Dear CPV ILL Colleagues,

Article was written in Chinese. Thank you.

论本质下确界与条件期望运算的可交换性

严　加　安
(中国科学院应用数学研究所,北京)

§1. 主要结果

令 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，H 为随机变量的一个非空族．我们用 ess.inf H 或 $\underset{\xi \in H}{\text{ess.inf}}\ \xi$ 表示 H 的本质下确界(它恒存在)．本文只讨论 ess.inf 情形，因为将结果改述为 ess.sup 情形是不足道的．

令 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为可积随机变量空间．设 $H \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 非空，且 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ 域．Striebel[1] 证明了如下结果：若 H 中每个元非负，且对任给 $\varepsilon > 0$ 及 $\xi_1, \xi_2 \in H$，存在 $\xi_3 \in H$ 使得 $\xi_3 \leqslant \xi_1 \wedge \xi_2 + \varepsilon$ a.s.，则有

$$E[\text{ess.inf}\, H \mid \mathscr{G}] = \text{ess.inf}\{E[\xi \mid \mathscr{G}]; \xi \in H\} \tag{1}$$

(见文献 [2]，p.250)．

本文主要结果是下一定理，它给出了使 (1) 式成立的某些充要条件．

定理 1　设 $H \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，使得 $\inf_{\xi \in H} E[\xi] > -\infty$．则下列断言等价：

(i) $\forall \varepsilon > 0$，$\xi_1, \xi_2 \in H$，存在 $\xi_3 \in H$ 使得 $E[(\xi_3 - \xi_1 \wedge \xi_2)^+] \leqslant \varepsilon$；

(ii) $E[\text{ess.inf}\, H] = \inf_{\xi \in H} E[\xi]$；

(iii) 对 $\mathscr{F}$ 的任一子 σ 域 $\mathscr{G}$，(1) 式成立．

此外，设 $H' \subset H$ 使得 $\inf_{\xi \in H'} E[\xi] = \inf_{\xi \in H} E[\xi]$．若上述三条件之一满足，我们有

$$\text{ess.inf}\, H' = \text{ess.inf}\, H,$$

且有

$$E[\text{ess.inf}\, H \mid \mathscr{G}] = \text{ess.inf}\{E[\xi \mid \mathscr{G}]; \xi \in H'\}. \tag{2}$$

证　(i) $\Rightarrow$ (ii)，设 (i) 成立．取 $(\xi_n) \subset H$ 使得 $\lim_{n \to \infty} E[\xi_n] = \inf_{\xi \in H} E[\xi] \triangleq h$．对给定 $\varepsilon > 0$，令 $\eta_1 = \xi_1$，并归纳选取 $\eta_n \in H$ 使得

$$E[(\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+] \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

记 $\delta_1 = 0, \delta_n = (\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+$，$n \geqslant 2$．令

$$\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k, \quad \bar{\eta}_n = \eta_n + \gamma_n, \quad n \geqslant 1,$$

则有

$$\bar{\eta}_{n+1} = \eta_{n+1} + \gamma_{n+1} \leqslant (\eta_n + \delta_{n+1}) + \gamma_{n+1} = \bar{\eta}_n, \quad n \geqslant 1.$$

于是 $\bar{\eta}_n$ 下降趋于一极限 $\bar{\eta}$．由于我们有

$$h \leqslant E[\eta_n] \leqslant E[\xi_n] + E[\delta_n],$$

本文 1984 年 5 月 7 日收到．

$$E[\bar{\eta}_n] = E[\eta_n] + E[\gamma_n],$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\delta_n] = \lim\limits_{n\to\infty} E[\gamma_n] = 0$，我们有

$$E[\bar{\eta}] = \lim_{n\to\infty} E[\bar{\eta}_n] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n] = h. \tag{4}$$

现令 $\xi^* = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$. 往证 $E[\xi^*] = h$ 及 $\xi^* = \text{ess.}\inf H$，这将蕴含 (ii) 成立. 我们有 (注意 $\delta_1 = 0$)

$$\bar{\eta}_n = \eta_n + \gamma_n \leqslant \xi_n + \delta_n + \gamma_n \leqslant \xi_n + \gamma_1,\ n \geqslant 1. \tag{5}$$

于是

$$\bar{\eta} = \bigwedge_n \bar{\eta}_n \leqslant \bigwedge_n (\xi_n + \gamma_1) = \xi^* + \gamma_1.$$

从而 $E[\xi^*] \geqslant E[\bar{\eta}] - E[\gamma_1] \geqslant h - \varepsilon$. 但由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的且 $E[\xi^*] \leqslant \inf\limits_n E[\xi_n] = h$，故有 $E[\xi^*] = h$. 另一方面，对任何 $\xi_0 \in H$，考虑序列 $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$，则由刚才的结果有

$$E[\xi_0 \wedge \xi^*] = E\left[\bigwedge_{k=0}^{\infty} \xi_k\right] = h = E[\xi^*].$$

由此可见 $\xi_0 \geqslant \xi^*$ a.s.. 从而最终有 $\xi^* = \text{ess.}\inf H$. (i) ⇒ (ii) 得证.

(ii) ⇒ (i). 设 (ii) 成立，令 $\xi^* = \text{ess.}\inf H$. 依假设，$E[\xi^*] = h \triangleq \inf\limits_{\xi\in H} E[\xi]$. 于是对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\xi \in H$ 使得 $E[\xi] \leqslant h + \varepsilon$，即 $E[\xi - \xi^*] \leqslant \varepsilon$. 这显然蕴含 (i) 成立.

(i) ⇒ (iii). 设 (i) 成立，对任何 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in H$，由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}(E[\xi_3|\mathscr{G}] - E[\xi_1|\mathscr{G}] \wedge E[\xi_2|\mathscr{G}])^+ &\leqslant (E[\xi_3 - \xi_1\wedge\xi_2|\mathscr{G}])^+ \\ &\leqslant E[(\xi_3 - \xi_1\wedge\xi_2)^+|\mathscr{G}].\end{aligned}$$

于是随机变量族 $\{E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H\}$ 满足条件 (i). 对任何 $A \in \mathscr{G}$，令

$$H_A = \{I_A\xi: \xi\in H\},\quad \widetilde{H}_A = \{I_A E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H\}.$$

显然 H_A 及 $\widetilde{H}_A$ 满足 (i). 因此由 (i) ⇒ (ii) 推知，

$$\begin{aligned}E[I_A\,\text{ess.}\inf H] &= E[\text{ess.}\inf H_A] = \inf_{\xi\in H} E[\xi I_A] = \inf_{\xi\in H} E[E[\xi|\mathscr{G}]I_A] \\ &= \inf_{\eta\in\widetilde{H}_A} E[\eta] = E[\text{ess.}\inf \widetilde{H}_A] = E[I_A\,\text{ess.}\inf\{E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H\}].\end{aligned}$$

这蕴含 (1) 式成立.

(iii) ⇒ (ii) 是不足道的. 在 (1) 式中令 $\mathscr{G} = \{\phi, \Omega\}$ 即得 (ii).

往证定理的第二部分. 设 (i) 成立，取 $(\xi_n) \subset H'$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\xi_n] = \inf\limits_{\xi\in H} E[\xi]$. 由 (i) ⇒ (ii) 的证明知，$\bigwedge\limits_n \xi_n = \text{ess.}\inf H$，从而 $\text{ess.}\inf H' = \text{ess.}\inf H$. 由于族 $\{E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H\}$ 也使 (i) 成立，故同理有

$$\text{ess.}\inf\{E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H'\} = \text{ess.}\inf\{E[\xi|\mathscr{G}]: \xi\in H\}.$$

这与 (1) 式共同蕴含 (2) 式. 定理证毕.

注: 令 $\widetilde{H} = \left\{\bigwedge\limits_{i=1}^{k} \xi_i: \xi_1, \cdots, \xi_k \in H,\ k = 1, 2, \cdots\right\}$，则定理 1 中诸断言与下列断言等价:

(iv) $\forall\varepsilon > 0$，$\eta \in \widetilde{H}$，存在 $\xi \in H$ 使得 $E[\xi] \leqslant E[\eta] + \varepsilon$;

(v) $\inf\limits_{\eta\in\widetilde{H}} E[\eta] = \inf\limits_{\xi\in H} E[\xi]$.

事实上,易证 (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv).

§2. 推广

本节我们将定理 1 推广到 Riesz 群情形,为此先给出一些定义.

定义 1 令 X 为带偏序 $\leqslant$ 的加法群. 称 X 为 Riesz 群,如果

1) $\forall x, y \in X$, 其上端 $x \vee y$ 及下端 $x \wedge y$ 在 X 中存在;

2) $x \leqslant y,\ z \in X \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.

我们令 $x^+ = x \vee 0,\ x^- = (-x) \vee 0$, 其中 0 是 X 的零元.

易证: 若 $H \subset X$ 且下端 $\bigwedge\limits_{x \in H} x$ 存在,则下端 $\bigwedge\limits_{x \in H} (x + z)$ 也存在,且有

$$\bigwedge_{x \in H} (x + z) = \bigwedge_{x \in H} x + z.$$

定义 2 令 E 为 Riesz 群 X 上的实函数. 称 E 为 X 上的一正可加连续泛函, 如果 E 有如下性质:

1) $x \geqslant 0 \Rightarrow E(x) \geqslant 0$;

2) $x \geqslant 0,\ E(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

3) $E(x + y) = E(x) + E(y)$;

4) $x_n \uparrow,\ \sup\limits_n E(x_n) < \infty \Rightarrow \bigvee\limits_n x_n$ 存在,且 $E\left(\bigvee\limits_n x_n\right) = \sup\limits_n E(x_n)$.

注: 由 E 的性质 3) 知: $E(0) = 0, E(-x) = -E(x)$. 此外,由 E 的性质 3) 及 4) 知

5) $x_n \downarrow,\ \inf\limits_n E(x_n) > -\infty \Rightarrow \bigwedge\limits_n x_n$ 存在,且 $E\left(\bigwedge\limits_n x_n\right) = \inf\limits_n E(x_n)$.

下一定理推广了定理 1.

定理 2 设 E 为一 Riesz 群 X 上的正可加连续泛函, H 为 X 的一非空子集使得

$$\inf_{x \in H} E(x) > -\infty.$$

则下述二断言等价:

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ x, y \in H$, 存在 $z \in H$ 使 $E((z - x \wedge y)^+) \leqslant \varepsilon$;

(ii) $\bigwedge\limits_{x \in H} x$ 存在,且 $E\left(\bigwedge\limits_{x \in H} x\right) = \inf\limits_{x \in H} E(x)$.

证 (ii) $\Rightarrow$ (i) 显然. (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明与定理 1 类似. 取序列 $(\xi_n), (\eta_n)$ 及 (δ_n) 同定理 1. 对 $n \geqslant 1$, 令 $x_m^{(n)} = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \delta_k,\ m \geqslant n + 1$. 由 E 的性质 4), $\bigvee\limits_{m=n+1}^{\infty} x_m^{(n)}$ 存在, 记为 γ_n. 则有 $E(\gamma_n) = \sup\limits_n E(x_m^{(n)}) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} E(\delta_k)$ 及 $\gamma_{n+1} + \delta_{n+1} = \gamma_n$. 令

$$\bar{\eta}_n = \eta_n + \gamma_n,\quad n \geqslant 1.$$

则 $\bar{\eta}_{n+1} \leqslant \bar{\eta}_n$. 由 E 的性质 5) 易知 $\bigwedge\limits_n \bar{\eta}_n$ 存在且 $E\left(\bigwedge\limits_n \bar{\eta}_n\right) = \inf\limits_{x \in H} E(x)$. 此外,由 (5) 式知

$$\bigwedge_{n=1}^{m} \xi_n \geqslant \bigwedge_{n=1}^{m} \bar{\eta}_n - \gamma_1 = \bar{\eta}_m - \gamma_1.$$

再由 E 的性质 5) 知: $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 存在,且 $E\left(\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) = \inf\limits_m E\left(\bigwedge\limits_{n=1}^{m} \xi_n\right) \geqslant \inf\limits_{x \in H} E(x) - \varepsilon$. 其余证明同定理 1. 定理证毕.

§ 3. 应用

令 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一完备概率空间，$(\mathscr{F}_t)$ 满足通常条件．我们称使有界停时的 Doob 停止定理成立的可选上鞅为强上鞅．下一结果推广了 Meyer 的一个定理(见文献 [3]p.125)．

定理 3 令 $\mathscr{H}$ 为一族强上鞅，使得 $\sup\limits_{M\in\mathscr{H}} E[M_0]<\infty$．如果对一切有界停时 T 有

$$E[\text{ess.}\sup\{M_T: M\in\mathscr{H}\}]=\sup_{M\in\mathscr{H}} E[M_T],$$

则存在一强上鞅 N，使得对一切有界停时 T．有 $N_T=\text{ess.}\sup\{M_T: M\in\mathscr{H}\}$．若进一步 $\mathscr{H}$ 中每个元右连续，则 N 亦右连续．

证 用 $\mathscr{C}_b$ 表示有界停时全体．对 $T\in\mathscr{C}_b$，令

$$W_T=\text{ess.}\sup\{M_T: M\in\mathscr{H}\},$$

则 W_T 为 $\mathscr{F}_T$ 可测，且对 $S,T\in\mathscr{C}_b$，在 $[S=T]$ 上有 $W_T=W_S$ a. s.．此外，设 $S,T\in\mathscr{C}_b$，且 $S\leqslant T$，则由定理 1，

$$E[W_T|\mathscr{F}_S]=\text{ess.}\sup\{E[M_T|\mathscr{F}_S]: M\in\mathscr{H}\}\leqslant \text{ess.}\sup\{M_S: M\in\mathscr{H}\}=W_S \text{ a. s.}.$$

于是由 Dellacherie-Lenglart[4] 中的定理知，存在一强上鞅 N，使对一切有界停时 T，有

$$N_T=W_T \text{ a. s.}.$$

若 $\mathscr{H}$ 中每个元右连续，则容易由随机过程一般理论中的一个定理(文献 [3]，p.124) 推知 N 为右连续(参见文献 [3] 定理 5.48 的证明)．

最后，我们给出定理 1 到随机控制中的一个应用．关于用鞅方法来描述随机控制，Elliott 的新书[2]是一本很好的参考书．这一方法在于使每个控制 u 联系于状态过程的样本空间上一概率测度 P_u．则费用过程 (M_t^u) 为 P_u 下鞅，此外，当且仅当 u 是最优控制时，(M_t^u) 为 P_u 鞅．Mémin 在文献 [5] 中证明了 (M_t^u) 有右连续修正(这等价于 $E_u[M_t^u]$ 为右连续函数)．但他的证明很复杂(见文献 [2]，228—231)．其实，这一结果是下一定理的特例．

定理 4 设 $\{(\varphi_t^\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ 为一族过程，使得对一切 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$\{\varphi_t^\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 满足定理 1 的条件 (i)，且 $\overline{\lim\limits_{s\downarrow\downarrow t}} E[\varphi_s^\alpha]\leqslant E[\varphi_t^\alpha]$ 对一切 $\alpha\in\Lambda$ 成立．又设 (W_t) 为一过程，使得对一切 t，W_t 为可积，且 $\overline{\lim\limits_{s\downarrow\downarrow t}} E[W_s]\leqslant E[W_t]$．令 $V_t=\text{ess.}\inf\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi_t^\alpha$，$M_t=W_t+V_t$．如果 (M_t) 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 为下鞅，则 (M_t) 有右连续修正．

证 由定理 1，我们有

$$\overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\, E[V_s]=\overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\,\inf_{\alpha\in\Lambda} E[\varphi_s^\alpha]\leqslant\inf_{\alpha\in\Lambda}\,\overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\, E[\varphi_s^\alpha]\leqslant\inf_{\alpha\in\Lambda} E[\varphi_t^\alpha]=E[V_t].$$

从而由 (M_t) 的下鞅性，我们有

$$E[M_t]\leqslant\lim_{s\downarrow\downarrow t} E[M_s]\leqslant\overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\, E[W_s]+\overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\, E[V_s]\leqslant E[W_t]+E[V_t]=E[M_t].$$

这表明 $E[M_t]$ 右连续，从而 (M_t) 有右连续修正．证毕．

参 考 文 献

[1] Striebel, C., Optimal control of discrete time stochastic systems, *LN in Economie and Math. Systems* 110, Springer-Verlag, 1975.
[2] Elliott, R. J., *Stochastic Calculus and Applicatio ns*, Springer-Verlag, 1982.
[3] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.
[4] Dellacherie, C. and Lenglart, E., *LN in Math.* 850, Springer-Verlag, 1981, 336.
[5] Memin, J., Condition d'optimalite pour un probleme de control portant sur une famille dominee de probabilites, *Journee de Control*, Metz, Mai, 1976.