1995年全国高中数学联赛

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1． 设等差数列$\{a_n\}$满足$3a_8=5a_{13}$且$a_1>0$，S_n为其前项之和，则S_n中最大的是(   )

(A) S_{10} (B) S_{11} (C) S_{20} (D) S_{21}

2． 设复平面上单位圆内接正20边形的20个顶点所对应的复数依次为Z_1，Z_2，…，Z_{20}，则复数Z_1^{1995}，Z_2^{1995}，…，Z_{20}^{1995}所对应的不同的点的个数是(   )

(A) 4   (B) 5   (C) 10   (D) 20

3. 如果甲的身高数或体重数至少有一项比乙大，则称甲不亚于乙，在100个小伙子中，如果某人不亚于其他99人，就称他为棒小伙子，那么，100个小伙子中的棒小伙子最多可能有(   )

(A) 1个   (B) 2个   (C) 50个   (D) 100个

4. 已知方程$|x-2n|=k\sqrt{x}$ $(n\in N^*)$在区间$(2n-1,\ 2n+1]$上有两个不相等的实根，则k的取值范围是(   )

(A) $k>0$ (B) $0<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(C) $\frac{1}{2n+1}<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (D) 以上都不是

5. $\log_{\sin 1}\cos 1$，$\log_{\sin 1}\tan 1$，$\log_{\cos 1}\sin 1$，$\log_{\cos 1}\tan 1$的大小关系是

(A) $\log_{\sin 1}\cos 1<\log_{\cos 1}\sin 1<\log_{\sin 1}\tan 1<\log_{\cos 1}\tan 1$

(B) $\log_{\cos 1}\sin 1<\log_{\cos 1}\tan 1<\log_{\sin 1}\cos 1<\log_{\sin 1}\tan 1$

(C) $\log_{\sin 1}\tan 1<\log_{\cos 1}\tan 1<\log_{\cos 1}\sin 1<\log_{\sin 1}\cos 1$

(D) $\log_{\cos 1}\tan 1<\log_{\sin 1}\tan 1<\log_{\sin 1}\cos 1<\log_{\cos 1}\sin 1$

6． 设O是正三棱锥$P—ABC$底面三角形ABC的中心，过O的动平面与PC交于S，与PA，PB的延长线分别交于Q，R，则和式$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$

(A) 有最大值而无最小值   (B 有最小值而无最大值

(C) 既有最大值又有最小值，两者不等   (D) 是一个与面QPS无关的常数

二、填空题(每小题9分，共54分)

1． 设α，β为一对共轭复数，若$|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$，且$\frac{\alpha}{\beta^2}$为实数，则$|\alpha|=$______.

2． 一个球的内接圆锥的最大体积与这个球的体积之比为______.

3．用$[x]$表示不大于实数x的最大整数，方程$\lg^2x-[\lg x]-2=0$的实根个数是______.

4． 直角坐标平面上，满足不等式组$\begin{cases} y\leqslant 3x, \\ y\geqslant \frac{x}{3}, \\ x+y\leqslant 100 \end{cases}$ 的整点个数是______.

5． 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有5种颜色可使用，那么不同的染色方法的总数是______.

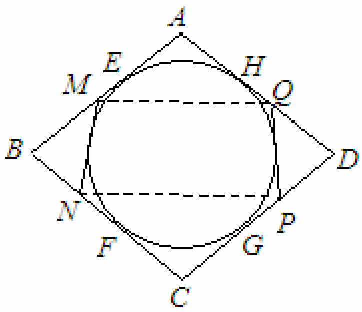
6． 设$M=\{1，2，3，…，1995\}$，A是M的子集且满足条件：当$x\in A$时，$15x\notin A$，则A中元素的个数最多是______.

第二试

一、(25 分) 给定曲线族 $2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0$， θ 为参数，求该曲线在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值.

二、(25 分) 求一切实数 p，使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的三个根均为正整数.

三、(35 分) 如图，菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于 E、F、G、H，在弧 EF 与 GH 上分别作圆 O 的切线交 AB 于 M，交 BC 于 N，交 CD 于 P，交 DA 于 Q．求证：$MQ\parallel NP$.



四、(35 分) 将平面上的每个点都以红，蓝两色之一着色。证明：存在这样两个相似的三角形，它们的相似比为 1995，并且每一个三角形的三个顶点同色.

1995年全国高中数学联赛一试(解答)

一、选择题(每小题6分，共36分)

1． 设等差数列$\{a_n\}$满足$3a_8=5a_{13}$且$a_1>0$，S_n为其前项之和，则S_n中最大的是(　　)

(A) S_{10}　　(B) S_{11}　　(C) S_{20}　　(D) S_{21}

【答案】C

【解析】$3(a+7d)=5(a+12d)$，$\Rightarrow d=-\frac{2}{39}a$，令 $a_n=a-\frac{2}{39}a\ (n-1)\geqslant 0$，$a_{n+1}=a-\frac{2}{39}a\ n<0$，得$n=20$．选 C.

2． 设复平面上单位圆内接正20边形的20个顶点所对应的复数依次为Z_1，Z_2，…，Z_{20}，则复数Z_1^{1995}，Z_2^{1995}，…，Z_{20}^{1995}所对应的不同的点的个数是(　　)

(A) 4　　(B) 5　　(C) 10　　(D) 20

【答案】A

【解析】设 $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，则 $z_k=z_1\varepsilon^{k-1}$，其中 $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$． $\varepsilon^{20}=1$． $\varepsilon^{15}=-i$，$\varepsilon^{10}=-1$， $\varepsilon^{5}=i$．

∴ $z_k^{1995}=(\cos1995\theta+i\sin1995\theta)\ \varepsilon^{1995(k-1)}=(\cos1995\theta+i\sin1995\theta)(-i)^{k-1}$．

∴ 共有4个值．选A．

3． 如果甲的身高数或体重数至少有一项比乙大，则称甲不亚于乙，在100个小伙子中，如果某人不亚于其他99人，就称他为棒小伙子，那么，100个小伙子中的棒小伙子最多可能有(　　)

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 50个　　(D) 100个

【答案】D

【解析】把身高按从高到矮排为1~100号，而规定二人比较，身高较高者体重较小，则每个人都是棒小伙子．故选D.

4． 已知方程$|x-2n|=k\sqrt{x}\,(n\in N^*)$在区间$(2n-1,2n+1]$上有两个不相等的实根，则$k$的取值范围是(　　)

(A) $k>0$　　(B) $0<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(C) $\frac{1}{2n+1}<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$　　(D) 以上都不是

【答案】B

【解析】由$|x-2n|\geqslant 0$，故$k\geqslant 0$，若$k=0$，可知在所给区间上只有1解．故$k>0$.

由图象可得，$x=2n+1$时，$k\sqrt{x}\leqslant 1$．即$k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$．故选 B.

又解：$y=(x-2n)^2$与线段$y=k^2x\,(2n-1<x\leqslant 2n+1)$有两个公共点．$x^2-(4n+k^2)x+4n^2=0$有$(2n-1,2n+1]$上有两个根．故$\Delta=(4n+k^2)^2-16n^2>0$．且$(2n-1)^2-(4n+k^2)(2n-1)+4n^2>0$，$(2n+1)^2-(4n+k^2)(2n+1)+4n^2\geqslant 0$，$2n-1<2n+\frac{1}{2}k^2<2n+1$．$\Rightarrow$ $k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$．

5. $\log_{\sin1}\cos1$，$\log_{\sin1}\tan1$，$\log_{\cos1}\sin1$，$\log_{\cos1}\tan1$ 的大小关系是

(*A*) $\log_{\sin1}\cos1<\log_{\cos1}\sin1<\log_{\sin1}\tan1<\log_{\cos1}\tan1$

(*B*) $\log_{\cos1}\sin1<\log_{\cos1}\tan1<\log_{\sin1}\cos1<\log_{\sin1}\tan1$

(*C*) $\log_{\sin1}\tan1<\log_{\cos1}\tan1<\log_{\cos1}\sin1<\log_{\sin1}\cos1$

(*D*) $\log_{\cos1}\tan1<\log_{\sin1}\tan1<\log_{\sin1}\cos1<\log_{\cos1}\sin1$

【答案】C

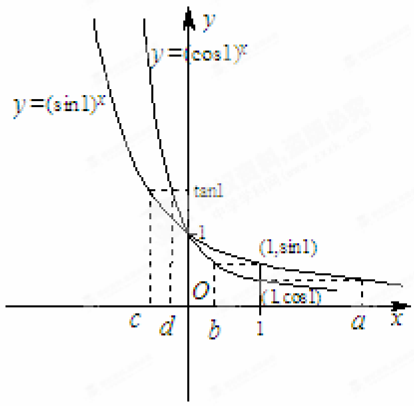
【解析】$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$，故 $0<\cos1<\sin1<1<\tan1$. $\Rightarrow$

$\log_{\sin1}\tan1<0$， $\log_{\cos1}\tan1<0$， $\log_{\sin1}\cos1>0$，$\log_{\cos1}\sin1>0$，

设 $\log_{\sin1}\cos1=a$，则得 $(\sin1)^a=\cos1<\sin1$，$a>1$；$\log_{\cos1}\sin1=b$，则 $(\cos1)^b=\sin1>\cos1$，$0<b<1$；即 $\log_{\cos1}\sin1<\log_{\sin1}\cos1$.

设 $\log_{\sin1}\tan1=c$，$\log_{\cos1}\tan1=d$，则得 $(\sin1)^c=(\cos1)^d=\tan1$，(指数函数图象进行比较)，$c<d$，即 $\log_{\sin1}\tan1<\log_{\cos1}\tan1$

故选 *C*.



6. 设 *O* 是正三棱锥 *P*—*ABC* 底面三角形 *ABC* 的中心，过 *O* 的动平面与 *PC* 交于 *S*，与 *PA*，*PB* 的延长线分别交于 *Q*，*R*，则和式 $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$

(*A*) 有最大值而无最小值　　　　(*B*) 有最小值而无最大值

(*C*) 既有最大值又有最小值，两者不等　　(*D*) 是一个与面 *QPS* 无关的常数

【答案】D

【解析】*O* 到面 *PAB*、*PBC*、*PCA* 的距离相等．设∠*APB*=α，则

$V_{P-QRS}=\frac{1}{6}d(PQ\cdot PR+PR\cdot PS+PS\cdot PQ)\sin\alpha$．(其中 *d* 为 *O* 与各侧面的距离)．

$V_{P-QRS}=\frac{1}{6}PQ\cdot PR\cdot PS\sin\alpha\sin\theta$．(其中 θ 为 *PS* 与面 *PQR* 的夹角)

$\therefore d(PQ\cdot PR+PR\cdot PS+PS\cdot PQ)=PQ\cdot PR\cdot PS\sin\theta$．

$\therefore \frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{\sin\theta}{d}$ 为定值．故选 *D*.

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1. 设 α，β 为一对共轭复数，若 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$，且 $\frac{\alpha}{\beta^2}$ 为实数，则 $|\alpha|=$______.

【答案】2

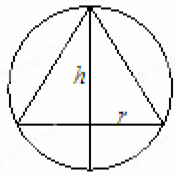
【解析】设 $\alpha=x+yi$，(x，$y\in$R)，则 $|\alpha-\beta|=2|y|$．$\therefore y=\pm\sqrt{3}$.

设 $\arg\alpha=\theta$，则可取 $\theta+2\theta=2\pi$，(因为只要求 $|\alpha|$，故不必写出所有可能的角)．$\theta=\frac{2}{3}\pi$，于是 $x=\pm1$．$|\alpha|=2$.

2. 一个球的内接圆锥的最大体积与这个球的体积之比为______.

【答案】8：27

【解析】设球半径为 R，其内接圆锥的底半径为 r，高为 h，作轴截面，则 $r^2=h(2R-h)$． $V_{锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)=\frac{\pi}{6}h\cdot h(4R-2h)\leqslant\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$.



∴ 所求比为 8：27.

3．用$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数，方程 $\lg^2x-[\lg x]-2=0$ 的实根个数是______.

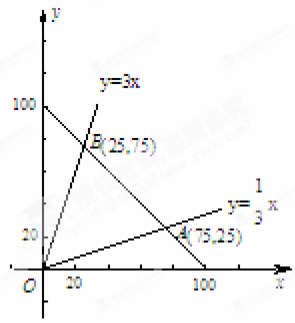
【答案】3

【解析】令 $\lg x=t$，则得 $t^2-2=[t]$．作图象，知 $t=-1$，$t=2$，及 $1<t<2$ 内有一解．当 $1<t<2$ 时，$[t]=1$，$t=\sqrt{3}$．故得：$x=\frac{1}{10}$，$x=100$，$x=10^{\sqrt{3}}$，即共有 3 个实根．

4. 直角坐标平面上，满足不等式组 $\begin{cases} y\leqslant 3x, \\ y\geqslant \frac{x}{3}, \\ x+y\leqslant 100 \end{cases}$ 的整点个数是______.

【答案】2511

【解析】如图，即△OAB内部及边界上的整点．由两轴及 $x+y=100$ 围成区域(包括边界)内的整点数=1+2+3+…+101=5151 个．



由 x 轴、$y=\frac{1}{3}x$，$x+y=100$ 围成区域(不包括 $y=\frac{1}{3}x$ 上)内的整点数($x=1$，2，3 时各有 1 个整点，$x=4$，5，6 时各有 2 个整点，…，$x=73$，74，75 时有 25 个整点，$x=76$，77，…，100 时依次有 25，24，…，1 个整点．共有 3×1+3×2+…+3×25+25+24+…+1=4(1+2+…+25)=1300．由对称性，由 y 轴、$y=3x$、$x+y=100$ 围成的区域内也有 1300 个整点．

∴所求区域内共有 5151－2600=2551 个整点．

5． 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可使用，那么不同的染色方法的总数是______.

【答案】420

【解析】顶点染色，有 5 种方法，

底面 4 个顶点，用 4 种颜色染，$A_4^4=24$ 种方法，用 3 种颜色，选 1 对顶点 C_2^1，这一对顶点用某种颜色染 C_4^1，余下 2 个顶点，任选 2 色染，A_3^2种，共有 $C_2^1C_4^1A_3^2=48$ 种方法；用 2 种颜色染：$A_4^2=12$ 种方法；

∴共有 5(24+48+12) =420 种方法.

6． 设 $M=\{1，2，3，…，1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是______.

【答案】1870

【解析】$1995=15\times133$．故取出所有不是 15 的倍数的数，共 1862 个，这此数均符合要求．

在所有 15 的倍数的数中，15^2 的倍数有 8 个，这此数又可以取出，这样共取出了 1870 个．即 $|A|\geqslant1870$．

又 $\{k,\ 15k\}$ $(k=9,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 133)$ 中的两个元素不能同时取出，故 $|A|\leqslant 1995-133+8=1870$．

第二试

一、(25 分) 给定曲线族 $2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0$，$\theta$ 为参数，求该曲线在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值．

【解析】以 $y=2x$ 代入曲线方程得 $x=0$，$x=\dfrac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}$．

∴ 所求弦长 $l=\left|\dfrac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}\right|\sqrt{5}$．故只要求 $|x|$ 的最大值即可．

由 $(2x-8)\sin\theta-(x+1)\cos\theta=1-3x$．$\Rightarrow(2x-8)^2+(x+1)^2\geqslant(1-3x)^2$，即 $x^2+16x-16\leqslant0$．

解之得，$-8\leqslant x\leqslant2$．即 $|x|\leqslant8$（当 $\sin\theta=\pm\dfrac{24}{25}$，$\cos\theta=\mp\dfrac{7}{25}$ 时即可取得最大值）．故得最大弦长为 $8\sqrt{5}$．

二、(25 分) 求一切实数 p，使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的三个根均为正整数．

【解析】$x=1$ 是方程的一个根．于是只要考虑二次方程

$$5x^2-5px+66p-1=0$$

的两个根为正整数即可．

设此二正整数根为 u、v．则由韦达定理知，

$$\begin{cases} u+v=p & ① \\ uv=\dfrac{1}{5}(66p-1) & ② \end{cases}$$

消去 p，得 $5uv-66(u+v)=-1$．同乘以 5：$5^2uv-5\times66u-5\times66v=-5$．

∴ $(5u-66)(5v-66)=66^2-5=4351=19\times229$．由于 u、v 均为整数，故 $5u-66$、$5v-66$ 为整数．

$$\therefore\quad \begin{cases} 5u-66=1, & -1, & 19, & -19, \\ 5v-66=4351, & -4351, & 229, & -229. \end{cases}$$

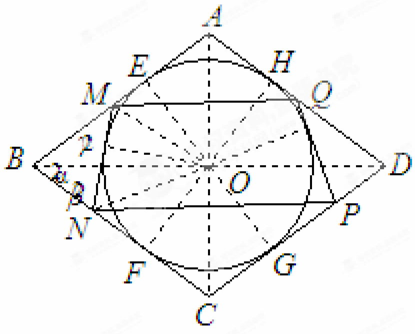
∴ 其中使 u、v 为正整数的，只有 $u=17$，$v=59$ 这一组值．此时 $p=76$．

三、(35 分) 如图，菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于 E, F, G, H, 在弧 EF 与 GH 上分别作圆 O 的切线交 AB 于 M, 交 BC 于 N, 交 CD 于 P, 交 DA 于 Q, 求证： $MQ/\!/NP$.

分析 要证 $MQ/\!/NP$, 因 $AB/\!/DC$, 故可以考虑证明 $\angle AMQ=\angle CPN$. 现 $\angle A=\angle C$, 故可证 $\triangle AMQ\backsim\triangle CPN$. 于是要证明 $AM:AQ=CP:CN$.

【解析】证明 设 $\angle ABC=2\alpha$, $\angle BNM=2\beta$, $\angle BMN=2\gamma$. 则

由 ON 平分 $\angle MNC$ 得 $\angle ONC=\angle ONM=\frac{1}{2}(180°-2\beta)=90°-\beta$;



同理，$\angle OMN=\angle OMA=90°-\gamma$.

而 $\angle CON=180°-\angle OCN-\angle ONC=\beta+\alpha=90°-\gamma$，于是 $\triangle CON\backsim\triangle AMO$，

$\therefore AM:AO=CO:CN$，即 $AM\cdot CN=AO^2$.

同理，$AQ\cdot CP=AO^2$，$\therefore AM\cdot CN=AQ\cdot CP$.

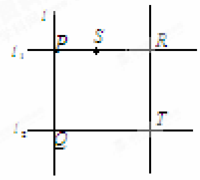
$\therefore \triangle AMQ\backsim\triangle CPN$，$\therefore \angle AMQ=\angle CPN$.

$\therefore MQ/\!/NP$.

四、(35 分) 将平面上的每个点都以红，蓝两色之一着色．证明：存在这样两个相似的三角形，它们的相似比为 1995，并且每一个三角形的三个顶点同色．

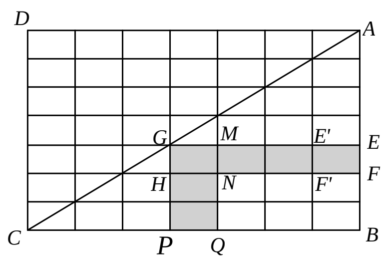
【解析】证明：首先证明平面上一定存在三个顶点同色的直角三角形．

任取平面上的一条直线 l，则直线 l 上必有两点同色．设此两点为 P、Q，不妨设 P、Q 同着红色．过 P、Q 作直线 l 的垂线 l_1、l_2，若 l_1 或 l_2 上有异于 P、Q 的点着红色，则存在红色直角三角形．若 l_1、l_2 上除 P、Q 外均无红色点，则在 l_1 上任取异于 P 的两点 R、S，则 R、S 必着蓝色，过 R 作 l_1 的垂线交 l_2 于 T，则 T 必着蓝色．$\triangle RST$ 即为三顶点同色的直角三角形．



设直角三角形 ABC 三顶点同色 ($\angle B$ 为直角)．把 $\triangle ABC$ 补成矩形 $ABCD$ (如图)．把矩形的每边都分成 n 等分 (n 为正奇数，$n>1$，本题中取 $n=1995$)．连结对边相应分点，把矩形 $ABCD$ 分成 n^2 个小矩形．

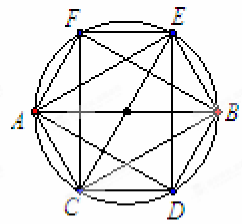
AB 边上的分点共有 $n+1$ 个，由于 n 为奇数，故必存在其中两个相邻的分点同色，(否则任两个相邻分点异色，则可得 A、B 异色)，不妨设相邻分点 E、F 同色．考察 E、F 所在的小矩形的另两个顶点 E'、F'，若 E'、F' 异色，则 $\triangle EFE'$ 或 $\triangle DFF'$ 为三个顶点同色的小直角三角形．若 E'、F' 同色，再考察以此二点为顶点而在其左边的小矩形，….这样依次考察过去，不妨设这一行小矩形的每条竖边的两个顶点都同色．



同样，BC 边上也存在两个相邻的顶点同色，设为 P、Q，则考察 PQ 所在的小矩形，同理，若 P、Q 所在小矩形的另一横边两个顶点异色，则存在三顶点同色的小直角三角形．否则，PQ 所在列的小矩形的每条横边两个顶点都同色．

现考察 EF 所在行与 PQ 所在列相交的矩形 $GHMN$，如上述，M、H 都与 N 同色，$\triangle MNH$ 为顶点同色的直角三角形.

由 $n=1995$，故 $\triangle MNH \backsim \triangle ABC$，且相似比为 1995，且这两个直角三角形的顶点分别同色.



证明 2：首先证明：设 a 为任意正实数，存在距离为 2a 的同色两点．任取一点 O(设为红色点)，以 O 为圆心，2a 为半径作圆，若圆上有一个红点，则存在距离为 2a 的两个红点，若圆上没有红点，则任一圆内接六边形 ABCDEF 的六个顶点均为蓝色，但此六边形边长为 2a．故存在距离为 2a 的两个蓝色点．

下面证明：存在边长为 a，$\sqrt{3}$a，2a 的直角三角形，其三个顶点同色．如上证，存在距离为 2a 的同色两点 A、B(设为红点)，以 AB 为直径作圆，并取圆内接六边形 ACDBEF，若 C、D、E、F 中有任一点为红色，则存在满足要求的红色三角形．若 C、D、E、F 为蓝色，则存在满足要求的蓝色三角形．

下面再证明本题：由上证知，存在边长为 a，$\sqrt{3}$a，2a 及 1995a，1995$\sqrt{3}$a，1995×2a 的两个同色三角形，满足要求．

证明 3：以任一点 O 为圆心，a 及 1995a 为半径作两个同心圆，在小圆上任取 9 点，必有 5 点同色，设为 A、B、C、D、E．作射线 OA、OB、OC、OD、OE，交大圆于 A′，B′，C′，D′，E′，则此五点中必存在三点同色，设为 A′、B′、C′．则 ΔABC 与 ΔA′B′C′ 为满足要求的三角形．