二〇〇一年全国高中数学联赛

（10 月 4 日上午 8：00—9：40）

题号	一	二	三			合计	加试	总成绩
			13	14	15			
得分								
评卷人								
复核人								

学生注意：1、本试卷共有三大题（15 个小题），全卷满分 150 分。

2、用圆珠笔或钢笔作答。

3、解题书写不要超过装订线。

4、不能使用计算器。

1、 选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

本题共有 6 个小是题，每题均给出（A）（B）（C）（D）四个结论，其中有且仅有一个是正确的。请将正确答案的代表字母填在题后的括号内，每小题选对得 6 分；不选、选错或选的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得 0 分。

1、已知 a 为给定的实数，那么集合 $M=\{x|x^2-3x-a^2+2=0,x\in R\}$ 的子集的个数为

（A）1 （B）2 （C）4 （D）不确定

2、命题 1：长方体中，必存在到各顶点距离相等的点；

命题 2：长方体中，必存在到各棱距离相等的点；

命题 3：长方体中，必存在到各面距离相等的点；

以上三个命题中正确的有

（A）0 个 （B）1 个 （C）2 个 （D）3 个

3、在四个函数 $y=\sin|x|$，$y=\cos|x|$，$y=|ctgx|$，$y=\lg|\sin x|$ 中以 为周期、在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增的偶函数是

（A）$y=\sin|x|$ （B）$y=\cos|x|$ （C）$y=|ctgx|$ （D）$y=\lg|\sin x|$

4、如果满足∠ABC=60°，AC=12，BC=k 的⊿ABC 恰有一个，那么 k 的取值范围是

（A）$k=8\sqrt{3}$ （B）$0<k\leq 12$ （C）2 （D）$0<k\leq 12$ 或 $k=8\sqrt{3}$

5．若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 的值为（ ）.

（A）3^{333} （B）3^{666} （C）3^{999} （D）3^{2001}

6．已知 6 枝玫瑰与 3 枝康乃馨的价格之和大于 24，而 4 枝玫瑰与 5 枝康乃馨的价格之和小于 22 元，则 2 枝玫瑰的价格和 3 枝康乃馨的价格比较，结果是（ ）.

（A）2 枝玫瑰价格高 （B）3 枝康乃馨价格高

（C）价格相同 （D）不确定

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7．椭圆 $\rho=1/(2-\cos\theta)$ 的短轴长等于______________.

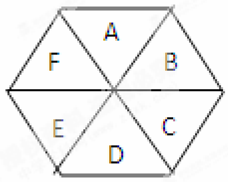
8、若复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=2,|z_2|=3,3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-I$，则 $z_1z_2=$______________________。

9、正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则直线 A_1C_1 与 BD_1 的距离是___________________。

10、不等式$\left|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}+2\right|>\dfrac{3}{2}$的解集为________________________。

11、函数$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$的值域为__________________________。

12、在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物（如图），要求同一场块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物。现有 4 种不同的植物可供选择，则有___________种栽种方案。



二、　　解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13、设$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且$b_1=a_1^2$，$b_2=a_2^2$，$b_3=a_3^2$（$a_1<a_2$），又

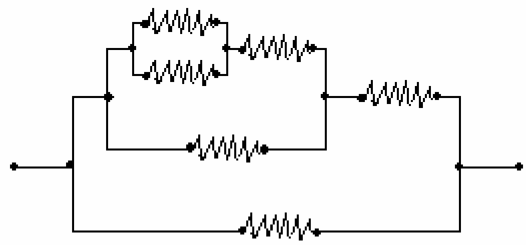
$$\lim_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$$**，试求$\{a_n\}$的首项与公差。**

14、设曲线C_1:$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$(a 为正常数)与C_2:y =2(x+m)在 x 轴上方公有一个公共点 P。

一、　求实数 m 的取值范围（用 a 表示）;

一、　O 为原点，若C_1与 x 轴的负半轴交于点 A，当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，试求⊿OAP 的面积的最大值（用 a 表示）。

15、用电阻值分别为a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、($a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$）的电阻组装成一个如图的组件，在组装中应如何选取电阻，才能使该组件总电阻值最小？证明你的结论。



二〇〇一年全国高中数学联合竞赛加试试题

（10 月 4 日上午 10：00—12：00）

学生注意：1、本试卷共有三大题，全卷满分 150 分。

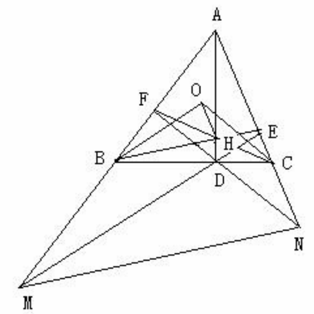
2、用圆珠笔或钢笔作答。

3、解题书写不要超过装订线。

4、不能使用计算器。

一、（本题满分 50 分）

如图：⊿ABC 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N。求证：（1）OB⊥DF，OC⊥DE；（2）OH⊥MN。

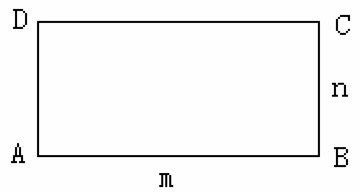


二、（本题满分 50 分）

设 $x_i \geqslant 0$(I=1, 2, 3, …, n)且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + 2\sum_{1\le k<j\le n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_k x_j = 1$，求 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 的最大值与最小值。

三、（本题满分 50 分）

将边长为正整数 m,n 的矩形划分成若干边长均为正整数的正方形，每个正方形的边均平行于矩形的相应边，试求这些正方形边长之和的最小值。



2001 年全国高中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

一. *选择题*：CBDDCA

1.已知 a 为给定的实数，那么集合M＝{x｜x^2－3x－a^2＋2=0，x∈R}的子集的个数为（　　）.

A．1　B．2　C．4　D．不确定

【答案】C

【解析】M 表示方程 x^2－3x－a^2＋2=0 在实数范围内的解集．由于 Δ＝1+4a^2>0，所以M含有 2 个元素．故集合M有 2^2=4 个子集，选C．

2．命题 1：长方体中，必存在到各顶点距离相等的点．

命题 2：长方体中，必存在到各条棱距离相等的点；

命题 3：长方体中，必存在到各个面距离相等的点．

以上三个命题中正确的有（　　）．

A．0 个　B．1 个　C．2 个　D．3 个

【答案】B

【解析】由于长方体的中心到各顶点的距离相等，所以命题 1 正确．对于命题 2 和命题 3，一般的长方体（除正方体外）中不存在到各条棱距离相等的点，也不存在到各个面距离相等的点．因此，本题只有命题 1 正确，选 B．

3.在四个函数 y＝sin｜x｜、y＝cos｜x｜、y＝｜ctgx｜、y＝lg｜sinx｜中，以 π 为周期、在（0，π／2）上单调递增的偶函数是（　　）.

A．y＝sin｜x｜　　B．y＝cos｜x｜

C．y＝｜ctgx｜　　D．y＝lg｜sinx｜

【答案】D

【解析】可考虑用排除法．y＝sin｜x｜不是周期函数（可通过作图判断），排除A；y＝cos｜x｜的最小正周期为 2π，且在（0，π／2）上是减函数，排除B；y＝｜ctgx｜在（0，π／2）上是减函数，排除C．故应选D．

4．如果满足∠ABC＝60°，AC＝12，BC＝k 的△ABC恰有一个，那么 k 的取值范围是（　　）.

A．$k=8\sqrt{3}$　　B．0＜k≤12

C．k≥12　　D．0＜k≤12 或 $k=8\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】这是“已知三角形的两边及其一边的对角，解三角形”这类问题的一个逆向问

题，由课本结论知，应选结论D．

说明：本题也可以通过画图直观地判断，还可以用特殊值法排除A、B、C．

5．若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 的值为（　　）．

A．3^{333}　　B．3^{666}　　C．3^{999}　　D．3^{2001}

【答案】C

【解析】由于要求的是展开式中每间隔两项系数的和，所以联想到1的单位根，用特殊值法．

取 $\omega=-(1/2)+(\sqrt{3}/2)i$，则 $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$．

令 $x=1$，得

$3^{1000}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2000}$；

令 $x=\omega$，得

$0=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots+a_{2000}\omega^{2000}$；

令 $x=\omega^2$，得

$0=a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4+a_3\omega^6+\cdots+a_{2000}\omega^{4000}$．

三个式子相加得

$3^{1000}=3(a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998})$．

$a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998}=3^{999}$，选C．

6．已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24，而4枝玫瑰与5枝康乃馨的价格之和小于22元，则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较，结果是（　　）．

A．2枝玫瑰价格高　　B．3枝康乃馨价格高

C．价格相同　　D．不确定

【答案】A

【解析】这是一个大小比较问题．可先设玫瑰与康乃馨的单价分别为ｘ元、ｙ元，则由题设得，$\begin{cases}6X+3Y>24\\4X+5Y<22\end{cases}$　问题转化为在条件①、②的约束下，比较２ｘ与３ｙ的大小．有以下两种解法：

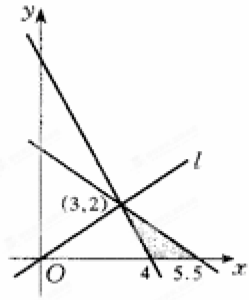
解法１：为了整体地使用条件①、②，令６ｘ＋３ｙ＝ａ，４ｘ＋５ｙ＝ｂ，联立解得ｘ＝（５ａ－３ｂ）／18，ｙ＝（３ｂ－２ａ）／９．

∴２ｘ－３ｙ＝…＝（11ａ－12ｂ）／９．

∵ａ＞24，ｂ＜22，

∴11ａ－12ｂ＞11×24－12×22＝0．

∴２ｘ＞３ｙ，选Ａ



解法２：由不等式①、②及ｘ＞0、ｙ＞0组成的平面区域如图１中的阴影部分（不含边界）．令２ｘ－３ｙ＝２ｃ，则ｃ表示直线ｌ：２ｘ－３ｙ＝２ｃ在ｘ轴上的截距．显然，当ｌ过点（３，２）时，２ｃ有最小值为０．故２ｘ－３ｙ＞0，即２ｘ＞３ｙ，选Ａ．

说明：（1）本题类似于下面的1983年一道全国高中数学联赛试题：

已知函数Ｍ＝ｆ（ｘ）＝ａｘ²－ｃ满足：－4≤ｆ（1）≤－1，－1≤ｆ（2）≤5，那么ｆ（3）应满足（　　）．

Ａ．－7≤ｆ（3）≤26　　Ｂ．－4≤ｆ（3）≤15

Ｃ．－1≤ｆ（3）≤20　　Ｄ．－28／3≤ｆ（3）≤35／3

（2）如果由条件①、②先分别求出ｘ、ｙ的范围，再由２ｘ－ｙ的范围得结论，容易出错．上面的解法１运用了整体的思想，解法２则直观可靠，详见文［1］．

二．填空题

7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　8. $-\frac{30}{13}+\frac{72}{13}i$　　9. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

10. $(0,1)\cup(1,2^{\frac{2}{7}})\cup(4,+\infty)$　　11. $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$　　12. 732

7．椭圆ρ＝1／（2－ｃｏｓθ）的短轴长等于______________．

【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】若注意到极点在椭圆的左焦点，可利用特殊值法；若注意到离心率ｅ和焦参数ｐ（焦点到相应准线的距离）的几何意义，本题也可以直接求短半轴的长．

解法１：由 $\begin{cases}\rho(0)=a+c=1\\\rho(\pi)=a-c=1/3\end{cases}$ 得ａ＝2／3，从而ｂ＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$，故２ｂ＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解法２：由ｅ＝ｃ／ａ＝1／2，ｐ＝ｂ²／ｃ＝1及ｂ²＝ａ²－ｃ²，得

ｂ＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$．从而２ｂ＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．说明：这是一道符合数学大纲而超出高考范围的试题．

8．若复数z_1、z_2满足$|z_1|=2$，$|z_3|=3$，$3z_1-2z_2=(3/2)-i$，则$z_1\cdot z_2=$______________．

【答案】$-\dfrac{30}{13}+\dfrac{72}{13}i$

【解析】令$z_1=2(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=3(\cos\beta+i\sin\beta)$，

则由$3z_1-2z_2=(3/2)-i$及复数相等的充要条件，得$\begin{cases}6(\cos\alpha-\cos\beta)=\dfrac{3}{2}\\6(\sin\alpha-\sin\beta)=-1\end{cases}$**即**

$$\begin{cases}-12\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{3}{2}\\12\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-1\end{cases}$$

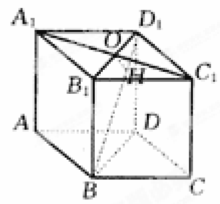
二式相除，得$\tan((\alpha+\beta)/2)=3/2$．由万能公式，得

$\sin(\alpha+\beta)=12/13$，$\cos(\alpha+\beta)=-5/13$．

故$z_1\cdot z_2=6[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=-(30/13)+(72/13)i$．

说明：本题也可以利用复数的几何意义解．

9．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则直线A_1C_1与BD_1的距离是______________．



【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】这是一道求两条异面直线距离的问题，解法较多，下面给出一种基本的解法．为了保证所作出的表示距离的线段与A_1C_1和BD_1都垂直，不妨先将其中一条直线置于另一条直线的垂面内．为此，作正方体的对角面BDD_1B_1，则$A_1C_1\perp$面BDD_1B_1，且$BD_1\subset$面BDD_1B_1．设$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，在面BDD_1B_1内作$OH\perp BD_1$，垂足为H，则线段OH的长为异面直线A_1C_1与BD_1的距离．在$Rt\triangle BB_1D_1$中，OH等于斜边BD_1上高的一半，即$OH=\sqrt{6}/6$．

10．不等式$|(1/\log_{1/2}x)+2|>3/2$的解集为______________．

【答案】$x>4$，或$1<x<2^{2/7}$，或$0<x<1$．

【解析】从外形上看，这是一个绝对值不等式，先求得 $\log_{1/2}x<-2$，或 $-2/7<\log_{1/2}x<0$，或 $\log_{1/2}x>0$．从而 $x>4$，或 $1<x<2^{2/7}$，或 $0<x<1$．

11．函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为______________．

【答案】$[1，3/2)\cup[2，+\infty)$．

【解析】先平方去掉根号．

由题设得 $(y-x)^2=x^2-3x+2$，则 $x=(y^2-2)/(2y-3)$．

由 $y\geqslant x$，得 $y\geqslant(y^2-2)/(2y-3)$．解得 $1\leqslant y<3/2$，或 $y\geqslant2$．

由于 $\sqrt{x^2-3x+2}$ 能达到下界 0，所以函数的值域为 $[1，3/2)\cup[2，+\infty)$．

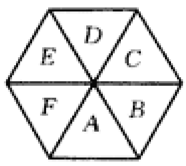
说明：(1) 参考答案在求得 $1\leqslant y<3/2$ 或 $y\geqslant2$ 后，还用了较长的篇幅进行了一番验证，确无必要．

(2) 本题还可以用三角代换法和图象法来解，不过较繁，读者不妨一试．

12．在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物（如图 3），要求同一块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物．现有 4 种不同的植物可供选择，则有______________种栽种方案．

【答案】732

【解析】为了叙述方便起见，我们给六块区域依次标上字母 A、B、C、D、E、F．按间隔三块 A、C、E 种植植物的种数，分以下三类．



（1）若A、C、E种同一种植物，有4种种法．当A、C、E种植后，B、D、E可从剩余的三种植物中各选一种植物（允许重复），各有3种方法．此时共有4×3×3×3＝108种方法．

（2）若A、C、E种二种植物，有P_4^2种种法．当A、C、E种好后，若A、C种同一种，则B有3种方法，D、F各有2种方法；若C、E或E、A种同一种，相同（只是次序不同）．此时共有P_4^3×3（3×2×2）＝432种方法．

（3）若A、C、E种三种植物，有P_4^3种种法．这时B、D、F各有2种种方法．此时共有P_4^3×2×2×2＝192种方法．

根据加法原理，总共有N＝108＋432＋192＝732种栽种方案．

说明：本题是一个环形排列问题．

三．解答题

13．【解析】设所求公差为 d，∵a_1＜a_2，∴d＞0．由此得

$a_1^2(a_1+2d)^2=(a_1+d)^4$　　化简得：$2a_1^2+4a_1d+d^2=0$

解得：$d=(-2\pm\sqrt{2})a_1$

而$-2\pm\sqrt{2}<0$，故 a_1<0

若$d=(-2-\sqrt{2})a_1$，则$q=\dfrac{a_2^2}{a_1^2}=(\sqrt{2}+1)^2$

若$d=(-2+\sqrt{2})a_1$，则$q=\dfrac{a_2^2}{a_1^2}=(\sqrt{2}-1)^2$

但$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$存在，故｜$q$｜<1，于是$q=(\sqrt{2}+1)^2$不可能．

从而$\dfrac{a_1^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}+1 \Rightarrow a_1^2=(2\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+1)=2$

所以$a_1=-\sqrt{2}$，$d=(-2+\sqrt{2})a_1=2\sqrt{2}-2$

14．【解析】(1)由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\\ y^2=2(x+m)\end{cases}$　消去 y 得：$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0$　①

设 $f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$，问题(1)化为方程①在 x∈(－a，a)上有唯一解或等根．

只需讨论以下三种情况：

1° △＝0 得：$m=\frac{a^2+1}{2}$，此时 $x_p=-a^2$，当且仅当 $-a<-a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合；

2° $f(a)f(-a)<0$，当且仅当 $-a<m<a$；

3° $f(-a)=0$ 得 $m=a$，此时 $x_p=a-2a^2$，当且仅当 $-a<a-2a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合.

$f(a)=0$ 得 $m=-a$，此时 $x_p=-a-2a^2$，由于 $-a-2a^2<-a$，从而 $m\neq -a$.

综上可知，当 $0<a<1$ 时，$m=\frac{a^2+1}{2}$ 或 $-a<m\leqslant a$；

当 $a\geqslant 1$ 时，$-a<m<a$.

(2) △OAP 的面积 $S=\frac{1}{2}ay_p$

∵ $0<a<\frac{1}{2}$，故 $-a<m\leqslant a$ 时，$0<-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}<a$，

由唯一性得 $x_p=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$

显然当 $m=a$ 时，x_p 取值最小．由于 $x_p>0$，从而 $y_p=\sqrt{1-\frac{x_p^2}{a^2}}$ 取值最大，此时

$y_p=2\sqrt{a-a^2}$，

∴ $S=a\sqrt{a-a^2}$．

当 $m=\frac{a^2+1}{2}$ 时，$x_p=-a^2$，$y_p=\sqrt{1-a^2}$，此时 $S=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$．

下面比较 $a\sqrt{a-a^2}$ 与 $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$ 的大小：

令 $a\sqrt{a-a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，得 $a=\frac{1}{3}$

故当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$．

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}>\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=a\sqrt{a-a^2}$．

15.【解析】设 6 个电阻的组件(如图 3)的总电阻为 R_{FG}，当 $R_i=a_i$，$i=3，4，5，6$，R_1、R_2 是 a_1、a_2 的任意排列时，R_{FG} 最小

证明如下：

1．设当两个电阻 R_1、R_2 并联时，所得组件阻值为 R，则 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$．故交换二电阻的位置，不改变 R 值，且当 R_1 或 R_2 变小时，R 也减小，因此不妨取 $R_1>R_2$．

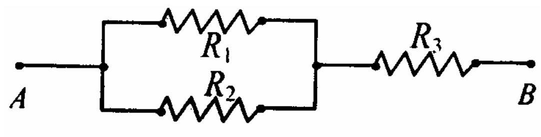


图 1

2．设 3 个电阻的组件（如图 1）的总电阻为 R_{AB}

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2}$$

显然 R_1+R_2 越大，R_{AB} 越小，所以为使 R_{AB} 最小必须取 R_3 为所取三个电阻中阻值最小的一个．

3．设 4 个电阻的组件(如图 2)的总电阻为 R_{CD}

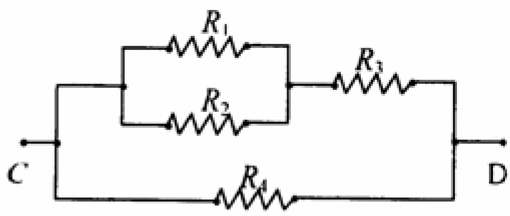


图 2

若记 $S_1=\sum_{1\le i<j\le 4}R_iR_j$， $S_2=\sum_{1\le i<j<k\le 4}R_iR_jR_k$ **，则 S_1、S_2 为定值，于是**

$$R_{CD}=\frac{S_2-R_1R_2R_3}{S_1-R_3R_4}$$

只有当 R_3R_4 最小，$R_1R_2R_3$ 最大时，R_{CD} 最小，故应取 $R_4<R_3$，$R_3<R_2$，$R_3<R_1$，即得总电阻的阻值最小

4° 对于图 3 把由 R_1、R_2、R_3 组成的组件用等效电阻 R_{AB} 代替．要使 R_{FG} 最小，由 3° 必需使 $R_6<R_5$；且由 1° 应使 R_{CE} 最小．由 2° 知要使 R_{CE} 最小，必需使 $R_5<R_4$，且应使 R_{CD} 最小．

而由 3° ，要使 R_{CD} 最小，应使 $R_4<R_3<R_2$ 且 $R_4<R_3<R_1$，

这就说明，要证结论成立

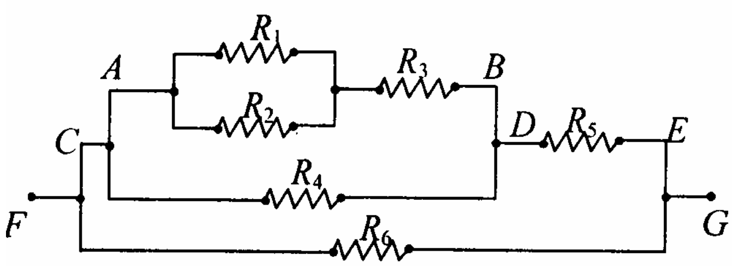


图 3

2001 年全国高中数学联合竞赛加试参考答案及评分标准

一.【解析】证明：(1)∵A、C、D、F四点共圆

∴$\angle BDF=\angle BAC$

又$\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=90^\circ-\angle BAC$

∴$OB\perp DF$.

(2)∵$CF\perp MA$

∴$MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$　　①

∵$BE\perp NA$

∴$NB^2-NH^2=AB^2-AH^2$　　②

∵$DA\perp BC$

∴$BD^2-CD^2=BA^2-AC^2$　　③

∵$OB\perp DF$

∴$BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$　　④

∵$OC\perp DE$

∴$CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$　　⑤

①－②＋③＋④－⑤，得

$MH^2-NH^2=OM^2-ON^2$　$MO^2-MH^2=NO^2-NH^2$

∴$OH\perp MN$

另证：以 BC 所在直线为 x 轴，D 为原点建立直角坐标系，

设 $A(0，a)$，$B(b，0)$，$C(c，0)$，则 $k_{AC}=-\frac{a}{c}$，$k_{AB}=-\frac{a}{b}$

∴直线 AC 的方程为 $y=-\frac{a}{c}(x-c)$，直线 BE 的方程为 $y=\frac{c}{a}(x-b)$

由$\begin{cases} y=\frac{c}{a}(x-b) \\ y=-\frac{a}{c}(x-c) \end{cases}$ 得 E 点坐标为 $E(\frac{a^2c+bc^2}{a^2+c^2},\frac{ac^2-abc}{a^2+c^2})$

同理可得 $F(\frac{a^2b+b^2c}{a^2+b^2},\frac{ab^2-abc}{a^2+b^2})$

直线AC的垂直平分线方程为 $y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}(x-\frac{c}{2})$

直线 BC 的垂直平分线方程为 $x=\frac{b+c}{2}$

由$\begin{cases} y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}(x-\frac{c}{2}) \\ x=\frac{b+c}{2} \end{cases}$ 得 $O(\frac{b+c}{2},\frac{bc+a^2}{2a})$

$$k_{OB}=\frac{\frac{bc+a^2}{2a}}{\frac{b+c}{2}-b}=\frac{bc+a^2}{ac-ab}\quad,\quad k_{DF}=\frac{ab^2-abc}{a^2b+b^2c}=\frac{ab-ac}{a^2+bc}$$

∵ $k_{OB}k_{DF}=-1$　　∴ $OB\perp DF$

同理可证 $OC\perp DE$.

在直线 BE 的方程 $y=\frac{c}{a}(x-b)$ 中令 $x=0$ 得 $H(0,\ -\frac{bc}{a})$

$$∴ k_{OH}=\frac{\frac{bc+a^2}{2a}+\frac{bc}{a}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{a^2+3bc}{ab+ac}$$

直线 DF 的方程为 $y=\frac{ab-ac}{a^2+bc}x$

由 $\begin{cases} y=\frac{ab-ac}{a^2+bc}x \\ y=-\frac{a}{c}(x-c) \end{cases}$ 得 $N\left(\frac{a^2c+bc^2}{a^2+2bc-c^2},\ \frac{abc-ac^2}{a^2+2bc-c^2}\right)$

同理可得 $M\left(\frac{a^2b+b^2c}{a^2+2bc-b^2},\ \frac{abc-ab^2}{a^2+2bc-b^2}\right)$

$$∴ k_{MN}=\frac{a(b^2-c^2)(a^2+bc)}{(c-b)(a^2+bc)(a^2+3bc)}=-\frac{ab+ac}{a^2+3bc}$$

∵ $k_{OH}\cdot k_{MN}=-1$，∴ $OH\perp MN$.

二.【解析】先求最小值，因为 $(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\le k<j\le n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j\ge 1\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant 1$

等号成立当且仅当存在 i 使得 $x_i=1$，$x_j=0$，$j=i$

∴ $\sum_{i=1}^{n}x_i$ 最小值为 1.　再求最大值，令 $x_k=\sqrt{k}\,y_k$

$$∴ \sum_{k=1}^{n}ky_k^2+2\sum_{1\le k<j\le n}ky_ky_j=1 \qquad ①$$

设 $M=\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,y_k$，　令 $\begin{cases} y_1+y_2+\cdots+y_n=a_1 \\ y_2+\cdots+y_n=a_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n=a_n \end{cases}$

则①⇔ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$

令 $a_{n-1}=0$，则 $M=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(a_k-a_{k+1})$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})a_k$$

由柯西不等式得：

$$M\le[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}=[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

等号成立$\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{1}=\cdots=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}=\cdots=\frac{a_n^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}$$

$\Leftrightarrow a_k=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}}$ **（k=1，2，…，n）**

由于 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，**从而** $y_k=a_k-a_{k+1}=\frac{2\sqrt{k}-(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}}\ge 0$，**即** $x_k\geqslant 0$

所求最大值为$[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}$

三.【解析】记所求最小值为 $f(m,n)$，可义证明 $f(m,n)=rn+n-(m,n)$　(*)

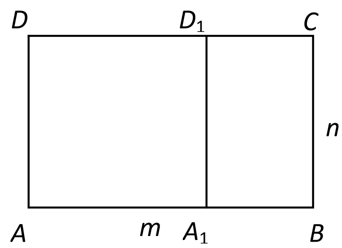
其中(m,n) 表示 m 和 n 的最大公约数

事实上，不妨设 $m\geqslant n$

(1)关于 m 归纳，可以证明存在一种合乎题意的分法，使所得正方形边长之和恰为 $rn+n-(m,n)$

当用 $m=1$ 时，命题显然成立．

假设当，$m\leqslant k$ 时，结论成立($k\geqslant 1$)．当 $m=k+1$ 时，若 $n=k+1$，则命题显然成立．若 $n<k+1$，从矩形 $ABCD$ 中切去正方形 AA_1D_1D(如图)，由归纳假设矩形 A_1BCD_1 有一种分法使得所得正方形边长之和恰为 $m-n+n-(m-n,n)=m-(m,n)$，于是原矩形 $ABCD$ 有一种分法使得所得正方形边长之和为 $rn+n-(m,n)$



(2)关于m归纳可以证明(*)成立．

当 $m=1$ 时，由于 $n=1$，显然 $f(m,n)=rn+n-(m,n)$

假设当 $m\leqslant k$ 时，对任意 $1\leqslant n\leqslant m$ 有 $f(m,n)=rn+n-(m,n)$

若 $m=k+1$，当 $n=k+1$ 时显然 $f(m,n)=k+1=rn+n-(m,n)$．

当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时，设矩形 $ABCD$ 按要求分成了 p 个正方形，其边长分别为 a_1，a_2，…，a_p

不妨 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_p$

显然 $a_1=n$ 或 $a_1<n$.

若 $a_1<n$，则在 AD 与 BC 之间的与 AD 平行的任一直线至少穿过二个分成的正方形（或其边界）. 于是 $a_1+a_2+\cdots+a_p$ 不小于 AB 与 CD 之和.

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant 2m>m+n-(m,n)$

若 $a_1=n$，则一个边长分别为 $m-n$ 和 n 的矩形可按题目要求分成边长分别为 a_2，…a_p 的正方形，由归纳假设

$a_2+\cdots+a_p\geqslant m-n+n-(m-n,n))=m-(m,n)$

从而 $a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant m+n-(m,n)$

于是当 $m=k+1$ 时，$f(m,n)\geqslant m+n-(m,n)$

再由(1)可知 $f(m,n)=m+n-(m,n)$.