2009 年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准 (B 卷)

说明：

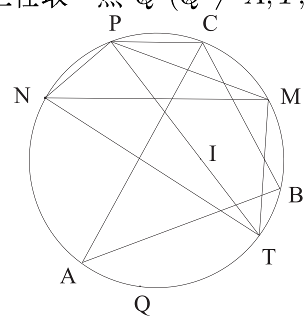
1. **评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；**

2. **如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.**

一、如图，M，N 分别为锐角三角形 $\Delta ABC(\angle A < \angle B)$ 的外接圆 Γ 上弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的中点. 过点 C 作 $PC//MN$ 交圆 Γ 于 P 点，I 为 ΔABC 的内心，连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T.

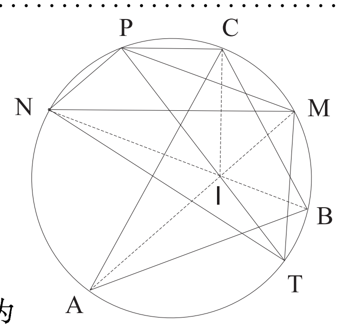
(I) 求证：$MP \cdot MT = NP \cdot NT$;

(II) 在弧 $\overset{\frown}{AB}$ (不含点 C) 上任取一点 Q ($Q \neq A, T, B$)，记 ΔAQC, ΔQCB 的内心分别为 I_1, I_2,



求证：Q, I_1, I_2, T 四点共圆。

证明：(I) 连 NI, MI. 由于 $PC//MN$，P, C, M, N 共圆，故 $PCMN$ 是等腰梯形。因此 $NP = MC, PM = NC$. .... (10 分)



连 AM, CI，则 AM 与 CI 交于 I. 因为

$$\angle MIC = \angle MAC + \angle ACI = \angle MCB + \angle BCI = \angle MCI,$$

所以 $MC = MI$. 同理

$$NC = NI.$$

于是

$$NP = MI,\ PM = NI.$$

故四边形 $MPNI$ 为平行四边形。因此 $S_{\Delta PMT} = S_{\Delta PNT}$ (同底，等高).................. (20 分)

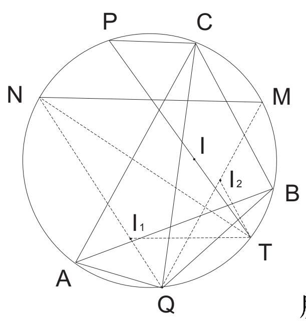
又 P, N, T, M 四点共圆, 故 $\angle TNP + \angle PMT = 180^0$. 由三角形面积公式

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMT} &= \frac{1}{2} PM \cdot MT \sin \angle PMT \\ &= S_{\Delta PNT} = \frac{1}{2} PN \cdot NT \sin \angle PNT \\ &= \frac{1}{2} PN \cdot NT \sin \angle PMT \end{aligned}$$

于是 $PM \cdot MT = PN \cdot NT$. .... (30 分)

(II) 因为

$$\angle NCI_1 = \angle NCA + \angle ACI_1 = \angle NQC + \angle QCI_1 = \angle CI_1N,$$



所以 $NC = NI_1$. 同理 $MC = MI_2$. 由 $MP \cdot MT = NP \cdot NT$ 得

$$\frac{NT}{MP} = \frac{MT}{NP}.$$

由 (I) 所证 $MP = NC$, $NP = MC$. 故

$$\frac{NT}{NI_1} = \frac{MT}{MI_2}.$$

.... (40 分)

又因

$$\angle I_1NT = \angle QNT = \angle QMT = \angle I_2MT,$$

有

$$\Delta I_1NT \sim \Delta I_2MT.$$

故 $\angle NTI_1 = \angle MTI_2$. 从而

$$\angle I_1QI_2 = \angle NQM = \angle NTM = \angle I_1TI_2.$$

因此 Q, I_1, I_2, T 四点共圆。.. (50 分) □

二、设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin\alpha, \cos\alpha$ 均为有理数。求证: 存在 $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ 满足

(I) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$;

(II) $\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \cos\alpha_1, \cos\alpha_2$ 都是有理数。

证明: 令 $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}$, 且 a, b, c 是正整数。于是

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

存在正整数 $m,n(m>n)$ 满足

$$c=m^2+n^2,\ a=m^2-n^2,b=2mn.$$

…………………………………………………………………………………… (10 分)

下面分两种情形讨论：

①如果 $m-n>1$, 取正整数 n_1 使得 $m>n_1>n$. 令 $\alpha_1\in(0,\frac{\pi}{2})$ 满足

$$\sin\alpha_1=\frac{m^2-n_1^2}{m^2+n_1^2}>0.$$

由

$$\frac{m^2-n_1^2}{m^2+n_1^2}<\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

得 $0<\sin\alpha_1<\sin\alpha$. 于是 $\alpha_1<\alpha$. 此时 $c_1=m^2+n_1^2,\ a_1=m^2-n_1^2,b_1=2mn_1$. 由此得

$$\cos\alpha_1=\frac{2mn_1}{m^2+n_1^2}>0.$$

显然 $\cos\alpha_1,\sin\alpha_1$ 为有理数。令 $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$, 则 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, 且由三角恒等式

$$\sin\alpha_2=\sin(\alpha-\alpha_1)=\sin\alpha\cos\alpha_1-\cos\alpha\sin\alpha_1,$$

$$\cos\alpha_2=\cos(\alpha-\alpha_1)=\cos\alpha\cos\alpha_1+\sin\alpha\sin\alpha_1$$

可知 $\sin\alpha_2,\cos\alpha_2$ 为有理数。……………………………………………… (30 分)

②如果 $m-n=1$, 则

$$\sin\alpha=\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2+n^2}=\frac{4(n+1)^2-4n^2}{4(n+1)^2+4n^2}.$$

令 $\alpha_1\in(0,\frac{\pi}{2})$ 满足

$$\sin\alpha_1=\frac{4(n+1)^2-(2n+1)^2}{4(n+1)^2+(2n+1)^2}.$$

由于

$$4(n+1)^2>(2n+1)^2>4n^2,$$

有

$$\sin\alpha_1<\frac{4(n+1)^2-4n^2}{4(n+1)^2+4n^2}=\sin\alpha.$$

于是 $\alpha_1<\alpha$. 此时 $c_1=4(n+1)^2+(2n+1)^2,\ a_1=4(n+1)^2-(2n+1)^2,b_1=4(n+1)(2n+1)$. 由此得

$$\cos\alpha_1=\frac{4(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2+(2n+1)^2}.$$

显然 $\cos\alpha_1,\sin\alpha_1$ 为有理数。令 $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$, 则 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$. 与 (1) 同理可证 $\sin\alpha_2,\cos\alpha_2$ 为有理数。……………………………………………………………… (50 分) □

三、已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=1, a_3=3, a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+a_{n-3}, n=4,5,\ldots$. 求证：对任何正常数 m, 存在某个正整数 n 使得 $m \mid a_n$.

证明：记 a_k 除以 m 所得余数为 b_k, $(0 \le b_k \le m-1)$, $k=1,2,\ldots$. 考虑 m^3+1 个三元数组

$$(b_1,b_2,b_3),(b_2,b_3,b_4),\ldots,(b_{m^3+1},b_{m^3+2},b_{m^3+3}),$$

由于上述三元数组的不同取值最多为 m^3 个，由抽屉原理知，其中一定有两组相同。不妨设

$$(b_i,b_{i+1},b_{i+2})=(b_j,b_{j+1},b_{j+2}),\ (1 \le i < j \le m^3+1).$$

....20 分

由 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+a_{n-3}$, $n=4,5,\ldots$ 得

(1) $$b_i \equiv b_{i-1}+2b_{i-2}+b_{i-3} (\mathrm{mod} m),\ \ i=4,5,\ldots.$$

反复应用 (1) 得

(2) $$b_{j+p}=b_{i+p},\ \ p \ge -(i-1).$$

令 $n=j-i$, 在 (2) 中令 $p=-(i-1),-(i-2),-(i-3)$ 可得

$$b_{n+1}=b_1=1, b_{n+2}=b_2=1, b_{n+3}=b_3=3.$$

....40 分

于是

$$b_n=b_{n+3}-2b_{n+2}-b_{n+1}=0.$$

从而 $m \mid a_n$. .... 50 分 □

四、设 M 为整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个含 0 的有限子集，又设 $f,g\colon M \to M$ 为两个单调减函数，且满足 $g(f(0)) \ge 0$. 求证：在 M 中存在整数 p 使得 $g(f(p))=p$.

证明：定义 $F\colon M \to M$

$$F(x)=g(f(x)),\ \ x \in M.$$

则 F 是单调增函数。事实上，对任意的 $x,y \in M$, $x \le y$, 由 f 的单调减性知，$f(x) \ge f(y)$. 由 $f(x),f(y) \in M$ 及 g 的单调减性，有 $F(x)=g(f(x)) \le g(f(y))=F(y)$. 因此，$F$ 是单调增函数。

.... (20 分)

如果 $g(f(0))=0$, 取 $p=0$ 即可。否则，$F(0)>0$. 又由 $F(0),0 \in M$ 及 F 的单调增性，有 $F(F(0)) \ge F(0)$. 令 $D=\{x \in M | x \le F(x)\}$. 则 $F(0) \in D$. .... (30 分)

由 $D \subset M$, 而 M 是有限集，故 D 是有限集。设 $p \in D$ 为 D 中的最大数，则 $p \le F(p)$.
.... (40 分)

再由 F 的单调增性，有 $F(p) \le F(F(p))$, 从而 $F(p) \in D$. 由 p 是 D 中的最大数，有 $F(p)=g(f(p))=p$. .... (50 分) □