2011年全国高中数学联赛

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）

1．设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$______.

2．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为______.

3．设 a,b 为正实数，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $\log_a b=$______.

4．如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，那么 θ 的取值范围是______.

5. 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为______．（用数字作答）

6. 在四面体 $ABCD$ 中，已知 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60^\circ$，$AD=BD=3$，$CD=2$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为______.

7. 直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点，C 为抛物线上的一点，$\angle ACB=90^\circ$，则点 C 的坐标为______.

8. 已知 $a_n=C_{200}^n\cdot\left(\sqrt[3]{6}\right)^{200-n}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots,95)$，则数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数为______.

二、解答题（本大题共 3 小题，共 56 分）

9．（16 分）设函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$，实数 $a,b(a<b)$ 满足 $f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，$f(10a+6b+21)=4\lg 2$，求 a,b 的值.

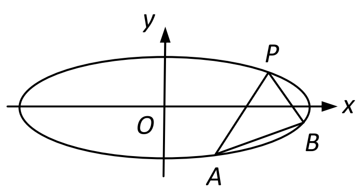
10．（20 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-3$ ($t\in\mathrm{R}$ 且 $t\ne\pm1$)，

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\quad(n\in\mathrm{N}^*).$$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $t>0$，试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

11．（本小题满分 20 分）作斜率为 $\dfrac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 A,B 两点（如图所示），且 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方.

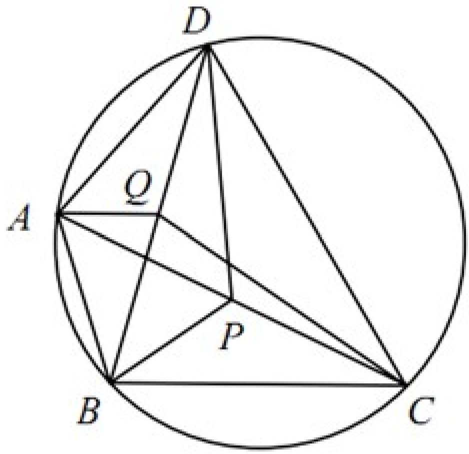


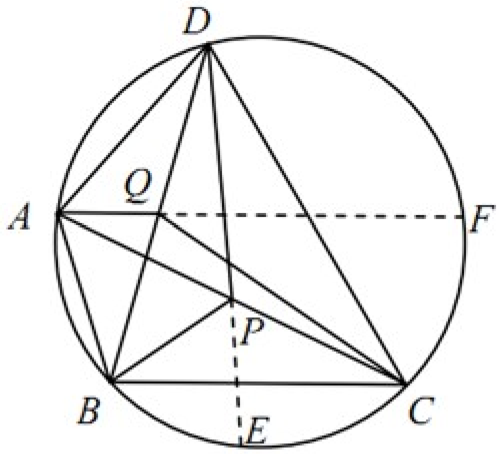
（1）证明：△ PAB 的内切圆的圆心在一条定直线上；

（2）若 $\angle APB=60^\circ$，求△ PAB 的面积.

加　试

1. （40 分）如图，P, Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的中点．若 $\angle BPA=\angle DPA$，证明：$\angle AQB=\angle CQB$．





2. （40 分）证明：对任意整数 $n\ge 4$，存在一个 n 次多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

具有如下性质：

（1）$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 均为正整数；

（2）对任意正整数 m，及任意 $k\ (k\ge 2)$ 个互不相同的正整数 $r_1, r_2, \cdots, r_k$，均有

$$f(m)\ne f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k).$$

3. （50 分）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\ge 4)$ 是给定的正实数，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．对任意正实数 r，满足 $\frac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r\ (1\le i<j<k\le n)$ 的三元数组 (i, j, k) 的个数记为 $f_n(r)$．

证明：$f_n(r)<\frac{n^2}{4}$．

4. （50 分）设 A 是一个 3×9 的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个 $m\times n\ (1\le m\le 3, 1\le n\le 9)$ 方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个 1×1 的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值。

2011 年全国高中数学联合竞赛一试试题参考答案（A 卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；解答题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题第 9 题 4 分为一个档次，第 10,11 题 5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分．把答案填在横线上．

1．设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$____________.

解 显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以

$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15$，

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合 A 的四个元素分别为 5－（－1）＝6，5－3＝2，5－5＝0，5－8＝－3，因此，集合 $A=\{-3,0,2,6\}$.

2．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为______________.

解　设 $x=\tan\theta,-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$，则

$$f(x)=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta-1}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}.$$

设 $u=\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$，则 $-\sqrt{2}\le u<1$，且 $u\neq 0$，

所以　$f(x)=\dfrac{1}{u}\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup(1,+\infty)$.

3．设 a,b 为正实数，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $\log_a b=$____________.

解 由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，得 $a+b\le 2\sqrt{2}ab$.

又 $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\ge 4\cdot 2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2$，

即 $a+b\ge 2\sqrt{2}ab$.　　　①

于是　$a+b=2\sqrt{2}ab$.　　　②

再由不等式①中等号成立的条件，得 $ab=1$．与②联立解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\ b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\ b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$

故 $\log_a b=-1$.

4．如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$， $\theta\in[0,2\pi)$，那么 θ 的取值范围是________．

解 不等式 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$ 等价于 $\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta$，

又 $f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以 $\sin\theta>\cos\theta$，

故 $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})$.

因为 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

5．现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为______________．（用数字作答）

解 由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：

（1）有一个项目有 3 人参加，共有 $C_7^3\cdot 5!-C_5^1\cdot 5!=3600$ 种方案；

（2）有两个项目各有 2 人参加，共有 $\frac{1}{2}(C_7^2\cdot C_5^2)\cdot 5!-C_5^2\cdot 5!=11400$ 种方案；

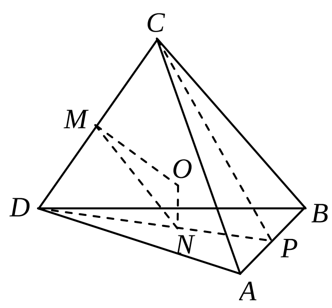
所以满足题设要求的方案数为 $3600+11400=15000$．

6．在四面体 $ABCD$ 中，已知 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60^\circ$， $AD=BD=3$， $CD=2$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为______________．

解 设四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O，则 O 在过△ ABD 的外心 N 且垂直于平面 ABD 的垂线上．由题设知，△ ABD 是正三角形，则点 N 为△ ABD 的中心．设 P,M 分别为 AB,CD 的中点，则 N 在 DP 上，且 $ON\perp DP$， $OM\perp CD$．

因为 $\angle CDA=\angle CDB=\angle ADB=60^\circ$，设 CD 与平面 ABD 所成角为 θ，可求得

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．



在△ DMN 中， $DM=\frac{1}{2}CD=1, DN=\frac{2}{3}\cdot DP=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3=\sqrt{3}$．

由余弦定理得 $MN^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2$，

故 $MN=\sqrt{2}$．

四边形 $DMON$ 的外接圆的直径 $OD=\frac{MN}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$．

故球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$．

7．直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点，C 为抛物线上的一点，$\angle ACB=90^\circ$，

则点C的坐标为________________________.

解 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(t^2,2t)$，由$\begin{cases}x-2y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$

得 $y^2-8y-4=0$，则$y_1+y_2=8$，$y_1\cdot y_2=-4$.

又$x_1=2y_1+1, x_2=2y_2+1$，所以

$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18$，$x_1\cdot x_2=4y_1\cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1$.

因为$\angle ACB=90^\circ$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即有

$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0$，

即$t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1\cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1\cdot y_2=0$，

即$t^4-14t^2-16t-3=0$，

即$(t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0$.

显然$t^2-4t-1\neq 0$，否则$t^2-2\cdot 2t-1=0$，则点C在直线$x-2y-1=0$上，从而点C与点A或点B重合.

所以$t^2+4t+3=0$，解得$t_1=-1,t_2=-3$.

故所求点C的坐标为$(1,-2)$或$(9,-6)$.

8．已知$a_n=\mathrm{C}_{200}^{n}\cdot\left(\sqrt[3]{6}\right)^{200-n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ $(n=1,2,\cdots,95)$，则数列$\{a_n\}$中整数项的个数为________.

解 $a_n=\mathrm{C}_{200}^{n}\cdot 3^{\frac{200-n}{3}}\cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}$.

要使$a_n\,(1\le n\le 95)$ 为整数，必有$\frac{200-n}{3},\frac{400-5n}{6}$均为整数，从而$6\,|\,n+4$.

当$n=2,8,14,20,26,32,38,44,50,56,62,68,74,80$ 时，$\frac{200-n}{3}$和$\frac{400-5n}{6}$均为非负整数，所以a_n为整数，共有 14 个.

当$n=86$时，$a_{86}=\mathrm{C}_{200}^{86}\cdot 3^{38}\cdot 2^{-5}$，在$\mathrm{C}_{200}^{86}=\frac{200!}{86!\cdot 114!}$中，

$200!$中因数 2 的个数为$\left[\frac{200}{2}\right]+\left[\frac{200}{2^2}\right]+\left[\frac{200}{2^3}\right]+\left[\frac{200}{2^4}\right]+\left[\frac{200}{2^5}\right]+\left[\frac{200}{2^6}\right]+\left[\frac{200}{2^7}\right]=197$，

同理可计算得$86!$中因数 2 的个数为 82，$114!$中因数 2 的个数为 110，

所以C_{200}^{86}中因数 2 的个数为$197-82-110=5$，故a_{86}是整数.

当$n=92$时，$a_{92}=\mathrm{C}_{200}^{92}\cdot 3^{36}\cdot 2^{-10}$，在$\mathrm{C}_{200}^{92}=\frac{200!}{92!\cdot 108!}$中，同样可求得$92!$中因数 2 的个数为 88,$108!$中因数 2 的个数为 105,故$\mathrm{C}_{200}^{86}$中因数 2 的个数为$197-88-105=4$，故$a_{92}$不是整数.

因此，整数项的个数为$14+1=15$．

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本小题满分 16 分）设函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$，实数 $a,b(a<b)$ 满足 $f(a)=f(-\frac{b+1}{b+2})$，$f(10a+6b+21)=4\lg 2$，求 a,b 的值．

解 ∵ $f(a)=f(-\frac{b+1}{b+2})$，∴ $|\lg(a+1)|=|\lg(-\frac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg(\frac{1}{b+2})|=|\lg(b+2)|$，

∴ $a+1=b+2$ 或 $(a+1)(b+2)=1$，

又∵ $a<b$，∴ $a+1\neq b+2$，∴ $(a+1)(b+2)=1$．

又由 $f(a)=|\lg(a+1)|$ 有意义知 $0<a+1$，从而 $0<a+1<b+1<b+2$，

于是 $0<a+1<1<b+2$．

所以 $(10a+6b+21)+1=10(a+1)+6(b+2)=6(b+2)+\frac{10}{b+2}>1$．

从而 $f(10a+6b+21)=|\lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]|=\lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]$．

又 $f(10a+6b+21)=4\lg 2$，所以 $\lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]=4\lg 2$，

故 $6(b+2)+\frac{10}{b+2}=16$ ．

解得 $b=-\frac{1}{3}$ 或 $b=-1$（舍去）．

把 $b=-\frac{1}{3}$ 代入 $(a+1)(b+2)=1$ 解得 $a=-\frac{2}{5}$．

所以 $a=-\frac{2}{5}$，$b=-\frac{1}{3}$．

10．（本小题满分 20 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-3$ $(t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq\pm1)$，

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $t>0$，试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小．

解 （1）由原式变形得 $a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}-1$，

则 $$\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\frac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+1}{t^n-1}+2}.$$

记 $\frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n$，则 $b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}$，$b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2$．

又 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2},\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$，从而有 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，

故 $\dfrac{a_n+1}{t^n-1}=\dfrac{2}{n}$，于是有 $a_n=\dfrac{2(t^n-1)}{n}-1$.

（2）$a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\dfrac{2(t^n-1)}{n}$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+(t^n-t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}\right],$$

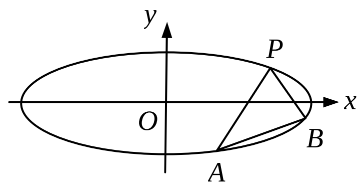
显然在 $t>0\ (t\neq 1)$ 时恒有 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$.

11．（本小题满分 20 分）作斜率为 $\dfrac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 A,B 两点（如图所示），且 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方.

（1）证明：△ PAB 的内切圆的圆心在一条定直线上；

（2）若 $\angle APB=60^\circ$，求△ PAB 的内切圆的面积.

解 （1）设直线 l：$y=\dfrac{1}{3}x+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.



将 $y=\dfrac{1}{3}x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 中，化简整理得

$2x^2+6mx+9m^2-36=0$.

于是有 $x_1+x_2=-3m,\quad x_1x_2=\dfrac{9m^2-36}{2}$，

$k_{PA}=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}},k_{PB}=\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$.

则 $k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}=\dfrac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$，

上式中，分子 $=(\dfrac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(\dfrac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})$

$$=\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}+(m-2\sqrt{2})(-3m)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})$$

$$=3m^2-12-3m^2+6\sqrt{2}m-6\sqrt{2}m+12=0,$$

从而，$k_{PA}+k_{PB}=0$.

又 P 在直线 l 的左上方，因此，$\angle APB$ 的角平分线是平行于 y 轴的直线，所以△ PAB 的内切圆的圆心在直线 $x=3\sqrt{2}$ 上.

（2）若 $\angle APB=60^\circ$ 时，结合（1）的结论可知 $k_{PA}=\sqrt{3},k_{PB}=-\sqrt{3}$.

直线 PA 的方程为：$y-\sqrt{2}=\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$，代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，消去 y 得

$14x^2+9\sqrt{6}(1-3\sqrt{3})x+18(13-3\sqrt{3})=0$.

它的两根分别是 x_1 和 $3\sqrt{2}$，所以 $x_1\cdot 3\sqrt{2}=\frac{18(13-3\sqrt{3})}{14}$，即 $x_1=\frac{3\sqrt{2}(13-3\sqrt{3})}{14}$.

所以 $|PA|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot|x_1-3\sqrt{2}|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}$.

同理可求得 $|PB|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}$.

所以 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{117\sqrt{3}}{49}$.

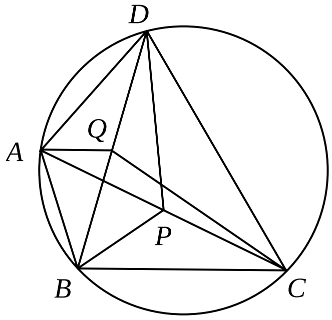
2011 年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案（A 卷）

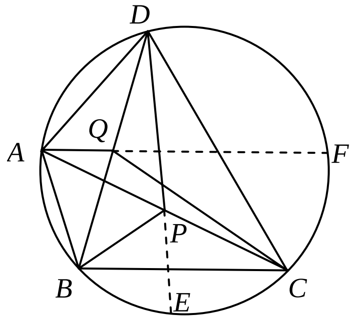
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 如图，P, Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的中点．若 $\angle BPA=\angle DPA$，证明：$\angle AQB=\angle CQB$．





证明 延长线段 DP 与圆交地另一点 E，则 $\angle CPE=\angle DPA=\angle BPA$，又 P 是线段 AC 的中点，故 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CE}$，从而 $\angle CDP=\angle BDA$．

又 $\angle ABD=\angle PCD$，所以△ ABD ∽△ PCD，于是 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{PC}{CD}$，即

$$AB\cdot CD=PC\cdot BD$$

从而有 $$AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AC\cdot(\frac{1}{2}BD)=AC\cdot BQ,$$

即 $$\frac{AB}{AC}=\frac{BQ}{CD}.$$

又 $\angle ABQ=\angle ACD$，所以△ABQ∽△ACD，所以 $\angle QAB=\angle DAC$．

延长线段 AQ 与圆交于另一点 F，则 $\angle CAB=\angle DAF$，故 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF}$．

又因为 Q 为 BD 的中点，所以 $\angle CQB=\angle DQF$．

又 $\angle AQB=\angle DQF$，所以 $\angle AQB=\angle CQB$．

二、（本题满分 40 分）证明：对任意整数$n \geq 4$，存在一个n次多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

具有如下性质：

（1）$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$均为正整数；

（2）对任意正整数m，及任意$k\ (k \geq 2)$个互不相同的正整数$r_1, r_2, \cdots, r_k$，均有

$$f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k).$$

证明 令

$$f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+2, \quad ①$$

将①的右边展开即知$f(x)$是一个首项系数为 1 的正整数系数的n次多项式.

下面证明$f(x)$满足性质（2）.

对任意整数t，由于$n \geq 4$，故连续的n个整数$t+1, t+2, \cdots, t+n$中必有一个为 4 的倍数，从而由①知$f(t) \equiv 2 \pmod 4$.

因此，对任意$k\ (k \geq 2)$个正整数$r_1, r_2, \cdots, r_k$，有

$$f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \equiv 2^k \equiv 0 \pmod 4.$$

但对任意正整数m，有$f(m) \equiv 2 \pmod 4$，故

$$f(m) \not\equiv f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \pmod 4,$$

从而$f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$.

所以$f(x)$符合题设要求.

三、（本题满分 50 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 4)$ 是给定的正实数，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．对任意正实数 r，满足 $\dfrac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r\ (1\le i<j<k\le n)$ 的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $f_n(r)$．

证明：$f_n(r)<\dfrac{n^2}{4}$．

证明 对给定的 $j\ (1<j<n)$，满足 $1\le i<j<k\le n$，且

$$\frac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r \qquad ①$$

的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $g_j(r)$．

注意到，若 i,j 固定，则显然至多有一个 k 使得①成立．因 $i<j$，即 i 有 $j-1$ 种选法，故 $g_j(r)\le j-1$．

同样地，若 j,k 固定，则至多有一个 i 使得①成立．因 $k>j$，即 k 有 $n-j$ 种选法，故 $g_j(r)\le n-j$．从而

$$g_j(r)\le \min\{j-1,n-j\}.$$

因此，当 n 为偶数时，设 $n=2m$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m-1}g_j(r)+\sum_{j=m}^{2m-1}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m-1}(2m-j)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}$$

$$=m^2-m<m^2=\frac{n^2}{4}.$$

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m}g_j(r)+\sum_{j=m+1}^{2m}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m}(2m+1-j)$$

$$=m^2<\frac{n^2}{4}.$$

四、（本题满分 50 分）设 A 是一个3×9的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个 $m\times n$ $(1\le m\le 3, 1\le n\le 9)$ 方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个1×1的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值．

解 首先证明 A 中“坏格”不多于 25 个．

用反证法．假设结论不成立，则方格表 A 中至多有 1 个小方格不是“坏格”．由表格的对称性，不妨假设此时第 1 行都是“坏格”．

设方格表 A 第 i 列从上到下填的数依次为 a_i, b_i, c_i，$i=1,2,\cdots,9$．记

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i, T_k=\sum_{i=1}^{k}(b_i+c_i),\ k=0,1,2,\cdots,9，这里 S_0=T_0=0 .$$

我们证明：三组数 $S_0,S_1,\cdots,S_9$；$T_0,T_1,\cdots,T_9$ 及 $S_0+T_0,S_1+T_1,\cdots,S_9+T_9$ 都是模 10 的完全剩余系．

事实上，假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m\equiv S_n \pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}a_i=S_n-S_m\equiv 0 \pmod{10}，$$

即第 1 行的第 $m+1$ 至第 n 列组成一个“好矩形”，与第 1 行都是“坏格”矛盾．

又假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $T_m\equiv T_n \pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}(b_i+c_i)=T_n-T_m\equiv 0 \pmod{10}，$$

即第 2 行至第 3 行、第 $m+1$ 列至第 n 列组成一个“好矩形”，从而至少有 2 个小方格不是“坏格”，矛盾．

类似地，也不存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m+T_m\equiv S_n+T_n \pmod{10}$．

因此上述断言得证．故

$$\sum_{k=0}^{9}S_k\equiv\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv 0+1+2+\cdots+9\equiv 5 \pmod{10}，$$

所以
$$\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv\sum_{k=0}^{9}S_k+\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv 5+5\equiv 0 \pmod{10}，$$

矛盾！故假设不成立，即“坏格”不可能多于 25 个．

另一方面，构造如下一个3×9的方格表，可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”，此时有 25 个“坏格”．

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述，“坏格”个数的最大值是 25．