

I. การบวก ลบ คูณ เมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

$$AB = [a_{ij}]_{m \times n} \times [b_{ij}]_{n \times p} = [c_{ij}]_{m \times p}$$

♥ แถวคูณหลัก

II. ทรานสโพสเมทริกซ์

บทนิยาม

ทรานสโพส คือ การเปลี่ยนแถวเป็นหลัก

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \rightarrow A' = [a_{ji}]_{n \times m}$$

สมบัติของทรานสโพส



$$1. (A')' = A$$

$$2. (kA)' = kA'$$

$$3. (A \pm B)' = A' \pm B'$$

$$4. (AB)' = B' A'$$

$$(ABC)' = C' B' A'$$

III. ดีเทอร์มิแนนต์

หลักการหา det

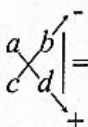
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$

เราใช้สัญลักษณ์ $\det(A)$ หรือ $|A|$ แทน ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

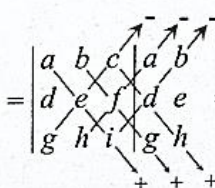
กรณี $n = 1$

$$A = [a] \rightarrow \det(A) = a$$

กรณี $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$


กรณี $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \text{คูล่าง} - \text{คูนบน}$$


กรณี $n \geq 3$ จะใช้ Co-factor + row operation

III. ดีเทอร์มิแนนต์ (ต่อ)

สมบัติของ det



$$1. \det(A') = \det(A)$$

$$2. \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$3. \det(A^n) = (\det(A))^n$$

$$4. \det(kA) = k^n \det(A), k \in R \text{ และ } n \text{ คือมิติของ } A$$

$$5. \det(I) = 1, \det(O) = 0$$

6. ค่า det ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมจะเท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$$

7. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการสลับสองแถวใดหรือสองหลักใด แล้ว $\det(B) = -\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in R$ แล้ว $\det(B) = k \cdot \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in R$ แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่งหรือคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วย $k \in R$ แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง แล้ว $\det(B) = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + ka_{11}) & (a_{22} + ka_{12}) & (a_{23} + ka_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

IV. ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์

ไมเนอร์

$M_{ij}(A)$ คือ \det ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i หลักที่ j

โคแฟกเตอร์

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

การหา \det โดยใช้โคแฟกเตอร์

$\det(A) =$ ผลรวมของ $a_{ij}C_{ij}(A)$ บนแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง

V. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

เมทริกซ์ผกผัน

$$\text{adj}(A) = [C_{ij}(A)]^t$$

อินเวอร์สการคูณ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$\text{กรณี } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ถ้าเมทริกซ์ A มี $\det(A) = 0$ จะได้ว่า เมทริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

ถ้า $|A| = 0 \leftrightarrow$ ไม่มี $A^{-1} \leftrightarrow$ เรียก A ว่า “เมทริกซ์เอกฐาน”

ถ้า $|A| \neq 0 \leftrightarrow$ มี $A^{-1} \leftrightarrow$ เรียก A ว่า “เมทริกซ์ไม่เอกฐาน”

สมบัติอินเวอร์สการคูณ



$$1. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2. (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$3. (cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$$

$$4. \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$5. \det(\text{adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

VI. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

ใช้อินเวอร์สการคูณ

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} AX &= B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ ระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว

ถ้า $\det(A) = 0$ ระบบสมการไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน

ใช้กฎคราเมอร์



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ ระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว

ถ้า $\det(A) = 0$ ระบบสมการไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน

VII. การดำเนินการตามแถว (row operation)

1. สลับแถว : R_{ij}
 2. นำค่าคงที่ ($\neq 0$) ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง : $k \cdot R_i$
 3. นำค่าคงที่ ($\neq 0$) ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง แล้วนำไปบวกหรือลบกับอีกแถวหนึ่ง : $R_i + k \cdot R_j$
- การใช้การดำเนินการตามแถวในการจัดรูปเพื่อหา \det

- B เกิดจาก A โดยการ R_{ij} จะได้ว่า $\det(B) = -\det(A)$
- B เกิดจาก A โดยการ $k \cdot R_i$ จะได้ว่า $\det(B) = k \cdot \det(A)$
- B เกิดจาก A โดยการ $R_i + k \cdot R_j$ จะได้ว่า $\det(B) = \det(A)$

การหาอินเวอร์สโดยวิธีการดำเนินการตามแถว

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$