1993年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

1．若 $M=\{(x,\ y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　）

(A) 4　　(B) 5　　(C) 8　　(D) 9

2. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$ (a, b 为实数)，且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是(　　)

(A) -5　　(B) -3　　(C) 3　　(D) 随 a, b 取不同值而取不同值

3. 集合 A, B 的并集 $A\cup B=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，$(A,\ B)$ 与 $(B,\ A)$ 视为不同的对，则这样的 $(A,\ B)$ 对的个数是（　）

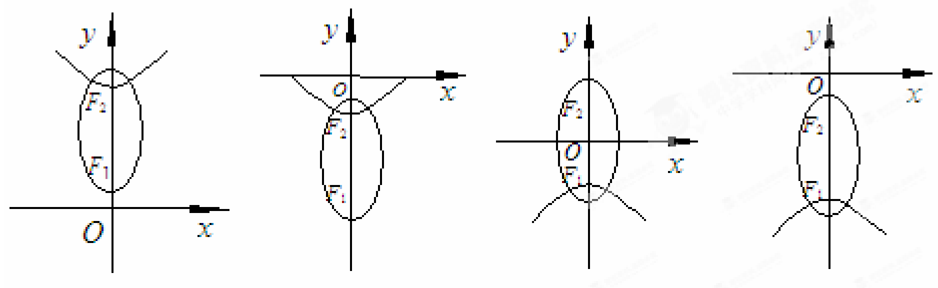
(A) 8　　(B) 9　　(C) 26　　(D) 27

4. 若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 C: $(x-\arcsin a)(x-\arccos a)+(y-\arcsin a)(y+\arccos a)=0$ 所截的弦长为 d，当 a 变化时 d 的最小值是(　)

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

5. 在△ABC 中，角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$ 的值是(　)

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) -1



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

6．设 m, n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程 $|z+ni|+|z-mi|=n$ 与 $|z+ni|-|z-mi|=-m$ 在同一复平面内的图形(F_1, F_2 为焦点)是(　　)

二、填空题（每小题5分，共30分）

1．二次方程 $(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$ (i 为虚数单位，$\lambda\in R$) 有两个虚根的充分必要条

件是λ的取值范围为________.

2．实数 x，y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则$\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=$_______.

3．若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\frac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，则 z 的值是________.

4．整数$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末两位数是_______.

5．设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$，要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993\geqslant k\cdot\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立，则 k 的最大值是_______.

6．三位数(100，101，…，999)共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印一个三位数，有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861；有的卡片则不然，如 531 倒过来看是 ΙƐƐ，因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印_____张卡片.

三、（本题满分 20 分）

三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为三角形 ABC 的重心，D 为 AB 的中点，作与 SC 平行的直线 DP. 证明：(1) DP 与 SM 相交；(2) 设 DP 与 SM 的交点为 D'，则 D' 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心.

四、（本题满分 20 分）

设 $0<a<b$，过两定点 $A(a，0)$ 和 $B(b，0)$ 分别引直线 l 和 m，使与抛物线 $y^2=x$ 有四个不同的交点，当这四点共圆时，求这种直线 l 与 m 的交点 P 的轨迹.

五、（本题满分 20 分）

设正数列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，…满足$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$，$(n\geqslant2)$ 且 $a_0=a_1=1$，求$\{a_n\}$的通项公式.

第二试

一、（35 分）

设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有$\angle D$是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成 n 个钝角三角形，但除去 A、B、C、D 外，在该四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点．试证 n 应满足的充分必要条件是 $n\geqslant 4$．

二、（35 分）

设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含．

试证：(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$．其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数．

三、（35 分）

水平直线 m 通过圆 O 的中心，直线 $l\perp m$，l 与 m 相交于 M，点 M 在圆心的右侧，直线 l 上不同的三点 A,B,C 在圆外，且位于直线 m 上方，A 点离 M 点最远，C 点离 M 点最近，AP,BQ,CR 为圆 O 的三条切线，P,Q,R 为切点．试证：(1) l 与圆 O 相切时，$AB\times CR+BC\times AP=AC\times BQ$；(2) l 与圆 O 相交时，$AB\times CR+BC\times AP<AC\times BQ$；(3) l 与圆 O 相离时，$AB\times CR+BC\times AP>AC\times BQ$．

1993年全国高中数学联合竞赛解答

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

1．若 $M=\{(x,\ y)|\ |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　　）

(A) 4　　(B) 5　　(C) 8　　(D) 9

【答案】D

【解析】$\tan\pi y=0$，$y=k(k\in Z)$，$\sin^2\pi x=0$，$x=m(m\in Z)$，即圆 $x^2+y^2=2$ 及圆内的整点数．共9个．选D.

2.已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（a、b为实数），且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是（　　）

(A) −5　　(B) −3　　(C) 3　　(D)随a、b取不同值而取不同值

【答案】C

【解析】设 $\lg\log_3 10=m$，则 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10=-m$，则 $f(m)=a\sin m+b\sqrt[3]{m}+4=5$，即 $a\sin m+b\sqrt[3]{m}=1$.

$\therefore f(-m)=-(a\sin m+b\sqrt[3]{m})+4=-1+4=3$．选C.

3．集合A，B的并集 $A\cup B=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A，B)与(B，A)视为不同的对，则这样的(A，B)对的个数是（　　）

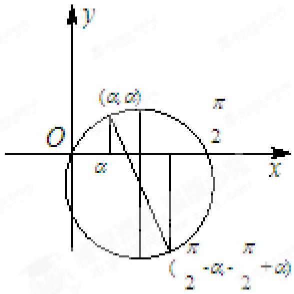
(A) 8　　(B) 9　　(C) 26　　(D) 27

【答案】D

【解析】$a_1\in A$ 或 $\notin A$，有2种可能，同样 $a_1\in B$ 或 $\notin B$，有2种可能，但 $a_1\notin A$ 与 $a_1\notin B$ 不能同时成立，故有 2^2-1 种安排方式，同样 a_2、a_3 也各有 2^2-1 种安排方式，故共有 $(2^2-1)^3$ 种安排方式．选D.

4．若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 $C:(x-\arcsin a)(x-\arccos a)+(y-\arcsin a)(y+\arccos a)=0$ 所截的弦长为 d，当 a 变化时 d 的最小值是（　　）

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π



【答案】C

【解析】曲线 C 表示以 $(\arcsin a, \arcsin a)$，$(\arccos a, -\arccos a)$ 为直径端点的圆．即以 (α, α) 及 $(\frac{\pi}{2}-\alpha, -\frac{\pi}{2}+\alpha)$ $(\alpha\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ 为直径端点的圆．而 $x=\frac{\pi}{4}$ 与圆交于圆的直径．故 $d=\sqrt{(2\alpha-\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2}\geq\frac{\pi}{2}$．

故选 C．

5．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边长分别为 a，b，c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$ 的值是（　　）

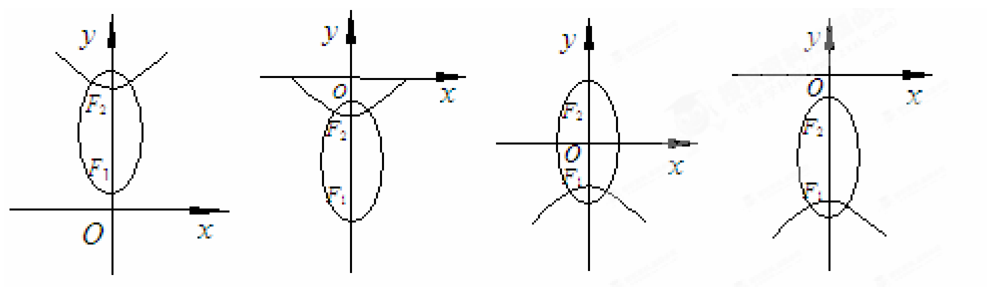
(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) -1

【答案】A

【解析】$2R(\sin C-\sin A)=c\sin A=2R\sin C\sin A$　$\Rightarrow\sin C-\sin A=\sin C\sin A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(C+A)-\cos(C-A)]=\frac{1}{2}[1-2\sin^2\frac{C-A}{2}-2\cos^2\frac{C+A}{2}+1]$．

$\Rightarrow(\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2})^2=1$，但 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}>0$，故选 A．



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

6．设 m，n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程 $|z+ni|+|z-mi|=n$ 与 $|z+ni|-|z-mi|=-m$ 在同一复平面内的图形(F_1，F_2 为焦点)是（　　）

【答案】B

【解析】方程①为椭圆，②为双曲线的一支．二者的焦点均为 $(-ni, mi)$，由① $n>0$，

故否定 A，

由于 n 为椭圆的长轴，而 C 中两个焦点与原点距离(分别表示$|n|$、$|m|$)均小于椭圆长轴，故否定 C.

由 B 与 D 知，椭圆的两个个焦点都在 y 轴负半轴上，由 n 为长轴，知$|OF_1|=n$，于是 $m<0$，$|OF_2|=-m$. 曲线上一点到$-ni$距离大，否定 D，故选 B.

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1．二次方程$(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$($i$ 为虚数单位，$\lambda\in R$)有两个虚根的充分必要条件是λ的取值范围为________.

【答案】 $\lambda\neq 2$.

【解析】即此方程没有实根的条件．当 $\lambda\in R$时，此方程有两个复数根，若其有实根，则

$x^2+\lambda x+1=0$，且 $x^2-x-\lambda=0$．相减得$(\lambda+1)(x+1)=0$.

当 $\lambda=-1$ 时，此二方程相同，且有两个虚根．故 $\lambda=-1$ 在取值范围内.

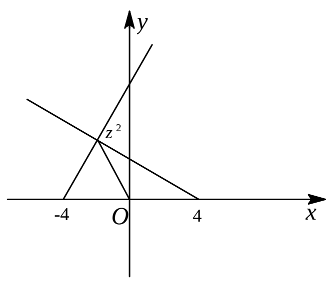
当 $\lambda\neq-1$ 时，$x=-1$，代入得 $\lambda=2$．即 $\lambda=2$ 时，原方程有实根 $x=-1$．故所求范围是 $\lambda\neq 2$.

2．实数 x，y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则$\dfrac{1}{S_{\max}}+\dfrac{1}{S_{\min}}=$_______.

【答案】$\dfrac{8}{5}$

【解析】令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 $S=r^2$ 得 $r^2(4-5\sin\theta\cos\theta)=5$．$S=\dfrac{5}{4-\frac{5}{2}\sin 2\theta}$.

$\therefore\dfrac{1}{S_{\max}}+\dfrac{1}{S_{\min}}=\dfrac{4+\frac{5}{2}}{5}+\dfrac{4-\frac{5}{2}}{5}=\dfrac{8}{5}$.



3．若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\dfrac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\dfrac{\pi}{3}$，则 z 的值是__________.

【答案】$\pm(1+\sqrt{3}i)$

【解析】如图，可知 z^2 表示复数 $4(\cos120°+i\sin120°)$．$\therefore$ $z=\pm 2(\cos60°+i\sin60°)=\pm(1+\sqrt{3}i)$.

4．整数$\left[\dfrac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末两位数是________．

【答案】08

【解析】令 $x=10^{31}$，则得$\dfrac{x^3}{x+3}=\dfrac{x^3+27-27}{x+3}=x^2-3x+9-\dfrac{27}{x+3}$．由于 $0<\dfrac{27}{x+3}<1$，故所求末两位数字为 09－1=08．

5．设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$，要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993\geqslant k\cdot\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立，则 k 的最大值是________．

【答案】9

【解析】显然$\dfrac{x_0}{x_3}>1$，从而 $\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993>0$．即$\dfrac{1}{\lg x_0-\lg x_1}+\dfrac{1}{\lg x_1-\lg x_2}+\dfrac{1}{\lg x_2-\lg x_3}\geqslant\dfrac{k}{\lg x_0-\lg x_3}$．

就是$[(\lg x_0-\lg x_1)+(\lg x_1-\lg x_2)+(\lg x_2-\lg x_3)]\left(\dfrac{1}{\lg x_0-\lg x_1}+\dfrac{1}{\lg x_1-\lg x_2}+\dfrac{1}{\lg x_2-\lg x_3}\right)\geqslant k$．

其中 $\lg x_0-\lg x_1>0$，$\lg x_1-\lg x_2>0$，$\lg x_2-\lg x_3>0$，由 *Cauchy* 不等式，知 $k\leqslant 9$．即 k 的最大值为 9．

6．三位数(100，101，…，999)共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印一个三位数，有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861；有的卡片则不然，如 531 倒过来看是　　，因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印______张卡片．

【答案】34

【解析】首位与末位各可选择 1，6，8，9，有 4 种选择，十位还可选 0，有 5 种选择，共有 4×5×4=80 种选择．

但两端为 1，8，中间为 0，1，8 时，或两端为 9、6，中间为 0，1，8 时，倒后不变；共有 2×3+2×3=12 个，故共有(80－12)÷2=34 个．

三、（本题满分 20 分）

三棱锥 S-ABC 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为三角形 ABC 的重心，D 为 AB 的中点，作与 SC 平行的直线 DP．证明：(1) DP 与 SM 相交；(2) 设 DP 与 SM 的交点为 D'，则 D'

为三棱锥 $S—ABC$ 的外接球球心．

【解析】(1) 证明：∵ $DP // SC$，故 DP、CS 共面．

∴ $DC\subseteq$ 面 DPC，

∵ $M\in DC$，$\Rightarrow M\in$ 面 DPC，$SM\subseteq$ 面 DPC．

∵ 在面 DPC 内 SM 与 SC 相交，故直线 SM 与 DP 相交．

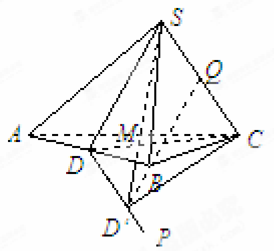
(2) ∵ SA、SB、SC 两两互相垂直，∴ $SC\perp$ 面 SAB，$SC\perp SD$．

∵ $DP // SC$，∴ $DP\perp SD$．$\triangle DD'M\backsim\triangle CSM$．

∵ M 为 $\triangle ABC$ 的重心，∴ $DM:MC=1:2$．∴ $DD':SC=1:2$．

取 SC 中点 Q，连 $D'Q$．则 $SQ=DD'$，$\Rightarrow$ 平面四边形 $DD'QS$ 是矩形．

∴ $D'Q\perp SC$，由三线合一定理，知 $D'C=D'S$．



同理，$D'A=D'B=D'B=D'S$．即以 D' 为球心 $D'S$ 为半径作球 D'．则 A、B、C 均在此球上．即 D' 为三棱锥 $S—ABC$ 的外接球球心．

四、(本题满分 20 分)

设 $0<a<b$，过两定点 $A(a，0)$ 和 $B(b，0)$ 分别引直线 l 和 m，使与抛物线 $y^2=x$ 有四个不同的交点，当这四点共圆时，求这种直线 l 与 m 的交点 P 的轨迹．

【解析】设 l：$y=k_1(x—a)$，m：$y=k_2(x—b)$．于是 l、m 可写为 $(k_1x—y—k_1a)(k_2x—y—k_2b)=0$．

∴ 交点满足 $\begin{cases} y^2=x, \\ (k_1x—y—k_1a)(k_2x—y—k_2b)=0. \end{cases}$

若四个交点共圆，则此圆可写为 $(k_1x—y—k_1a)(k_2x—y—k_2b)+\lambda(y^2—x)=0$．

此方程中 xy 项必为 0，故得 $k_1=—k_2$，设 $k_1=—k_2=k\neq0$．

于是 l、m 方程分别为 $y=k(x—a)$ 与 $y=—k(x—b)$．

消去 k，得 $2x—(a+b)=0$，$(y\neq0)$ 即为所求轨迹方程．

五、(本题满分 20 分)

设正数列 a_0、a_1、a_2、…、a_n、…满足

$$\sqrt{a_na_{n-2}}—\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}，(n\geqslant2)$$

且 $a_0=a_1=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式．

【解析】变形，同除以 $\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ 得：$\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=2\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}+1$，

令$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}+1=b_n$，则得 $b_n=2b_{n-1}$.

即$\{b_n\}$是以 $b_1=\sqrt{\frac{1}{1}}+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列.

∴ $b_n=2^n$.

∴ $\frac{a_n}{a_{n-1}}=(2^n-1)^2$. 故

∴ $\begin{cases} a_0=1, \\ a_n=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2\cdots(2^1-1)^2. \ (n\geq1) \end{cases}$

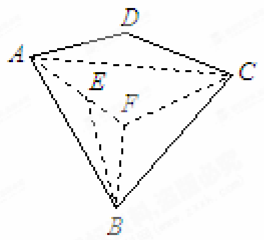
第二试

一、(35 分)

设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有$\angle D$是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成 n 个钝角三角形，但除去 A、B、C、D 外，在该四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点．试证 n 应满足的充分必要条件是 $n\geq4$.

【解析】证明 充分性

(1)当 $n=4$ 时，如图，只要连 AC，并在$\triangle ABC$内取一点 F，使$\angle AFB$、$\angle BFC$、$\angle CFA$都为钝角(例如，可以取$\triangle ABC$的 Fermat点，由于$\triangle ABC$是锐角三角形，故其 Fermat点在其形内)．于是，$\triangle ADC$、$\triangle AFB$、$\triangle BFC$、$\triangle AFC$都是钝角三角形.



(2)当 $n=5$ 时，可用上法把凸四边形分成四个钝角三角形．再在 AF 上任取一点 E，连 EB，则$\triangle AEB$也是钝角三角形，这样就得到了 5 个钝角三角形.

一般的，由(1)得到了 4 个钝角三角形后，只要在 AF 上再取 $n-4$ 个点 E_1、E_2、$\cdots E_{n-4}$，把这些点与 B连起来，即可得到均是钝角三角形的 n个三角形.

必要性

$n=2$ 时，连 1 条对角线把四边形分成了 2 个三角形，但其中最多只能有 1 个钝角三角形.

$n=3$ 时，无法从同一顶点出发连线段把四边形分成 3 个三角形，现连了 1 条对角线 AC 后，再连 B 与 AC 上某点得到线段，此时无法使得到的两个三角形都是钝角三角形.

∴当 $n=2$，3 时无法得到满足题目要求的解．只有当 $n\geq4$ 时才有解.

二、（35 分）

设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含．

试证：(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$．其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数．

【解析】证明：(1) 即证：若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，则 $k_1!(n-k_1)!+k_2!(n-k_2)!+\cdots+k_m!(n-k_m)!\leqslant n!$.

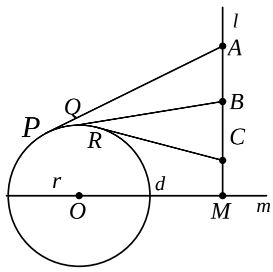
由于 $n!$ 表示 n 个元素的全排列数，而 $k_i!(n-k_i)!$ 表示先在这 n 个元素中取出 k_i 个元素排列再把其其余元素排列的方法数，由于 A_i 互不包含，故 $n!\geqslant k_1!(n-k_1)!+k_2!(n-k_2)!+\cdots+k_m!(n-k_m)!$ 成立.

(2) ∵ $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\geqslant(1+1+1+\cdots+1)^2=m^2$.

但 $0<\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$，故 $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

三、（35 分）

水平直线 m 通过圆 O 的中心，直线 $l\perp m$，l 与 m 相交于 M，点 M 在圆心的右侧，直线 l 上不同的三点 A, B, C 在圆外，且位于直线 m 上方，A 点离 M 点最远，C 点离 M 点最近，AP, BQ, CR 为圆 O 的三条切线，P, Q, R 为切点．试证：(1) l 与圆 O 相切时，$AB\times CR+BC\times AP=AC\times BQ$；(2) l 与圆 O 相交时，$AB\times CR+BC\times AP<AC\times BQ$；(3) l 与圆 O 相离时，$AB\times CR+BC\times AP>AC\times BQ$.



【解析】证明：设 $MA=a$，$MB=b$，$MC=c$，$OM=d$，⊙O 的半径 $=r$.

且设 $k=d^2-r^2$．则当 $k>0$ 时，点 M 在⊙O 外，此时，直线 l 与⊙O 相离；

当 $k=0$ 时，点 M 在⊙O 上，此时，直线 l 与⊙O 相切；

当 $k<0$ 时，点 M 在⊙O 内，此时，直线 l 与⊙O 相交.

∴ $AP=\sqrt{a^2+d^2-r^2}=\sqrt{a^2+k}$，同理，$BQ=\sqrt{b^2+k}$，$CR=\sqrt{c^2+k}$.

则 $AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ=AB\times CR+BC\times AP-(AB+BC)\times BQ=BC\times(AP-BQ)-AB\times(BQ-CR)$

$=BC\times\dfrac{AP^2-BQ^2}{AP+BQ}-AB\times\dfrac{BQ^2-CR^2}{BQ+CR}$

$=\dfrac{(b-c)(a-b)(a+b)}{AP+BQ}-\dfrac{(a-b)(b-c)(b+c)}{BQ+CR}$

$=(a-b)(b-c)\left(\dfrac{a+b}{AP+BQ}-\dfrac{b+c}{BQ+CR}\right)$

$=(a-b)(b-c)\dfrac{a\cdot BQ+a\cdot CR+b\cdot CR-b\cdot AP-c\cdot AP-c\cdot BQ}{(AP+BQ)(BQ+CR)}$.

注意到 $a\cdot BQ-b\cdot AP=\dfrac{a^2\cdot BQ^2-b^2\cdot AP^2}{b\cdot AP+a\cdot BQ}=\dfrac{(a^2-b^2)k}{b\cdot AP+a\cdot BQ}$

故 $k>0$ 时，$a\cdot BQ-b\cdot AP>0$，$k=0$ 时，$a\cdot BQ-b\cdot AP=0$，$k<0$ 时，$a\cdot BQ-b\cdot AP<0$；

同理可得，$k>0$ 时，$b\cdot CR-c\cdot BQ>0$，$k=0$ 时，$b\cdot CR-c\cdot BQ=0$，$k<0$ 时，$b\cdot CR-c\cdot BQ<0$；

$k>0$ 时，$a\cdot CR-c\cdot AP>0$，$k=0$ 时，$a\cdot CR-c\cdot AP=0$，$k<0$ 时，$a\cdot CR-c\cdot AP<0$；

即当 $k>0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ>0$；

当 $k=0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ=0$，

当 $k<0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ<0$．故证．