1981年二十五省、市、自治区中学生联合数学竞赛

1．选择题(本题满分 35 分，每题答对者得 5 分，答错者得－2 分，不答者得 0 分)

⑴ 条件甲：两个三角形的面积和两条边对应相等．

条件乙：两个三角形全等．

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

⑵ 条件甲：$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a$．

条件乙：$\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a$．

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

⑶ 设 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ ($k\neq0$，±1，±2，……)，

$$T=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}.$$

A．T 取负值　　B．T 取非负值　　C．T 取正值　　D．T 取值可正可负

⑷ 下面四个图形中，哪一个面积大？

A．$\triangle ABC$：$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}$

B．梯形：两条对角线的长度分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$，夹角为 75°

C．圆：半径为 1

D．正方形：对角线长度为 2.5

⑸ 给出长方体 $ABCD—A'B'C'D'$，下列 12 条直线：AB'，BA'，CD'，DC'，AD'，DA'，BC'，CB'，AC，BD，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线？

A．30 对　　B．60 对　　C．24 对　　D．48 对

⑹ 在坐标平面上有两个区域 M 和 N，M 是由 $y\geqslant0$，$y\leqslant x$ 和 $y\leqslant2-x$ 这三个不等式确定，N 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 确定，t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant1$，设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$，则 $f(t)$ 为

A．$-t^2+t+\frac{1}{2}$　　B．$-2t^2+2t$　　C.$1-\frac{1}{2}t^2$　　D．$\frac{1}{2}(t-2)^2$

⑺ 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论，下面结论中，哪一个是错误的？

A．至多有三个实根　　B．至少有一个实根

C．仅当 $p^2-4q\geqslant0$ 时才有实根　　D．当 $p<0$ 和 $q>0$ 时，有三个实根

2．(本题 15 分) 下列表中的对数值有两个是错误的，请予纠正：

x	0.021	0.27	1.5	2.8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
x	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(a+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-a+2b$	

3．(本题 15 分)在圆 O 内，弦 CD 平行于弦 EF，且与直径 AB 交成 45°角，若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q，且圆 O 的半径为 1，求证：

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2.$$

4．(本题 15 分)组装甲、乙、丙三种产品，需用 A、B、C 三种零件．每件甲需用 A、B 各 2 个；每件乙需用 B、C 各 1 个；每件丙需用 2 个 A 与 1 个 C．用库存的 A、B、C 三种零件，如组装成 p 件甲产品、q 件乙产品和 r 件丙产品，则剩下 2 个 A 和 1 个 B，但 C 恰好用完．试证：无论怎样改变甲、乙、丙产品的件数，也不能把库存的 A、B、C 三种零件都恰好用完．

5．(本题 20 分)一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$，一个球从 AB 的中点 P 击出，击中 BC 边上的某点 Q，并且依次碰击 CD、DE、EF、FA 各边，最后击中 AB 边上的某一点．设∠$BPQ=\vartheta$，求 ϑ 的范围．

提示：利用入射角等于反射角的原理．

1981年二十五省、市、自治区中学生联合数学竞赛解答

1．选择题(本题满分35分，每题答对者得5分，答错者得－2分，不答者得0分)

(1) 条件甲：两个三角形的面积和两条边对应相等.

条件乙：两个三角形全等.

A．甲是乙的充分必要条件　　*B*．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　*D*．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

【答案】B

【解析】乙⇒甲，但甲⇒乙，故选 *B*.

(2) 条件甲：$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a$.

条件乙：$\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a$.

A．甲是乙的充分必要条件　　*B*．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　*D*．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

【答案】D

【解析】由$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a\Rightarrow|\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}|=a$；而 $\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a,\Rightarrow\sqrt{1+\sin\vartheta}=|a|$．故选 *D*.

(3) 设 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ ($k\neq0$，±1，±2，……)，$T=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$.

A．*T*取负值　　*B*．*T*取非负值　　*C*．*T*取正值　　*D*．*T*取值可正可负

【答案】C

【解析】$T=\frac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}>0$，选 *C*.

(4) 下面四个图形中，哪一个面积大?

A．$\triangle ABC$：$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}$

B．梯形：两条对角线的长度分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，夹角为75°

C．圆：半径为1

D．正方形：对角线长度为2.5

【答案】C

【解析】*A* 中三角形面积$=\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$；*B* 中梯形面积$=\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$；

C 中圆面积$=\pi$，*D* 中正方形面积$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{2}$．于是 $B=A<D<C$．选 *C*.

(5) 给出长方体 $ABCD—A'B'C'D'$，下列12条直线：AB'，BA'，CD'，DC'，AD'，DA'，BC'，CB'，AC，BD，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线？

A．30对　　*B*．60对　　*C*．24对　　*D*．48对

【答案】A

【解析】每条面上的对角线都与5条面上的对角线异面．故共有5×12÷2=30对．选 *A*.

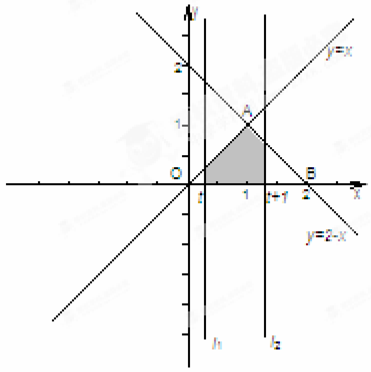
(6) 在坐标平面上有两个区域 *M* 和 *N*，*M* 是由 $y\geqslant0$，$y\leqslant x$ 和 $y\leqslant2-x$ 这三个不等式确定，

N 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 确定，t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$，设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$，则 $f(t)$为

A. $-t^2+t+\frac{1}{2}$　　B. $-2t^2+2t$　　C. $1-\frac{1}{2}t^2$　　D. $\frac{1}{2}(t-2)^2$

【答案】A

【解析】$\triangle OAB$ 的面积=1.



直角边长为 t 的等腰直角三角形面积 $=\frac{1}{2}t^2$.直角边长为 $2-(1+t)=1-t$ 的等腰直角三角形面积 $=\frac{1}{2}(1-t)^2$.

$f(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2=1-t^2+t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+t-t^2\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 选 A.

(7) 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论，下面结论中，哪一个是错误的？

A. 至多有三个实根　　B. 至少有一个实根

C. 仅当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时才有实根　　D. 当 $p<0$ 和 $q>0$ 时，有三个实根

【答案】C,D

【解析】画出 $y=x|x|$ 及 $y=-px-q$ 的图象：知 A、B 正确，C、D 错误．选 C、D.

2．(本题 15 分) 下列表中的对数值有两个是错误的，请予纠正：

x	0.021	0.27	1.5	2.8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
x	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(a+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-a+2b$	

【解析】若 $\lg 3=2a-b$，则 $\lg 9=4a-2b$ 及 $\lg 0.27=6a-3b-2$，此三个数值同时正确或错误，故此三个数值都正确.

若 $\lg 8=3-3a-3c$，则 $\lg 2=1-a-c$，$\lg 5=1-\lg 2=a+c$，$\lg 6=\lg 3+\lg 2=1+a-b-c$. 由于此三数同时正确或错误，故此三个数值都正确.

于是 $\lg 1.5=\lg 3-\lg 2=(2a-b)-(1-a-c)=3a-b+c-1$ 与表中 $\lg 1.5=3a-b+c$ 矛盾. 即 $\lg 1.5$ 的数值错误.

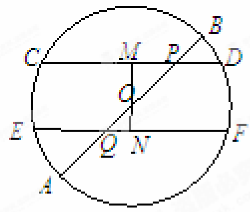
若 $\lg 2.8=1-2a+2b-c$，则 $\lg 14=\lg 2.8+\lg 5=(1-2a+2b-c)+(a+c)=1-a+2b$，$\lg 0.021=\lg 3+\lg 14-\lg 2-3=(2a-b)+(1-a+2b)-(1-a-c)-3=2a+b+c-3$，即此三个数值同时正确或错误，故此三个数值正确. $\lg 7=\lg 14-\lg 2=(1-a+2b)-(1-a-c)=2b+c$，与表中 $\lg 7=2a+2c$ 矛盾；

∴ 表中 $\lg 1.5$ 与 $\lg 7$ 是错误的，应为 $\lg 1.5=3a-b+c-1$，$\lg 7=2b+c$.

3．(本题 15 分)在圆 O 内，弦 CD 平行于弦 EF，且与直径 AB 交成 45°角，若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q，且圆 O 的半径为 1，求证：

$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$．

【解析】证明：作 $OM\perp CD$，垂足为 M，交 EF 于 N，设 $ON=n$，$OM=m$．



则 $CM=DM=\sqrt{1-m^2}$，$EN=FN=\sqrt{1-n^2}$，

本题即证 $(\sqrt{1-m^2}+m)(\sqrt{1-n^2}\pm n)+(\sqrt{1-m^2}-m)(\sqrt{1-n^2}\mp n)<2$．

展开得，$\sqrt{1-m^2}\cdot\sqrt{1-n^2}\pm mn<1$．

移项，平方得，$1-m^2-n^2+m^2n^2<1\mp 2mn+m^2n^2$．$\Rightarrow m^2+n^2>\mp 2mn$．

取“+”号时，M、N 在点 O 同侧，此时 $m\neq n$，总之，命题成立．

(当 E、F 交换位置时，且 CD、EF 在点 O 异侧时，可能有 $m=n$．)

又证：$PC^2+PD^2=(CM+OM)^2+(CM-OM)^2=2(CM^2+OM^2)=2$，同理 $QE^2+QF^2=2$．

∴ $4=PC^2+PD^2+QE^2+QF^2=(PC^2+QE^2)+(PD^2+QF^2)\geqslant 2(PC\cdot QE+PD\cdot QF)$．等号当且仅当 $PC=QE$，$PD=QF$ 时成立．但由已知，此二式不成立．故证．

4．(本题 15 分)组装甲、乙、丙三种产品，需用 A、B、C 三种零件．每件甲需用 A、B 各 2 个；每件乙需用 B、C 各 1 个；每件丙需用 2 个 A 与 1 个 C．用库存的 A、B、C 三种零件，如组装成 p 件甲产品、q 件乙产品和 r 件丙产品，则剩下 2 个 A 和 1 个 B，但 C 恰好用完．试证：无论怎样改变甲、乙、丙产品的件数，也不能把库存的 A、B、C 三种零件都恰好用完．

【解析】已知即：每个甲用 $A2$，$B2$，

每个乙用 $B1$，$C1$，

每个丙用 $A2$，$C1$．

∴ 共有 A 产品 $2p+2r+2$ 件；B 产品 $2p+q+1$ 件；C 产品 $q+r$ 件．

设组装 m 件甲，n 件乙，k 件丙，则用 $2m+2k$ 件 A；用 $2m+n$ 件 B；用 $n+k$ 件 C．

如全部用完，则有 $2p+2r+2=2m+2k$；

$\Rightarrow p+r+1=m+k$．　(1)

$2p+q+1=2m+n$；　(2)

$q+r=n+k$．　(3)

∴(1)+(2)−(3)：$3p+2=3m$．这是不可能的．故证．

5．(本题 20 分)一张台球桌形状是正六边形 ***ABCDEF***，一个球从 ***AB*** 的中点 ***P*** 击出，击中 ***BC*** 边上的某点 ***Q***，并且依次碰击 ***CD***、***DE***、***EF***、***FA*** 各边，最后击中 ***AB*** 边上的某一点．设 $\angle BPQ=\vartheta$，求 ϑ 的范围．

提示：利用入射角等于反射角的原理．

【解析】只要把这个正六边形经过 5 次对称变换．则击球时应如图所示，击球方向在 $\angle MPN$ 内部时即可．

设 $AB=2$，以 P 为原点，PB 为 x 轴正方向建立直角坐标系，点 M 坐标为$(8，3\sqrt{3})$．点 N 坐标为$(10，3\sqrt{3})$，即 $\vartheta\in[\arctan\frac{3\sqrt{3}}{10}，\arctan\frac{3\sqrt{3}}{8}]$．