# I. ความรู้เบื้องต้น

**บทนิยาม**

| $z = a + bi \; ; a, b \in R$ | |
|---|---|
| $i = \sqrt{-1}$<br>$\mathrm{Re}(z) = a$<br>$\mathrm{Im}(z) = b$ | ถ้า $\mathrm{Im}(z) = 0$ แล้ว $z$ เป็นจำนวนจริง<br>ถ้า $\mathrm{Re}(z) = 0$ แต่ $\mathrm{Im}(z) \neq 0$<br>แล้ว $z$ <u>เป็นจำนวนจินตภาพแท้</u> |

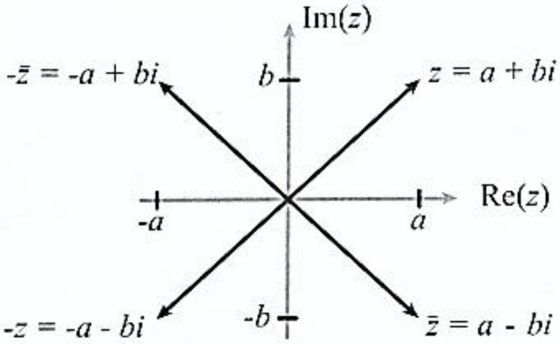
**สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ $z = a + bi$
สังยุคของ $z$ เขียนแทนด้วย $\bar{z}$
$\bar{z} = a - bi$

| | |
|---|---|
| **สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน**<br>1. $\bar{\bar{z}} = z$<br>2. $+, -, \times, \div$ กระจายได้<br>2.1 $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$<br>2.2 $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$<br>2.3 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ | 3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$<br>4. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$<br>$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$<br>5. $z\bar{z} = a^2 + b^2$ |

# II. กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

## กราฟของจำนวนเชิงซ้อน




$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore |z| \geq 0$ เสมอ

## สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
2. $\times, \div$ กระจายได้
   - 2.1 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   - 2.2 $|z^n| = |z|^n, n \in I^+$
   - 2.3 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

3. ☆ $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$

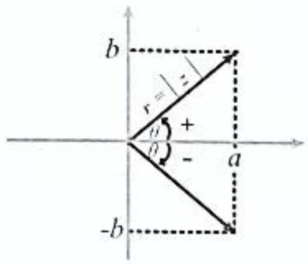
*Trick!!*

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)\overline{(z_1 \pm z_2)}$$
$$= |z_1|^2 \underbrace{\pm z_1 \cdot \bar{z}_2 \pm z_2 \cdot \bar{z}_1}_{2|u||v|\cos\theta} + |z_2|^2$$

4. อสมการสามเหลี่ยม
   - 4.1 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   - 4.2 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

# III. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

## บทนิยามและกราฟ




$z = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\theta$

โดย $r = |z|$ และ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

## ทฤษฎีบท

ให้ $z_1 = r_1\mathrm{cis}(\theta_1)$ และ $z_2 = r_2\,\mathrm{cis}(\theta_2)$

1. $z_1z_2 = r_1r_2\,\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2)$
3. $z^n = r^n\mathrm{cis}(n\theta)$

Ex จงหาค่าของ $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$

Sol $-1+\sqrt{3}\,i = 2\mathrm{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

$$(-1+\sqrt{3}\,i)^5 = (2\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3})^5$$

$$= 2^5\mathrm{cis}\frac{10\pi}{3} = -16-16\sqrt{3}\,i$$

## รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ รากที่ $n$ ของ $z$ คือ

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

### ข้อสังเกต

1. รากแต่ละตัวมีขนาดเท่ากัน
2. ถ้านำรากแต่ละตัวมาเขียนเป็นเวกเตอร์ จะได้ว่าวงกลมจะถูกแบ่งออกเป็น $n$ ส่วนเท่าๆ กัน

## IV. การแก้สมการพหุนาม

### ทฤษฎีบทสังยุคของรากของสมการ

สมการพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n \in I^+$

และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in R$ ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $a+bi$ เป็นรากของคำตอบ แล้ว $a-bi$ เป็นรากของคำตอบด้วย