高等弹性动力学期末考试题

（2023年1月9日）

考试形式：开卷

交卷时间：1月15日晚12:00前

答卷要求：手写，拍照或扫描成 PDF 提交。

一、由作用在坐标原点处、体分布为 $f_i(\boldsymbol{x},t)=s_iX_0(t)\delta(\boldsymbol{x})$ 的体力产生的位移场，即 Green 函数，为：

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=\frac{(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})s_j}{4\pi\rho|\boldsymbol{x}|^3}\int_{|\boldsymbol{x}|/\alpha}^{|\boldsymbol{x}|/\beta}X_0(t-\tau)\tau\,d\tau$$

$$+\frac{\gamma_i\gamma_js_j}{4\pi\rho\alpha^2|\boldsymbol{x}|}X_0\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{\alpha}\right)-\frac{(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})}{4\pi\rho\beta^2|\boldsymbol{x}|}X_0\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{\beta}\right)$$

其中矢量 $\boldsymbol{s}$ 为单位矢量，表征所施加体力的方向。问题：

（1）请将上述结果用球坐标表示出来，即：表示成为：

$u_r(r,\theta,\phi,t)=\cdots$

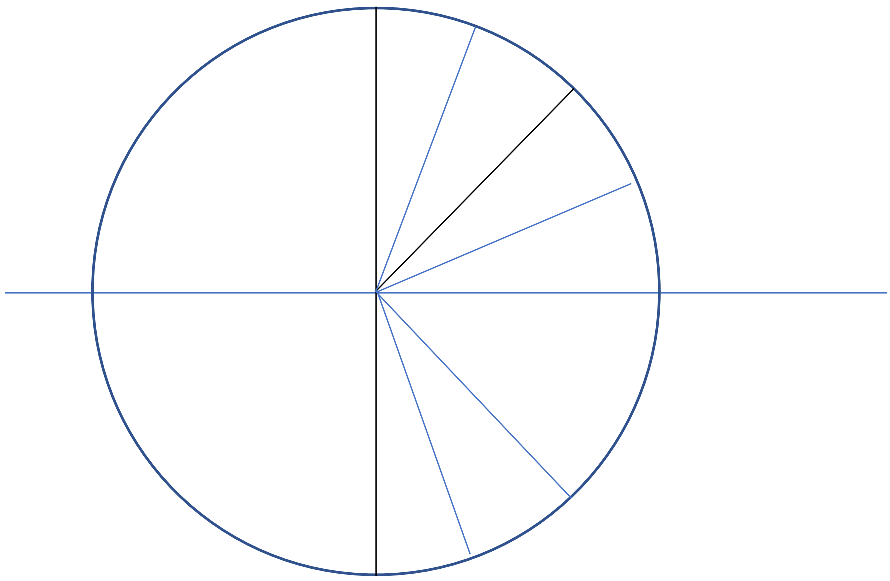
$u_\theta(r,\theta,\phi,t)=\cdots$

$u_\phi(r,\theta,\phi,t)=\cdots$

（提示：以$\boldsymbol{s}$ 方向为极轴，公式可做最大简化）

（2）设$X_0(t)=e^{-a_0t}\sin(\omega_0t)$, $a_0=0.3s^{-1}$, $\omega_0=2\pi s^{-1}$。请分别画出$r=20km,50km,100km$ 三种震中距，在$\theta=30^o$，$\phi=0$时，u_r 和 u_θ 的理论地震图（t=0-50s）。$\alpha=5(km\cdot s^{-1})$，$\beta=2.9(km\cdot s^{-1})$, $\rho=2.7(g\cdot cm^{-3})$。

（3）为揭示该 Green 函数空间方位分布特征，请画出$r=50km$，$\theta=0^o,15^o,30^o,45^o,\cdots,165^o,180^o$ 的u_r 和 u_θ理论地震图（t=0-30s）。



二、在三维弹性全空间中，由作用在原点处的有矩点力源，即 $f_i(\boldsymbol{x},t) = -M_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$ & $\boldsymbol{\xi} \longrightarrow 0$, 产生的位移场为：（Quantitative Seismology：（4.29））

$$
\begin{aligned}
u_i(\boldsymbol{x},t) &= G_{ij,k}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},0) * M_{jk}(t) \\
&= \left(\frac{15\gamma_j\gamma_i\gamma_k - 3\gamma_j\delta_{ik} - 3\gamma_i\delta_{jk} - 3\gamma_k\delta_{ij}}{4\pi\rho}\right)\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} M_{jk}(t-\tau)\tau d\tau \\
&+ \left(\frac{6\gamma_j\gamma_i\gamma_k - \gamma_j\delta_{ik} - \gamma_i\delta_{jk} - \gamma_k\delta_{ij}}{4\pi\rho\alpha^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{jk}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\
&- \left(\frac{6\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \gamma_j\delta_{ik} - \gamma_i\delta_{jk} - 2\gamma_k\delta_{ij}}{4\pi\rho\beta^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{jk}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\
&+ \frac{\gamma_i\gamma_j\gamma_k}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \left(\frac{\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \delta_{ij}\gamma_k}{4\pi\rho\beta^3}\right)\frac{1}{r}\dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned}
\qquad (4.29)
$$

其中，$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$，$\gamma = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$.

问题：

（1） 当震源为爆炸原时，即：$M_{ik}(t) = M_E(t)\delta_{ik}$，结果可大为简化，请推导处爆炸源时的简化公式；并对结果做一简单讨论。

（2） 请证明：（4.29）式中的远场 (1/r) 的 P 波的偏振方向与传播方向一致，S 波方向与传播方向垂直；而其他项的偏振方向介于两个方向之间。