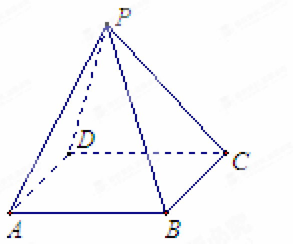
2007年全国高中数学联赛

考试时间：上午8：00—9：40）

一、选择题（本题满分36分，每小题6分）

1. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle APC=60°$，则二面角 $A-PB-C$ 的平面角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $-\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$



2. 设实数 a 使得不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\geq a^2$ 对任意实数 x 恒成立，则满足条件的 a 所组成的集合是（　　）

A. $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　　B. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　C. $[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$　　D. $[-3,3]$

3. 将号码分别为1、2、…、9的九个小球放入一个袋中，这些小球仅号码不同，其余完全相同。甲从袋中摸出一个球，其号码为 a，放回后，乙从此袋中再摸出一个球，其号码为 b。则使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件发生的概率等于（　　）

A. $\frac{52}{81}$　　B. $\frac{59}{81}$　　C. $\frac{60}{81}$　　D. $\frac{61}{81}$

4. 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$。若实数 a、b、c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\frac{b\cos c}{a}$ 的值等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

5. 设圆 O_1 和圆 O_2 是两个定圆，动圆 P 与这两个定圆都相切，则圆 P 的圆心轨迹不可能是（　　）

A.　　B.　　C.　　D.

6. 已知 A 与 B 是集合{1，2，3，…，100}的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且为 $A\cap B$ 空集。若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为（　　）

A. 62　　B. 66　　C. 68　　D. 74

二、填空题（本题满分54分，每小题9分）

7. 在平面直角坐标系内，有四个定点 $A(-3,0)$，$B(1,-1)$，$C(0,3)$，$D(-1,3)$ 及一个动点 P，则 $|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$ 的最小值为__________。

8. 在△ABC 和△AEF 中，B 是 EF 的中点，$AB=EF=1$，$BC=6$，$CA=\sqrt{33}$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，则 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于________。

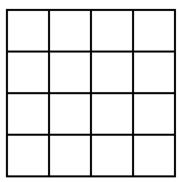
9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，以顶点 A 为球心，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径作一个球，则球面与正方体的表面相交所得到的曲线的长等于__________。

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 d 不为0，等比数列$\{b_n\}$的公比 q 是小于1的正有理数。若 $a_1=d$，$b_1=d^2$，且 $\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$ 是正整数，则 q 等于________。

11. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}$ $(\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{5}{4})$，则 $f(x)$ 的最小值为________。

12. 将2个 a 和2个 b 共4个字母填在如图所示的16个小方格内，每个小方格内至多填1个字母，若使相同字母既不同行也不同列，则不同的填法共有________种（用数字作答）。

三、解答题（本题满分60分，每小题20分）



13. 设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}<a_n$。

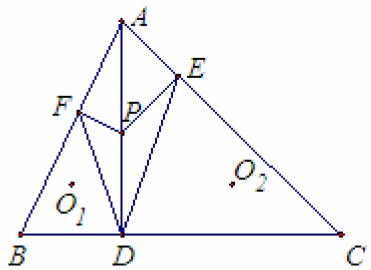
14. 已知过点(0，1)的直线 l 与曲线 C：$y=x+\frac{1}{x}(x>0)$交于两个不同点 M和 N。求曲线 C在点 M、N处切线的交点轨迹。

15. 设函数 $f(x)$对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)$ (i=1，2，3，4)满足：（1）对 i=1，2，3，4，$f_i(x)$是偶函数，且对任意的实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；（2）对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$。

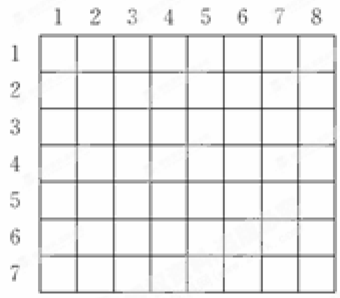
2007 年全国高中数学联合竞赛加试试卷

（考试时间：上午 10：00—12：00）

一、（本题满分 50 分）如图，在锐角△ABC 中，$AB<AC$，AD 是边 BC 上的高，P 是线段 AD 内一点。过 P 作 $PE\perp AC$，垂足为 E，做 $PF\perp AB$，垂足为 F。O_1、O_2 分别是△BDF、△CDE 的外心。求证：O_1、O_2、E、F 四点共圆的充要条件为 P 是△ABC 的垂心。



二、（本题满分 50 分）如图，在 7×8 的长方形棋盘的每个小方格的中心点各放一个棋子。如果两个棋子所在的小方格共边或共顶点，那么称这两个棋子相连。现从这 56 个棋子中取出一些，使得棋盘上剩下的棋子，没有五个在一条直线（横、竖、斜方向）上依次相连。问最少取出多少个棋子才可能满足要求？并说明理由。



三、（本题满分 50 分）设集合 P={1，2，3，4，5}，对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m,k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中[$a$]表示不大于 a 的最大整数。求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$。

2007 年全国高中数学联合竞赛一试试题参考答案

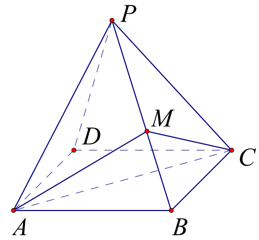
一、选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle APC$=60°，则二面角 $A-PB-C$ 的平面角的余弦值为

（　　）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $-\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B



【解析】如图，在侧面 PAB 内，作 $AM\perp PB$，垂足为 M。连结 CM、AC，则$\angle AMC$为二面角 $A-PB-C$ 的平面角。不妨设 $AB=2$，则 $PA=AC=2\sqrt{2}$，斜高为 $\sqrt{7}$，故 $2\times\sqrt{7}=AM\cdot 2\sqrt{2}$，由此得 $CM=AM=\sqrt{\frac{7}{2}}$。在△AMC 中，由余弦定理得 $\cos\angle AMC=\frac{AM^2+CM^2-AC^2}{2\cdot AM\cdot CM}=-\frac{1}{7}$。

2. 设实数 a 使得不等式$|2x-a|+|3x-2a|\geq a^2$对任意实数 x 恒成立，则满足条件的 a 所组成的集合是（　）

A. $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　B. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　C. $[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$　D. $[-3，3]$

【答案】A

【解析】令 $x=\frac{2}{3}a$，则有$|a|\leq\frac{1}{3}$，排除 B、D。由对称性排除 C，从而只有 A 正确。

一般地，对 $k\in R$，令 $x=\frac{1}{2}ka$，则原不等式为$|a|\cdot|k-1|+\frac{3}{2}|a|\cdot|k-\frac{4}{3}|\geq|a|^2$，由此易知原不等式等价于$|a|\leq|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|$，对任意的 $k\in R$ 成立。由于

$$|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|=\begin{cases}\frac{5}{2}k-3 & k\geq\frac{4}{3}\\ 1-\frac{1}{2}k & 1\leq k<\frac{4}{3}\\ 3-\frac{5}{2}k & k<1\end{cases}，$$

所以$\min\limits_{k\in R}\{|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|\}=\frac{1}{3}$，从而上述不等式等价于$|a|\leq\frac{1}{3}$。

3. 将号码分别为 1、2、…、9 的九个小球放入一个袋中，这些小球仅号码不同，其余完全相同。甲从袋中摸出一个球，其号码为 a，放回后，乙从此袋中再摸出一个球，其号码为 b。则使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件发生的概率等于（　　）

A. $\frac{52}{81}$　　B. $\frac{59}{81}$　　C. $\frac{60}{81}$　　D. $\frac{61}{81}$

【答案】D

【解析】甲、乙二人每人摸出一个小球都有 9 种不同的结果，故基本事件总数为 $9^2=81$ 个。由不等式 $a-2b+10>0$ 得 $2b<a+10$，于是，当 $b=1$、2、3、4、5 时，每种情形 a 可取 1、2、…、9 中每一个值，使不等式成立，则共有 9×5=45 种；当 $b=6$ 时，a 可取 3、4、…、9 中每一个值，有 7 种；当 $b=7$ 时，a 可取 5、6、7、8、9 中每一个值，有 5 种；当 $b=8$ 时，a 可取 7、8、9 中每一个值，有 3 种；当 $b=9$ 时，a 只能取 9，有 1 种。于是，所求事件的概率为 $\frac{45+7+5+3+1}{81}=\frac{61}{81}$。

4. 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$。若实数 a、b、c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\dfrac{b\cos c}{a}$ 的值等于（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{1}{2}$　　　　C. -1　　　　D. 1

【答案】D

【解析】令 $c=\pi$，则对任意的 $x\in R$，都有 $f(x)+f(x-c)=2$，于是取 $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\pi$，则对任意的 $x\in R$，$af(x)+bf(x-c)=1$，由此得 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$。

一般地，由题设可得 $f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1$，$f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1$，其中 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$，于是 $af(x)+bf(x-c)=1$ 可化为

$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1$，**即**

$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0$，**所以**

$\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0$。

由已知条件，上式对任意 $x\in R$ 恒成立，故必有 $\begin{cases} a+b\cos c=0 & (1) \\ b\sin c=0 & (2) \\ a+b-1=0 & (3) \end{cases}$，

若 $b=0$，则由(1)知 $a=0$，显然不满足(3)式，故 $b\neq0$。所以，由(2)知 $\sin c=0$，故 $c=2k\pi+\pi$ 或 $c=2k\pi$ ($k\in Z$)。当 $c=2k\pi$ 时，$\cos c=1$，则(1)、(3)两式矛盾。故 $c=2k\pi+\pi$ ($k\in Z$)，$\cos c=-1$。由(1)、(3)知 $a=b=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$。

5. 设圆 O_1 和圆 O_2 是两个定圆，动圆 P 与这两个定圆都相切，则圆 P 的圆心轨迹不可能是（　　）

A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

【答案】A

【解析】设圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别是 r_1、r_2，$|O_1O_2|=2c$，则一般地，圆 P 的圆心轨迹是焦点为 O_1、O_2，且离心率分别是 $\dfrac{2c}{r_1+r_2}$ 和 $\dfrac{2c}{|r_1-r_2|}$ 的圆锥曲线（当 $r_1=r_2$ 时，O_1O_2 的中垂线是轨迹的一部份，当 $c=0$ 时，轨迹是两个同心圆）。

当 $r_1=r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 B；当 $0<2c<|r_1-r_2|$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 C；当 $r_1\neq r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 D。由于选项 A 中的椭圆和双曲线的焦点不重合，因此圆 P 的圆心轨迹不可能是选项 A。

6. 已知 A 与 B 是集合{1，2，3，…，100}的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且为 $A\cap B$ 空集。若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为（　　）

A. 62　　　　B. 66　　　　C. 68　　　　D. 74

【答案】B

【解析】先证 $|A\cup B|\leqslant 66$，只须证 $|A|\leqslant 33$，为此只须证若 A 是{1，2，…，49}的任一个 34 元子集，则必存在 $n\in A$，使得 $2n+2\in B$。证明如下：

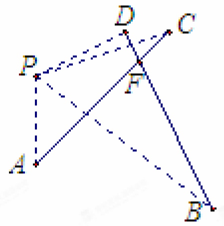
将{1，2，…，49}分成如下 33 个集合：{1，4}，{3，8}，{5，12}，…，{23，48}共 12 个；

$\{2,6\}$，$\{10,22\}$，$\{14,30\}$，$\{18,38\}$共 4 个；$\{25\}$，$\{27\}$，$\{29\}$，…，$\{49\}$共 13 个；$\{26\}$，$\{34\}$，$\{42\}$，$\{46\}$共 4 个。由于 A 是$\{1,2,\cdots,49\}$的 34 元子集，从而由抽屉原理可知上述 33 个集合中至少有一个 2 元集合中的数均属于 A，即存在 $n\in A$，使得 $2n+2\in B$。
如取 $A=\{1,3,5,\cdots,23,2,10,14,18,25,27,29,\cdots,49,26,34,42,46\}$，$B=\{2n+2\mid n\in A\}$，则 A、B 满足题设且 $|A\cup B|\leqslant 66$。

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 在平面直角坐标系内，有四个定点 $A(-3,0)$，$B(1,-1)$，$C(0,3)$，$D(-1,3)$及一个动点 P，则$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$的最小值为________。

【答案】 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ 。



【解析】如图，设 AC 与 BD 交于 F 点，则 $|PA|+|PC|\geqslant|AC|=|FA|+|FC|$，$|PB|+|PD|\geqslant|BD|=|FB|+|FD|$，因此，当动点 P 与 F 点重合时，$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$取到最小值 $|AC|+|BD|=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$。

8. 在$\triangle ABC$和$\triangle AEF$中，B是 EF 的中点，$AB=EF=1$，$BC=6$，$CA=\sqrt{33}$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，则 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于

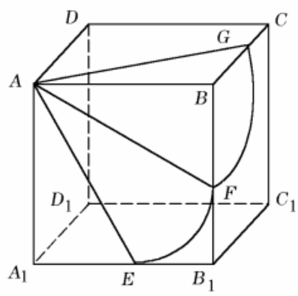
【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=2$，即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=2$。因为 $\overrightarrow{AB}^2=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{33}\times1\times\dfrac{33+1-36}{2\times\sqrt{33}\times1}=-1$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BF}$，所以 $1+\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-1=2$，即 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}=2$。设 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ，则有 $|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta=2$，即 $3\cos\theta=2$，所以 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以顶点 A 为球心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径作一个球，则球面与正方体的表面相交所得到的曲线的长等于____________。

【答案】$\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{6}$

【解析】如图，球面与正方体的六个面都相交，所得的交线分为两类：一类在顶点 A 所在的三个面上，即面 AA_1B_1B、面 $ABCD$ 和面 AA_1D_1D 上；另一类在不过顶点 A 的三个面上，即面 BB_1C_1C、面 CC_1D_1D 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上。在面 AA_1B_1B 上，交线为弧 EF 且在过球心 A 的大圆上，因为 $AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AA_1=1$，则 $\angle A_1AE=\dfrac{\pi}{6}$。同理 $\angle BAF=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle EAF=\dfrac{\pi}{6}$，故弧 EF 的长为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$，而这样的弧共有三条。在面 BB_1C_1C 上，交线为弧 FG 且在距球心为 1 的平面与球面相交所得的小圆上，此时，小圆的圆心为 B，半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle FBG=\dfrac{\pi}{2}$，所以弧 FG 的长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$。这样的弧也有三条。



于是，所得的曲线长为 $3\times\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi+3\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{6}$。

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差d不为0，等比数列$\{b_n\}$的公比q是小于1的正有理数。若$a_1=d$，$b_1=d^2$，且$\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$是正整数，则$q$等于______________。

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】因为$\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}=\dfrac{a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2}{b_1+b_1q+b_1q^2}=\dfrac{14}{1+q+q^2}$，故由已知条件知道：$1+q+q^2$为$\dfrac{14}{m}$，其中$m$为正整数。令$1+q+q^2=\dfrac{14}{m}$，则

$q=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{14}{m}-1}=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{56-3m}{4m}}$。由于$q$是小于1的正有理数，所以$1<\dfrac{14}{m}<3$，即$5\leqslant m\leqslant 13$且$\dfrac{56-3m}{4m}$是某个有理数的平方，由此可知$q=\dfrac{1}{2}$。

11. 已知函数$f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{5}{4}\right)$，则$f(x)$的最小值为____________。

【答案】$\frac{4\sqrt{5}}{}$

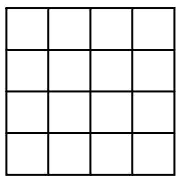
【解析】实际上$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})+2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{5}{4}\right)$，设$g(x)=\sqrt{2}\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})\left(\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}\right)$，则$g(x)\geqslant 0$，$g(x)$在$[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$上是增函数，在$[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$上是减函数，且$y=g(x)$的图像关于直线$x=\frac{3}{4}$对称，则对任意$x_1\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$，存在$x_2\in[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$，使$g(x_2)=g(x_1)$。于是

$f(x_1)=\dfrac{g(x_1)+2}{\sqrt{x_1}}=\dfrac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_1}}\ge\dfrac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_2}}=f(x_2)$，而$f(x)$在$[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$上是减函数，所以

$f(x)\ge f(\frac{5}{4})=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，即$f(x)$在$[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$上的最小值是$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$。

12. 将2个a和2个b共4个字母填在如图所示的16个小方格内，每个小方格内至多填1个字母，若使相同字母既不同行也不同列，则不同的填法共有________种（用数字作答）。

【答案】3960



【解析】使2个a既不同行也不同列的填法有$C_4^2A_4^2$=72种，同样，使2个b既不同行也不同列的填法也有$C_4^2A_4^2$=72种，故由乘法原理，这样的填法共有72^2种，其中不符合要求的有两种情况：2个a所在的方格内都填有b的情况有72种；2个a所在的方格内仅有1个方格内填有b的情况有$C_{16}^1A_9^2$=16×72种。所以，符合题设条件的填法共有72^2−72−16×72=3960种。

三、解答题（本题满分60分，每小题20分）

13. 设$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数$n\geqslant 2$时，$a_{n+1}<a_n$。

【解析】证明：由于$\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k})$，因此$a_n=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，于是，对任意的正整数 $n\geq 2$，有$\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

$=(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1)>0$，即 $a_{n+1}<a_n$。

14. 已知过点(0，1)的直线 l 与曲线 C：$y=x+\frac{1}{x}(x>0)$交于两个不同点 M和 N。求曲线 C在点 M、N处切线的交点轨迹。

【解析】设点 M、N的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，曲线 C在点 M、N处的切线分别为 l_1、l_2，其交点 P的坐标为(x_p,y_p)。若直线 l的斜率为 k，则 l的方程为$y=kx+1$。

由方程组$\begin{cases}y=x+\frac{1}{x}\\ y=kx+1\end{cases}$，消去 y，得$x+\frac{1}{x}=kx+1$，即$(k-1)x^2+x-1=0$。由题意知，该方程在(0，$+\infty$)上有两个相异的实根 x_1、x_2，故 $k\neq1$，且 $\Delta=1+4(k-1)>0$…(1)，$x_1+x_2=\frac{1}{1-k}>0$…(2)，$x_1x_2=\frac{1}{1-k}>0$…(3)，由此解得$\frac{3}{4}<k<1$。对$y=x+\frac{1}{x}$求导，得 $y'=1-\frac{1}{x^2}$，则 $y'|_{x=x_1}=1-\frac{1}{x_1^2}$，$y'|_{x=x_2}=1-\frac{1}{x_2^2}$，于是直线 l_1 的方程为 $y-y_1=(1-\frac{1}{x_1^2})(x-x_1)$，即$y-(x_1+\frac{1}{x_1})=(1-\frac{1}{x_1^2})(x-x_1)$，化简后得到直线 l_1的方程为 $y=(1-\frac{1}{x_1^2})x+\frac{2}{x_1}$…(4)。同理可求得直线 l_2的方程为$y=(1-\frac{1}{x_2^2})x+\frac{2}{x_2}$…(5)。(4)－(5)得$(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2})x_p+\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}=0$，因为 $x_1\neq x_2$，故有$x_p=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$…(6)。将(2)(3)两式代入(6)式得 $x_p=2$。(4)+(5)得$2y_p=(2-(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}))x_p+2(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$…(7)，其中

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1$，

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})^2-\frac{2}{x_1x_2}=1-2(1-k)=2k-1$，代入(7)式得 $2y_p=(3-2k)x_p+2$，而 $x_p=2$，得 $y_p=4-2k$。又由$\frac{3}{4}<k<1$得$2<y_p<\frac{5}{2}$，即点 P的轨迹为(2，2)，(2，2.5)两点间的线段（不含端点）。

15. 设函数 $f(x)$对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)$ (i=1，2，3，4)满足：(1)对 i=1，2，3，4，$f_i(x)$是偶函数，且对任意的实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；(2)对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$。

【解析】证明：记$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $g(x)$是偶函数，$h(x)$是奇函数，对任意的 $x\in R$，$g(x+2\pi)=g(x)$，$h(x+2\pi)=h(x)$。令

$f_1(x)=\dfrac{g(x)+g(x+\pi)}{2}$，$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(x+\pi)}{2\cos x} & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2\sin x} & x\neq k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$，$f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)+h(x+\pi)}{2\sin 2x} & x\neq \dfrac{k\pi}{2}\\ 0 & x=\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$，其中 k 为任意整数。

容易验证 $f_i(x)$，i=1，2，3，4 是偶函数，且对任意的 $x\in R$，$f_i(x+\pi)=f_i(x)$，i=1，2，3，4.下证对任意的 $x\in R$ 有 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.当 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，显然成立；当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=f_1(x)=\dfrac{g(x)+g(x+\pi)}{2}$，而

$g(x+\pi)=g(k\pi+\dfrac{3\pi}{2})=g(k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi)=g(-k\pi-\dfrac{\pi}{2})=g(k\pi+\dfrac{\pi}{2})=g(x)$，故对任意的 $x\in R$ $f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

下证对任意的 $x\in R$ 有 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x)$.当 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}$ 时，显然成立；当 $x=k\pi$ 时，$h(x)=h(k\pi)=h(k\pi-2k\pi)=h(-k\pi)=-h(k\pi)$，所以 $h(x)=h(k\pi)=0$，而此时 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=0$，故 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$；当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，

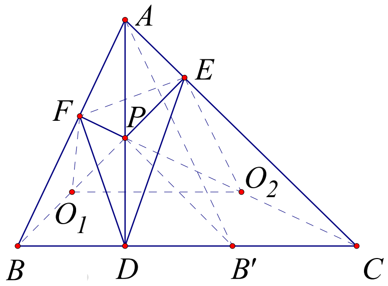
$h(x+\pi)=h(k\pi+\dfrac{3\pi}{2})=h(k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi)=h(-k\pi-\dfrac{\pi}{2})=-h(k\pi+\dfrac{\pi}{2})=-h(x)$，故 $f_3(x)\sin x=\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2}=h(x)$，又 $f_4(x)\sin 2x=0$，从而有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

于是，对任意的 $x\in R$ 有 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x)$。综上所述，结论得证。

2007年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案

一、（本题满分50分）如图，在锐角$\triangle ABC$中，$AB<AC$，AD是边BC上的高，P是线段AD内一点。过P作$PE\perp AC$，垂足为E，作$PF\perp AB$，垂足为F。O_1、O_2分别是$\triangle BDF$、$\triangle CDE$的外心。求证：O_1、O_2、E、F四点共圆的充要条件为P是$\triangle ABC$的垂心。

【解析】证明：连结BP、CP、O_1O_2、EO_2、EF、FO_1。因为$PD\perp BC$，$PF\perp AB$，故B、D、P、F四点共圆，且BP为该圆的直径。又因为O_1是$\triangle BDF$的外心，故O_1在BP上且是BP的中点。同理可证C、D、P、E四点共圆，且O_2是的CP中点。综合以上知O_1O_2∥BC，所以$\angle PO_2O_1=\angle PCB$。因为$AF\cdot AB=AP\cdot AD=AE\cdot AC$，所以$B$、$C$、$E$、$F$四点共圆。



充分性：设P是$\triangle ABC$的垂心，由于$PE\perp AC$，$PF\perp AB$，所以B、O_1、P、E四点共线，C、O_2、P、F四点共线，$\angle FO_2O_1=\angle FCB=\angle FEB=\angle FEO_1$，故$O_1$、$O_2$、$E$、$F$四点共圆。

必要性：设O_1、O_2、E、F四点共圆，故$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180°$。

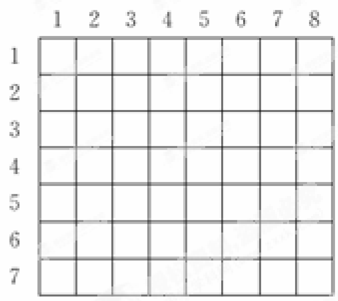
由于$\angle PO_2O_1=\angle PCB=\angle ACB-\angle ACP$，又因为$O_2$是直角$\triangle CEP$的斜边中点，也就是$\triangle CEP$的外心，所以$\angle PO_2E=2\angle ACP$。因为$O_1$是直角$\triangle BFP$的斜边中点，也就是$\triangle BFP$的外心，从而$\angle PFO_1=90°-\angle BFO_1=90°-\angle ABP$。因为$B$、$C$、$E$、$F$四点共圆，所以$\angle AFE=\angle ACB$，$\angle PFE=90°-\angle ACB$。于是，由$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180°$得

$(\angle ACB-\angle ACP)+2\angle ACP+(90°-\angle ABP)+(90°-\angle ACB)=180°$，即$\angle ABP=\angle ACP$。又因为$AB<AC$，$AD\perp BC$，故$BD<CD$。设$B'$是点$B$关于直线$AD$的对称点，则$B'$在线段$DC$上且$B'D=BD$。连结$AB'$、$PB'$。由对称性，有$\angle AB'P=\angle ABP$，从而$\angle AB'P=\angle ACP$，所以$A$、$P$、$B'$、$C$四点共圆。由此可知$\angle PB'B=\angle CAP=90°-\angle ACB$。因为$\angle PBC=\angle PB'B$，

故$\angle PBC+\angle ACB=(90°-\angle ACB)+\angle ACB=90°$，故直线$BP$和$AC$垂直。由题设$P$在边$BC$的高上，所以$P$是$\triangle ABC$的垂心。

二、（本题满分50分）如图，在7×8的长方形棋盘的每个小方格的中心点各放一个棋子。如果两个棋子所在的小方格共边或共顶点，那么称这两个棋子相连。现从这56个棋子中取出一些，使得棋盘上剩下的棋子，没有五个在一条直线（横、竖、斜方向）上依次相连。问最少取出多少个棋子才可能满足要求？并说明理由。

【解析】最少要取出11个棋子，才可能满足要求。其原因如下：
如果一个方格在第i行第j列，则记这个方格为$(i,\ j)$。



第一步证明若任取10个棋子，则余下的棋子必有一个五子连珠，即五个棋子在一条直线（横、竖、斜方向）上依次相连。用反证法。假设可取出10个棋子，使余下的棋子没有一个五子连珠。如图1，在每一行的前五格中必须各取出一个棋子，后三列的前五格中也必须各取出一个棋子。这样，10个被取出的棋子不会分布在右下角的阴影部分。同理，由对称性，也不会分布在其他角上的阴影部分。第1、2行必在每行取出一个，且只能分布在(1，4)、(1，5)、(2，4)、(2，5)这些方格。同理(6，4)、(6，5)、(7，4)、(7，5)这些方格上至少要取出2个棋子。在第1、2、3列，每列至少要取出一个棋子，分布在(3，1)、(3，2)、(3，3)、(4，1)、(4，2)、(4，3)、(5，1)、(5，2)、(5，3)所在区域，同理(3，6)、(3，7)、(3，8)、(4，6)、(4，7)、(4，8)、(5，6)、(5，7)、(5，8)所在区域内至少取出3个棋子。这样，在这些区域内至少已取出了10个棋子。因此，在中心阴影区域内不能取出棋子。由于①、②、③、④这4个棋子至多被取出2个，从而，从斜的方向看必有五子连珠了。矛盾。

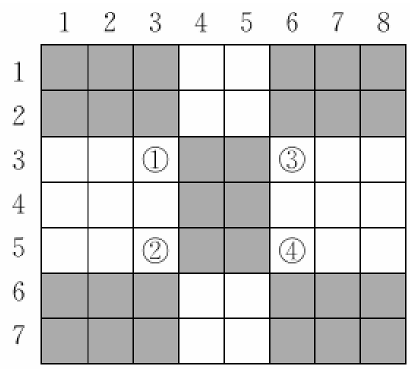


图 1

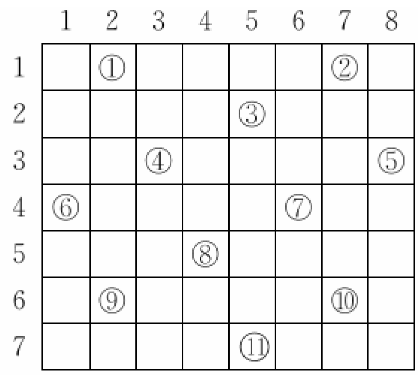


图 2

第二步构造一种取法，共取走 11 个棋子，余下的棋子没有五子连珠。如图 2，只要取出有标号位置的棋子，则余下的棋子不可能五子连珠。

综上所述，最少要取走 11 个棋子，才可能使得余下的棋子没有五子连珠。

三、（本题满分 50 分）设集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m,k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数。求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$。

【解析】证明：定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in N^*, k\in P\}$，其中 N^* 为正整数集。由于对任意 k、$i\in P$ 且 $k\neq i$，$\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数，则对任意的 k_1、$k_2\in P$ 和正整数 m_1、m_2，$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}$ 当且仅当 $m_1=m_2$，$k_1=k_2$。由于 A 是一个无穷集，现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列。对于任意的正整数 n，设此数列中第 n 项为 $m\sqrt{k+1}$。下面确定 n 与 m、k 的关系。若 $m_1\sqrt{i+1}\le m\sqrt{k+1}$，则 $m_1\le m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$。由 m_1 是正整数可知，对 $i=1,2,3,4,5$，满足这个条件的 m_1 的个数为 $\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$。从而 $n=\sum_{i=1}^{5}\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]=f(m,k)$。因此对任意 $n\in N^*$，存在 $m\in N^*$，$k\in P$，使得 $f(m,k)=n$。