2012 年全国高中数学联赛试题(B 卷)
参考答案及评分标准

说明:

1、评阅试卷时,请严格按照本评分标准。填空题只设 8 分和 0 分两档;解答题第 9 题 4 分为一个档次,第 10、11 题 5 分为一个档次。不要再增加其他中间档次。

2、对于解答题,如果考生的解答方法和本解答不同,只要思路合理,步骤正确,在评阅时可参考本评分标准适当划分档次评分。

一、填空题:本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分. 把答案填在题中的横线上.

1. 对于集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,我们把 $b-a$ 称为它的长度. 设集合 $A=\{x \mid a \leqslant x \leqslant a+1981\}$, $B=\{x \mid b-1014 \leqslant x \leqslant b\}$,且 A、B 都是集合 $U=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2012\}$的子集,则集合 $A \cap B$ 的长度的最小值是__________.

解: 983.

因为 A、B 都是集合 U 的子集,所以 $0 \leqslant a \leqslant 31$, $1014 \leqslant b \leqslant 2012$.

所以 $A \cap B=\{x \mid b-1014 \leqslant x \leqslant a+1981\}$,或 $A \cap B=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

故当且仅当 $a=0$, $b=2012$,或 $a=31$, $b=1014$ 时,集合 $A \cap B$ 的长度最小,最小值为 $1981-998=1014-31=983$.

2. 已知 $x>0$、$y>0$,且满足

$$\begin{cases}\cos^2(\pi x)+2\sin(\pi y)=1, & ①\\ \sin(\pi x)+\sin(\pi y)=0, & ②\\ x^2-y^2=12. & ③\end{cases}$$

则有序数对$(x,y)=$__________.

解: $(4,2)$.

由①、② 得 $\sin(\pi x)[2+\sin(\pi x)]=0$.

因为 $2+\sin(\pi x)>0$,所以 $\sin(\pi x)=0$.

代入②得 $\sin(\pi y)=0$.

从而,x、y 均为正整数.

由③得 $(x-y)(x+y)=12=2^2\times 3$.

又 $x-y$ 与 $x+y$ 具有相同的奇偶性,且 $x-y<x+y$,所以

$$\begin{cases}x-y=2,\\ x+y=6.\end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases}x=4,\\ y=2.\end{cases}$$

故 $(x,y)=(4,2)$.

3. 如图 1，设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 的直线交椭圆于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2、y_2)$两点. 若$\triangle AF_1B$ 内切圆的面积为 π，且 $|y_1-y_2|=4$，则椭圆的离心率为__________.

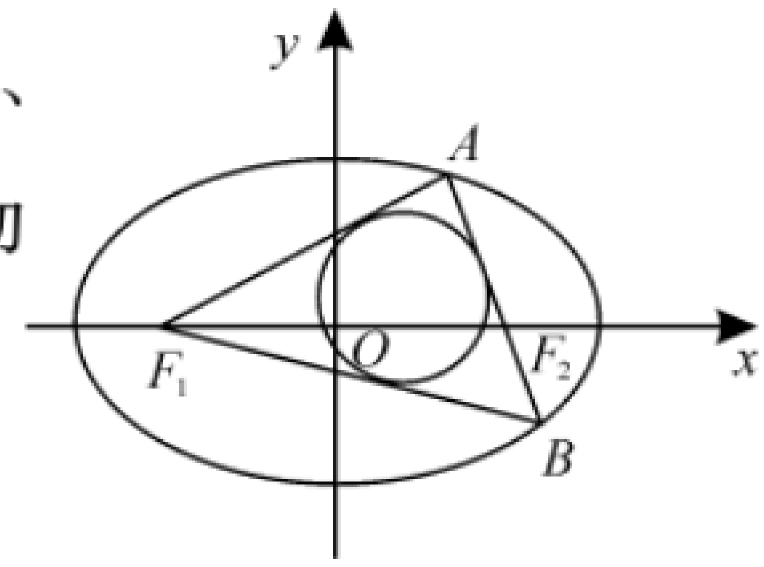


图1

解： $\frac{1}{2}$.

易知，$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4a$，内切圆半径为 1，则

$$S_{\triangle AF_1B}=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 1=2a.$$

又 $S_{\triangle AF_1B}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot |y_1-y_2|=4c.$

所以，由 $2a=4c$，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

4. 若关于 x 的不等式组$\begin{cases}x^3+3x^2-x-3>0,\\ x^2-2ax-1\leqslant 0\end{cases}$$(a>0)$的整数解有且只有一个，则 a 的取值范围是__________.

解： $[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$.

由 $x^3+3x^2-x-3>0$，得 $-3<x<-1$ 或 $x>1$.

所以，不等式组的唯一整数解只可能是 -2 或 2.

因为函数$f(x)=x^2-2ax-1$ 图像的对称轴 $x=a>0$，所以不等式组的整数解只能是 2. 因此，有

$$\begin{cases}f(-2)=3+4a>0,\\ f(2)=3-4a\leqslant 0,\\ f(3)=8-6a>0.\end{cases}\quad 解得\ \frac{3}{4}\leqslant a<\frac{4}{3}.$$

故 a 的取值范围是$[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$.

5. 在$\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=6$，则$\triangle ABC$ 面积的最大值为__________.

解： 12.

【方法 1】设 M 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

因为 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6^2+4\times 7=64$.

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=8$，从而 $|\overrightarrow{AM}|=4$.

于是，$S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AM}|=12$.

当且仅当 $AM\perp BC$，即 $AB=AC=5$ 时，上式等号成立.

故$\triangle ABC$ 面积的最大值为 12.

【方法 2】因为 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=a=6$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=36$.

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=50$,即 $b^2+c^2=50$.

又 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=7$,即 $bc\cos A=7$.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-(bc\cos A)^2}$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2-49}=12.$$

当且仅当 $b=c=5$ 时,上式等号成立.

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 12.

6. 如图 2,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=4$,$BC=CC_1=2\sqrt{2}$,M 是 BC_1 的中点,N 是 MC_1 的中点. 若异面直线 AN 与 CM 所成的角为 θ、距离为 d,则 $d\sin\theta=$ __________.

解: $\frac{4}{5}$.

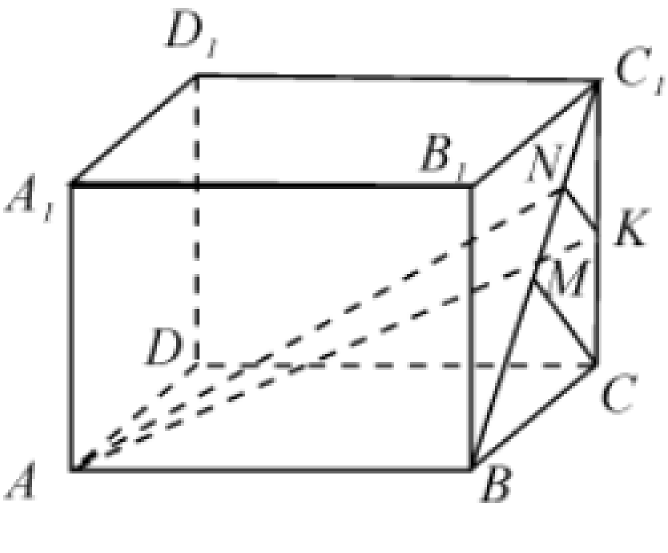


图2

【方法 1】如图 2,取 CC_1 的中点 K,则 $KN/\!/CM$,故 $\angle ANK$ 为异面直线 AN 与 CM 所成的角,即 $\angle ANK=\theta$.

因为 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1,$CM\perp BC_1$,所以 $CM\perp AN$(三垂线定理).

又 $KN/\!/CM$,所以 $KN\perp AN$,即 $\theta=90°$.

因为 $CM/\!/KN$,所以 $CM/\!/$平面 ANK,故异面直线 AN 与 CM 的距离等于直线 CM 与平面 ANK 的距离,即等于点 M 到平面 ANK 的距离.

注意到平面 $ABN\perp$ 平面 BCC_1,所以点 M 到平面 ANK 的距离等于点 M 到直线 AN 的距离.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABN$ 中,$AB=4$,$BN=3$,则点 B 到直线 AN 的距离为$\frac{12}{5}$. 从而点 M 到直线 AN 的距离 $d=\frac{12}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{5}$.

故 $d\sin\theta=\frac{4}{5}\sin 90°=\frac{4}{5}$.

【方法 2】建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 如图 3 所示,

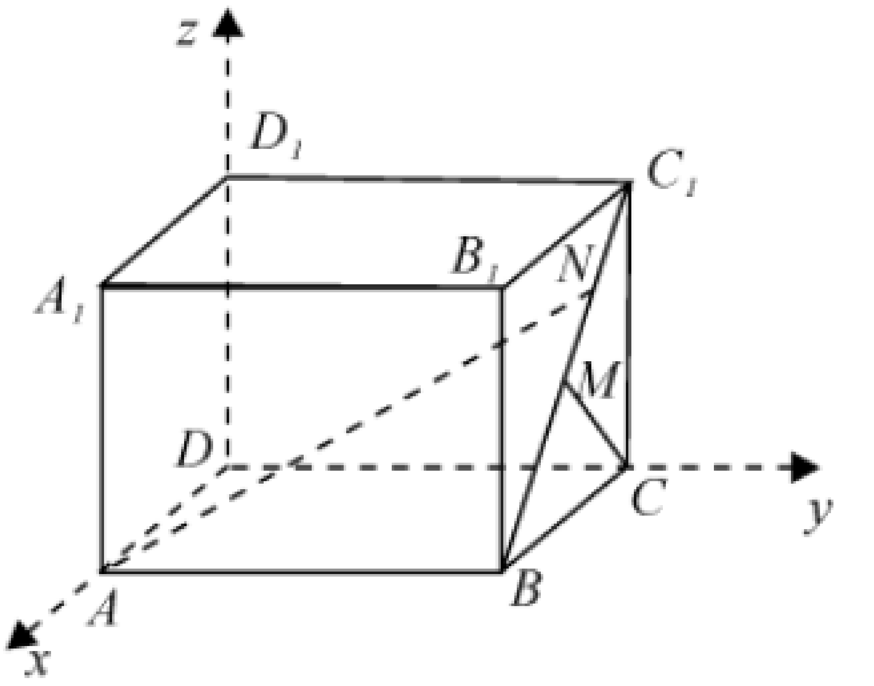


图3

则有 $A(2\sqrt{2},0,0)$、$C(0,4,0)$、$M(\sqrt{2},4,\sqrt{2})$、$N(\frac{\sqrt{2}}{2},4,\frac{3\sqrt{2}}{2})$. 于是 $\overrightarrow{AN}=(-\frac{3\sqrt{2}}{2},4,\frac{3\sqrt{2}}{2})$、$\overrightarrow{CM}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

所以 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}=0$,则 $AN\perp CM$,即 $\theta=90°$.

设与 $\overrightarrow{AN}$、$\overrightarrow{CM}$ 都垂直的一个向量为 $\mathbf{n}=(x,y,1)$,则

$$\begin{cases}-\frac{3\sqrt{2}}{2}x+4y+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0,\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

所以 $\mathbf{n}=(-1,-\frac{3\sqrt{2}}{4},1)$.

又 $\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{2},4,0)$，

所以 $d=\dfrac{|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

故 $d\sin\theta=\dfrac{4}{5}\sin 90^\circ=\dfrac{4}{5}$.

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[a,a+2]$，不等式 $f(x+a)\geqslant 2f(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

解： $[\sqrt{2},+\infty)$.

由题设知，$f(x)=\begin{cases}x^2\ (x\geqslant 0),\\ -x^2\ (x<0),\end{cases}$ 则 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$.

因此，原不等式等价于 $f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $x+a\geqslant\sqrt{2}x$，即 $a\geqslant(\sqrt{2}-1)x$.

又 $x\in[a,a+2]$，所以当 $x=a+2$ 时，$(\sqrt{2}-1)x$ 取得最大值为 $(\sqrt{2}-1)(a+2)$.

因此，$a\geqslant(\sqrt{2}-1)(a+2)$，解得 $a\geqslant\sqrt{2}$.

故 a 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$.

8. 一个均匀的正方体骰子的各面上分别标有数字 1，2，…，6，每次投掷这样两个相同的骰子，规定向上的两个面上的数字之和为这次投掷的点数. 那么，投掷 3 次所得 3 个点数之积能被 14 整除的概率是__________.（用最简分数表示）

解： $\dfrac{1}{3}$.

【方法 1】易知，在一次投掷中，投出的点数是 7 的概率为 $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$，投出的点数是奇（偶）数的概率为 $\dfrac{1}{2}$. 从而，投出的点数是奇数但不是 7 的概率为 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

在 3 次投掷中，记“仅有一次投出的点数是 7，另两次中至少有一次投出的点数是偶数”为事件 A，“有两次投出的点数都是 7，另一次投出的点数是偶数”为事件 B. 显然 A 与 B 互斥. 故所求事件为 $C=A+B$.

因为 $P(A)=C_3^1\times\dfrac{1}{6}\times\left[C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=\dfrac{7}{24}$,

$P(B)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\times\dfrac{1}{24}$,

所以 $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{7}{24}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{3}$.

【方法 2】在 3 次投掷中，记“至少有一次投掷的点数是偶数”为事件 A，“至少有一次投掷的点数是 7”为事件 B，则所求事件为 $C=A\cap B$.

因为 $\overline{C}=\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

所以 $P(\overline{C})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$$=(1-\frac{1}{2})^3+(1-\frac{6}{36})^3-(\frac{1}{2}-\frac{6}{36})^3=\frac{2}{3}.$$

故 $P(C)=1-P(\overline{C})=\frac{1}{3}$.

二、解答题:本大题共 3 小题,共 56 分. 解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤.

9. **(本小题满分 16 分)**

已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}, a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$.

(1)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围;

(2)若 $a\geqslant 2$,且存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围.

解:(1) $f(x)=\sin^2 x+a\sin x+a-\frac{3}{a}$.

令 $t=\sin x\ (-1\leqslant t\leqslant 1)$,则 $g(t)=t^2+at+a-\frac{3}{a}$ ·· 4 分

对任意 $x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant 0$ 恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} g(-1)=1-\frac{3}{a}\leqslant 0, \\ g(1)=1+2a-\frac{3}{a}\leqslant 0. \end{cases}$$

解得 a 的取值范围为 $(0,1]$ ·· 8 分

(2)因为 $a\geqslant 2$,所以 $-\frac{a}{2}\leqslant -1$.

所以 $g(t)_{min}=g(-1)=1-\frac{3}{a}$ ··· 12 分

因此,$f(x)_{min}=1-\frac{3}{a}$.

于是,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\leqslant 0$ 的充要条件是

$$1-\frac{3}{a}\leqslant 0,\text{解得 } 0<a\leqslant 3.$$

故 a 的取值范围是 $[2,3]$ ··· 16 分

10. **(本小题满分 20 分)**

已知数列 $\{a_n\}$ 满足:当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$a_n=n$;当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$a_n=a_k$. 记 $T_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^n-1}+a_{2^n}$,证明:对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,有

(1) $T_{n+1}=4^n+T_n$;

(2) $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}<1$.

证明:(1) $T_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^{n+1}-1}+a_{2^{n+1}}$

$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2^{n+1}-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2^{n+1}})$$ ···················· 5 分

$=[1+3+5+\cdots+(2^{n+1}-1)]+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^n})$

$=(2^n)^2+T_n=4^n+T_n$ ………………………………………………………… 10 分

(2)由(1)的结论,有 $T_{k+1}-T_k=4^k$.

所以 $T_n=T_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(T_{k+1}-T_k)=(a_1+a_2)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}4^k$

$=2a_1+\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\dfrac{4^n+2}{3}$………………………………………………………… 15 分

从而 $\dfrac{1}{T_n}=\dfrac{3}{4^n+2}<\dfrac{3}{4^n}$.

故 $\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}<3(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^n})=1-\dfrac{1}{4^n}<1$ ……………………………… 20 分

11. **(本小题满分 20 分)**

已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$,A、B 是抛物线上不同于顶点 O 的两个动点,记 $\angle AOB=\theta$ $(\theta\neq 90°)$. 若 $S_{\triangle AOB}=m\tan\theta$,试求当 m 取得最小值时 $\tan\theta$ 的最大值.

解:因为 $S_{\triangle AOB}=m\tan\theta$,所以 $\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\theta=m\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

所以 $m=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ ………………………………………………………… 5 分

设 $A(2pt_1^2,2pt_1)$、$B(2pt_2^2,2pt_2)$ $(t_1t_2\neq -1,0)$,则

$$m=\frac{1}{2}(4p^2t_1^2t_2^2+4p^2t_1t_2)=2p^2(t_1^2t_2^2+t_1t_2).$$

令 $t=t_1t_2(t\neq -1,0)$,则 $m=2p^2[(t+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}]$

所以当 $t=-\dfrac{1}{2}$时,$m_{min}=-\dfrac{p^2}{2}$ ………………………………………………………… 10 分

此时,$t_1t_2=-\dfrac{1}{2}$. 不妨设 $t_1>0$,则

$$\tan\theta=\frac{k_{OA}-k_{OB}}{1+k_{OA}\cdot k_{OB}}=\frac{\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}}{1+\frac{1}{t_1t_2}}=-(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2})=-(\frac{1}{t_1}+2t_1)$$

$$\leqslant -2\sqrt{\frac{1}{t_1}\cdot 2t_1}=-2\sqrt{2}$$ ………………………………………………………… 15 分

当且仅当$\dfrac{1}{t_1}=2t_1$,即 $t_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时,等号成立.

故当 m 取得最小值 $-\dfrac{p^2}{2}$时,$\tan\theta$ 取得最大值为 $-2\sqrt{2}$ ………………………………………… 20 分

2012 年全国高中数学联赛加试试题(B 卷)
参考答案及评分标准

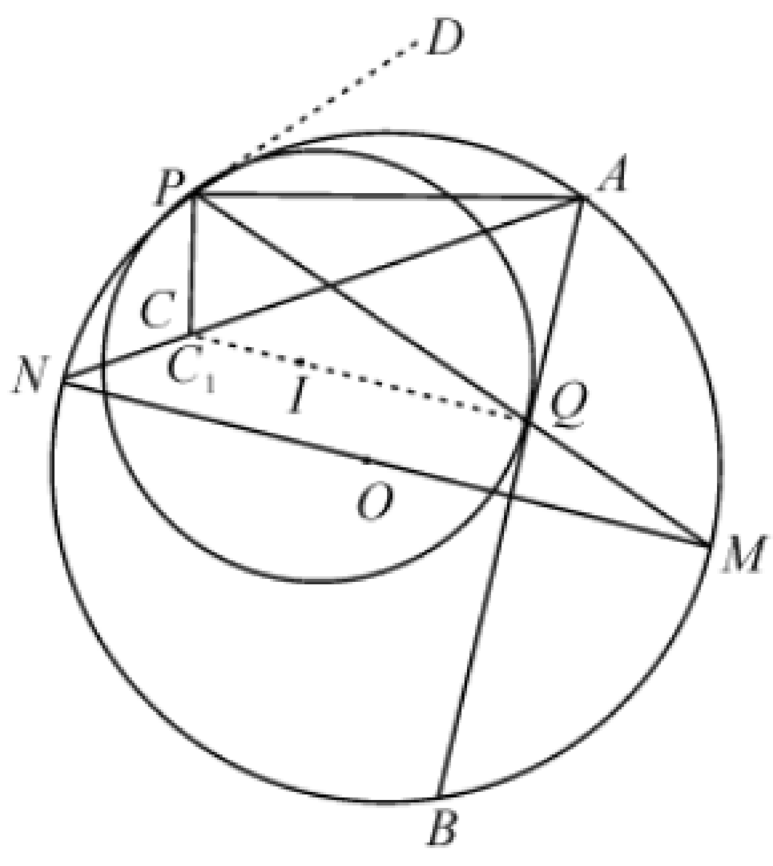
说明：

1、评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；

2、如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分)

如图，圆 I 内切于圆 O，切点为 P，圆 O 的弦 AB 切圆 I 于点 Q，PQ 的延长线交圆 O 于点 M，MN 为圆 O 的直径. 过点 P 作 PA 的垂线交 AN 于点 C. 求证：C、I、Q 三点共线.



证明：作圆 O，圆 I 的公切线 PD，则 $\angle MPD=\angle AQP$.

因此，$\overset{\frown}{PAM}=\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{MB}$.

所以 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$ ………………………………………… 10 分

故 $MN\perp AB$.

连结 QI 并延长，交 AN 于 C_1，则 $C_1Q\perp AB$.

因而 $MN /\!/ C_1Q$ ………………………………………………………………………… 20 分

因此，$\angle AC_1Q=\angle ANM=\angle APQ$.

故 A、P、C_1、Q 四点共圆 ………………………………………………………… 30 分

从而 $\angle APC_1=180^\circ-\angle AQC_1=90^\circ=\angle APC$.

所以点 C_1 与点 C 重合，即 C、I、Q 三点共线 ………………………………… 40 分

二、(本题满分 40 分)

给定整数 $n>1$，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的非负实数，记集合

$$A=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\},B=\{a_ia_j\mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}.$$

求 $\dfrac{|A|}{|B|}$ 的最小值. 这里，$|X|$ 表示集合 X 中元素的个数.

解:不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,则

$$2a_1 < a_1 + a_2 < 2a_2 < a_2 + a_3 < \cdots < a_{n-1} + a_n < 2a_n,$$

所以 $|A| \geqslant 2n-1$ ·· 10 分

又 $B = \{a_i^2 \mid i=1,2,\cdots,n\} \cup \{a_i a_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$,所以

$$|B| \leqslant n + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

故 $\dfrac{|A|}{|B|} \geqslant \dfrac{2n-1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{2(2n-1)}{n(n+1)}$ ·· 20 分

当 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{n^2+1, n^2+2, \cdots, n^2+n\}$ 时,等号成立.

事实上,$2n^2+2 \leqslant a_i + a_j \leqslant 2n^2+2n (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$,且在 $2n^2+2$ 与 $2n^2+2n$ 之间(包括这两个数)的整数值都取得到,所以 $|A| = 2n-1$ ·· 30 分

又若 $(n^2+i)(n^2+j) = (n^2+k)(n^2+l)$,这里 $i,j,k,l \in \{1,2,\cdots,n\}$. 则

$$(i+j-k-l)n^2 = kl - ij.$$

由于 $|kl-ij| < n^2$,故 $i+j-k-l=0$,且 $kl-ij=0$,于是 $\{i,j\} = \{k,l\}$,此时 $|B| = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

所以,$\dfrac{|A|}{|B|}$ 的最小值为 $\dfrac{2(2n-1)}{n(n+1)}$ ·· 40 分

三、(本题满分 50 分)

数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 > 0, x_n = \sqrt{x_{n-1}+1} \ (n=1,2,\cdots)$,求证:必存在常数 A 和 $C(A>1, C>0)$,使不等式 $|x_n - A| < \dfrac{C}{A^n}$ 对任意正整数 n 都成立.

证明:若 $\{x_n\}$ 为常数列,不妨设 $x_0 = A$. 由递推式 $x_n = \sqrt{x_{n-1}+1}$ 知,A 满足方程

$$x = \sqrt{x+1}. \qquad ①$$

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ ·· 10 分

从而,$|x_n - A| = 0 < \dfrac{C}{A^n}$ 对任何正数 C 都成立 ·· 20 分

若 $\{x_n\}$ 不是常数,则 $x_0 \neq A$,仍然取 $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,有

$$|x_n - A| = |\sqrt{x_{n-1}+1} - A| = \frac{|x_{n-1}+1-A^2|}{\sqrt{x_{n-1}+1}+A}$$ ·· 30 分

由 A 满足方程①知,$1 - A^2 = -A$. 又 $\sqrt{x_{n-1}+1} + A > A > 1$,

所以$|x_n-A|<\dfrac{|x_{n-1}-A|}{A}$ ………………………………………………………………………… 40 分

因此，$|x_n-A|<\dfrac{|x_{n-1}-A|}{A}<\dfrac{|x_{n-2}-A|}{A^2}<\cdots<\dfrac{|x_0-A|}{A^n}$.

记 $C=|x_0-A|$，有 $C>0$，则$|x_n-A|<\dfrac{C}{A^n}$.

综上，存在常数 $A>1$，$C>0$，使不等式$|x_n-A|<\dfrac{C}{A^n}$对任意的正整数 n 都成立 ………… 50 分

四、(本题满分 50 分)

已知素数 p 满足下述条件：存在正整数 n,u,v，使 n 的正约数的个数等于 p^u，且这 p^u 个正约数之和等于 p^v. 求 p 的一切可能值.

解：显然 $n>1$. 设 $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{a_m}$ 为 n 的素因数分解. $m,a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbf{N}^*$ 则

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_m+1)=p^u, \quad ①$$

$$(1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{a_2})\cdot\cdots\cdot(1+p_m+\cdots+p_m^{a_m})=p^v. \quad ②$$ …… 10 分

因为 p 是素数，则由①知，存在 $s\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_1+1=p^s$，因此

$$1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1}=1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{p^s-1}$$

$$=\frac{p_1^{p^s}-1}{p_1-1}=\frac{p_1^p-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_1^{p^s}-1}{p_1^p-1}$$ ……………………………………………… 20 分

由于上式最后的两个分式的值都是整数，p 又是素数，由②知，存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使 $p^t=\dfrac{p_1^p-1}{p_1-1}$，故 $p\mid p_1^p-1$.

根据 *Fermat* 小定理即得 $p_1\equiv p_1^p\equiv 1 \pmod p$ ……………………………………………… 30 分

设 $p_1=kp+1$，$k\in\mathbf{N}^*$，则

$$p^t=\frac{p_1^p-1}{p_1-1}=\frac{(kp+1)^p-1}{kp}$$

$$=C_p^0(kp)^{p-1}+C_p^1(kp)^{p-2}+\cdots+C_p^{p-2}kp+C_p^{p-1}.$$

当 $p\geqslant 3$ 时，$(kp)^{p-1}$，$C_p^1(kp)^{p-2}$，$\cdots$，$C_p^{p-2}kp$ 均为 p^2 的倍数，但 $C_p^{p-1}=p$ 不是 p^2 的倍数，这使得上式右边不可能为 p 的幂，矛盾 ……………………………………………………………… 40 分

所以，当 $p\leqslant 2$ 时. 由于 p 是素数，故 $p=2$.

事实上，当 $p=2$ 时，存在这样的正整数 n，只要 n 等于两两不同的 $2^r-1(r\in\mathbf{N}^*)$ 型素数的乘积，即可满足条件. 例如 $n=21=3\times 7$ 等.

综上所述，所求 $p=2$ 是满足条件的唯一素数 ……………………………………………… 50 分