1987年全国高中数学联赛试题

一试题(10月11日上午8：00——9：30)

一．选择题(每个小题选对得5分，不选得1分；选错或选出的代号超过一个者得0分．本题满分20分)：

1．对任意给定的自然数 n，若 n^6+3a 为正整数的立方，其中 a 为正整数，则(　　)

A. 这样的 a 有无穷多个　　　　*B.* 这样的 a 存在，但只有有限个

C. 这样的 a 不存在　　　　*D.* 以上 *A*、*B*、*C* 的结论都不正确(上海供题)

2．边长为5的菱形，它的一条对角线的长不大于6，另一条不小于6，则这个菱形两条对角线长度之和的最大值是(　　)

A. $10\sqrt{2}$　　*B.* 14　　*C.* $5\sqrt{6}$　　*D.* 12(天津供题)

3．在平面直角坐标系中纵横坐标均为有理数的点称为有理点，若 a 为无理数，则过 $(a, 0)$ 的所有直线中(　　)

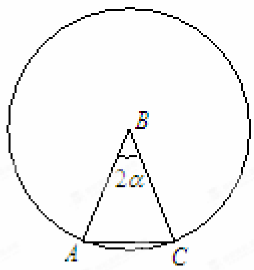
A. 有无穷多条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点

B. 恰有 $n(2\leqslant n<+\infty)$ 条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点

C. 有且仅有一条直线至少通过两个有理点

D. 每条直线至多通过一个有理点(河南供题)

4．如图，△*ABC* 的顶点 *B* 在单位圆的圆心上，*A*、*C* 在圆周上，$\angle ABC=2\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$，现将△*ABC* 在圆内按逆时针方向依次作旋转，具体方法如下：第一次，以 *A* 为中心使 *B* 落到圆周上；第二次，以 *B* 为中心，使 *C* 落到圆周上；第三次，以 *C* 为中心，使 *A* 落到圆周上．如此旋转直到100次．那么 *A* 点所走过的路程的总长度为(　　)



A. $22\pi(1+\sin\alpha)-66\alpha$　　*B.* $\frac{67}{3}\pi$

C. $22\pi+\frac{68}{3}\pi\sin\alpha-66\alpha$　　*D.* $33\pi-66\alpha$(北京供题)

二．填空题(每小题填写结果完全正确者得8分，填写错误或多填、少填者均得0分，本题满分40分)：

1．已知集合

$$M=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$$

及　$$N=\{0,\ |x|,\ y\},$$

并且 $M=N$，那么

$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$ 的值等于__________．(陕西供题)

2．已知集合

$$A=\{(x,\ y)\mid |x|+|y|=a,\ a>0\}$$
$$B=\{(x,\ y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$$

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 a 的值为__________．(青海供题)

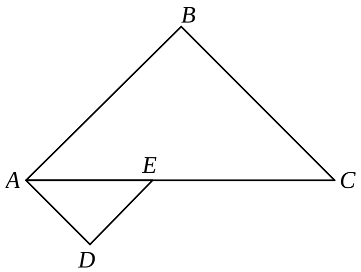
3．若 k 是大于1的整数，α 是 $x^2-kx+1=0$ 的一个根，对于大于10的任意自然数 n，$\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}$ 的个位数字总是7，则 k 的个位数字是__________．(河北供题)

4．现有边长为 3，4，5 的三角形两个，边长为 4，5，$\sqrt{41}$的三角形四个，边长为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$，4，5 的三角形六个，用上述三角形为面，可以拼成____________个四面体.(江西供题)

5．五对孪生兄妹参加 k 个组活动，若规定：⑴ 孪生兄妹不在同一组；⑵非孪生关系的任意两个人都恰好共同参加过一个组的活动，⑶有一人只参加两个组的活动，则 k 的最小值为__________.(命题组供题)

1987年全国高中数学联赛二试题

一．如图，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$绕A点在平面上旋转，试证：不论$\triangle ADE$旋转到什么位置，线段EC上必存在点M，使$\triangle BMD$为等腰直角三角形．



二．在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点称为整点．试证：存在一个同心圆的集合，使得

⑴每个整点都在此集合的某个圆周上；

⑵此集合的每个圆周上，有且只有一个整点．(辛泽尔定理)

三．$n(n>3)$名乒乓球选手单打若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同，试证明：总可以从中去掉一名选手，而使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同．

1987年全国高中数学联赛解答

一试题

一．选择题(每个小题选对得5分，不选得1分；选错或选出的代号超过一个者得0分．本题满分20分)：

1．对任意给定的自然数 n，若 n^6+3a 为正整数的立方，其中 a 为正整数，则(　　)

A．这样的 a 有无穷多个　　B．这样的 a 存在，但只有有限个

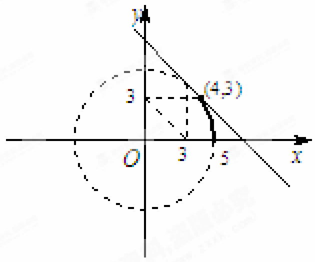
C．这样的 a 不存在　　D．以上 A、B、C 的结论都不正确(上海供题)

【答案】A

【解析】$(n^2+3k)^3=n^6+9n^4k+27n^2k^2+27k^3=n^6+3(3n^4k+9n^2k^2+9k^3)k$．取 $a=(3n^4k+9n^2k+9k^2)k$，(k 为任意正整数)，则 n^6+3a 为正整数的立方，由于 k 可任意取值，且当 k 增大时，a 也随之增大．即 a 有无数个．选 A．

2．边长为5的菱形，它的一条对角线的长不大于6，另一条不小于6，则这个菱形两条对角线长度之和的最大值是(　　)

A．$10\sqrt{2}$　　B．14　　C．$5\sqrt{6}$　　D．12(天津供题)



【答案】B

【解析】设 $x\geq 3$，$y\leq 3$，且 $x^2+y^2=25$．满足要求的点构成直角坐标系中一段弧(图中粗线部分)．令 $x+y=k$，则当直线经过点(4，3)时取得最大值7．即 $2x+2y\leq 14$．选 B．

3．在平面直角坐标系中纵横坐标均为有理数的点称为有理点，若 a 为无理数，则过(a，0)的所有直线中(　　)

A．有无穷多条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点

B．恰有 $n(2\leq n<+\infty)$ 条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点

C．有且仅有一条直线至少通过两个有理点

D．每条直线至多通过一个有理点(河南供题)

【答案】C

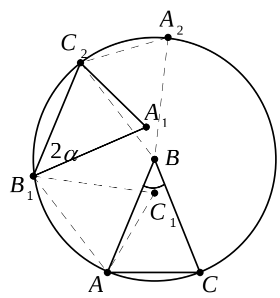
【解析】若直线斜率为 k，则当 $k=0$ 时直线经过 x 轴上所有有理点．

当 $k\neq 0$ 时，直线方程为 $y=k(x-a)$．

若 k 为有理数，则当 x 为有理数时，y 为无理数；

若 k 为无理数，若此时直线经过一个有理点 $A(x_1,y_1)$，对于直线上与 A 不重合的点 $B(x_2,y_2)$．由 $y_1=k(x_1-a)$，$y_2=k(x_2-a)$，由于 a 为无理数，故 $y_1\neq 0$，$x_2-a\neq 0$，$\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{x_2-a}{x_1-a}=m$，当 y_2 为有理数时，m 为有理数，当 $y_2\neq y_1$ 时，$m\neq 1$，此时 $x_2=mx_1+(1-m)a$ 为无理数．即此直线上至多有一个有理点．选 C．

4．如图，△*ABC* 的顶点 *B* 在单位圆的圆心上，*A*、*C* 在圆周上，$\angle ABC=2\alpha\,(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$ 现将△*ABC* 在圆内按逆时针方向依次作旋转，具体方法如下：第一次，以 *A* 为中心使 *B* 落到圆周上；第二次，以 *B* 为中心，使 *C* 落到圆周上；第三次，以 *C* 为中心，使 *A* 落到圆周上．如此旋转直到 100 次．那么 *A* 点所走过的路程的总长度为(　　)



A. $22\pi(1+\sin\alpha)-66\alpha$　　*B*. $\frac{67}{3}\pi$

C. $22\pi+\frac{68}{3}\pi\sin\alpha-66\alpha$　　*D*. $33\pi-66\alpha$ (北京供题)

【答案】A

【解析】点 *A* 每 $k(k\equiv1\pmod 3)$ 不动，第 $k(k\equiv2\pmod 3)$ 次走过路程 $\frac{2}{3}\pi-2\alpha$，第 $k(k\equiv0\pmod 3)$ 走过路程 $\frac{\pi}{3}(2\sin\alpha)$，于是所求路程 $=33(\frac{2}{3}\pi-2\alpha+\frac{2}{3}\pi\sin\alpha)$．选 *A*.

二．填空题(每小题填写结果完全正确者得 8 分，填写错误或多填、少填者均得 0 分，本题满分 40 分)：

1．已知集合

$M=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$

及　　$N=\{0,\ |x|,\ y\}$，

并且 $M=N$，那么

$$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}})$$ 的值等于__________．(陕西供题)

【答案】-2

【解析】$0\in M$，但 $xy\neq0$，故只有 $\lg(xy)=0$，，$xy=1$.

∴ $1\in M$，故 $|x|=1$，或 $y=1$，若 $y=1$，则由 $xy=1$ 得，$x=1$，与元素相异性矛盾．故 $y\neq1$.

∴ $|x|=1$，$x=1$ 或 $x=-1$，其中 $x=1$ 同上矛盾．故 $x=-1$．$y=-1$.

∴ $x^{2k}+\frac{1}{y^{2k}}=2$；$x^{2k+1}+\frac{1}{y^{2k+1}}=-2\ (k\in N^*)$．故所求值 $=-2$.

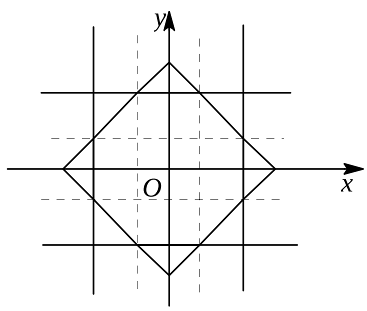
解：$xy\neq0$，$\Rightarrow x\neq0$，$y\neq0$．故 $xy=1$．若 $y=1$，则 $x=1$，矛盾，故 $x=-1$，$y=-1$．原式 $=-2$.

2．已知集合

$A=\{(x,\ y)\mid\ |x|+|y|=a,\ \ a>0\}$

$B=\{(x,\ y)\mid\ |xy|+1=|x|+|y|\}$

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 a 的值为______．(青海供题)



【答案】$a=2$ 或 $2+\sqrt{2}$.

【解析】集合 *A* 的图形是依次连 $(a,\ 0)$，$(0,\ a)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ -a)$ 四点的线段．

集合 *B* 的图形是直线 $x=1$，$x=-1$，$y=1$，$y=-1$．它们交得一个正八边形．

若此 4 条直线为图中的 4 条实线，则 $a=\tan22.5°+1=\sqrt{2}$．或此正八边形各边与原点距离相等，知直线 $x+y=a$ 与原点距离 $=1$．$a=\sqrt{2}$.

若此 4 条直线为图中的 4 条虚线，则$\sqrt{2}\alpha=2\sqrt{2}+2$，$\Rightarrow \alpha=2+\sqrt{2}$.

∴ $\alpha=2$ 或 $2+\sqrt{2}$.

3. 若 k 是大于 1 的整数，σ 是 $x^2-kx+1=0$ 的一个根，对于大于 10 的任意自然数 n，$\sigma^{2^n}+\sigma^{-2^n}$的个位数字总是 7，则 k 的个位数字是________. (河北供题)

【答案】 3，5，7.

【解析】 另一根$=\sigma^{-1}$，$\sigma+\sigma^{-1}=k$，记 $\sigma^{2^n}+\sigma^{-2^n}\equiv k_n \pmod{10}$，$0\leqslant k_n<10$.

由 $\sigma^{2^n}+\sigma^{-2^n}=(\sigma^{2^{n-1}}+\sigma^{-2^{n-1}})^2-2$ 得，$k_n\equiv k_{n-1}^2+8 \pmod{10}$. 若 k 为偶数，则 k_n 为偶数，不等于 7.

若 $k_{n-1}\equiv\pm1 \pmod{10}$，则 $k_n\equiv9$，$\Rightarrow k_{n+1}\equiv9 \pmod{10}$；

若 $k_{n-1}\equiv\pm3 \pmod{10}$，则 $k_n\equiv7$，$\Rightarrow k_{n+1}\equiv7 \pmod{10}$；

若 $k_{n-1}\equiv5 \pmod{10}$，则 $k_n\equiv9$，$\Rightarrow k_{n+1}\equiv9 \pmod{10}$；

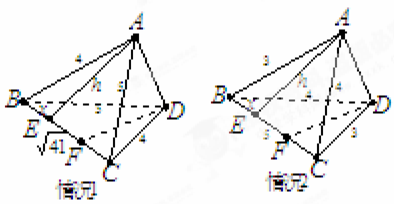
故 k 的个位数字为 3，5，7.

4．现有边长为 3，4，5 的三角形两个，边长为 4，5，$\sqrt{41}$的三角形四个，边长为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$，4，5 的三角形六个，用上述三角形为面，可以拼成________个四面体. (江西供题)

【答案】 1

【解析】 用四个三角形拼成四面体，每种边长至少要在两个三角形中出现. 因此以上三种三角形如果要用，就用偶数个. 由于第①类边长为 3，4，5 的三角形与第②类边长为 4，5，$\sqrt{41}$的三角形都是直角三角形，而第③类边长为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$，4，5 的三角形为钝角三角形. 因此，用 4 个后两种三角形都不能单独拼成四面体 (四个面全等的四面体是等腰四面体，其各面都是锐角三角形).

情况(1)：4 个三角形中有两个②类三角形，如图，取两个②类三角形，$BC=\sqrt{41}$，则斜边 BC 上的高 $AE=DF=h=\frac{20}{\sqrt{41}}$. 且 $BE=CF=x=\frac{16}{\sqrt{41}}$，则 $EF=\sqrt{41}-2\times\frac{16}{\sqrt{41}}=\frac{6}{\sqrt{41}}$.



于是 $AD^2=AE^2+EF^2+FD^2-2AE\cdot DF\cos\theta=\frac{1}{41}(881-810\cos\theta)$

$$\in\left(\frac{81}{41},\ 41\right). \qquad (*)$$

若再取两个①类三角形时，由于 $AD=3$，满足(*)式，故可以构成四面体.

若再取两个③类三角形时，由于 $AD=\frac{5}{6}\sqrt{2}$，不满足(*)式，故不可以构成四面体.

情况(2)：两个①类，两个③类. 此时取 $BC=5$，$AB=CD=3$，于是斜边 BC 上的高 $AE=DF=h=\frac{12}{5}$. 且

$BE=CF=x=\frac{9}{5}$，则 $EF=5-2\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$.

于是 $AD^2=AE^2+EF^2+FD^2-2AE\cdot DF\cos\theta=\frac{1}{25}$（$337-288\cos\theta$）$\in(\frac{49}{25}$，25）.

由于 $AD=\frac{5}{6}\sqrt{2}$，不满足(*)式，故不可以构成四面体.

∴ 只能构成 1 个四面体.

5．五对孪生兄妹参加 k 个组活动，若规定：(1) 孪生兄妹不在同一组；(2)非孪生关系的任意两个人都恰好共同参加过一个组的活动，(3)有一人只参加两个组的活动，则 k 的最小值为__________.（命题组供题）

【答案】14

【解析】设此 10 人为 A，a，B，b，C，c，D，d，E，e.

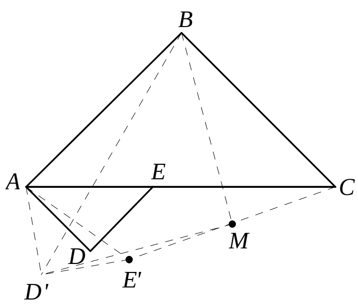
A 只参加 2 组，故除 a 外其余 8 人应分成 2 组，每组人数都不超过 4 人（否则有孪生兄妹同组）. 记第一组为{B，C，D，E}，第二组为{b，c，d，e}. 于是其余 8 人中大写字母不再同组，小写字母也不再同组. 即除 a 外其余组中人数不超过 2 人. 每人都再参加 3 组，故至少还要 3×4=12 组. a 可参加其中 4 组. 即至少要 14 组. 又{a，B，c}，{B，d}，{B，e}，{a，C，b}，{C，d}，{C，e}，{D，b}，{D，c}，{a，D，e}，{E，b}，{E，c}，{a，E，d}满足要求. 故所求最小值为 14.

1987 年全国高中数学联赛二试题

一．如图，△ABC 和△ADE 是两个不全等的等腰直角三角形，现固定△ABC，而将△ADE 绕 A 点在平面上旋转，试证：不论△ADE 旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使△BMD 为等腰直角三角形.

【解析】证明：以 A 为原点，AC 为 x 轴正方向建立复平面. 设 C 表示复数 c，点 E 表示复数 e（c、$e\in R$）. 则点 B 表示复数 $b=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}ci$，

点 D 表示复数 $d=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}ei$.



把△ADE 绕点 A 旋转角 θ 得到△$AD'E'$，

则点 E' 表示复数 $e'=e(\cos\theta+i\sin\theta)$．点 D' 表示复数 $d'=d(\cos\theta+i\sin\theta)$

表示 $E'C$ 中点 M 的复数 $m=\frac{1}{2}(c+e')$.

∴ 表示向量 $\overrightarrow{MB}$ 的复数：$z_1=b-\frac{1}{2}(c+e')=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}ci-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}e(\cos\theta+i\sin\theta)=-\frac{1}{2}e\cos\theta+\frac{1}{2}(c-e\sin\theta)i$.

表示向量 $\overrightarrow{MD'}$ 的复数：$z_2=d'-m=(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}ei)(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}e(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\frac{1}{2}(e\sin\theta-c)-\frac{1}{2}ie\cos\theta.$$

显然：$z_2=z_1i$．于是$|MB|=|MD|$，且$\angle BMD=90°$．即$\triangle BMD$为等腰直角三角形．故证．

二．在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点称为整点．试证：存在一个同心圆的集合，使得

⑴每个整点都在此集合的某个圆周上；

⑵此集合的每个圆周上，有且只有一个整点．(辛泽尔定理)

【解析】证明 ：取一点，其两个坐标都是无理数，例如$P(\sqrt{2},\sqrt{3})$，先证明，以P为圆心，任意长为半径作的圆，至多通过一个格点．

设某个以P为圆心的圆通过两个格点(m,n)，$(p,q)$$(m,n,p,q\in Z)$，

则$(m-\sqrt{2})^2+(n-\sqrt{3})^2=(p-\sqrt{2})^2+(q-\sqrt{3})^2$.

展开整理得，$m^2+n^2-p^2-q^2=2\sqrt{2}(p-m)+2\sqrt{3}(q-n)$.

左边是有理数，右边当且仅当$p=m$，$q=n$时为有理数．故证．

于是可知以P为圆心的圆至多通过一个格点．

现考虑，平面上所有的点与P的距离，这些距离没有两个相等．故可以把所有的距离按从小到大排队$0=r_0<r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n<\cdots$．对应的整点依次为$A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$，…，$A_n$，…．以$P$为圆心，以$r_n$为半径作圆，则此圆恰经过整点$A_n$．且此圆只经过$A_n$这个整点．现取以$P$为圆心，所有$r_n$为半径的同心圆集．则每个整点都在此同心圆集合中的某个圆上，且每个圆上都有且只有一个整点．

三．$n(n>3)$名乒乓球选手单打若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同，试证明：总可以从中去掉一名选手，而使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同．

【解析】证明 1：用A、B、……表示选手，而用$\sigma(A)$、$\sigma(B)$表示A、B已赛过的对手集合．

设A是对手集中元素最多的的选手．

若命题不成立，则存在两个选手B、C使去掉A后，B、C的对手集相同，由于$\sigma(B)\neq\sigma(C)$，故A必属于$\sigma(B)$与$\sigma(C)$之一．不妨设$B\in\sigma(A)$，$C\notin\sigma(A)$．

同样存在D、E，使$D\in\sigma(C)$，$E\notin\sigma(C)$，去掉C后，$\sigma(D)=\sigma(E)$，由于$A\notin\sigma(C)$，故$D\neq A$．又$D\in\sigma(C)$，故$D\in\sigma(B)$，即$B\in\sigma(D)=\sigma(E)\cup\{C\}$，从而$B\in\sigma(E)$，$C\notin\sigma(E)$，而去掉$A$后，$B$、$C$的对手集相同，从而$E=A$．

于是$\sigma(A)=\sigma(E)=\sigma(D)\setminus\{C\}$，即$\sigma(A)$比$\sigma(D)$少一个元素$C$，这与$A$是“对手集中元素最多的”矛盾．故证．

又证：把这些选手编为 1 至n号，以n个点表示这n个人，各点也相应编为 1 至n号．

反设去掉任何一名选手后都有两个选手的已赛过的对手完全相同．于是先去掉 1 号选手，则有两个选手的已赛过的对手完全相同，设为第i号与第j号，在表示此二人的点间连一条线，并在线上注上“1 号”．这说明，此二人在去掉 1 号选手之前必是一人与 1 号赛过，另一人与 1 号没有赛过．而且不可能在去掉 1 号后有三人都相同，否则，此三人与 1 号选手比赛的情况只有两种：赛过或没有赛过，如果去掉 1 号后，此三人的情况完全相同，则去掉 1 号之前必有 2 人赛过的对手完全相同．如果去掉 1 号后有不止一对选手的已赛过对手完全相同，则只任取其中的一对连线，其余的对则不连线．

连线后把 1 号选手放回来，再依次去掉 2 号、3 号，……，直至n号，每去掉 1 个选手，都会在某两点之间连出 1 条线．这样，就在n个选手之间连了n条线．且这些线上分别注

了 1 至 n 号，每条线注了 1 个号码，每个号码只注在 1 条线上．

在这 10 个点中，总能找到一点，从这点出发，沿线前进，最后必能回到此点，否则，每到 1 点后，经过的点数都比线数多 1．而图中的点数与线数相等，矛盾．现不妨设从点 i 出发，经过点 j、k、……最后回到点 i．注意到点 i 与点 j 所代表的两名选手中 1 个是与 1 号比赛的，另一个是没有与 1 号比赛的，不妨设 i 号没有与 1 号比赛过，j 号与 1 号比赛过．而 j 与 k 所连线上注的号码不是 1，故 j 与 k 与 1 号比赛的情况相同，即 k 号与 1 号比赛过，……，这样沿线走一圈后回到 i，就应该得出 i 号与 1 号比赛过，矛盾．故证．