2019年全国高中数学联合竞赛加试（B卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，**10** 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足 $a_i \geq a_{101-i}\ (i=1,2,\cdots,50)$. 记 $x_k = \dfrac{ka_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\ (k=1,2,\cdots,99)$. 证明：$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99} \leq 1$.

证明：注意到 $a_1, a_2, \cdots, a_{100} > 0$. 对 $k=1,2,\cdots,99$，由平均值不等式知

$$0 < \left(\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)^k \leq \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k},$$ ……………10 分

从而有

$$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99} = \prod_{k=1}^{99} a_{k+1}^k \left(\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)^k \leq \prod_{k=1}^{99} \frac{a_{k+1}^k}{a_1a_2\cdots a_k}. \qquad ①$$

………………20 分

记①的右端为 T，则对任意 $i=1,2,\cdots,100$，a_i 在 T 的分子中的次数为 $i-1$，在 T 的分母中的次数为 $100-i$. 从而

$$T = \prod_{i=1}^{100} a_i^{2i-101} = \prod_{i=1}^{50} a_i^{2i-101} a_{101-i}^{2(101-i)-101} = \prod_{i=1}^{50} \left(\frac{a_{101-i}}{a_i}\right)^{101-2i}.$$

……………30 分

又 $0 < a_{101-i} \leq a_i\ (i=1,2,\cdots,50)$，故 $T \leq 1$，结合①得

$$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99} \leq T \leq 1.$$ ………………40 分

二、（本题满分 40 分） 求满足以下条件的所有正整数 n：

(1) n 至少有 4 个正约数；

(2) 若 $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ 是 n 的所有正约数，则 $d_2-d_1, d_3-d_2, \cdots, d_k-d_{k-1}$ 构成等比数列.

解：由条件可知 $k \geq 4$，且 $\dfrac{d_3-d_2}{d_2-d_1} = \dfrac{d_k-d_{k-1}}{d_{k-1}-d_{k-2}}$. ………………10 分

易知 $d_1=1,\ d_k=n,\ d_{k-1}=\dfrac{n}{d_2},\ d_{k-2}=\dfrac{n}{d_3}$，代入上式得

$$\frac{d_3-d_2}{d_2-1} = \frac{n-\dfrac{n}{d_2}}{\dfrac{n}{d_2}-\dfrac{n}{d_3}},$$

化简得

$$(d_3-d_2)^2 = (d_2-1)^2 d_3.$$ ………………20 分

由此可知d_3是完全平方数．由于$d_2=p$是n的最小素因子，d_3是平方数，故只能$d_3=p^2$． …………………30 分

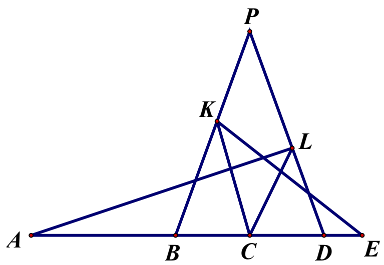
从而序列$d_2-d_1, d_3-d_2, \cdots, d_k-d_{k-1}$为$p-1, p^2-p, p^3-p^2, \cdots, p^{k-1}-p^{k-2}$，即$d_1, d_2, d_3, \cdots, d_k$为$1, p, p^2, \cdots, p^{k-1}$，而此时相应的$n$为$p^{k-1}$．

综上可知，满足条件的n为所有形如p^a的数，其中p是素数，整数$a \geq 3$．

…………………40 分

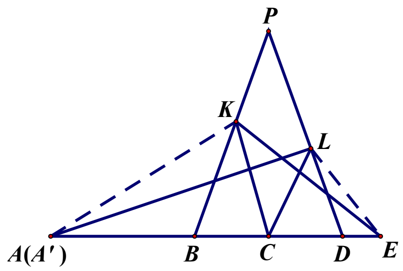
三、（本题满分 50 分）如图，点A, B, C, D, E在一条直线上顺次排列，满足$BC=CD=\sqrt{AB \cdot DE}$，点P在该直线外，满足$PB=PD$．点K, L分别在线段PB, PD上，满足KC平分$\angle BKE$，LC平分$\angle ALD$．

证明：A, K, L, E四点共圆．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：令$AB=1, BC=CD=t(>0)$，由条件知$DE=t^2$．

注意到$\angle BKE<\angle ABK=\angle PDE<180°-\angle DEK$，可在$CB$延长线上取一点$A'$，使得$\angle A'KE=\angle ABK=\angle A'BK$． …………………10 分



此时有$\Delta A'BK \backsim \Delta A'KE$，故$\dfrac{A'B}{A'K}=\dfrac{A'K}{A'E}=\dfrac{BK}{KE}$． …………………20 分

又KC平分$\angle BKE$，故$\dfrac{BK}{KE}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{t}{t+t^2}=\dfrac{1}{1+t}$．于是有

$$\frac{A'B}{A'E}=\frac{A'B}{A'K}\cdot\frac{A'K}{A'E}=\left(\frac{BK}{KE}\right)^2=\frac{1}{1+2t+t^2}=\frac{AB}{AE}. \qquad \text{…………30 分}$$

由上式两端减 1，得$\dfrac{BE}{A'E}=\dfrac{BE}{AE}$，从而$A'=A$．因此$\angle AKE=\angle A'KE=\angle ABK$．

同理可得$\angle ALE=\angle EDL$．

而$\angle ABK=\angle EDL$，所以$\angle AKE=\angle ALE$．因此A, K, L, E四点共圆．

…………………50 分

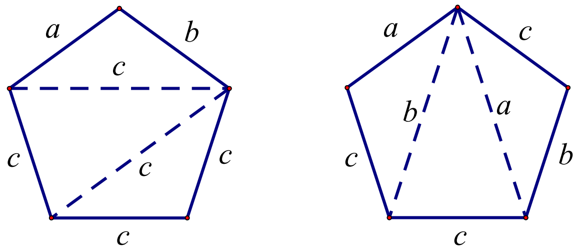
四、（本题满分 50 分）将一个凸 2019 边形的每条边任意染为红、黄、蓝三种颜色之一，每种颜色的边各 673 条．证明：可作这个凸 2019 边形的 2016 条在内部互不相交的对角线将其剖分成 2017 个三角形，并将所作的每条对角线也染

为红、黄、蓝三种颜色之一，使得每个三角形的三条边或者颜色全部相同，或者颜色互不相同．

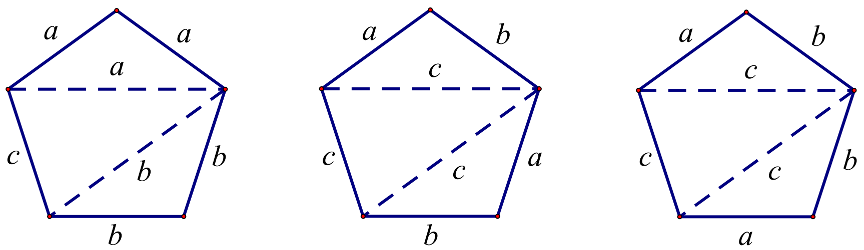
证明：我们对 $n\geq 5$ 归纳证明加强的命题：如果将凸 n 边形的边染为三种颜色 a,b,c，并且三种颜色的边均至少有一条，那么可作满足要求的三角形剖分．

…………………10 分

当 $n=5$ 时，若三种颜色的边数为 1，1，3，由对称性，只需考虑如下两种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．



若三种颜色的边数为 1，2，2，由对称性，只需考虑如下三种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．



…………………20 分

假设结论对 $n(n\geq 5)$ 成立，考虑 $n+1$ 的情形，将凸 $n+1$ 边形记为 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$．

情形 1：有两种颜色的边各只有一条．不妨设 a,b 色边各只有一条．由于 $n+1\geq 6$，故存在连续两条边均为 c 色，不妨设是 $A_nA_{n+1},A_{n+1}A_1$．作对角线 A_1A_n，并将 A_1A_n 染为 c 色，则三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

…………………30 分

情形 2：某种颜色的边只有一条，其余颜色的边均至少两条．不妨设 a 色边只有一条，于是可以选择两条相邻边均不是 a 色，不妨设 $A_nA_{n+1},A_{n+1}A_1$ 均不是 a 色，作对角线 A_1A_n，则 A_1A_n 有唯一的染色方式，使得三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色或互不同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分． …………………40 分

情形 3：每种颜色的边均至少两条．作对角线 A_1A_n，则 A_1A_n 有唯一的染色方式，使得三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色或互不同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

综合以上 3 种情形，可知 $n+1$ 的情形下结论也成立．

由数学归纳法，结论获证． …………………50 分