1997 年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

(10 月 5 日上午 8:00-10:00)

一、选择题(每小题 6 分，共 36 分)

1．已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}(n\geqslant 2)$，$x_1=a$，$x_2=b$，记 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则下列结论正确的是

(A) $x_{100}=-a$，$S_{100}=2b-a$　　(B) $x_{100}=-b$，$S_{100}=2b-a$

(C) $x_{100}=-b$，$S_{100}=b-a$　　(D) $x_{100}=-a$，$S_{100}=b-a$

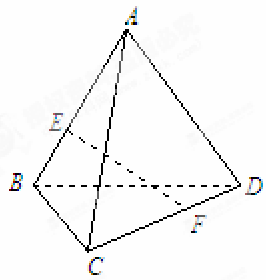
2．如图，正四面体 $ABCD$ 中，E 在棱 AB 上，F 在棱 CD 上，使得 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda$ $(0<\lambda<+\infty)$，记 $f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$ 其中 α_λ 表示 EF 与 AC 所成的角，β_λ 表示 EF 与 BD 所成的角，则

(A) $f(\lambda)$ 在 $(0，+\infty)$ 单调增加

(B) $f(\lambda)$ 在 $(0，+\infty)$ 单调减少

(C) $f(\lambda)$ 在 $(0，1)$ 单调增加，而在 $(1，+\infty$ 单调减少

(D) $f(\lambda)$ 在 $(0，+\infty)$ 为常数



3．设等差数列的首项及公差均为非负整数，项数不少于 3，且各项的和为 97^2，则这样的数列共有

(A) 2 个　(B) 3 个　(C) 4 个　(D) 5 个

4．在平面直角坐标系中，若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$ 表示的曲线为椭圆，则 m 的取值范围为

(A) $(0，1)$　(B) $(1，+\infty)$　(C) $(0，5)$　(D) $(5，+\infty)$

5．设 $f(x)=x^2-\pi x$，$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$，$\beta=\arctan\frac{5}{4}$，$\gamma=\arccos(-\frac{1}{3})$，$\delta=\text{arccot}(-\frac{5}{4})$，则

(A) $f(\alpha)>f(\beta)>f(\delta)>f(\gamma)$　(B) $f(\alpha)>f(\delta)>f(\beta)>f(\gamma)$

(C) $f(\delta)>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$　(D) $f(\delta)>f(\alpha)>f(\gamma)>f(\beta)$

6．如果空间三条直线 a，b，c 两两成异面直线，那么与 a，b，c 都相交的直线有

(A) 0 条　(B) 1 条　(C) 多于 1 的有限条　(D) 无穷多条

二．填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1．设 x，y 为实数，且满足 $\begin{cases}(x-1)^3+1997(x-1)=-1,\\(y-1)^3+1997(y-1)=1.\end{cases}$ 则 $x+y=$______.

2．过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点作直线 l 交双曲线于 A、B 两点，若实数 λ 使得 $|AB|=\lambda$ 的直线 l 恰有 3 条，则 $\lambda=$_____.

3．已知复数 z 满足 $\left|2z+\frac{1}{z}\right|=1$，则 z 的幅角主值范围是_____________.

4．已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$SA=SB=SC=2$，$AB=2$，设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为_________.

5．设 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶

点之一．若在 5 次之内跳到 D 点，则停止跳动；若 5 次之内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动，那么这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共______种．

6．设 $a=\log z+\log[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\log x^{-1}+\log(xyz+1)$，$c=\log y+\log[(xyz)^{-1}+1]$，记 a，b，c 中最大数为 M，则 M 的最小值为______．

三、(本题满分 20 分)

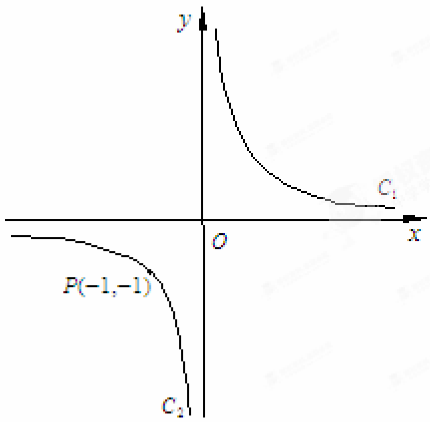
设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\frac{\pi}{12}$，且 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$，求乘积 $\cos x\ \sin y\ \cos z$ 的最大值和最小值．

四、(本题满分 20 分)

设双曲线 $xy=1$ 的两支为 C_1，C_2(如图)，正三角形 PQR 的三顶点位于此双曲线上．

(1)求证：P、Q、R 不能都在双曲线的同一支上；

(2)设 $P(-1，-1)$ 在 C_2 上，Q、R 在 C_1 上，求顶点 Q、R 的坐标．



五、(本题满分 20 分)

设非零复数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 满足

$$\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4},\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)=S.\end{cases}$$

其中 S 为实数且 $|S|\leqslant 2$．

求证：复数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 在复平面上所对应的点位于同一圆周上．

第二试

（10 月 5 日上午 10:30–12:30）

一、（本题 50 分）如图，已知两个半径不相等的⊙O_1与⊙O_2相交于 M、N 两点，且⊙O_1、⊙O_2分别与⊙O内切于 S、T 两点。求证：$OM\perp MN$的充分必要条件是 S、N、T 三点共线。

二、（本题 50 分）试问：当且仅当实数 x_0，x_1，…，x_n（$n\geq 2$）满足什么条件时，存在实数 y_0，y_1，…，y_n使得 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$成立，其中 $z_k=x_k+iy_k$，i 为虚数单位，k=0，1，…，n。证明你的结论。

三、（本题 50 分）在 100×25 的长方形表格中每一格填入一个非负实数，第 i 行第 j 列中填入的数为 $x_{i,j}$（i=1，2，…，100；j=1，2，…，25）（如表 1）。然后将表 1 每列中的数按由小到大的次序从上到下重新排列为 $x'_{1,j}\geq x'_{2,j}\geq\cdots\geq x'_{100,j}$（$j$=1，2，…，25）。（如表 2）

求最小的自然数 k，使得只要表 1 中填入的数满足 $\sum_{j=1}^{25} x_{i,j}\leq 1$（$i$=1，2，…，100），

则当 $i\geq k$ 时，在表 2 中就能保证 $\sum_{j=1}^{25} x'_{i,j}\leq 1$ 成立。

表 1

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,25}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,25}$
…	…	…	…
$x_{100,1}$	$x_{100,2}$	…	$x_{100,25}$

表 2

$x'_{1,1}$	$x'_{1,2}$	…	$x'_{1,25}$
$x'_{2,1}$	$x'_{2,2}$	…	$x'_{2,25}$
…	…	…	…
$x'_{100,1}$	$x'_{100,2}$	…	$x'_{100,25}$

1997年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1．已知数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=x_n-x_{n-1}(n\geqslant 2)$，$x_1=a$，$x_2=b$，记$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则下列结论正确的是

(A) $x_{100}=-a$，$S_{100}=2b-a$　　(B) $x_{100}=-b$，$S_{100}=2b-a$

(C) $x_{100}=-b$，$S_{100}=b-a$　　(D) $x_{100}=-a$，$S_{100}=b-a$

【答案】A

【解析】$x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=b-a$，$x_4=-a$，$x_5=-b$，$x_6=a-b$，$x_7=a$，$x_8=b$，…．易知此数列循环，$x_{n+6}=x_n$，于是$x_{100}=x_4=-a$，

又$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$，故$S_{100}=2b-a$．选A．

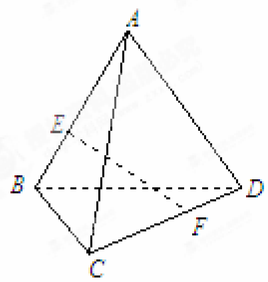
2．如图，正四面体$ABCD$中，E在棱AB上，F在棱CD上，使得$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda$ $(0<\lambda<+\infty)$，记$f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$其中$\alpha_\lambda$表示$EF$与$AC$所成的角，$\beta_\lambda$表示$EF$与$BD$所成的角，则

(A) $f(\lambda)$在$(0，+\infty)$单调增加

(B) $f(\lambda)$在$(0，+\infty)$单调减少

(C) $f(\lambda)$在$(0，1)$单调增加，而在$(1，+\infty)$单调减少

(D) $f(\lambda)$在$(0，+\infty)$为常数



【答案】D

【解析】作$EG/\!/AC$交BC于G，连GF，则$\frac{AE}{EB}=\frac{CG}{GB}=\frac{CF}{FD}$，故$GF/\!/BD$．故$\angle GEF=\alpha_\lambda$，$\angle GFE=\beta_\lambda$，但$AC\perp BD$，故$\angle EGF=90°$．故$f(\lambda)$为常数．选D．

3．设等差数列的首项及公差均为非负整数，项数不少于3，且各项的和为97^2，则这样的数列共有

(A) 2个　(B) 3个　(C) 4个　(D) 5个

【答案】C

【解析】设首项为a，公差为d，项数为n，则$na+\frac{1}{2}n(n-1)d=97^2$，$n[2a+(n-1)d]=2\times 97^2$，即$n$为$2\times 97^2$的大于3的约数．

∴ (1) $n=97^2$，$2a+(97^2-1)d=2$，$d=0$，$a=1$；$d\geq 1$时$a<0$．有一解；

(2) $n=97$，$2a+96d=194$，$d=0$，$a=97$；$d=1$，$a=a=49$；$d=2$，$a=1$．有三解；

(3) $n=2\times 97$，$n=2\times 97^2$，无解．$n=1$，2时$n<3$．．选C

4．在平面直角坐标系中，若方程$m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$表示的曲线为椭圆，则$m$的取值范围为

(A) $(0，1)$　(B) $(1，+\infty)$　(C) $(0，5)$　(D) $(5，+\infty)$

【答案】D

【解析】看成是轨迹上点到$(0，-1)$的距离与到直线$x-2y+3=0$的距离的比：

$\dfrac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\dfrac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}}=\sqrt{\dfrac{5}{m}}<1\Rightarrow m>5$，选 *D*.

5．设 $f(x)=x^2-\pi x$，$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$，$\beta=\arctan\frac{5}{4}$，$\gamma=\arccos(-\frac{1}{3})$，$\delta=\text{arccot}(-\frac{5}{4})$，则

(*A*) $f(\alpha)>f(\beta)>f(\delta)>f(\gamma)$　　(*B*) $f(\alpha)>f(\delta)>f(\beta)>f(\gamma)$

(*C*) $f(i)>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$　　(*D*) $f(\delta)>f(\alpha)>f(\gamma)>f(\beta)$

【答案】B

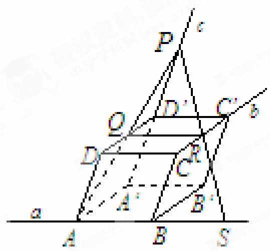
【解析】$f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}$，

易得，$0<\alpha<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}<\delta<\frac{5\pi}{6}$．选 *B*.

6．如果空间三条直线 a，b，c 两两成异面直线，那么与 a，b，c 都相交的直线有

(*A*) 0 条　　(*B*) 1 条　　(*C*) 多于 1 的有限条　　(*D*) 无穷多条

【答案】D



【解析】在 a、b、c 上取三条线段 AB、CC'、$A'D'$，作一个平行六面体 $ABCD—A'B'C'D'$，在 c 上取线段 $A'D'$ 上一点 P，过 a、P 作一个平面，与 DD' 交于 Q、与 CC' 交于 R，则 $QR∥a$，于是 PR 不与 a 平行，但 PR 与 a 共面．故 PR 与 a 相交．由于可以取无穷多个点 P．故选 D.

二．填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1．设 x，y 为实数，且满足 $\begin{cases}(x-1)^3+1997(x-1)=-1,\\(y-1)^3+1997(y-1)=1.\end{cases}$ 则 $x+y=$______.

【答案】2

【解析】原方程组即 $\begin{cases}(x-1)^3+1997(x-1)+1=0,\\(1-y)^3+1997(1-y)+1=0.\end{cases}$

取 $f(t)=t^3+1997t+1$，$f'(t)=3t^2+1987>0$．故 $f(t)$ 单调增，现 $x-1=1-y$，$x+y=2$.

2．过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点作直线 l 交双曲线于 A、B 两点，若实数 λ 使得 $|AB|=\lambda$ 的直线 l 恰有 3 条，则 $\lambda=$____.

【答案】4

【解析】右支内最短的焦点弦 $=\frac{2b^2}{a}=4$．又 $2a=2$，故与左、右两支相交的焦点弦长 $\geqslant 2a=2$，这样的弦由对称性有两条．故 $\lambda=4$ 时

设 AB 的倾斜角为 θ，则右支内的焦点弦 $\lambda=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{4}{1-3\cos^2\theta}\geqslant 4$，当 $\theta=90°$ 时，$\lambda=4$.

与左支相交时，$\theta=\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时，$\lambda=\left|\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}\right|=\left|\frac{4}{1-3\cos^2\theta}\right|=4$．故 $\lambda=4$.

3．已知复数 z 满足 $\left|2z+\frac{1}{z}\right|=1$，则 z 的幅角主值范围是＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

【答案】$k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}$，($k=0$，1)

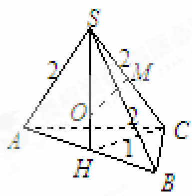
【解析】$\left|2z+\frac{1}{z}\right|=1\Leftrightarrow 4r^4+(4\cos2\theta-1)r^2+1=0$，这个等式成立等价于关于 x 的二次方程 $4x^2+(4\cos2\theta-1)x+1=0$ 有正根．$\Delta=(4\cos2\theta-1)^2-16\geqslant0$，由 $x_1x_2=\frac{1}{4}>0$，故必须 $x_1+x_2=-\frac{4\cos2\theta-1}{4}>0$．

∴ $\cos2\theta\leqslant-\frac{3}{4}$．∴ $(2k+1)\pi-\arccos\frac{3}{4}\leqslant2\theta\leqslant(2k+1)\pi+\arccos\frac{3}{4}$．

∴ $k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}$，($k=0$，1)

4．已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$SA=SB=SC=2$，$AB=2$，设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为＿＿＿＿＿＿．

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$



解：$SA=SB=SC=2$，$\Rightarrow S$ 在面 ABC 上的射影为 AB 中点 H，∴ $SH\perp$ 平面 ABC．

∴ SH 上任意一点到 A、B、C 的距离相等．

∵ $SH=\sqrt{3}$，$CH=1$，在面 SHC 内作 SC 的垂直平分线 MO 与 SH 交于 O，则 O 为 $SABC$ 的外接球球心．$SM=1$，∴ $SO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $OH=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即为 O 与平面 ABC 的距离．

5．设 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一．若在 5 次之内跳到 D 点，则停止跳动；若 5 次之内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动，那么这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共＿＿＿种．

【答案】26

【解析】青蛙跳 5 次，只可能跳到 B、D、F 三点(染色可证)．

青蛙顺时针跳 1 次算+1，逆时针跳 1 次算－1，写 5 个“□1”，在□中填“+”号或“－”号：

□1□1□1□1□1

规则可解释为：前三个□中如果同号，则停止填写；若不同号，则后 2 个□中继续填写符号．

前三□同号的方法有 2 种；前三个□不同号的方法有 $2^3-2=6$ 种，后两个□中填号的方法有 2^2 种．

∴ 共有 $2+6\times4=26$ 种方法．

6．设 $a=\log z+\log[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\log x^{-1}+\log(xyz+1)$，$c=\log y+\log[(xyz)^{-1}+1]$，记 a，b，c 中最大数为 M，则 M 的最小值为＿＿＿．

【答案】log2

【解析】$a=\log(\frac{x}{y}+z)$，$b=\log(yz+\frac{1}{x})$，$c=\log(\frac{1}{yz}+y)$．

∴ $a+c=\log(\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}+yz+x)\geqslant 2\log2$．于是 a、c 中必有一个$\geqslant\log2$．即 $M\geqslant\log2$，于是 M 的最小值$\geqslant\log2$．

但取 $x=y=z=1$，得 $a=b=c=\log2$．即此时 $M=\log2$．于是 M的最小值$\leqslant\log2$．

∴ 所求值$=\log2$．

三、（本题满分 20 分）

设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\frac{\pi}{12}$，且 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$，求乘积 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值和最小值．

【解析】由于 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\frac{\pi}{12}$，故$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\times2=\frac{\pi}{3}$.

∴ $\cos x\sin y\cos z=\cos x\times\frac{1}{2}[\sin(y+z)+\sin(y-z)]=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x\sin(y-z)\geqslant\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}$．即最小值.

(由于$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$y\geqslant z$，故 $\cos x\sin(y-z)\geqslant0$)，当 $y=z=\frac{\pi}{12}$，$x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos x\sin y\cos z=\frac{1}{8}$．

∵ $\cos x\sin y\cos z=\cos z\times\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]=\frac{1}{2}\cos^2z-\frac{1}{2}\cos z\sin(x-y)$.

由于 $\sin(x-y)\geqslant0$，$\cos z>0$，故 $\cos x\sin y\cos z\leqslant\frac{1}{2}\cos^2z=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{6})=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$．

当 $x=y=\frac{5\pi}{12}$，$z=\frac{\pi}{12}$ 时取得最大值.

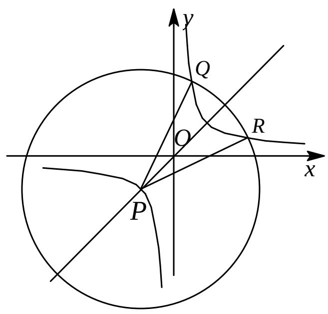
∴ 最大值$\frac{2+\sqrt{3}}{8}$，最小值$\frac{1}{8}$.

四、(本题满分 20 分)

设双曲线 $xy=1$ 的两支为 C_1，C_2(如图)，正三角形 PQR 的三顶点位于此双曲线上．

(1)求证：P、Q、R 不能都在双曲线的同一支上；

(2)设 $P(-1,-1)$在 C_2上，Q、R 在 C_1上，求顶点 Q、R 的坐标．



【解析】设某个正三角形的三个顶点都在同一支上．此三点的坐标为 $P(x_1,\frac{1}{x_1})$，$Q(x_2,\frac{1}{x_2})$，$R(x_3,\frac{1}{x_3})$．不妨设 $0<x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}>\frac{1}{x_3}>0$．

$k_{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}$；$k_{QR}=-\frac{1}{x_2x_3}$；

$\tan\angle PQR=\dfrac{-\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}}{1+\dfrac{1}{x_1x_3x_2^{2}}}<0$，从而$\angle PQR$为钝角．即$\triangle PQR$不可能是正三角形．

(2) $P(-1，-1)$，设 $Q(x_2，\dfrac{1}{x_2})$，点 P 在直线 $y=x$ 上．以 P 为圆心，$|PQ|$为半径作圆，此圆与双曲线第一象限内的另一交点 R 满足$|PQ|=|PR|$，由圆与双曲线都是 $y=x$ 对称，知 Q 与 R 关于 $y=x$ 对称．且在第一象限内此二曲线没有其他交点(二次曲线的交点个数)．于是 $R(\dfrac{1}{x_2}，x_2)$．

$\therefore$ PQ 与 $y=x$ 的夹角$=30°$，PQ所在直线的倾斜角$=75°$．$\tan75°=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$.

PQ所在直线方程为 $y+1=(2+\sqrt{3})(x+1)$，代入 $xy=1$，解得 $Q(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$，于是 $R(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})$．

五、(本题满分 20 分)

设非零复数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5满足

$$\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4}, \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)=S.\end{cases}$$

其中 S 为实数且$|S|\leqslant 2$.

求证：复数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5在复平面上所对应的点位于同一圆周上．

【解析】证明：设$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4}=q$，则由下式得 $a_1(1+q+q^2+q^3+q^4)=\dfrac{4}{a_1q^4}(1+q+q^2+q^3+q^4)$.

$\therefore$ $(a_1^2q^4-4)(1+q+q^2+q^3+q^4)=0$，故 $a_1q^2=\pm2$，或 $1+q+q^2+q^3+q^4=0$.

(1) 若 $a_1q^2=\pm2$，则得$\pm2(\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}+1+q+q^2)=S$. $\Rightarrow S=\pm2[(q+\dfrac{1}{q})^2+(q+\dfrac{1}{q})-1]=\pm2[(q+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}]$.

$\therefore$ 由已知，有$(q+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}\in R$ 且$|(q+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}|\leqslant1$.

令 $q+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2}=h(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(h>0)$. 则 $h^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)-\dfrac{5}{4}\in R$ $\Rightarrow\sin2\theta=0$.

$-1\leqslant h^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)-\dfrac{5}{4}\leqslant1$. $\Rightarrow\dfrac{1}{4}\leqslant h^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)\leqslant\dfrac{9}{4}$，$\Rightarrow\cos2\theta>0$. $\Rightarrow\theta=k\pi\ (k\in Z)$

$\therefore$ $q+\dfrac{1}{q}\in R$．再令 $q=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$(r>0)$．则 $q+\dfrac{1}{q}=(r+\dfrac{1}{r})\cos\alpha+i(r-\dfrac{1}{r})\sin\alpha\in R$. $\Rightarrow\sin\alpha=0$ 或 $r=1$.

若 $\sin\alpha=0$，则 $q=\pm r$ 为实数．此时 $q+\frac{1}{q}\geqslant 2$ 或 $q+\frac{1}{q}\leqslant -2$．此时 $q+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{5}{2}$，或 $q+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\leqslant -\frac{3}{2}$．

此时，由 $\left|\left(q+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right|\leqslant 1$，知 $q=-1$．此时，$|a_i|=2$．

若 $r=1$，仍有 $|a_i|=2$，故此五点在同一圆周上．

(2) 若 $1+q+q^2+q^3+q^4=0$．则 $q^5-1=0$，∴ $|q|=1$．此时 $|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|$，即此五点在同一圆上．

综上可知，表示复数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 在复平面上所对应的点位于同一圆周上．

第二试

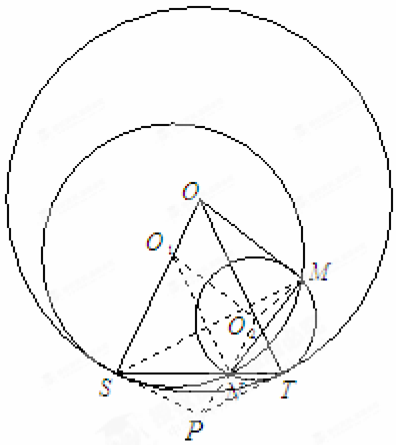
一、（本题 50 分）如图，已知两个半径不相等的⊙O_1 与⊙O_2 相交于 M、N 两点，且⊙O_1、⊙O_2 分别与⊙O 内切于 S、T 两点。求证：$OM\perp MN$ 的充分必要条件是 S、N、T 三点共线。

【解析】证明：过 S、T 分别作相应两圆的公切线，交于点 P，则 $PS=PT$，点 P 在直线 MN 上（根轴）．且 O、S、P、T 四点共圆．

(1) 若 S、N、T 三点共线，

连 O_1N，O_2N，则 $OS=OT$，$O_1S=O_1N$．

于是 $\angle S=\angle T$，$\angle S=\angle O_1NS$，∴ $\angle O_1NS=\angle T$，$O_1N\parallel OT$，同理，$O_2N\parallel OS$．即 $OS=O_2N+O_1S$．即⊙O 的半径=⊙O_1 与⊙O_2 的半径的和．



∴ $\angle PTS=\angle TSP=\angle MNS$，∴ S、P、T、M 共圆，故 O、S、P、T、M 五点共圆．$\angle OMS=\angle OTS=\angle OST$．

∴ $\angle OMN=\angle OMS+\angle SMN=\angle OST+\angle TSP=\angle OSP=90^\circ$．

∴ $OM\perp MN$．

(2) 反之，若 $OM\perp MN$，则 $OM\parallel O_1O_2$，

由 $OO_2-OO_1=(R-r_2)-(R-r_1)=r_1-r_2=O_1M-O_2M$，即 O、M 在以 O_1、O_2 为焦点的双曲线的不同两支上．由双曲线的对称性，知 O_1O_2MO 是等腰梯形．∴ $OO_2=O_1M$．

即 $OT=r_1+r_2$，∴ $O_1N=OO_2$，$OO_1=O_2N$，于是 OO_1NO_2 为平行四边形．

由于△OST、△O_1SN、△O_2NT 都是等腰三角形．∴ $\angle SO_1N=\angle O=\angle NO_2T$，∴ $\angle OST=\angle OSN$．

∴ S、N、T 三点共线．

二．（本题 50 分）试问：当且仅当实数 x_0，x_1，…，x_n（$n\geqslant 2$）满足什么条件时，存在实数 y_0，y_1，…，y_n 使得 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ 成立，其中 $z_k=x_k+iy_k$，i 为虚数单位，$k=0$，1，…，n。证明你的结论。

【解析】解：$z_0^2=x_0^2-y_0^2+2x_0y_0i=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)i$．

∴ $x_0^2-y_0^2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$；

$x_0y_0=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$．

若 $x_0^2>x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，则 $y_0^2>y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$．

此时 $x_0^2y_0^2>(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2=(x_0y_0)^2$．矛盾．

故必 $x_0^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$．

反之，若 $x_0^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 成立．此时，可分两种情况：

(1) 当 $x_0^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 成立时，取 $y_i=x_i$（$i=0$，1，2，…，n），

于是 $z_0^2=(x_0+y_0i)^2=x_0^2-y_0^2+2x_0y_0i=2x_0y_0i$，

而 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)i$

$=2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)i=2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)i=2x_0^2i=2x_0y_0i$. 即 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ 成立.

(2) 当 $x_0^2<x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 成立时，记 $a^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-x_0^2>0$，于是 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不能全为0. 不妨设 $x_n\neq0$，取 $y_0=y_1=y_2=\cdots=y_{n-2}=0$，$y_{n-1}=\dfrac{ax_n}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}$，$y_n=\dfrac{ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}$，则

此时，$z_0^2=x_0^2-y_0^2+2x_0y_0i=x_0^2$；

而 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)i$

$$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\left(\frac{a^2x_n^2}{x_{n-1}^2+x_n^2}+\frac{a^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_n^2}\right)+2\left(x_{n-1}\frac{ax_n}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}-x_n\frac{ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}\right)i$$

$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-x_0^2)=x_0^2$. 仍有 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ 成立.

故所求条件为 $x_0^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.

三、（本题 50 分）在 100×25 的长方形表格中每一格填入一个非负实数，第 i 行第 j 列中填入的数为 $x_{i,j}$（i=1，2，…，100；j=1，2，…，25）（如表 1）。然后将表 1 每列中的数按由小到大的次序从上到下重新排列为 $x'_{1,j}\geqslant x'_{2,j}\geqslant\cdots\geqslant x'_{100,j}$（$j$=1，2，…，25）。（如表 2）

求最小的自然数 k，使得只要表 1 中填入的数满足 $\sum\limits_{j=1}^{25}x_{i,j}\leqslant1$（$i$=1，2，…，100），则当 $i\geqslant k$ 时，在表 2 中就能保证 $\sum\limits_{j=1}^{25}x'_{i,j}\leqslant1$ 成立。

表 1

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,25}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,25}$
…	…	…	…
$x_{100,1}$	$x_{100,2}$	…	$x_{100,25}$

表 2

$x'_{1,1}$	$x'_{1,2}$	…	$x'_{1,25}$
$x'_{2,1}$	$x'_{2,2}$	…	$x'_{2,25}$
…	…	…	…
$x'_{100,1}$	$x'_{100,2}$	…	$x'_{100,25}$

【解析】在表 1 中，取 $x_{4i-3,i}=x_{4i-2,i}=x_{4i-1,i}=x_{4i,i}=0$（$i$=1，2，…，25），其余各数均取 $\frac{1}{24}$，于是，每列各数之和均=1. 但重新填入后，前 96 行之和均$=\frac{25}{24}>1$. 第 97、98、99、100 行之和=0. 故 $k\leqslant97$.

反之，如果表 2 中第 97 行的 25 个数涂黄，98~100 行共 75 个数涂红，则这些涂红的数在表 1 中至多分布在 75 行中，于是除这 75 行外的其余各行中的每个数都不小于同列中涂黄的数，即涂黄 4 个数的和≤没有涂红数的行的每一行数的和≤1. 于是表 2 中第 97 行的数的和≤1，故第 98、99、100 行的数的和≤1. 即能保证表 2 中第 97~100 行的数的和≤1.

∴ k=97.