมแบบหางต่อหาง	

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

ให้ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ว่า $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
$\vec{w} \cdot (\vec{u} \pm \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} \pm \vec{w} \cdot \vec{v}$
$\vec{u} \cdot \vec{u} = \lvert\vec{u}\rvert^2$
$\lvert\vec{u} \pm \vec{v}\rvert^2 = \lvert\vec{u}\rvert^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \lvert\vec{v}\rvert^2$
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lvert\vec{u}\rvert^2 - \lvert\vec{v}\rvert^2$

เวกเตอร์ภาพฉาย



ให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

$$\overrightarrow{AD} = \lvert\vec{u}\rvert\cos\theta \cdot \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert^2}$$

เรียก $\overrightarrow{AD}$ ว่า โปรเจคชันเวกเตอร์ ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

V . ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product)

บทนิยาม

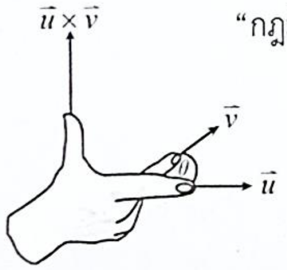
ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

- ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u} \times \vec{v}$

“กฎมือขวา”

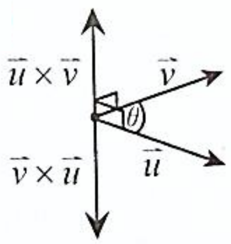


- ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

θ เป็นมุมแบบหางต่อหาง

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

<table>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ บนระนาบ และ $k \in R$</td></tr>
<tr><td>1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$</td><td rowspan="4">7. ถ้า $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ จะได้ว่า
$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ และ $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

</td></tr>
<tr><td>2. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$</td></tr>
<tr><td>3. $\vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$
$(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$</td></tr>
<tr><td>4. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$</td></tr>
<tr><td>5. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$</td><td rowspan="2">8. ถ้า $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน
จะได้ว่า $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$</td></tr>
<tr><td>6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$</td></tr>
</table>