I. ลิมิต

บทนิยาม

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ หมายความว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ หมายความว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

หลักการหาลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณา $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ให้แทน x ด้วย a

ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{\text{เลข}}$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{เลข}}{\text{เลข}}$

ถ้าได้ $\frac{0}{\text{เลข}}$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{0}$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ หาค่าไม่ได้

ถ้าได้ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ สรุปไม่ได้ →
- ให้แยก *factor*
- คูณด้วย *Conjugate*
- ใช้กฎของโลปิตาล

II. ความต่อเนื่อง

บทนิยาม

ให้ $a \in R$ ใดๆ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ $\left(\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)\right)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

III. อนุพันธ์

บทนิยาม

- เราจะเรียกค่า $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้ว่า "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f"
  เขียนแทนด้วย $f'(x), y', \frac{d}{dx}y, \frac{d}{dx}f(x)$ ดังนั้น $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a), \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=a}$
  ดังนั้น $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

NOTE

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง ที่ $x = a$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ ที่ $x = a$

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

สูตรการหาอนุพันธ์ (c เป็นค่าคงตัว)

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}cx^n = c\frac{d}{dx}x^n$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$
6. $\frac{d}{dx}(uvw) = u'vw + uv'w + uvw'$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
8. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

กฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท

กำหนดให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$

จะได้ว่า $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

IV. การประยุกต์ของอนุพันธ์

กฎของโลปิตาล

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\text{ดิฟบน}}{\text{ดิฟล่าง}}$

ความชันเส้นโค้ง/ ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

ความชันของเส้นตรงที่มาสัมผัสเส้นโค้ง f ณ จุด $x = a$ คือ $f'(a)$

เรียก $f'(a)$ ความชันของเส้นสัมผัส หรือ ความชันของเส้นโค้ง ที่ $x = a$

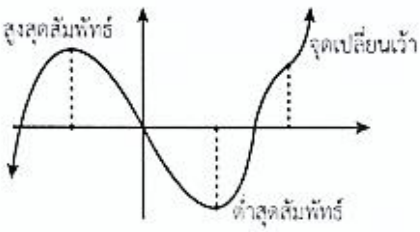
ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง s แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง s

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง s แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง s

IV. การประยุกต์ของอนุพันธ์ (ต่อ)

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์



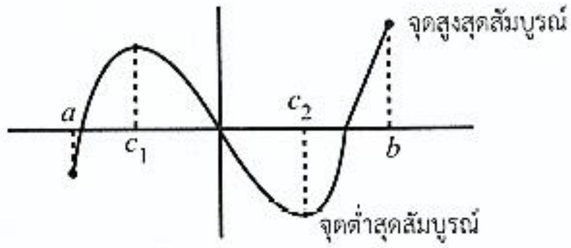
หลักการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์

1. หาค่าวิกฤต $(x = c)$ จาก $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้
2. ทดสอบว่าค่าวิกฤตให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีที่ 1 ดูที่ $f'(x)$	วิธีที่ 2 ดูที่ $f''(x)$	
$f'(x)$ $+$ c $-$	$f''(c) < 0$	$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$f'(x)$ $-$ c $+$	$f''(c) > 0$	$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
	$f''(c) = 0$	สรุปไม่ได้ (ต้องกลับไปใช้วิธีที่ 1)
$f'(x)$ $+$ c $+$	เป็นจุดเปลี่ยนเว้า	
$f'(x)$ $-$ c $-$		

IV. การประยุกต์ของอนุพันธ์ (ต่อ)

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ต่ำสุดสัมบูรณ์



หลักการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ต่ำสุดสัมบูรณ์

1. หาค่าวิกฤต $(x = c)$ จาก $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้พร้อมทั้งหาค่า
2. หาจุดปลาย $f(a), f(b)$
3. เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน

   ค่าที่มากที่สุด จะเป็นค่า สูงสุดสัมบูรณ์

   ค่าที่น้อยที่สุด จะเป็นค่า ต่ำสุดสัมบูรณ์

V. อินทิเกรต

ปฏิยานุพันธ์

ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x

อินทิเกรตไม่จำกัดเขต

<u>สูตรอินทิเกรตไม่จำกัดเขต</u> ให้ k และ c เป็นค่าคงตัว

1. $\int k\,dx = kx + c$
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; $n \neq -1$
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
5. $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

อินทิเกรตจำกัดเขต

กำหนดให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>สูตรอินทิเกรตจำกัดเขต</u>

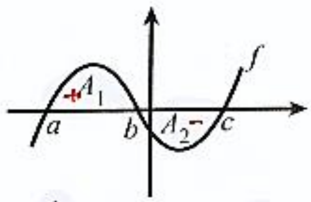
1. ถ้า $a < c < b$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

V. อินทิเกรต (ต่อ)

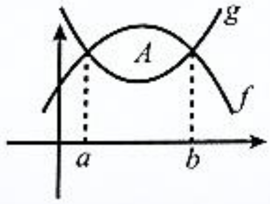
การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

ขั้นตอนการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. หาจุดตัดแกน x / จุดตัดกราฟ
2. คำนวณหาพื้นที่ในแต่ละส่วน



$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$



บน - ล่าง

$$A = \int_a^b (f - g)\,dx$$