1984年全国高中数学联赛试题

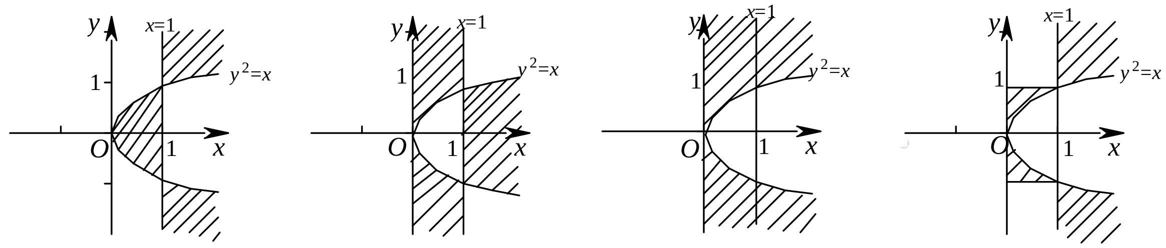
第一试

1．选择题(本题满分 40 分，每小题答对得 5 分答错得 0 分，不答得 1 分)

⑴ 集合 $S=\{\overline{Z}^2\,|\arg Z=\alpha$，$\alpha$ 为常数$\}$在复平面上的图形是(　　)

A. 射线 $\arg Z=2\alpha$　　*B.* 射线 $\arg Z=-2\alpha$　　*C.* 射线 $\arg Z=\alpha$　　*D.* 上述答案都不对

⑵下列四个图形的阴影部分(不包括边界)满足不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

⑶ 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的 m，n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数是(　　)

A. 15　　*B.* 10　　*C.* 7　　*D.* 6

⑷ 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 大于 3

⑸ 若 $a>0$，$a\neq1$，$F(x)$是一个奇函数，则

$$G(x)=F(x)\cdot\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)\text{是}$$

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 不是奇函数也不是偶函数　　D. 奇偶性与 a 的具体数值有关

⑹ 若 $F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$，则下列等式中正确的是(　　)

A. $F(-2-x)=-2-F(x)$　　**B.** $F(-x)=F\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

C. $F(x^{-1})=F(x)$　　**D.** $F(F(x))=-x$

⑺ 若动点 $P(x,y)$以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动，则点 $Q(-2xy,y^2-x^2)$的运动方式是

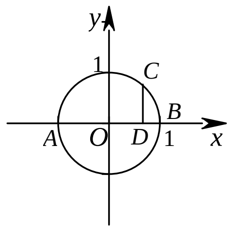
A. 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动
B. 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动
C. 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动
D. 以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动

⑻ 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$在其定义域上

A. 是增函数但无最大值　　*B.* 是增函数且有最大值
C. 不是增函数但无最大值　　*D.* 不是增函数但有最大值

2．填充题(本题满分 10 分，每小题 5 分)

(1) 如图，AB 是单位圆的直径，在 AB 上任取一点 D，作 $DC\perp AB$，交圆周于 C，若点 D 的坐标为 $D(x，0)$，则当 $x\in$ 时，线段 AD、BD、CD 可以构成锐角三角形．



(2) 方程 $\cos\frac{x}{4}=\cos x$ 的通解是________________，在 $(0，24\pi)$ 内不相同的解有__________个．

第二试

1．(本题满分 15 分)下列命题是否正确？若正确，请给予证明．否则给出反例．

(1) 若 P、Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过 P、Q 且与直线 l 相切；

(2) 若 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq1$，$b\neq1$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant2$．

(3) 设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x，y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$，若对任何 $r\geqslant0$，都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$．

2．(本题满分 10 分)已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，它们的公垂线 AA' 的长度为 d，在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF(A' 在直线 a 上，A 在直线 b 上)．

3．(本题满分 15 分)如图，在△ABC 中，P 为边 BC 上任意一点，$PE/\!/BA$，$PF/\!/CA$，若 $S_{\triangle ABC}=1$，证明：$S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$（$S_{XY\cdots Z}$ 表示多边形 $XY\cdots Z$ 的面积）．

4.(本题满分 15 分) 设 a_n 是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1,2,3\cdots$，试证：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

5．(本题满分 15 分) 设 x_1，x_2，…，x_n 都是正数，求证：$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$.

1984年全国高中数学联赛试题解答

第一试

1．选择题(本题满分 40 分，每小题答对得 5 分答错得 0 分，不答得 1 分)

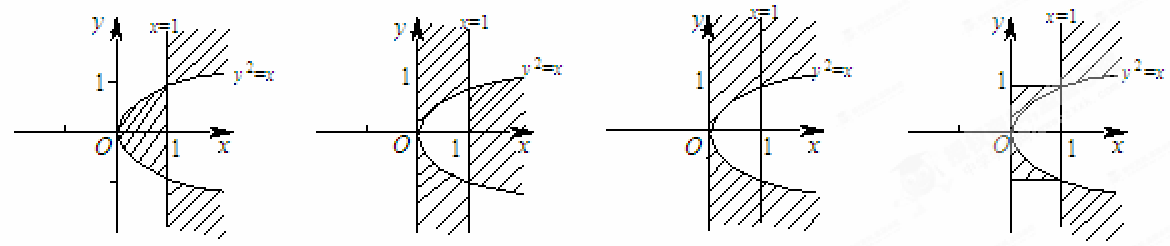
(1) 集合 $S=\{\overline{Z}^2\,|\arg Z=\alpha$，$\alpha$ 为常数$\}$在复平面上的图形是(　　)

A. 射线 $\arg Z=2\alpha$　　*B.* 射线 $\arg Z=-2\alpha$　　*C.* 射线 $\arg Z=\alpha$　　*D.* 上述答案都不对

【答案】D

【解析】由于 $\arg Z\in[0.2\pi)$，故不存在答案 *B.* $\arg\overline{Z}=2\pi-\alpha$，故选 *D.*

(2)下列四个图形的阴影部分(不包括边界)满足不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】D

【解析】当 $0<x<1$ 时，得 $1>y^2>x>0$；当 $x>1$ 时，得 $y^2>x>1$．选 *D.*

(3) 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的 m，n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$表示的不同双曲线条数是(　　)

A. 15　　*B.* 10　　*C.* 7　　*D.* 6

【答案】D

【解析】由 $e=C_m^n$，若表示双曲线，则 $e>1$，由 $C_m^n>1$，可得 m、n 的不同取值为 $C_5^1=5$，$C_5^2=10$，$C_4^1=4$，$C_4^2=6$，$C_3^1=3$，$C_2^1=2$，共有 6 个不同的值，故选 *D.*

(4) 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根个数是(　　)

***A.* 1　　*B.* 2　　*C.* 3　　*D.* 大于 3**

【答案】C

【解析】作 $y=\sin x$ 及 $y=\lg x$ 的图象，当 $x>10$ 时，$\lg x>1$．故二者只在 $(0，10)$内可能有交点．经作图可知，二者在$(0，\pi)$内有一交点，在$(2\pi，3\pi)$内有一交点．选 *C.*

(5) 若 $a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$是一个奇函数，则 $G(x)=F(x)\cdot\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$是（　　）

A. 奇函数　　*B.* 偶函数　　*C.* 不是奇函数也不是偶函数　　*D.* 奇偶性与 a 的

具体数值有关

【答案】B

【解析】$G(x)=F(x)\cdot\dfrac{a^x+1}{2(a^x-1)}$，故 $G(-x)=G(x)$，且 $G(x)$的定义域是 $F(x)$的定义域与 $\{x|x\neq0,\ x\in R\}$的交集，为以原点为对称的区域，故选 B.

(6) 若 $F(\dfrac{1-x}{1+x})=x$，则下列等式中正确的是(　　)

A. $F(-2-x)=-2-F(x)$　　　　B. $F(-x)=F(\dfrac{1+x}{1-x})$

C. $F(x^{-1})=F(x)$　　　　D. $F(F(x))=-x$

【答案】A

【解析】令 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$，得 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$，即 $F(t)=\dfrac{1-t}{1+t}$，经一一验证，知 $F(-2-x)=-2-F(x)$，选 A.

(7) 若动点 $P(x,\ y)$以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动，则点 $Q(-2xy,\ y^2-x^2)$的运动方式是

A. 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动
B. 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动
C. 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动
D. 以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动

【答案】C

【解析】令 $x=\cos\omega t$，$y=\sin\omega t$. 则 $-2xy=-\sin2\omega t=\cos(\dfrac{3\pi}{2}-2\omega t)$

$y^2-x^2=-\cos2\omega t=\sin(\dfrac{3\pi}{2}-2\omega t)$. 显然 $-2\omega t$ 与 ωt 旋转方向相反. 故选 C.

(8) 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$在其定义域上

A. 是增函数但无最大值　　　　B. 是增函数且有最大值

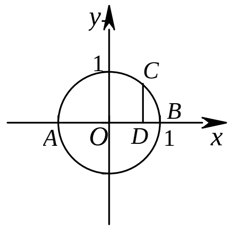
C. 不是增函数但无最大值　　　　D. 不是增函数但有最大值

【答案】D

【解析】定义域为 $0<x<\sqrt{3}$，当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，$F(x)$最大，故选 D.

2．填充题(本题满分 10 分，每小题 5 分)

(1) 如图，AB是单位圆的直径，在 AB上任取一点 D，作 $DC\perp AB$，交圆周于 C，若点 D的坐标为 $D(x,\ 0)$，则当 $x\in$______________时，线段 AD、BD、CD可以构成锐角三角形.



【答案】$2-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}-2$

【解析】由对称性，先考虑 $0\leqslant x<1$ 的情况，设 $AD=a$，$BD=b$，$CD=c$，则 $a+b=2$，$ab=c^2$，且必有 $a\geqslant c\geqslant b$，于是只要考虑 $c^2+b^2>a^2$，即 $(1-x)(1+x)+(1-x)^2>(1+x)^2$，解得 $0\leqslant x<\sqrt{5}-2$.

∴ $2-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}-2$.

(2) 方程 $\cos\frac{x}{4}=\cos x$ 的通解是____________________，在 $(0，24\pi)$ 内不相同的解有______个

【答案】$x=\frac{8}{3}k\pi$，与 $x=\frac{8}{5}m\pi$． 20

【解析】$\frac{x}{4}=2k\pi\pm x$，$x=\frac{8}{3}k\pi$，与 $x=\frac{8}{5}m\pi$．

当 $0<\frac{8}{3}k<24$ 时，$k=1，2，…，8$；当 $0<\frac{8}{5}m<24$ 时，$m=1，2，…，14$；而当 $k=3$，$m=5$ 及 $k=6$，$m=10$ 时，解是相同的，故共有 $8+14-2=20$ 个不同的解．

第二试

1．(本题满分 15 分)下列命题是否正确？若正确，请给予证明．否则给出反例．

(1) 若 P、Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过 P、Q 且与直线 l 相切；

(2) 若 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq1$，$b\neq1$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant2$．

(3) 设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x，y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$，若对任何 $r\geqslant0$，都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$．

【解析】(1)若 $PQ // l$，则只能作出一个圆过 P、Q 且与直线 l 相切；

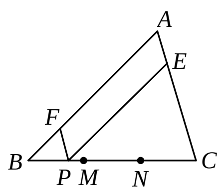
(2) 若 $a>1$，$0<b<1$，则 $\log_a b+\log_b a\leqslant-2$；

(3) $A=\{(x，y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$，$B=\{(x，y)|0<x^2+y^2\leqslant r^2\}$，于是 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$ 恒成立，但不满足 $A\subseteq B$．

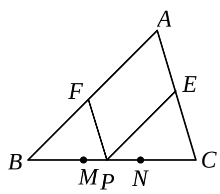
2．(本题满分 10 分)已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，它们的公垂线 AA' 的长度为 d，在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF(A' 在直线 a 上，A 在直线 b 上)．

【解析】$EF=\sqrt{m^2+n^2+d^2\pm2mn\cos\theta}$．(证明见课本)．

3．(本题满分 15 分)如图，在 $\triangle ABC$ 中，P 为边 BC 上任意一点，$PE // BA$，$PF // CA$，若 $S_{\triangle ABC}=1$，证明：$S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$($S_{XY\cdots Z}$ 表示多边形 $XY\cdots Z$ 的面积)．



【解析】证明：如图，三等分 BC 于 M、N，若点 P 在 BM 上(含点 M)，则由于 $PE // AB$，则 $\triangle CPE\backsim\triangle CBA$．$CP:CB\geqslant\frac{2}{3}$．于是 $S_{\triangle PCE}\geqslant\frac{4}{9}$．同理，若 P 在 NC 上(含点 N)，则 $S_{\triangle BPF}\geqslant\frac{4}{9}$．



若点 P 在线段 MN 上．连 EF，设 $\frac{BP}{BC}=r(\frac{1}{3}<r<\frac{2}{3})$，则 $\frac{CP}{BC}=1-r$．

$S_{\triangle BPF}=r^2$，$S_{\triangle PCE}=(1-r)^2$．∴ $S_{\triangle BPF}+S_{\triangle PCE}=r^2+(1-r)^2=2r^2-2r+1=2(r-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

$<2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$.

于是 $S_{\square AEPF}\geqslant\frac{4}{9}$. 故命题成立.

4.（本题满分 15 分）设 a_n 是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1,2,3\cdots$，试证：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

【解析】由于 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字只与 1 到 n 的个位数字的平方和有关，故只要考虑这些数的个位数字的平方：

但 $1^2\equiv1$. $2^2\equiv4$，$3^2\equiv9$，$4^2\equiv6$，$5^2\equiv5$，$6^2\equiv6$，$7^2\equiv9$，$8^2\equiv4$，$9^2\equiv1$，$0^2\equiv0\pmod{10}$

∴ $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=4$，$a_4=0$，$a_5=5$，$a_6=1$，$a_7=0$，$a_8=4$，$a_9=5$，$a_{10}=5$，

$a_{11}=6$，$a_{12}=0$，$a_{13}=9$，$a_{14}=5$，$a_{15}=0$，$a_{16}=6$，$a_{17}=5$，$a_{18}=9$，$a_{19}=0$，$a_{20}=0$.

由 $a_{20}=0$ 知，$a_{20k+r}=a_r$（k，$r\in N$，$0\leqslant r\leqslant19$，并记 $a_0=0$），即 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是一个循环节为 20 位数的循环小数，即为有理数. 其一个循环节为“15405104556095065900”.

5.（本题满分 15 分）设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 都是正数，求证：$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$.

【解析】证明 $\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant2x_1$，$\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant2x_2$，$\frac{x_3^2}{x_4}+x_4\geqslant2x_3$，$\cdots$，$\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant2x_n$. 上述各式相加即得.