I. การบวก ลบ คูณ เมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

$$\boxed{AB = [a_{ij}]_{m\times n} \times [b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij}]_{m\times p}}$$

แถวคูณหลัก

II. ทรานสโพสเมทริกซ์

บทนิยาม

ทรานสโพส คือ การเปลี่ยนแถวเป็นหลัก

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \to A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$$

สมบัติของทรานสโพส

1. $(A^t)^t = A$
2. $(kA)^t = kA^t$
3. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$ $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

III. ดีเทอร์มิแนนต์

หลักการหา det

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$

เราใช้สัญลักษณ์ $det(A)$ หรือ $|A|$ แทน ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

กรณี $n = 1$ $A = [a] \rightarrow det(A) = a$
กรณี $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
กรณี $n = 3$ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = \left\lvert \begin{array}{ccc\|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \right.$ = คูณล่าง - คูณบน
กรณี $n \geqslant 3$ จะใช้ $Co - factor + row\ operation$

III. ดีเทอร์มิแนนต์ (ต่อ)

สมบัติของ det

1. $\det(A^t) = \det(A)$

2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

3. $\det(A^n) = (\det(A))^n$

4. $\det(kA) = k^n \det(A)$, $k \in R$ และ n คือมิติของ A

5. $\det(I) = 1$, $\det(\underline{0}) = 0$

6. ค่า det ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมจะเท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$$

7. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการสลับสองแถวใดหรือสองหลักใด แล้ว

$\det(B) = -\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $\boldsymbol{k} \in R$

แล้ว $\det(B) = \boldsymbol{k} \cdot \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in R$ แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่งหรือคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วย $k \in R$ แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง

แล้ว $\det(B) = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+ka_{11}) & (a_{22}+ka_{12}) & (a_{23}+ka_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

IV. ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์

ไมเนอร์

$M_{ij}(A)$ คือ det ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i หลักที่ j

โคแฟกเตอร์

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \; M_{ij}(A)$$

การหา det โดยใช้โคแฟกเตอร์

$det(\mathrm{A})$ = ผลรวมของ $a_{ij} C_{ij}(A)$ บนแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง

V. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

เมทริกซ์ผูกพัน

$$adj(A) = [C_{ij}(A)]^t$$

อินเวอร์สการคูณ

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

กรณี $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ถ้าเมทริกซ์ A มี $det(A) = 0$ จะได้ว่า เมทริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

ถ้า $|A| = 0 \leftrightarrow$ ไม่มี $A^{-1} \leftrightarrow$ เรียก A ว่า "เมทริกซ์เอกฐาน"

ถ้า $|A| \neq 0 \leftrightarrow$ มี $A^{-1} \leftrightarrow$ เรียก A ว่า "เมทริกซ์ไม่เอกฐาน"

สมบัติอินเวอร์สการคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$
4. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det A}$
5. $det(adj(A)) = (det A)^{n-1}$

VI. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

ใช้อินเวอร์สการคูณ

$$\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} AX = B \\ X = A^{-1}B \end{matrix}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ ระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว

ถ้า $\det(A) = 0$ ระบบสมการไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน

ใช้กฎคราเมอร์

$$\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ ระบบสมการมีเพียงคำตอบเดียว

ถ้า $\det(A) = 0$ ระบบสมการไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน

VII. การดำเนินการตามแถว (row operation)

1. สลับแถว : R_{ij}
2. นำค่าคงที่ ($\neq 0$) ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง : $k \cdot R_i$
3. นำค่าคงที่ ($\neq 0$) ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง แล้วนำไปบวกหรือลบกับอีกแถวหนึ่ง : $R_i + k \cdot R_j$

<u>การใช้การดำเนินการตามแถวในการจัดรูปเพื่อหา *det*</u>

- B เกิดจาก A โดยการ R_{ij} จะได้ว่า $det(B) = -det(A)$
- B เกิดจาก A โดยการ $k \cdot R_i$ จะได้ว่า $det(B) = k \cdot det(A)$
- B เกิดจาก A โดยการ $R_i + k \cdot R_j$ จะได้ว่า $det(B) = det(A)$

<u>การหาอินเวอร์สโดยวิธีการดำเนินการตามแถว</u>

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$