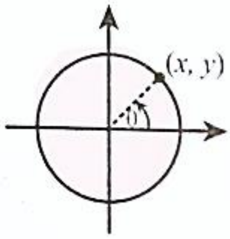
1. บทนิยาม

ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์

	ไซน์ $\sin\theta = y$ $D_f = R \quad R_f = [-1, 1]$ โคไซน์ $\cos\theta = x$ $D_f = R \quad R_f = [-1, 1]$
$-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

$\tan\theta = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	$\cot\theta = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$
$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\div \cos^2\theta$:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

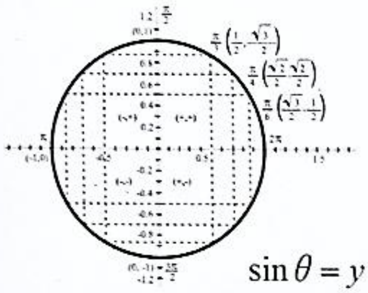
$\div \sin^2\theta$:

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$
$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

I. บทนิยาม (ต่อ)

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

มุมที่ควรจำ



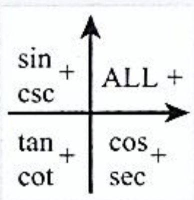
$\sin\theta = y$

$\cos\theta = x$

ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	-	-1
cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	-

การแปลงมุม

• มุมแกนราบ $f(n\pi \pm \theta) = \pm f(\theta)$ $\pm$ ดูที่ Q	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$	$\csc(\pi - \theta) = \csc(\theta)$ $\sec(\pi - \theta) = -\sec(\theta)$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot(\theta)$
• มุมแกนดิ่ง (n เป็นเลขคี่) $f(\frac{n\pi}{2} \pm \theta) = \pm Co\text{-}f(\theta)$ $\pm$ ดูที่ Q	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$ $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot(\theta)$	$\csc(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sec(\theta)$ $\sec(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\csc(\theta)$ $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan(\theta)$
• มุมติดลบ $f(-\theta) = \pm f(\theta)$ $\pm$ ดูที่ Q	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$	$\csc(-\theta) = -\csc(\theta)$ $\sec(-\theta) = \sec(\theta)$ $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$



1. บทนิยาม (ต่อ)

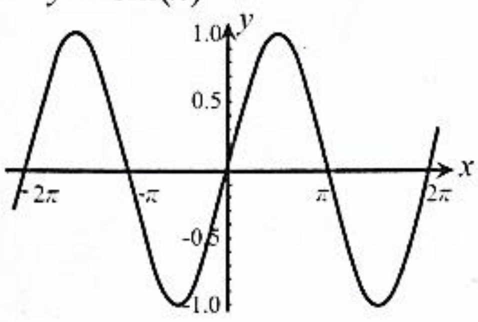
Co - function

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \cos B \\ \tan A &= \cot B \\ \sec A &= \operatorname{cosec} B \end{aligned}\right\} \; A+B = 90^\circ \text{ หรือ } \frac{\pi}{2}$$

II. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

<table>
<tr>
<td>

1. $y = \sin(x)$

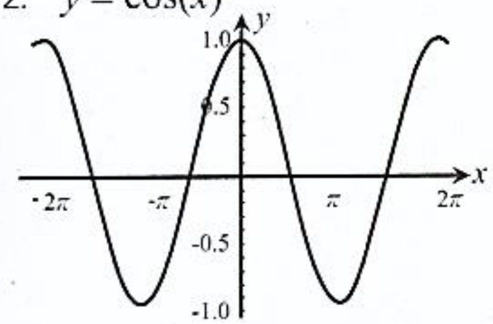


</td>
<td>

คาบ = 2π
แอมพลิจูด = 1
โดเมน = R
เรนจ์ = $[-1, 1]$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. $y = \cos(x)$

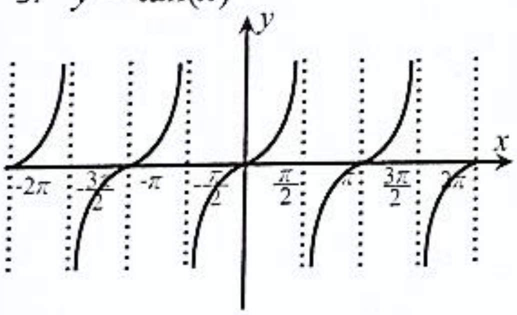


</td>
<td>

คาบ = 2π
แอมพลิจูด = 1
โดเมน = R
เรนจ์ = $[-1, 1]$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. $y = \tan(x)$

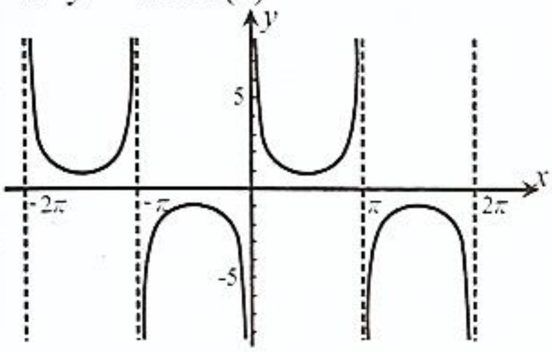
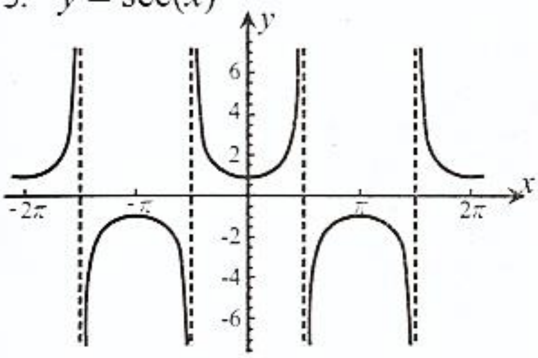
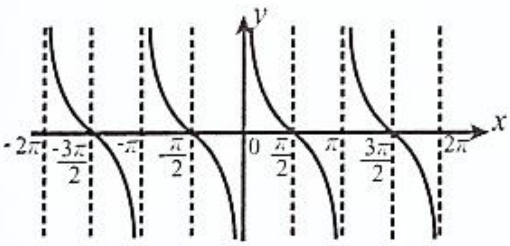


</td>
<td>

คาบ = π
แอมพลิจูด = ไม่มี
โดเมน = $\left\{x \in R \,\middle|\, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I\right\}$
เรนจ์ = R

</td>
</tr>
</table>

II. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ต่อ)

4. $y = \operatorname{cosec}(x)$ 	คาบ = 2π แอมพลิจูด = ไม่มี โดเมน = $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in I\}$ เรนจ์ =$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
5. $y = \sec(x)$ 	คาบ = 2π แอมพลิจูด = ไม่มี โดเมน = $\left\{x \in R \,\middle\|\, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I\right\}$ เรนจ์ =$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
6. $y = \cot(x)$ 	คาบ = π แอมพลิจูด = ไม่มี โดเมน = $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in I\}$ เรนจ์ = R

III. สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผลบวก ผลต่างของมุม

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $a\sin\theta + b\cos\theta$

คือ $\max = \sqrt{a^2+b^2}$

$\min = -\sqrt{a^2+b^2}$

มุมสองเท่า ครึ่งเท่า สามเท่า

มุมสองเท่า

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$$

มุมครึ่งเท่า

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

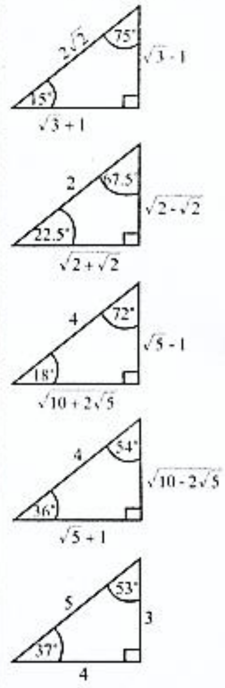
$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

+ หรือ - ขึ้นกับ $\frac{A}{2}$ ว่าอยู่จตุภาคไหน

มุมสามเท่า

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$



III. สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ต่อ)

ผลคูณ ผลบวก ผลต่าง ของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์

ผลบวก ผลต่าง $\longrightarrow$ ผลคูณ

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

ผลบวก ผลต่าง $\longleftarrow$ ผลคูณ

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$$

IV. การแก้สมการ อสมการของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ใช้เอกลักษณ์/ สูตรต่างๆ เพื่อจัดรูป แล้วแยกตัวประกอบ

2. ตรวจคำตอบ
   - $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
   - $\tan(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ x เป็นมุมแกนดิ่ง

     $\cot(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ x เป็นมุมแกนราบ
   - การยกกำลังสองอาจทำให้ได้คำตอบเกินมา

V. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยาม

	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	อินเวอร์สของฟังก์ชัน	ฟังก์ชันอินเวอร์ส	โดเมนของฟังก์ชันอินเวอร์ส	เรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส	
Gr.1	$y = \sin x$	$x = \sin y$	$y = \arcsin x$ หรือ $y = \sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
	$y = \tan x$	$x = \tan y$	$y = \arctan x$ หรือ $y = \tan^{-1}x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
	$y = \csc x$	$x = \csc y$	$y = \operatorname{arccsc} x$ หรือ $y = \csc^{-1}x$	$R - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	
Gr.2	$y = \cos x$	$x = \cos y$	$y = \arccos x$ หรือ $y = \cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
	$y = \cot x$	$x = \cot y$	$y = \operatorname{arccot} x$ หรือ $y = \cot^{-1}x$	R	$(0, \pi)$	
	$y = \sec x$	$x = \sec y$	$y = \operatorname{arcsec} x$ หรือ $y = \sec^{-1}x$	$R - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

KEY IDEA $\quad f(f^{-1}(x)) = x,\ f^{-1}(f(x)) = x$

$\sin(\arcsin x) = x \leftrightarrow x \in [-1, 1]$

$\arcsin(\sin x) = x \leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos(\arccos x) = x \leftrightarrow x \in [-1, 1]$

$\arccos(\cos x) = x \leftrightarrow x \in [0, \pi]$

$\tan(\arctan x) = x \leftrightarrow x \in R$

$\arctan(\tan x) = x \leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\csc(\operatorname{arc\,csc} x) = x \leftrightarrow x \in R - (-1, 1)$

$\operatorname{arc\,csc}(\csc x) = x \leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

$\sec(\operatorname{arc\,sec} x) = x \leftrightarrow x \in R - (-1, 1)$

$\operatorname{arc\,sec}(\sec x) = x \leftrightarrow x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\cot(\operatorname{arc\,cot} x) = x \leftrightarrow x \in R$

$\operatorname{arc\,cot}(\cot x) = x \leftrightarrow x \in (0, \pi)$

V. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ต่อ)

สมบัติของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- **สมบัติยุบ arctan**

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad ; \; xy < 1$$

$$\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad ; \; xy > 1, x > 0, y > 0$$

$$\arctan x + \arctan y = -\pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad ; \; xy > 1, x < 0, y < 0$$

- **สมบัติคู่ co - function**

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arc\,cot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,csc} x = \frac{\pi}{2}$$

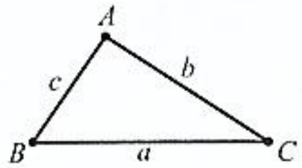
VI. การแก้สมการของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ใช้หลักการเปลี่ยน arc (วาดรูปสามเหลี่ยม) หรือใช้สมบัติเพื่อจัดรูปสมการ
2. take ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อกำจัด arc
3. ต้องตรวจคำตอบทุกครั้ง !!!

VII. ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับเรขาคณิต

กฎของไซน์

กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



NOTE

กฎนี้ใช้เมื่อโจทย์กำหนด

(1) ความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสอง มุมใดมุมหนึ่งมาให้

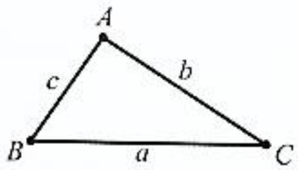
(2) ขนาดของมุม 2 มุม และความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสอง มุมใดมุมหนึ่งมาให้

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



NOTE

กฎนี้ใช้เมื่อโจทย์กำหนด

(1) ความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสองมาให้

(2) ความยาวด้านทั้งสามด้านมาให้