2004年全国高中数学联赛试卷

第一试

一．选择题(本题满分36分，每小题6分)

1．设锐角θ使关于 x 的方程 $x^2+4x\cos\theta+\cos\theta=0$ 有重根，则θ的弧度数为
(　　)

$A.\ \frac{\pi}{6}$　　　$B.\ \frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$　　　$C.\ \frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{12}$　　　$D.\ \frac{\pi}{12}$

2．已知$M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$．若对于所有的$m\in R$，均有$M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是
(　　)

$A.\ [-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]$　　　$B.\ (-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$　　　$C.\ (-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$　　　$D.\ [-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

3．不等式$\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3+2>0$的解集为

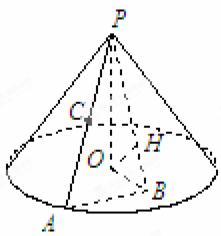
$A.\ [2,3)$　　　$B.\ (2,3]$　　　$C.\ [2,4)$　　　$D.\ (2,4]$

4．设点 O 在ΔABC的内部，且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\Delta ABC$的面积与$\Delta AOC$的面积的比为(　　)

$A.\ 2$　　　$B.\ \frac{3}{2}$　　　$C.\ 3$　　　$D.\ \frac{5}{3}$

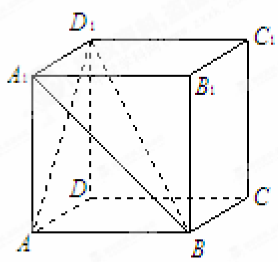
5．设三位数$n=\overline{abc}$，若以a，b，c为三条边长可以构成一个等腰(含等边)三角形，则这样的三位数n有(　　)

$A.$ 45 个　　　$B.$ 81 个　　　$C.$ 165 个　　　$D.$ 216 个



6．顶点为P的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A是底面圆周上的点，B是底面圆内的点，O为底面圆圆心，$AB\perp OB$，垂足为B，$OH\perp PB$，垂足为H，且$PA=4$，C为PA的中点，则当三棱锥$O-HPC$的体积最大时，OB的长为
(　　)

$A.\ \frac{\sqrt{5}}{3}$　　　$B.\ \frac{2\sqrt{5}}{3}$　　　$C.\ \frac{\sqrt{6}}{3}$　　　$D.\ \frac{2\sqrt{6}}{3}$



二．填空题(本题满分54分，每小题9分)

7．在平面直角坐标系xOy中，函数$f(x)=a\sin ax+\cos ax(a>0)$在一个最小正周期长的区间上的图像与函数$g(x)=\sqrt{a^2+1}$的图像所围成的封闭图形的面积是______________；

8．设函数f：R→R，满足$f(0)=1$，且对任意x，$y\in R$，都有$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，

则 $f(x)=$__________；

9．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $A-BD_1-A_1$ 的度数是_____________；

10.设 p 是给定的奇质数,正整数 k 使得 $\sqrt{k^2-pk}$ 也是一个正整数,则 $k=$______________；

11．已知数列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，…满足关系式 $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值是__________；

12．在平面直角坐标系 xOy 中，给定两点 $M(-1，2)$ 和 $N(1，4)$，点 P 在 x 轴上移动，当∠MPN 取最大值时，点 P 的横坐标为_________________；

三．解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

13．一项“过关游戏”规则规定：在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次，如果这 n 次抛掷所出现的点数的和大于 2^n，则算过关．问：

(1) 某人在这项游戏中最多能过几关?

(2) 他连过前三关的概率是多少?

14．在平面直角坐标系 xOy 中，给定三点 $A(0，\frac{4}{3})$，$B(-1，0)$，$C(1，0)$，点 P 到直线 BC 的距离是该点到直线 AB、AC 距离的等比中项．

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 若直线 L 经过△ABC 的内心(设为 D)，且与 P 点轨迹恰好有 3 个公共点，求 L 的斜率 k 的取值范围．

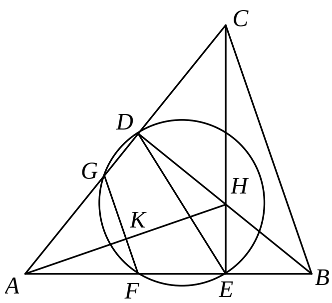
15．已知α、β是方程 $4x^2-4tx-1=0$ (t∈R)的两个不等实根，函数 $f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为[α，β]．

(1) 求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$；

(2) 证明：对于 $u_i\in(0，\frac{\pi}{2})$ (i=1，2，3)，若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则 $\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3\sqrt{6}}{4}$．

二试题

一．(本题满分 50 分)在锐角三角形 ABC 中，AB 上的高 CE 与 AC 上的高 BD 相交于点 H，以 DE 为直径的圆分别交 AB、AC 于 F、G 两点，FG 与 AH 相交于点 K，已知 $BC=25$，$BD=20$，$BE=7$，求 AK 的长．



二．(本题满分 50 分)在平面直角坐标系 XOY 中，y 轴正半轴上的点列 $\{A_n\}$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}$ ($x\geqslant0$)上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n，点 B_n 的横坐标为 b_n，n∈N*．

(1) 证明 $a_n>a_{n+1}>4$，n∈N*；

(2) 证明有 $n_0\in N^*$，使得对 $\forall n>n_0$，都有 $\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$．

三．(本题满分 50 分)对于整数 $n\geqslant4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m，m+1，\cdots，m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均至少有 3 个两两互素的元素．

2004年全国高中数学联赛试卷

第一试

一．选择题(本题满分 36 分，每小题 6 分)

1．设锐角 θ 使关于 x 的方程 $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ 有重根，则 θ 的弧度数为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　*B.* $\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$　　*C.* $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{12}$　　*D.* $\frac{\pi}{12}$

【答案】B

【解析】由方程有重根，故$\frac{1}{4}\Delta=4\cos^2\theta-\cot\theta=0$，

∵ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\Rightarrow 2\sin2\theta=1$，$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$．选 *B*.

2. 已知 $M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$. 若对于所有的 $m\in R$，均有 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是 (　　)

A. $[-\frac{\sqrt6}{2},\frac{\sqrt6}{2}]$　　*B.* $(-\frac{\sqrt6}{2},\frac{\sqrt6}{2})$　　*C.* $(-\frac{2\sqrt3}{3},\frac{2\sqrt3}{3}]$　　*D.* $[-\frac{2\sqrt3}{3},\frac{2\sqrt3}{3}]$

【答案】A

【解析】点 $(0,b)$ 在椭圆内或椭圆上，$\Rightarrow 2b^2\leqslant 3$，$\Rightarrow b\in[-\frac{\sqrt6}{2},\frac{\sqrt6}{2}]$. 选 *A*.

3．不等式$\sqrt{\log_2x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集为

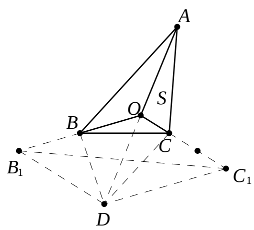
A. [2，3)　　*B.* (2，3]　　*C.* [2，4)　　*D.* (2，4]

【答案】C

【解析】令 $\log_2x=t\geqslant1$ 时，$\sqrt{t-1}>\frac{3}{2}t-2$．$t\in[1,2)$，$\Rightarrow x\in[2,4)$，选 *C*.

4．设点 O 在 ΔABC 的内部，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔABC 的面积与 ΔAOC 的面积的比为 (　　)

A. 2　　*B.* $\frac{3}{2}$　　*C.* 3　　*D.* $\frac{5}{3}$



【答案】C

【解析】如图，设 $\Delta AOC=S$，则 $\Delta OC_1D=3S$，$\Delta OB_1D=\Delta OB_1C_1=3S$，$\Delta AOB=\Delta OBD=1.5S$．$\Delta OBC=0.5S$，$\Rightarrow\Delta ABC=3S$．选 *C*.

5．设三位数 $n=\overline{abc}$，若以 a，b，c 为三条边长可以构成一个等腰(含等边)三角形，则

这样的三位数 n 有(　　)

A. 45 个　　　　*B*. 81 个　　　　*C*. 165 个　　　　*D*. 216 个

【答案】C

【解析】(1)等边三角形共 9 个；

(2) 等腰但不等边三角形：取两个不同数码(设为 a，b)，有 36 种取法，以小数为底时总能构成等腰三角形，而以大数为底时，$b<a<2b$．$a=9$ 或 8 时，$b=4$，3，2，1，(8 种)；$a=7$，6 时，$b=3$，2，1(6 种)；$a=5$，4 时，$b=2$，1(4 种)；$a=3$，2 时，$b=1$(2 种)，共有 20 种不能取的值．共有 236－20=52 种方法，而每取一组数，可有 3 种方法构成三位数，故共有 523=156 个三位数

即可取 156+9=165 种数．选 *C*．

6．顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆圆心，$AB\perp OB$，垂足为 B，$OH\perp PB$，垂足为 H，且 $PA=4$，C 为 PA 的中点，则当三棱锥 $O-HPC$ 的体积最大时，OB 的长为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　　　*B*. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　　　*C*. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　*D*. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

【答案】D

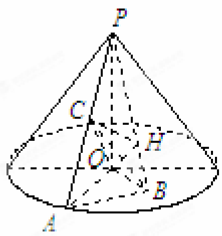
【解析】$AB\perp OB$，$\Rightarrow PB\perp AB$，$\Rightarrow AB\perp$面 POB，$\Rightarrow$面 $PAB\perp$面 POB．

$OH\perp PB$，$\Rightarrow OH\perp$面 PAB，$\Rightarrow OH\perp HC$，$OH\perp PC$，

又，$PC\perp OC$，$\Rightarrow PC\perp$面 OCH．$\Rightarrow PC$ 是三棱锥 $P-OCH$ 的高．$PC=OC=2$．

而 ΔOCH 的面积在 $OH=HC=\sqrt{2}$ 时取得最大值(斜边=2 的直角三角形)．

当 $OH=\sqrt{2}$ 时，由 $PO=2\sqrt{2}$，知 $\angle OPB=30°$，$OB=PO\tan30°=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$．



又解：连线如图，由 C 为 PA 中点，故 $V_{O-PBC}=\dfrac{1}{2}V_{O-ABP}$，

而 $V_{O-PHC}:V_{O-PBC}=\dfrac{PH}{PB}=\dfrac{PO^2}{PB^2}$ $(PO^2=PH\cdot PB)$．

记 $PO=OA=2\sqrt{2}=R$，$\angle AOB=\alpha$，则

$V_{P-AOB}=\dfrac{1}{6}R^3\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{12}R^3\sin2\alpha$，$V_{O-PBC}=\dfrac{1}{24}R^3\sin2\alpha$．

$\dfrac{PO^2}{PB^2}=\dfrac{R^2}{R^2+R^2\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3+\cos2\alpha}$．$\Rightarrow V_{O-PHC}=\dfrac{\sin2\alpha}{3+\cos2\alpha}\times\dfrac{1}{12}R^3$．

∴ 令 $y=\dfrac{\sin2\alpha}{3+\cos2\alpha}$，$y'=\dfrac{2\cos2\alpha(3+\cos2\alpha)-(-2\sin2\alpha)\sin2\alpha}{(3+\cos2\alpha)^2}=0$，得 $\cos2\alpha=-\dfrac{1}{3}$，

$\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $OB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，选 *D*．

二．填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7．在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x)=a\sin ax+\cos ax(a>0)$ 在一个最小正周期长的区间上的图像与函数 $g(x)=\sqrt{a^2+1}$ 的图像所围成的封闭图形的面积是______________；

【答案】$\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$．

【解析】$f(x)=\sqrt{a^2+1}\sin(ax+\varphi)$，周期$=\dfrac{2\pi}{a}$，取长为$\dfrac{2\pi}{a}$，宽为 $2\sqrt{a^2+1}$的矩形，由对称性知，面积之半即为所求．故填$\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$．

又解：$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{a^2+1}[1-\sin(ax+\varphi)]dx=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)dt=\dfrac{2p}{a}\sqrt{a^2+1}$．

8．设函数 f：R→R，满足 $f(0)=1$，且对任意 x，y∈R，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$__________；

【答案】x+1

【解析】令 $x=y=0$，得，$f(1)=1-1-0+2$，$\Rightarrow f(1)=2$．

令 $y=1$，得 $f(x+1)=2f(x)-2-x+2$，即 $f(x+1)=2f(x)-x$．①

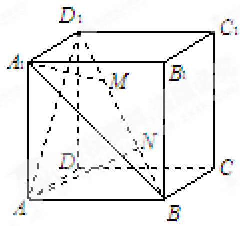
又，$f(yx+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2$，令 $y=1$ 代入，得 $f(x+1)=2f(x)-f(x)-1+2$，即 $f(x+1)=f(x)+1$．②

比较①、②得，$f(x)=x+1$．

9．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，二面角 $A-BD_1-A_1$的度数是____________；

【答案】60°．

【解析】设 $AB=1$，作 $A_1M\perp BD_1$，$AN\perp BD_1$，则 $BN\cdot BD_1=AB^2$，



$\Rightarrow BN=D_1M=MN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

$\Rightarrow A_1M=AN=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

∴ $AA_1^2=A_1M^2+MN^2+NA^2-2A_1M\cdot NA\cos\theta$，$\Rightarrow 1^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}-2\times\dfrac{2}{3}\cos\theta$，$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}$．

$\Rightarrow\theta=60°$．

10．设 p 是给定的奇质数，正整数 k 使得$\sqrt{k^2-pk}$也是一个正整数，则 $k=$______________；

【答案】$\dfrac{1}{4}(p+1)^2$．

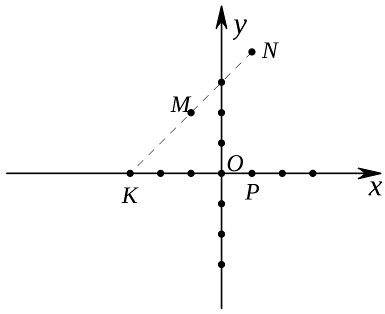
【解析】设$\sqrt{k^2-pk}=n$，则$(k-\dfrac{p}{2})^2-n^2=\dfrac{p^2}{4}$，$\Rightarrow(2k-p+2n)(2k-p-2n)=p^2$，$\Rightarrow k=\dfrac{1}{4}(p+1)^2$．

11．已知数列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，…满足关系式$(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，且 $a_0=3$，则$\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}$的值是________；

【答案】$\dfrac{1}{3}(2^{n+2}-n-3)$．

【解析】$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{3}$，$\Rightarrow$令 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}$，得 $b_0=\frac{2}{3}$，$b_n=2b_{n-1}$，$\Rightarrow b_n=\frac{2}{3}\times 2^n$．即$\frac{1}{a_n}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$，$\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3)$．

12．在平面直角坐标系 xOy 中，给定两点 $M(-1，2)$和 $N(1，4)$，点 P在 x轴上移动，当$\angle MPN$取最大值时，点 P的横坐标为________________；



【答案】1

【解析】当$\angle MPN$ 最大时，⊙MNP 与 x 轴相切于点 P(否则⊙MNP 与 x 轴交于 PQ，则线段 PQ 上的点 P使$\angle MPN$更大)．于是，延长 NM 交 x轴于 $K(-3，0)$，有 $KM\cdot KN=KP^2$，$\Rightarrow KP=4$．$P(1，0)$，$(-7，0)$，但$(1，0)$处⊙MNP的半径小，从而点 P的横坐标$=1$．

三．解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

13．一项“过关游戏”规则规定：在第 n关要抛掷一颗骰子 n次，如果这 n次抛掷所出现的点数的和大于 2^n，则算过关．问：

(1) 某人在这项游戏中最多能过几关？

(2) 他连过前三关的概率是多少？

【解析】(1) 设他能过 n关，则第 n关掷 n次，至多得 $6n$点，

由 $6n>2^n$，知，$n\leq 4$．即最多能过 4 关．

(2) 要求他第一关时掷 1 次的点数>2，第二关时掷 2 次的点数和>4，第三关时掷 3 次的点数和>8．

第一关过关的概率$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$；

第二关过关的基本事件有 6^2种，不能过关的基本事件有为不等式 $x+y\leq 4$ 的正整数解的个数，有 C_4^2个 (亦可枚举计数：1+1，1+2，1+3，2+1，2+2，3+1)计 6 种，过关的概率$=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}$；

第三关的基本事件有 6^3种，不能过关的基本事件为方程 $x+y+z\leq 8$ 的正整数解的总数，可连写 8 个 1，从 8 个空档中选 3 个空档的方法为 $C_8^3=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$ 种，不能过关的概率$=\frac{56}{6^3}=\frac{7}{27}$，能过关的概率$=\frac{20}{27}$；

∴连过三关的概率$=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{20}{27}=\frac{100}{243}$．

14．在平面直角坐标系 xOy 中，给定三点 $A(0，\frac{4}{3})$，$B(-1，0)$，$C(1，0)$，点 P到直线 BC 的距离是该点到直线 AB、AC距离的等比中项．

(1) 求点 P的轨迹方程；

(2) 若直线 L经过ΔABC的内心(设为 D)，且与 P点轨迹恰好有 3 个公共点，求 L的斜率 k的取值范围．

【解析】(1) 设点 P的坐标为$(x，y)$，

AB方程：$\frac{x}{-1}+\frac{3y}{4}=1$，$\Rightarrow 4x-3y+4=0$， ①

BC方程：$y=0$， ②

AC方程：$4x+3y-4=0$， ③

∴ $25|y|^2=|(4x-3y+4)(4x+3y-4)|$，

$\Rightarrow 25y^2+16x^2-(3y-4)^2=0$，$\Rightarrow 16x^2+16y^2+24y-16=0$，

$\Rightarrow 2x^2+2y^2+3y-2=0$.

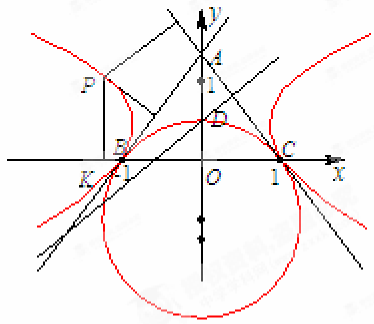
或 $25y^2-16x^2+(3y-4)^2=0$，$\Rightarrow 16x^2-34y^2+24y-16=0$，

$\Rightarrow 8x^2-17y^2+12y-8=0$.

∴ 所求轨迹为圆：$2x^2+2y^2+3y-2=0$，④

或双曲线：$8x^2-17y^2+12y-8=0$. ⑤

但应去掉点$(-1,0)$与$(1,0)$.



(2) $\triangle ABC$的内心$D(0,\frac{1}{2})$：经过D的直线为$x=0$或$y=kx+\frac{1}{2}$. ⑥

(a) 直线$x=0$与圆④有两个交点，与双曲线⑤没有交点；

(b) $k=0$时，直线$y=\frac{1}{2}$与圆④切于点$(0,\frac{1}{2})$，与双曲线⑤交于$(\pm\frac{5}{8}\sqrt{2},\frac{1}{2})$，即$k=0$满足要求.

(c) $k=\pm\frac{1}{2}$时，直线⑥与圆只有1个公共点，与双曲线⑤也至多有1个公共点，故舍去.

(c) $k\neq 0$时，$k\neq\frac{1}{2}$时，直线⑥与圆有2个公共点，以⑥代入⑤得：$(8-17k^2)x^2-5kx-\frac{25}{4}=0$.

当$8-17k^2=0$或$(5k)^2-25(8-17k^2)=0$，即得$k=\pm\frac{2\sqrt{34}}{17}$与$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ 所求k值的取值范围为$\{0,\ \pm\frac{2\sqrt{34}}{17},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

15．已知α，β是方程$4x^2-4tx-1=0(t\in R)$的两个不等实根，函数$f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$的定义域为$[\alpha,\beta]$.

(1) 求$g(t)=\max f(x)-\min f(x)$；

(2) 证明：对于$u_i\in(0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,3)$，若$\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

【解析】(1) $\alpha+\beta=t$，$\alpha\beta=-\frac{1}{4}$. 故$\alpha<0$，$\beta>0$. 当x_1，$x_2\in[\alpha,\beta]$时，

∴ $f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x-t)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-xt)+2}{(x^2+1)^2}$. 而当$x\in[\alpha,\beta]$时，$x^2-xt<0$，于是

$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调增.

$$\therefore\ g(t)=\frac{2\beta-t}{\beta^2+1}-\frac{2\alpha-t}{\alpha^2+1}=\frac{(2\beta-t)(\alpha^2+1)-(2\alpha-t)(\beta^2+1)}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}=\frac{(\beta-\alpha)[t(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+2]}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+\frac{5}{2}\right)}{t^2+\frac{25}{16}}=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}$$

(2) $$g(\tan u)=\frac{8\sec u(2\sec^2u+3)}{16\sec^2u+9}=\frac{16+24\cos^2u}{16\cos u+9\cos^3u}\geqslant\frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2u},$$

$$\therefore\ \frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}\leqslant\frac{1}{16\sqrt{6}}[16\times3+9(\cos^2u_1+\cos^2u_2+\cos^2u_3)]=\frac{1}{16\sqrt{6}}[75-9(\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3)]$$

而 $\frac{1}{3}(\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3)\geqslant\left(\frac{\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3}{3}\right)^2$，即 $9(\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3)\geqslant3$.

$\therefore\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}\leqslant\frac{1}{16\sqrt{6}}(75-3)=\frac{3\sqrt{6}}{4}$. 由于等号不能同时成立，故得证.

二试题

一．(本题满分 50 分)在锐角三角形 ABC 中，AB 上的高 CE 与 AC 上的高 BD 相交于点 H，以 DE 为直径的圆分别交 AB、AC 于 F、G 两点，FG 与 AH 相交于点 K，已知 $BC=25$，$BD=20$，$BE=7$，求 AK 的长．

【解析】∵ $BC=25$，$BD=20$，$BE=7$，

∴ $CE=24$，$CD=15$．

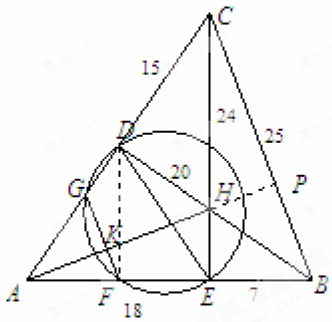
∵ $AC\cdot BD=CE\cdot AB$，$\Rightarrow AC=\frac{6}{5}AB$，　　　①

∵ $BD\perp AC$，$CE\perp AB$，$\Rightarrow B$、E、D、C 共圆，

$\Rightarrow AC(AC-15)=AB(AB-7)$，$\Rightarrow \frac{6}{5}AB(\frac{6}{5}AB-15)=AB(AB-18)$，

∴ $AB=25$，$AC=30$．$\Rightarrow AE=18$，$AD=15$．

∴ $DE=\frac{1}{2}AC=15$．



延长 AH 交 BC 于 P，则 $AP\perp BC$．

∴ $AP\cdot BC=AC\cdot BD$，$\Rightarrow AP=24$．

连 DF，则 $DF\perp AB$，

∵ $AE=DE$，$DF\perp AB$．$\Rightarrow AF=\frac{1}{2}AE=9$．

∵ D、E、F、G 共圆，$\Rightarrow\angle AFG=\angle ADE=\angle ABC$，$\Rightarrow\Delta AFG\backsim\Delta ABC$，

∴ $\frac{AK}{AP}=\frac{AF}{AB}$，$\Rightarrow AK=\frac{9\times 24}{25}=\frac{216}{25}$．

二．(本题满分 50 分)在平面直角坐标系 XOY 中，y 轴正半轴上的点列$\{A_n\}$与曲线 $y=\sqrt{2x}$ $(x\geqslant 0)$上的点列$\{B_n\}$满足$|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n，点 B_n 的横坐标为 b_n，$n\in\mathbb{N}^*$．

(1) 证明 $a_n>a_{n+1}>4$，$n\in\mathbb{N}^*$；

(2) 证明有 $n_0\in\mathbb{N}^*$，使得对$\forall n>n_0$，都有$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$．

【解析】(1) 点 $A_n(0,\frac{1}{n})$，$B_n(b_n,\sqrt{2b_n})\Rightarrow$由$|OA_n|=|OB_n|$，$\Rightarrow b_n^2+2b_n=(\frac{1}{n})^2$，$\Rightarrow b_n=\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}-1\,(b_n>0)$．

∴ $0<b_n<\frac{1}{2n^2}$．且 b_n 递减，$\Rightarrow n^2b_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}+1}$单调增．

∴ $0<n\sqrt{b_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$．$\Rightarrow$令 $t_n=\frac{1}{n\sqrt{b_n}}>\sqrt{2}$且 t_n 单调减．

由截距式方程知，$\frac{b_n}{a_n}+\frac{\sqrt{2b_n}}{\frac{1}{n}}=1$，$(1-2n^2b_n=n^2b_n^2)$

$$\therefore\ a_n=\frac{b_n}{1-m\sqrt{2b_n}}=\frac{b_n(1+m\sqrt{2b_n})}{1-2m^2b_n}=\frac{1+m\sqrt{2b_n}}{m^2b_n}=\left(\frac{1}{m\sqrt{b_n}}\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{1}{m\sqrt{b_n}}\right)=t_n^2+\sqrt{2}\,t_n=\left(t_n+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geqslant\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=4.$$

且由于 t_n 单调减，知 a_n 单调减，即 $a_n>a_{n+1}>4$ 成立．

亦可由 $\frac{1}{m^2b_n}=b_n+2$．$\frac{1}{m\sqrt{b_n}}=\sqrt{b_n+2}$，得 $a_n=b_n+2+\sqrt{2}\sqrt{b_n+2}$，．

∴ 由 b_n 递减知 a_n 递减，且 $a_n>0+2+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$．

(2) 即证 $\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{b_{k+1}}{b_k}\right)>2004$.

$$1-\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_k-b_{k+1}}{b_k}=\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}-\sqrt{1+(\frac{1}{k+1})^2}}{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}-1}=k^2\left((\frac{1}{k})^2-(\frac{1}{k+1})^2\right)\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}+1}{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}+\sqrt{1+(\frac{1}{k+1})^2}}$$

$$\geqslant\frac{2k+1}{(k+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}+1}{2\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}}>\frac{2k+1}{(k+1)^2}\times\frac{1}{2}>\frac{1}{k+2}.$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{b_{k+1}}{b_k}\right)>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}>\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

只要 n 足够大，就有 $\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{b_{k+1}}{b_k}\right)>2004$ 成立.

三．(本题满分 50 分)对于整数 $n\geqslant4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m，m+1，\cdots，m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均至少有 3 个两两互素的元素．

【解析】(1) 当 $n\geqslant4$ 时，对集合 $M_{(m,\ n)}=\{m，m+1，\cdots，m+n-1\}$，

当 m 为奇数时，m，$m+1$，$m+2$ 互质，当 m 为偶数时，$m+1$，$m+2$，$m+3$ 互质．即 M 的子集 M 中存在 3 个两两互质的元素，故 $f(n)$ 存在且 $f(n)\leqslant n$． ①

取集合 $T_n=\{t|2|t$ 或 $3|t，t\leqslant n+1\}$，则 T 为 $M_{(2,\ n)}=\{2，3，\cdots，n+1\}$ 的一个子集，且其中任 3 个数无不能两两互质．故 $f(n)\geqslant card(T)+1$．

但 $card(T)=[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}]$．故 $f(n)\geqslant[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}]+1$． ②

由①与②得，$f(4)=4$，$f(5)=5$．$5\leqslant f(6)\leqslant6$，$6\leqslant f(7)\leqslant7$，$7\leqslant f(8)\leqslant8$，$8\leqslant f(9)\leqslant9$．

现计算 $f(6)$，取 $M=\{m，m+1，\cdots，m+5\}$，若取其中任意 5 个数，当这 5 个数中有 3 个奇数时，这 3 个奇数互质；当这 3 个数中有 3 个偶数 k，$k+2$，$k+4(k\equiv0(mod\,2))$ 时，其中至多有 1 个被 5 整除，必有 1 个被 3 整除，故至少有 1 个不能被 3 与 5 整除，此数与另两个

奇数两两互质．故 $f(6)=5$．

而 $M_{(m,n+1)}=M_{(m,n)}\cup\{m+n\}$，故 $f(n+1)\leqslant f(n)+1$． ③

∴ $f(7)=6$，$f(8)=7$，$f(9)=8$．

∴ 对于 $4\leqslant n\leqslant 9$，$f(n)=[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}]+1$ 成立． ④

设对于 $n\leqslant k$，④成立，当 $n=k+1$ 时，由于

$M_{(m,k+1)}=M_{(m,k-5)}\cup\{m+k-5,m+k-4,\cdots,m+k\}$．

在 $\{m+k-5,m+k-4,\cdots,m+k\}$ 中，能被 2 或 3 整除的数恰有 4 个，即使这 4 个数全部取出，只要在前面的 $M_{(m,k-5)}$ 中取出 $f(n)$ 个数就必有 3 个两两互质的数．于是

当 $n\geqslant 4$ 时，$f(n+6)\leqslant f(n)+4=f(n)+f(6)-1$．

故 $f(k+1)\leqslant f(k-5)+f(6)-1=[\frac{k+2}{2}]+[\frac{k+2}{3}]-[\frac{k+2}{6}]+1$，

比较②，知对于 $n=k+1$，命题成立．

∴对于任意 $n\in N^*$，$n\geqslant 4$，$f(n)=[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}]+1$ 成立．

又可分段写出结果：

$$f(n)=\begin{cases}4k+1, & (n=6k, \quad k\in N^*),\\ 4k+2, & (n=6k+1, k\in N^*),\\ 4k+3, & (n=6k+2, k\in N^*),\\ 4k+4, & (n=6k+3, k\in N^*),\\ 4k+4, & (n=6k+4, k\in N^*),\\ 4k+5, & (n=6k+5, k\in N^*).\end{cases}$$