1996 年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

(10 月 13 日上午 8：00—9：20)

一、选择题(本题满分 36 分，每题 6 分)

1. 把圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 与椭圆 $9x^2+(y+1)^2=9$ 的公共点，用线段连接起来所得到的图形为(　　)

(A)线段　(B)不等边三角形　(C)等边三角形　(D)四边形

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1536$, 公比 $q=-\frac{1}{2}$, 用 π_n 表示它的前 n 项之积。则 $\pi_n(n\in N^*)$ 最大的是(　　)

(A) π_9　(B) π_{11}　(C) π_{12}　(D) π_{13}

3. 存在整数 n, 使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}$ 是整数的质数 p(　　)

(A)不存在　(B)只有一个

(C)多于一个,但为有限个　(D)有无穷多个

4. 设 $x\in(-\frac{1}{2}, 0)$, 以下三个数 $\sigma_1=\cos(\sin x\pi)$, $\sigma_2=\sin(\cos x\pi)$, $\sigma_3=\cos(x+1)\pi$ 的大小关系是(　　)

(A) $\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$　(B) $\sigma_1<\sigma_3<\sigma_2$　(C) $\sigma_3<\sigma_1<\sigma_2$　(D) $\sigma_2<\sigma_3<\sigma_1$

5. 如果在区间 $[1, 2]$ 上函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 在同一点取相同的最小值，那么 $f(x)$ 在该区间上的最大值是(　　)

(A) $4+\frac{11}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　(B) $4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

(C) $1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　(D)以上答案都不对

6. 高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1，球心 O_1 在圆台的轴上，球 O_1 与圆台的上底面、侧面都相切，圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点，除球 O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是(　　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

1． 集合$\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, x \in N^*\}$的真子集的个数是 ________.

2． 复平面上，非零复数 z_1，z_2在以 i 为圆心，1 为半径的圆上，$\overline{z_1} \cdot z_2$的实部为零，z_1的辐角主值为$\frac{\pi}{6}$，则 z_2=_______.

3． 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=1+\cos\theta$，点 A 的极坐标是$(2,0)$，曲线 C 在它所在的平面内绕 A 旋转一周，则它扫过的图形的面积是_______.

4． 已知将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱的长为 2，则最远的两顶点间的距离是________.

5． 从给定的六种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的六个面染色，每 面恰染一种颜色，每两个具有公共棱的面染成不同的颜色．则不同的染色方法共有_______种．(注：如果我们对两个相同的正方体染色后，可以通过适当的翻转，使得两个正方体的上、下、左、右、前、后六个对应面的染色都相同，那么，我们就说这两个正方体的染色方案相同．)

6． 在直角坐标平面，以(199,0)为圆心，199 为半径的圆周上整点(即横、纵坐标皆为整数的点)的个数为________.

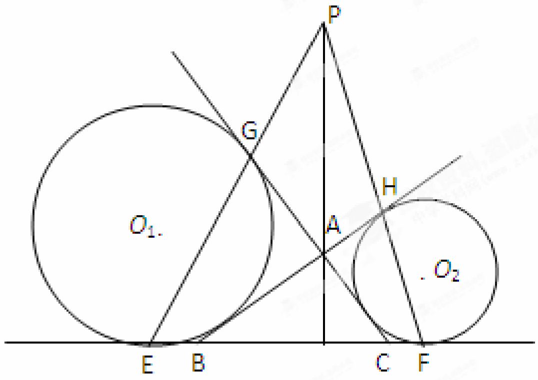
第二试

一、(本题满分 25 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n-1$（$n=1, 2, \cdots$），数列$\{b_n\}$满足 $b_1=3$，$b_{k+1}=a_k+b_k(k=1, 2, \cdots)$．求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

二、(本题满分 25 分）求实数 a 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2 \geqslant \frac{1}{8}.$$

三、(本题满分 35 分）如图，圆 O_1和圆 O_2与△ABC的三边所在的三条直线都相切，E、F、G、H为切点，并且 EG、FH 的延长线交于 P 点。求证直线 PA 与 BC 垂直。



四、（本题满分 35 分）有 $n(n\geqslant 6)$ 个人聚会，已知：

（1）每人至少同其中$\left[\frac{n}{2}\right]$个人互相认识；

（2）对于其中任意$\left[\frac{n}{2}\right]$个人，或者其中有 2 人相识，或者余下的人中有 2 人相识.

证明：这 n 个人中必有三人两两认识.

1996年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(本题满分 36 分，每题 6 分)

1. 把圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 与椭圆 $9x^2+(y+1)^2=9$ 的公共点，用线段连接起来所得到的图形为(　　)

(A)线段　　(B)不等边三角形　　(C)等边三角形　　(D)四边形

【答案】C

【解析】$9-9(y-1)^2=9-(y+1)^2$，$\Rightarrow 8y^2-20y+8=0$，$\Rightarrow y=2$ 或 $\frac{1}{2}$，相应的，$x=0$，或 $x=\pm\sqrt{3}$。此三点连成一个正三角形．选 C.

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1536$，公比 $q=-\frac{1}{2}$，用 π_n 表示它的前 n 项之积。则 $\pi_n(n\in N^*)$ 最大的是(　　)

(A) π_9　　(B) π_{11}　　(C) π_{12}　　(D) π_{13}

【答案】C

【解析】$\pi_n=1536^n\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故 $\pi_{11}<0$，π_9，π_{12}，$\pi_{13}>0$．作商比较：又，$\frac{\pi_{12}}{\pi_9}=1536^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{66-36}>1$，$\frac{\pi_{13}}{\pi_{12}}=1536\times\left(\frac{1}{2}\right)^{78-66}<1$．故选 C.

3. 存在整数 n，使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}$ 是整数的质数 p (　　)

(A)不存在　　　　　　　　(B)只有一个

(C)多于一个，但为有限个　　(D)有无穷多个

【答案】D

【解析】如果 p 为奇质数，$p=2k+1$，则存在 $n=k^2(k\in N_+)$，使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}=2k+1$．故选 D.

4. 设 $x\in(-\frac{1}{2},0)$，以下三个数 $\alpha_1=\cos(\sin x\pi)$，$\alpha_2=\sin(\cos x\pi)$，$\alpha_3=\cos(x+1)\pi$ 的大小关系是(　　)

(A) $\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1$　　(B) $\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$　　(C) $\alpha_3<\alpha_1<\alpha_2$　　(D) $\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$

【答案】D

【解析】 $a_1=\cos(\sin|x|\pi)>0$， $a_2=\sin(\cos|x|\pi)>0$， $a_3=\cos(1-|x|)\pi<0$，排除 B、D.

∵ $\sin|x|\pi+\cos|x|\pi=\sqrt{2}\sin(|x|\pi+\frac{\pi}{4})<\frac{\pi}{2}$，于是 $\cos|x|\pi<\frac{\pi}{2}-\sin|x|\pi$，

∴ $\sin(\cos|x|\pi)<\cos(\sin|x|\pi)$，故 $a_2<a_1$，选 A.

又解：取 $x=-\frac{1}{4}$，则 $a_1=\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$， $a_2=\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$， $a_3=\cos\frac{3}{4}\pi<0$. 由于 $\frac{\pi}{6}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4}$，故 $a_1>a_2$.

5. 如果在区间[1,2]上函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 在同一点取相同的最小值，那么 $f(x)$ 在该区间上的最大值是(　　)

(A) $4+\frac{11}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　(B) $4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

(C) $1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　(D) 以上答案都不对

【答案】B

【解析】 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. 当且仅当 $\frac{1}{2}x=\frac{1}{x^2}$ 即 $x=\sqrt[3]{2}$ 时 $g(x)$ 取得最小值.

∴ $-\frac{p}{2}=\sqrt[3]{2}$， $\frac{4q-p^2}{4}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$， $\Rightarrow p=-2\sqrt[3]{2}$， $q=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

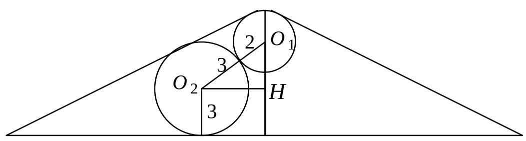
由于 $\sqrt[3]{2}-1<2-\sqrt[3]{2}$. 故在[1，2]上 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. 故选 B.

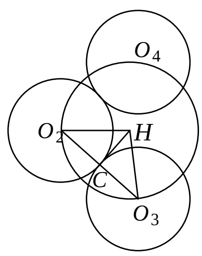
6. 高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1，球心 O_1 在圆台的轴上，球 O_1 与圆台的上底面、侧面都相切，圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点，除球 O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】B

【解析】 O_2 与下底距离=3，与 O_1 距离=2+3=5，与轴距离=4，问题转化为在以 4 为半径的圆周上，能放几个距离为 6 的点？





右图中，由 $\sin\angle O_2HC=3/4>0.707$，

即$\angle O_2HO_3>90°$，即此圆上还可再放下 2 个满足要求的点．故选B.

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

1． 集合$\{x|-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}，x\in N^*\}$的真子集的个数是 ________.

【答案】$2^{90}-1$

【解析】由已知，得$\frac{1}{2}<\log_x 10\leqslant1\Rightarrow1\leqslant\lg x<2\Rightarrow10\leqslant x<100$．故该集合有 90 个元素．其真子集有 $2^{90}-1$ 个.

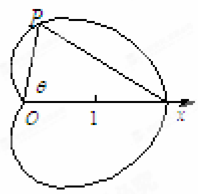
2． 复平面上，非零复数 z_1，z_2 在以 i 为圆心，1 为半径的圆上，$\bar{z}_1\cdot z_2$的实部为零，z_1的辐角主值为$\frac{\pi}{6}$，则 z_2=_______.

【答案】$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

【解析】z_1满足$|z-i|=1$；$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，得 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$\bar{z}_1=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$.

设 z_2的辐角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，则 $z_2=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$．$\bar{z}_1\cdot z_2=2\sin\theta[\cos(\theta-\frac{\pi}{6})+i\sin(\theta-\frac{\pi}{6})]$，若其实部为 0，则 $\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，于是 $\theta=\frac{2\pi}{3}$．$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

3． 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=1+\cos\theta$，点 A 的极坐标是(2,0)，曲线 C 在它所在的平面内绕 A 旋转一周，则它扫过的图形的面积是_______。



【答案】$\frac{16}{3}\pi$

【解析】只要考虑$|AP|$最长与最短时所在线段扫过的面积即可.

设 $P(1+\cos\theta,\ \theta)$，

则$|AP|^2=2^2+(1+\cos\theta)^2-2\cdot2(1+\cos\theta)\cos\theta=-3\cos^2\theta-2\cos\theta+5$

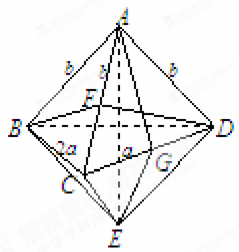
$=-3(\cos\theta+\frac{1}{3})^2+\frac{16}{3}\leqslant\frac{16}{3}$．且显然$|AP|^2$能取遍$[0,\frac{16}{3}]$内的一切值，故所求面积$=\frac{16}{3}\pi$.

4． 已知将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱的长为 2，则最远的两顶点间的距离是________。

【答案】3

【解析】该六面体的棱只有两种，设原正三棱锥的底面边长为 $2a$，侧棱为 b.

取 CD 中点 G，则 $AG\perp CD$，$EG\perp CD$，故 $\angle AGE$ 是二面角 $A-CD-E$ 的平面角．由 $BD\perp AC$，作平面 $BDF\perp$ 棱 AC 交 AC 于 F，则 $\angle BFD$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角．



$AG=EG=\sqrt{b^2-a^2}$，$BF=DF=\dfrac{2a\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，$AE=2\sqrt{b^2-\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}a\right)^2}$

$=2\sqrt{b^2-\dfrac{4}{3}a^2}$.

由 $\cos\angle AGE=\cos\angle BFD$，得 $\dfrac{2AG^2-AE^2}{2AG^2}=\dfrac{2BF^2-BD^2}{2BF^2}$.

$\therefore\ \dfrac{4\left(b^2-\dfrac{4}{3}a^2\right)}{b^2-a^2}=\dfrac{4a^2b^2}{4a^2(b^2-a^2)}\Rightarrow 9b^2=16a^2$，$\Rightarrow b=\dfrac{4}{3}a$．从而 $b=2$，

$2a=3$.

$AE=2$．即最远的两个顶点距离为 3.

5．从给定的六种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的六个面染色，每面恰染一种颜色，每两个具有公共棱的面染成不同的颜色。则不同的染色方法共有_______种。(注：如果我们对两个相同的正方体染色后，可以通过适当的翻转，使得两个正方体的上、下、左、右、前、后六个对应面的染色都相同，那么，我们就说这两个正方体的染色方案相同。)

【答案】230

【解析】至少 3 种颜色：

6 种颜色全用：上面固定用某色，下面可有 5 种选择，其余 4 面有 $(4-1)!=6$ 种方法，共计 30 种方法；

用 5 种颜色：上下用同色：6 种方法，选 4 色：$C_5^4(4-1)!=30$；$6\times30\div2=90$ 种方法；.

用 4 种颜色：$C_6^4C_4^2=90$ 种方法.

用 3 种颜色：$C_6^3=20$ 种方法.

$\therefore$ 共有 230 种方法.

6．在直角坐标平面，以(199,0)为圆心，199 为半径的圆周上整点(即横、纵坐标皆为整数的点)的个数为________.

【答案】4

【解析】把圆心平移至原点，不影响问题的结果．故问题即求 $x^2+y^2=199^2$ 的整数解数．显然 x、y 一奇一偶，设 $x=2m$，$y=2n-1$．且 $1\leqslant m$，$n\leqslant 99$．
则得 $4m^2=199^2-(2n-1)^2=(198+2n)(200-2n)$．$m^2=(99+n)(100-n)\equiv(n-1)(-n)\pmod 4$

由于 m 为正整数，$m^2\equiv 0$，1 (mod 4)；$(n-1)(-n)\equiv\begin{cases}0，（当 n\equiv 0，1 (mod\ 4) 时）\\ 2，（当 n\equiv 2，3 (mod\ 4) 时）\end{cases}$

二者矛盾，故只有(0，±199)，(±199，0)这 4 解．

∴ 共有 4 个．(199，±199)，(0，0)，(398，0)．

第二试

一、（本题满分 25 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n-1$（$n=1$，2，…），数列$\{b_n\}$满足 $b_1=3$，$b_{k+1}=a_k+b_k$（$k=1$，2，…）．求数列$\{b_n\}$的前 n 项和．

【解析】 $a_1=2a_1-1$，$a_1=1$；

$a_n=(2a_n-1)-(2a_{n-1}-1)=2a_n-2a_{n-1}$，$\Rightarrow a_n=2a_{n-1}$．$\Rightarrow\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列．$a_n=2^{n-1}$．

$b_{k+1}-b_k=2^{k-1}$，$\Rightarrow b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)=2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^0=2^{n-1}-1$．

∴ $b_n=2^{n-1}+2$．

∴ $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=2^n+2n-1$．

二、（本题满分 25 分）

求实数 a 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

【解析】 令 $\sin\theta+\cos\theta=u$，则 $2\sin\theta\cos\theta=u^2-1$，当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$u\in[1,\sqrt{2}]$．

并记 $f(x)=(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2$．

∴ $f(x)=(x+2+u^2)^2+(x+au)^2=2x^2+2(u^2+au+2)x+(u^2+2)^2+(au)^2=2[x+\frac{1}{2}(u^2+au+2)]^2+\frac{1}{2}(u^2-au+2)^2$．

∴ $x=-\frac{1}{2}(u^2+au+2)$时，$f(x)$取得最小值$\frac{1}{2}(u^2-au+2)^2$．∴ $u^2-au+2\geqslant\frac{1}{2}$，或 $u^2-au+2\leqslant-\frac{1}{2}$．

∴ $a\leqslant u+\frac{3}{2u}$，或 $a\geqslant u+\frac{5}{2u}$．当 $u\in[1,\sqrt{2}]$时，$u+\frac{3}{2u}\in[\sqrt{6},\frac{7}{4}\sqrt{2}]$；$u+\frac{5}{2u}\in[\frac{9}{4}\sqrt{2},\frac{7}{2}]$．

∴ $a\leqslant\sqrt{6}$ 或 $a\geqslant\frac{7}{2}$．

三、（本题满分 35 分）

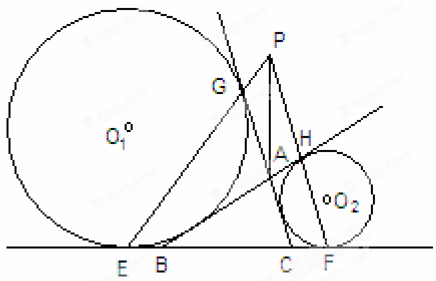
如图，圆 O_1 和圆 O_2 与△ABC 的三边所在的三条直线都相切，E、F、G、H 为切点，并且 EG、FH 的延长线交于 P 点。求证直线 PA 与 BC 垂直。

【解析】 证明 设△ABC 的三边分别为 a、b、c，三个角分别为 A、B、C，则

$CE=BF=CG=BH=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

∴ $BE=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$.

∴ $EF=\frac{1}{2}(a+b+c)+\frac{1}{2}(b+c-a)=b+c$.



连 CO_1，则 CO_1 平分 $\angle ECG$，$CO_1\perp EG$，$\Rightarrow \angle FEP=90°-\frac{1}{2}\angle C$.

同理 $\angle EFP=90°-\frac{1}{2}\angle B$，$\angle EPF=\frac{1}{2}(B+C)$.

∵ $\dfrac{EP}{\sin(90°-\frac{1}{2}B)}=\dfrac{EF}{\sin\frac{B+C}{2}}$，∴

$EP=(b+c)\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$.

设 P、A 在 EF 上的射影分别为 M、N，则 $EM=EP\cos\angle FEP=(b+c)\dfrac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$.

又 $BN=c\cos B$，故只须证 $c\cos B+\frac{1}{2}(b+c-a)=(b+c)\dfrac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$，

即 $\sin C\cos B+\frac{1}{2}(\sin B+\sin C-\sin(B+C))=\dfrac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}(\sin B+\sin C)$ 就是

$$2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin C\cos B-\frac{1}{2}\sin B\cos C-\frac{1}{2}\cos B\sin C+\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

右边 $=\frac{1}{2}\sin(C-B)+\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}-\sin\frac{B-C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。故证。

四、（本题满分 35 分）

有 n（$n\geqslant 6$）个人聚会，已知：

（1）每人至少同其中$\left[\frac{n}{2}\right]$个人互相认识；

（2）对于其中任意$\left[\frac{n}{2}\right]$个人，或者其中有 2 人相识，或者余下的人中有 2 人相识．

证明：这 n 个人中必有三人两两认识．

【解析】证明：作一个图，用 n 个点表示这 n 个人，凡二人认识，则在表示此二人的点间连一条线．问题即，在题设条件下，存在以这 n 点中的某三点为顶点的三角形．设点 a 连线条数最多，在与 a 连线的所有点中点 b 连线最多，与 a 连线的点除 b 外的集合为 A，与 b 连线的点除 a 外的集合为 B．

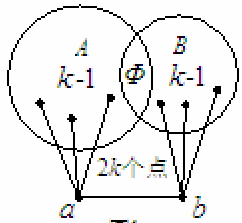


图1

1° 设 $n=2k$，则每点至少连 k 条线，A、B 中都至少有 $k-1$ 个点．

⑴若存在一点 c，与 a、b 都连线，则 a、b、c 满足要求；

⑵若没有任何两点与此二点都连线(图 1)，则由 $A\cap B=\varnothing$，$|A\cup B|\leqslant 2k-2$，$|A|\geqslant k-1$，$|B|\geqslant k-1$，故得 $|A|=|B|=k-1$，且图中每点都连 k 条线．若 A(或 B)中存在两点，这两点间连了一条线，则此二点与 a 连出三角形，若 A 中任何两点间均未连线，B 中任两点也未连线，则 $A\cup\{b\}$ 中不存在两点连线，$B\cup\{a\}$ 中也不存在两点连线．与已知矛盾．

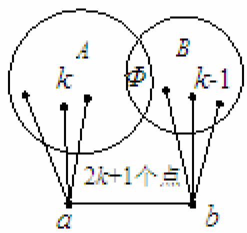


图2

2° 设 $n=2k+1$．则每点至少连 k 条线，A、B 中都至少有 $k-1$ 个点．

⑴若存在一点 c，与 a、b 都连线，则 a、b、c 满足要求；

⑵若没有任何两点与此二点都连线，且 $|A|\geqslant k$，则由 $|B|\geqslant k-1$ 时(图 2)，则由 $A\cap B=\varnothing$，$|A\cup B|\leqslant 2k-1$，$|A|\geqslant k$，$|B|\geqslant k-1$，故得 $|A\cup B|=2k-1$，$|A|=k$，$|B|=k-1$，若 A(或 B)中存在两点，这两点间连了一条线，则此二点与 a 连出三角形，若 A 中任何两点间均未连线，B 中任两点也未连线，则 $A\cup\{b\}$ 中不存在两点连线，$B\cup\{a\}$ 中也不存在两点连线．与已知矛盾．

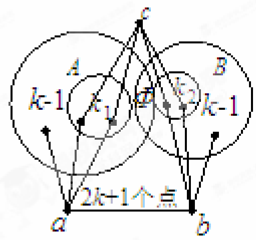


图3

⑶若没有任何两点与此二点都连线，且 $|A|=k-1$，即每点都只连 k 条线．这时，必有一点与 a、b 均未连线，设为 c．c 与 A 中 k_1 个点连线，与 B 中 k_2 个点连线，$k_1+k_2=k$，且 $1\leqslant k_1$，$k_2\leqslant k-1$．否则若 $k_1=0$，则 $A\cup\{b\}$ 中各点均未连线，$B\cup\{a，c\}$ 中各点也未连线．矛盾．故 k_1，$k_2\geqslant 1$．且由于 $n\geqslant 6$，即 k_1，k_2 中至少有一个 $\geqslant 2$，不妨设 $k_1\geqslant 2$，现任取 B 中与 c 连线的一点 b_1，由于 b_1 与 B 中其余各点均未连线，若 b_1 与 A 中的所有与 c 连线的点均未连线，则 b_1 连线数 $\leqslant 2+k-1-k_1\leqslant k-1$，矛盾，故 b_1 至少与此 k_1 个点中的一点连线．故证．