

## I. ผลคูณคาร์ทีเซียน

### คู่อันดับ

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ และ } b = d$$

$$(a, b) \neq (c, d) \leftrightarrow a \neq c \text{ หรือ } b \neq d$$

### บทนิยาม

ผลคูณคาร์ทีเซียน

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

สมบัติ

$$1. A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B \text{ หรือ } A = \emptyset \text{ หรือ } B = \emptyset$$

2. สมบัติการกระจาย

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$3. (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$4. n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

Ex กำหนดให้  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b\}$  จงหา  $A \times B$ ,  $n(A \times B)$

Sol  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$   
 $n(A \times B) = 2 \times 2 = 4$

## II. ความสัมพันธ์

### บทนิยาม

- $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B \rightarrow r \subset A \times B$
- $(x, y) \in r$  เขียนแทนด้วย  $x r y$
- ความสัมพันธ์ใน  $A$  คือ ความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $A$
- จำนวนความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  เท่ากับ  $2^{n(A \times B)} = 2^{n(A) \cdot n(B)}$
- $\emptyset$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  เสมอ

**Ex** กำหนดให้  $A = \{1\}, B = \{a, b\}$  จงหาความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$

**Sol** จาก  $A \times B = \{(1, a), (1, b)\}$  จะได้ ความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  ได้แก่  
 $r_1 = \emptyset, r_2 = \{(1, a)\}, r_3 = \{(1, b)\}, r_4 = \{(1, a), (1, b)\}$

### โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมน ( $D_r$ ) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน  $r$

เรนจ์ ( $R_r$ ) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน  $r$

หลักการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากเงื่อนไข

โดเมน (x)	เรนจ์ (y)
1. จัด $y$ ในเทอมของ $x$	1. จัด $x$ ในเทอมของ $y$
2. พิจารณาค่า $x$ ที่ทำให้หาค่า $y$ ได้	2. พิจารณาค่า $y$ ที่ทำให้หาค่า $x$ ได้

หลักการพิจารณา  
 ส่วน  $\neq 0$   
 $|\square| \geq 0$   
 $\sqrt{\square} \geq 0$  และ  $\square \geq 0$   
 $(\square)^2 \geq 0$

**Ex** กำหนดให้  $r = \{(x, y) | y = \frac{2x+3}{4x-1}\}$

จงหาโดเมน, เรนจ์

**Sol**  $y(4x-1) = 2x+3$

$$4xy - y = 2x + 3$$

$$x(4y-2) = y+3$$

$$x = \frac{y+3}{4y-2}$$

$$D_r = R - \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$R_r = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$



## II. ความสัมพันธ์ (ต่อ)

### กราฟของความสัมพันธ์

นิยาม

เซตของจุดบนระนาบของความสัมพันธ์

โดเมน

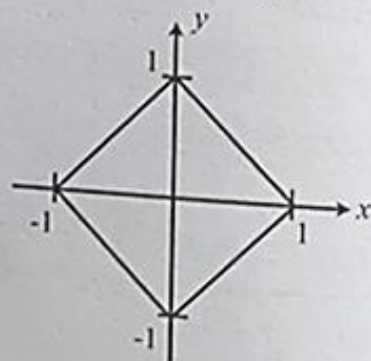
หาได้จากขอบเขตของค่า  $x$  บนกราฟ

เรนจ์

หาได้จากขอบเขตของค่า  $y$  บนกราฟ

Ex กำหนดให้  $r = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$  จงหาโดเมน, เรนจ์

Sol จากกราฟความสัมพันธ์



ดังนั้น โดเมน คือ  $D_r = [-1, 1]$

เรนจ์ คือ  $R_r = [-1, 1]$



### III. อินเวอร์สของความสัมพันธ์

#### บทนิยาม

กำหนดให้  $r = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in r\}$   
 จะได้ว่า  $r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$

#### หลักการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

$r$ เขียนแบบแจกแจงสมาชิก	สลับที่ตัวหน้ากับตัวหลัง ในคู่อันดับทุกตัว
$r$ เขียนแบบบอกเงื่อนไข เช่น	$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = f(x)\}$
$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$	$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = f(y)\}$

Ex กำหนดให้  $r = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$   
 จะได้ว่า  $r^{-1} = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

Ex กำหนดให้  $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{2x-1}{3}\}$

จะได้ว่า  $r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = \frac{2y-1}{3}\}$

หรือ  $r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid y = \frac{3x+1}{2}\}$  จัดรูป



#### สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์ส

$D_{r^{-1}} = R_r$ ;  $R_{r^{-1}} = D_r$   
 กราฟของ  $r$  กับ  $r^{-1}$  สมมาตรบนเส้นตรง  $y = x$

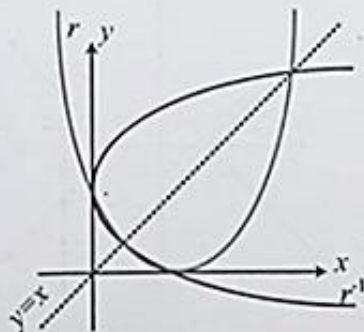
Ex กำหนดให้  $r = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$

จงหา  $r^{-1}$ ,  $D_{r^{-1}}$ ,  $R_{r^{-1}}$  และกราฟ  $r^{-1}$

Sol จะได้ว่า  $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = (y-1)^2\}$

$D_{r^{-1}} = R_r = [0, \infty)$

$R_{r^{-1}} = D_r = \mathbb{R}$



## IV. ฟังก์ชัน

### บทนิยาม

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวไปจับกับสมาชิกในเรนจ์  
เพียงตัวเดียว


ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

$y = f(x)$  โดยที่  $f(x)$  คือ ค่า  $y$  ที่  $x$  ใดๆ

♥  $f$  ห้ามเจ้าชู้ (หน้าเหมือนหลังต้องเหมือน)

### หลักพิจารณาฟังก์ชัน

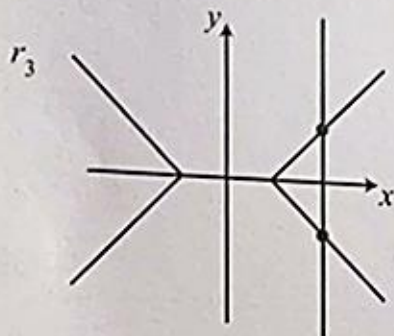
1. แบบแจกแจงสมาชิก	ถ้า $x$ "เจ้าชู้" $\rightarrow$ ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. แบบบอกเงื่อนไข	แทน $x$ 1 ค่า ได้ $y$ มากกว่า 1 ค่า ไม่เป็นฟังก์ชัน
3. กราฟ	ลากเส้นขนานแกน $y$ ตัดมากกว่า 1 จุด ไม่เป็นฟังก์ชัน

Note 

Ex จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

$r_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\}$  ไม่เป็นฟังก์ชัน (เพราะ  $(2, 1)$  และ  $(2, 3)$ )

$r_2 = \{(x, y) | y^2 = |x - 2|\}$  ไม่เป็นฟังก์ชัน (เพราะแทน  $x = 1$  ได้  $y = -1, 1$ )



ไม่เป็นฟังก์ชัน

(เพราะจากเส้นขนาน แกน  $y$   
ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด)

## IV. ฟังก์ชัน (ต่อ)

### ลักษณะของฟังก์ชัน

จาก $A$ ไป $B$ ( $A$ into $B$ ) $f: A \rightarrow B$	$D_f = A ; R_f \subset B$
จาก $A$ ไปทั่วถึง $B$ ( $A$ onto $B$ ) $f: A \twoheadrightarrow B$	$D_f = A ; R_f = B$
1-1 จาก $A$ ไป $B$ ( $one\ to\ one$ ) $f: A \xrightarrow{1-1} B$	ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

### หลักพิจารณาฟังก์ชัน 1-1

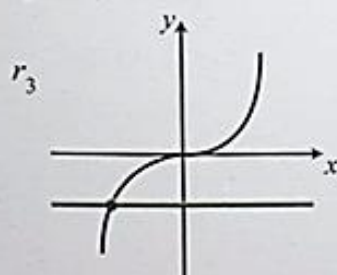
1. แบบแจกแจงสมาชิก	ถ้า $y$ "เจ้าชู้" $\rightarrow$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. แบบบอกเงื่อนไข	แทน $y$ 1 ค่า ได้ $x$ มากกว่า 1 ค่า ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
3. กราฟ	ลากเส้นขนานแกน $x$ ตัดมากกว่า 1 จุด ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1



Ex จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่

$r_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$  ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 (เพราะ  $(1, 2)$  และ  $(3, 2)$ )

$r_2 = \{(x, y) | y = |x - 2|\}$  ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 (เพราะแทน  $y = 1$  ได้  $x = 1, 3$ )



เป็นฟังก์ชัน 1-1 (เพราะ ลากเส้นขนานแกน  $x$  ตัดกราฟเพียงจุดเดียว)



## V. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

1.  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชัน  $\leftrightarrow f$  เป็นฟังก์ชัน 1-1

2.  $D_{f^{-1}} = R_f$  และ  $R_{f^{-1}} = D_f$

3.  $(f^{-1})^{-1} = f$

♥ 4.  $f(\Delta) = \square \leftrightarrow \Delta = f^{-1}(\square)$



Ex กำหนดให้  $f(2x+1) = x-3$  จงหา  $f^{-1}(2)$

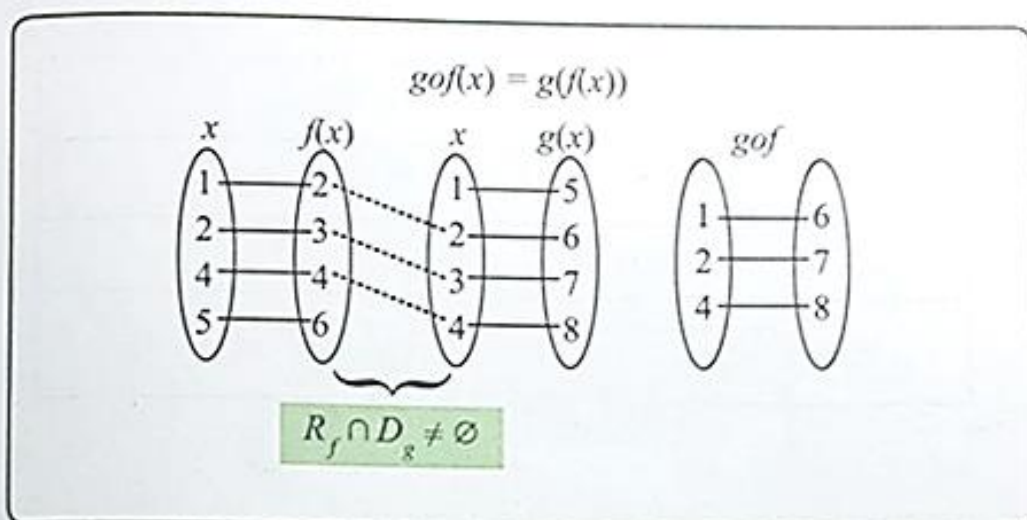
Sol จาก  $f(\Delta) = \square \leftrightarrow \Delta = f^{-1}(\square)$

ดังนั้น  $2x+1 = f^{-1}(x-3)$

แทน  $x=5$  จะได้

$\therefore f^{-1}(2) = 11$

## VI. ฟังก์ชันประกอบ



1.  $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
2.  $\left. \begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= x \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= x \end{aligned} \right\} f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$
3.  $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

Ex กำหนดให้  $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$ ,  $f(x) = 2x + 1$  จงหา  $(g \circ f)(x)$

Sol  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$   
 $x^2 - 3 = 2g(x) + 1$   
 $g(x) = \frac{x^2 - 4}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 1) \\ &= \frac{(2x + 1)^2 - 4}{2} \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 3}{2} \end{aligned}$$



## VII. พืชคณิตของฟังก์ชัน

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad ; \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

## VIII. ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

### นิยาม

ฟังก์ชันเพิ่ม	$x$ เพิ่ม $y$ เพิ่ม / $x$ ลด $y$ ลด	♥ ตามกัน
ฟังก์ชันลด	$x$ เพิ่ม $y$ ลด / $x$ ลด $y$ เพิ่ม	♥ สวนทางกัน

### วิธีตรวจสอบ

วาดกราฟ	ดู slope ของเส้นสัมผัส	ถ้า slope + เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า slope - เป็นฟังก์ชันลด
บทนิยาม	♥ $f$ เพิ่ม	$x_1 < x_2 \rightarrow y_1 < y_2$ (ตามกัน)
	♥ $f$ ลด	$x_1 < x_2 \rightarrow y_1 > y_2$ (สวนทางกัน)

## IX. Trick/ โจทย์แนวพิเศษ

### ฟังก์ชันเวียนเกิด

Ex ให้  $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2), y_n = f(y_{n-1})$  สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$

จงหา  $y_{2553} + y_{2010}$



Trick

หา Pattern

Sol

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{x+1}{x-1} \\ y_2 &= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = x \\ y_3 &= \frac{x+1}{x-1} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{หา Pattern}} y_n = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & ; n \in \text{คี่} \\ x & ; n \in \text{คู่} \end{cases}$$

$$\therefore y_{2,553} + y_{2,010} = \frac{x+1}{x-1} + x = \frac{x^2 + 1}{x-1}$$

### สมการเชิงฟังก์ชัน

Ex กำหนดให้  $f: R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $xf(x) + f(1-x) = 2x - x^2$

จงหา  $f(x)$

Sol แทน  $x$  ด้วย  $1-x$  ;  $(1-x)f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^2$

$$(1-x)f(1-x) + f(x) = 1 - x^2 \quad \text{--- ①}$$

จาก  $xf(x) + f(1-x) = 2x - x^2$  คูณด้วย  $1-x$

$$(1-x)xf(x) + (1-x)f(1-x) = (2x - x^2)(1-x) \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} - \text{②} ; f(x) \cdot (1-x+x^2) = (1-x^2) - (2x-x^2)(1-x)$$

$$\therefore f(x) = 1-x$$