2015年全国高中数学联赛（B卷）（一试）

一、填空题（每个小题8分，满分64分

1：已知函数 $f(x)=\begin{cases} a-x & x\in[0,3] \\ a\log_2^x & x\in(3,+\infty) \end{cases}$，其中 a 为常数，如果 $f(2)<f(4)$，则 a 的取值范围是__________

2：已知 $y=f(x)+x^3$ 为偶函数，且 $f(10)=15$，则 $f(-10)$ 的值为__________

3：某房间的室温 T（单位：摄氏度）与时间 t（单位：小时）的函数关系为：$T=a\sin t+b\cos t, t\in(0,+\infty)$，其中 a,b 为正实数，如果该房间的最大温差为10摄氏度，则 $a+b$ 的最大值是__________

4:设正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是单位正方形，如果二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则 $AA_1=$__________

5：已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项与公差均为正数，且 a_2,a_5,a_9 依次成等比数列，则使得 $a_1+a_2+\cdots+a_k>100a_1$ 的最小正整数 k 的值是__________

6：设 k 为实数，在平面直角坐标系中有两个点集 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=2(x+y)\}$ 和 $B=\{(x,y)|kx-y+k+3\geq 0\}$，若 $A\cap B$ 是单元集，则 k 的值为__________

7：设 P 为椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上的动点，点 $A(1,1),B(0,-1)$，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值为_____

8：正2015边形 $A_1A_2\cdots A_{2015}$ 内接于单位圆 O，任取它的两个不同顶点 A_i,A_j，则 $|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}|\geq 1$ 的概率为__________

二、解答题

9：（本题满分16分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,$ 对任意正整数 m,n，均有 $a_{m+n}=a_m+a_n+2mn$

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）如果存在实数 c 使得 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}<c$ 对所有正整数 k 都成立，求 c 的取值范围

10：（本题满分20分）设 a_1,a_2,a_3,a_4 为四个有理数，使得：

$\{a_ia_j|1\leq i<j\leq 4\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\}$，求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值

11：（本题满分 20 分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，存在经过点 F 的一条直线 l 交椭圆于 A,B 两点，使得 $OA\perp OB$，求该椭圆的离心率的取值范围

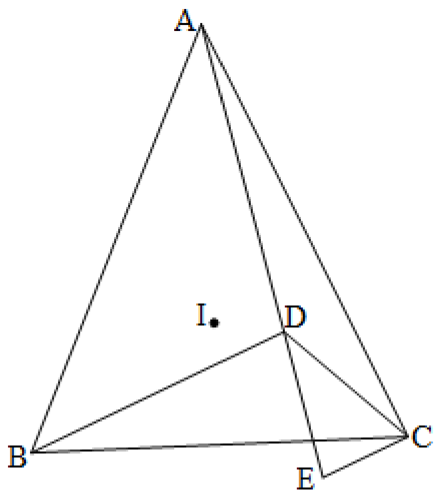
（加试）

1：（本题满分 40 分）证明：对任意三个不全相等的非负实数 a,b,c 都有：

$\frac{(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}\geq\frac{1}{2}$，并确定等号成立的充要条件

2：（本题满分 40 分）如图，在等腰 ΔABC 中，$AB=AC$，设 I 为其内心，设 D 为 ΔABC 内的一个点，满足 I,B,C,D 四点共圆，过点 C 作 BD 的平行线，与 AD 的延长线交于 E

求证：$CD^2=BD\cdot CE$



3：（本题满分 50 分）证明：存在无穷多个正整数组 $(a,b,c)(a,b,c>2015)$ 满足：

$a|bc-1,b|ac+1,c|ab+1$

4：（本题满分 50 分）给定正整数 $m,n(2\leq m\leq n)$，设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任取 m 个互不相同的数构成的一个排列，如果存在 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 a_k+k 为奇数，或者存在整数 $k,l(1\leq k<l\leq m)$，使得 $a_k>a_l$，则称 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是一个“好排列”，试确定所有好排列的个数。

2015 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a-x, & x\in[0,3], \\ a\log_2 x, & x\in(3,+\infty), \end{cases}$ 其中 a 为实数. 如果 $f(2)<f(4)$，则 a 的取值范围是__________.

答案： $(-2,+\infty)$.

解： $f(2)=a-2$， $f(4)=2a$，所以 $a-2<2a$，解得：$a>-2$.

2. 已知 $y=f(x)+x^3$ 为偶函数，$f(10)=15$. 则 $f(-10)$ 的值为____________.

答案： 2015.

解： 由已知得 $f(-10)+(-10)^3=f(10)+10^3$，即 $f(-10)=f(10)+2000=2015$.

3. 某房间的室温 T（单位：摄氏度）与时间 t（单位：小时）的函数关系是：$T=a\sin t+b\cos t$，$t\in(0,+\infty)$，其中 a,b 是正实数. 如果该房间的最大温差为 10 摄氏度，则 $a+b$ 的最大值是__________.

答案： $5\sqrt{2}$.

解： 由辅助角公式：$T=a\sin t+b\cos t=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\varphi)$，其中 φ 满足条件 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 则函数 T 的值域是 $\left[-\sqrt{\quad+b^2},\sqrt{\quad+b^2}\right]$，室内最大温差为 $2\sqrt{a^2+b^2}\le 10$，得 $\sqrt{a^2+b^2}\le 5$.

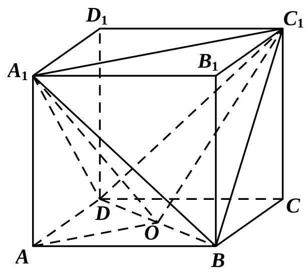
故 $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\le 5\sqrt{2}$，等号成立当且仅当 $a=b=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$.

4. 设正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是单位正方形，如果二面角 A_1-BD-C_1 的大小是 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $AA_1=$__________.

答案： $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

解： 取 BD 的中点 O，连接 OA,OA_1,OC_1.

则 $\angle A_1OC_1$ 是二面角 A_1-BD-C_1 的平面角，因此 $\angle A_1OC_1=\frac{\pi}{3}$.又 $OA_1=OC_1$，所以 $\triangle OA_1C_1$ 是等边三角形.故 $A_1O=A_1C_1=\sqrt{2}$，所以



$$AA_1=\sqrt{A_1O^2-AO^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，首项与公差均为正数，且 a_2,a_5,a_9 依次成等比数列，则使得 $a_1+a_2+\cdots+a_k>100a_1$ 的最小正整数 k 的值是__________.

答案：34.

解：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_2=a_1+d$，$a_5=a_1+4d$，$a_9=a_1+8d$.

因为 a_2,a_5,a_9 依次成等比数列，所以 $a_2a_9=a_5^2$，即

$$(a_1+d)(a_1+8d)=(a_1+4d)^2.$$

化简上式得到：$a_1d=8d^2$.又 $d>0$，所以 $a_1=8d$. 由

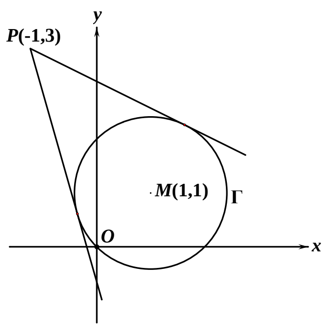
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1}=\frac{a_1k+\frac{k(k-1)}{2}d}{a_1}=k+\frac{k(k-1)}{16}>100.$$

解得 $k_{\min}=34$.

6. 设 k 为实数，在平面直角坐标系 xOy 中有两个点集 $A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=2(x+y)\right\}$ 和 $B=\left\{(x,y)\mid kx-y+k+3\geq 0\right\}$. 若 $A\cap B$ 是单元集，则 k 的值是_________.

答案：$-2-\sqrt{3}$.

解：点集 A 是圆周 $\Gamma:(x-1)^2+(y-1)^2=2$，点集 B 是恒过点 $P(-1,3)$ 的直线 $l:y-3=k(x+1)$ 及下方（包括边界）.



作出这两个点集知，当 $A\cap B$ 是单元集时，直线 l 是过点 P 的圆 Γ 的一条切线.故圆 Γ 的圆心 $M(1,1)$ 到直线 l 的距离等于圆的半径 $\sqrt{2}$，故 $\frac{|k-1+k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$.

结合图像，应取较小根 $k=-2-\sqrt{3}$.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上的一个动点，点 A, B 的坐标分别为 $(1,1)$, $(0,-1)$，则 $|PA|+|PB|$ 最大值为____________.

答案：5.

解：取 $F(0,1)$，则 F, B 分别是椭圆的上、下焦点，由椭圆定义知，$|PF|+|PB|=4$.

因此，$|PA|+|PB|=4-|PF|+|PA|\le 4+|FA|=4+1=5$.

当 P 在 AF 延长线与椭圆的交点 $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ 时，$|PA|+|PB|$ 最大值为 5.

8. 正 2015 边形 $A_1A_2\cdots A_{2015}$ 内接于单位圆 O，任取它的两个不同的顶点 A_i,A_j，$\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|\ge 1$ 的概率是__________.

答案： $\frac{671}{1007}$.

解： 因为 $\left|\overrightarrow{OA_i}\right|=\left|\overrightarrow{OA_j}\right|=1$，所以

$$\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA_j}\right|^2+2\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=2\left(1+\cos\left\langle\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OA_j}\right\rangle\right).$$

故 $\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|\ge 1$ 的充分必要条件是 $\cos\left\langle\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OA_j}\right\rangle\ge -\frac{1}{2}$，即向量 $\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OA_j}$ 的夹角不超过 $\frac{2\pi}{3}$.

对任意给定的向量 $\overrightarrow{OA_i}$，满足条件 $\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|\ge 1$ 的向量 $\overrightarrow{OA_j}$ 的取法共有：

$$\left[\frac{2\pi}{3}\div\frac{2\pi}{2015}\right]\times 2=1342$$

种，故 $\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|\ge 1$ 的概率是：$p=\frac{2015\times 1342}{2015\times 2014}=\frac{671}{1007}$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分） 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且对任意正整数 m,n，均有 $a_{m+n}=a_m+a_n+2mn$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）如果实数 c 使得 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}<c$ 对所有正整数 k 都成立，求 c 的取值范围.

解：（1）在 $a_{m+n}=a_m+a_n+2mn$ 中令 $m=1$ 可以得到 $\{a_n\}$ 的递推公式：

$$a_{n+1}=a_1+a_n+2n=a_n+(3+2n).$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为：

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3+2k)=3+\frac{[5+(2n+1)](n-1)}{2}=n(n+2).$$

…………………8 分

（事实上，对这个数列 $\{a_n\}$，$a_1=1\times 3=3$，并且

$$a_{m+n}=(m+n)(m+n+2)=(m+n)^2+2(m+n)=(m^2+2m)+(n^2+2n)+2mn$$

$$=a_m+a_n+2mn,$$

所以$a_n=n(n+2)$是数列$\{a_n\}$的通项公式.）

（2）注意到：$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，所以

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right).$$

…………………12 分

故$\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{4}$，并且$\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{a_n}\to\dfrac{3}{4}$（$k\to\infty$），因此$c$的取值范围是$c\in\left[\dfrac{3}{4}+\infty\right)$.

…………………16 分

10.（本题满分 20 分） 设a_1,a_2,a_3,a_4是 4 个有理数，使得

$$\left\{a_ia_j\,\middle|\,1\le i<j\le 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\}.$$

求$a_1+a_2+a_3+a_4$的值.

解： 由条件可知，$a_ia_j\left(1\le i<j\le 4\right)$ 是 6 个互不相同的数，且其中没有两个为相反数，由此知，a_1,a_2,a_3,a_4 的绝对值互不相等，不妨设$|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$，则$|a_i||a_j|\left(1\le i<j\le 4\right)$中最小的与次小的两个数分别是$|a_1||a_2|$及$|a_1||a_3|$，最大与次大的两个数分别是$|a_3||a_4|$及$|a_2||a_4|$，从而必须有

$$\begin{cases}a_1a_2=-\dfrac{1}{8},\\ a_1a_3=1,\\ a_2a_4=3,\\ a_3a_4=-24,\end{cases}$$

…………………10 分

于是$a_2=-\dfrac{1}{8a_1},a_3=\dfrac{1}{a_1},a_4=\dfrac{3}{a_2}=-24a_1$. 故

$$\{a_2a_3,a_1a_4\}=\left\{-\frac{1}{8a_1^2},-24a_1^2\right\}=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\},$$ …………15 分

结合 $a_1\in\mathbb{Q}$，只可能 $a_1=\pm\dfrac{1}{4}$.

由此易知 $a_1=\dfrac{1}{4},\ a_2=-\dfrac{1}{2},\ a_3=4,\ a_4=-6$ 或者 $a_1=-\dfrac{1}{4},\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_3=-4,\ a_4=6$．经检验知这两组解均满足问题的条件.

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\dfrac{9}{4}$. ……………………20 分

11. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点为 $F\left(c,\ 0\right)$，若存在经过点焦 F 的一条直线 l 交椭圆于 A、B 两点，使得 $OA\perp OB$．求该椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}$ 的取值范围.

解：设椭圆的右焦点 F 的坐标为 $(c,0)$．显然 l 不是水平直线，设直线 l 的方程为 $x=ky+c$，点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$．将直线 l 的方程与椭圆方程联立，消去 x 得

$$\left(b^2k^2+a^2\right)y^2+2kb^2cy+b^2\left(c^2-a^2\right)=0.$$

由韦达定理

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2kb^2c}{b^2k^2+a^2}, \\ y_1y_2=\dfrac{b^2\left(c^2-a^2\right)}{b^2k^2+a^2}=-\dfrac{b^4}{b^2k^2+a^2}. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=x_1x_2+y_1y_2=(ky_1+c)(ky_2+c)+y_1y_2 \\ &=\left(k^2+1\right)y_1y_2+kc(y_1+y_2)+c^2 \\ &=\left(k^2+1\right)\left(-\frac{b^4}{b^2k^2+a^2}\right)+kc\left(-\frac{2kb^2c}{b^2k^2+a^2}\right)+c^2 \\ &=\frac{-k^2b^2\left(1+c^2\right)+a^2c^2-b^4}{b^2k^2+a^2}. \end{aligned}$$

……………………5 分

因为 $OA\perp OB$ 等价于 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，故由上式可知，存在满足条件的直线 l，等价于存在实数 k，使得

$$\frac{-k^2b^2\left(1+c^2\right)+a^2c^2-b^4}{b^2k^2+a^2}=0,$$

即
$$k^2=\frac{a^2c^2-b^4}{b^2\left(1+c^2\right)}. \qquad ①$$

显然存在k满足①等价于

$$a^2c^2-b^4\geq 0. \tag{②}$$

……………………15 分

又$b^2=a^2-c^2$，所以②等价于$a^2c^2-\left(a^2-c^2\right)^2\geq 0$，两边除以$a^4$得到

$$\frac{c^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^2\geq 0,$$

即

$$e^2-\left(1-e^2\right)^2\geq 0.$$

由于$e<1$，解得：$e\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$. ……………………20 分

2015 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）证明：对任意三个不全相等的非负实数 a, b, c，有

$$\frac{(a-bc)^2+(b-ca)^2+(c-ab)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}\geq\frac{1}{2},$$

并确定等号成立的充分必要条件.

解：当 a, b, c 不全相等时，原不等式等价于

$$2(a-bc)^2+2(b-ca)^2+2(c-ab)^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 .$$

上式可化简为

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-12abc\geq-2ab-2bc-2ca,$$

即

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+ab+bc+ca\geq 6abc . \qquad ①$$

考虑到 $a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2, ab, bc, ca\geq 0$，故由平均不等式得，

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+ab+bc+ca\geq 6\sqrt[6]{a^2b^2\cdot b^2c^2\cdot c^2a^2\cdot ab\cdot bc\cdot ca}=6abc, \qquad ②$$

因此原不等式成立. ……………………20 分

下面考虑等号成立的充分必要条件.

注意到②中等号成立的充分必要条件是 $a^2b^2=b^2c^2=c^2a^2=ab=bc=ca$.

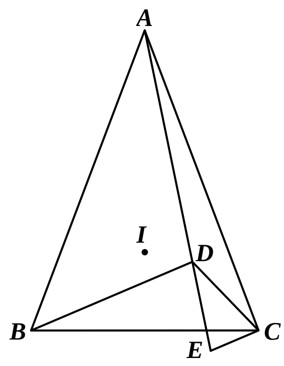
若 $abc\neq 0$，则 $ab=bc=ca$，显然 $a=b=c$，与条件矛盾！

若 $abc=0$，则 $ab=bc=ca=0$，但 a, b, c 不全为 0，不妨设 $a\neq 0$，则 $b=c=0$. 类似可得其余两种情况，即 a, b, c 中恰有一个非零. 这时原不等式中等式确实成立.

因此，原不等式等号成立当且仅当 a, b, c 中有两个是 0，另一个为正数.

……………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图，在等腰ΔABC中，$AB=AC$，I为其内心，D为ΔABC内一点，使得I, B, C, D四点共圆．过点C作BD的平行线，与AD的延长线交于点E．



求证：$CD^2=BD\cdot CE$．

证明：连接BI, CI．设I, B, C, D四点在圆O上，延长DE交圆O于F，连接FB, FC．

因为$BD /\!/ CE$，所以$\angle DCE=180°-\angle BDC=\angle BFC$．又由于

$$\angle CDE=\angle CDF=\angle CBF,$$

所以$\Delta BFC \backsim \Delta DCE$，从而

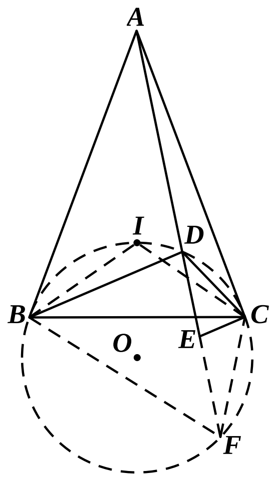
$$\frac{DC}{CE}=\frac{BF}{FC}. \qquad ①$$

……………………10 分

再证明AB, AC与圆O相切．

事实上，因为$\angle ABI=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ICB$，所以$AB$与圆$O$相切．同理$AC$与圆$O$相切．

……………………20 分



因此有$\Delta ABD \backsim \Delta AFB$，$\Delta ACD \backsim \Delta AFC$，故$\frac{BD}{BF}=\frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AF}=\frac{DC}{CF}$，即

$$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DC}. \qquad ②$$

……………………30 分

结合①、②，得$\frac{DC}{CE}=\frac{BD}{DC}$，即$CD^2=BD\cdot CE$．

……………………40 分

三、（本题满分 50 分）证明：存在无穷多个正整数组$(a, b, c)\,(a, b, c>2015)$，使得

$$a \mid bc-1,\ b \mid ac+1,\ c \mid ab+1.$$

证明：考虑$c=ab+1$的特殊情况，此时$c \mid ab+1$ 成立． ……………10 分

由$a \mid bc-1$知，$a \mid b(ab+1)-1$，故

$$a \mid b-1. \qquad ①$$

由$b \mid ac+1$知，$b \mid a(ab+1)+1$，故

$$b \mid a+1. \qquad ②$$

为满足①、②，取$a=k,\ b=k+1\,(k\in \mathbf{N}^*)$，此时$c=ab+1=k^2+k+1$．

……………………40 分

当正整数$k>2015$时，$(a, b, c)=(k, k+1,\ k^2+k+1)$均符合条件，因此满足条件的正整数组$(a, b, c)$有无穷多个． ……………………50 分

四、（本题满分 50 分）给定正整数 $m,\ n\,(2\le m\le n)$．设 $a_1,\ a_2,\cdots,a_m$ 是 $1,\ 2,\cdots,n$ 中任取 m 个互不相同的数构成的一个排列．如果存在 $k\in\{1,\ 2,\cdots,m\}$ 使得 a_k+k 为奇数，或者存在整数 $k,\ l\,(1\le k<l\le m)$，使得 $a_k>a_l$，则称 $a_1,\ a_2,\cdots,a_m$ 是一个“好排列”．试确定所有好排列的个数．

解：首先注意，“存在 $k\in\{1,\ 2,\cdots,m\}$ 使得 a_k+k 为奇数”是指存在一个数与它所在的位置序号的奇偶性不同；“存在整数 $k,\ l\,(1\le k<l\le m)$，使得 $a_k>a_l$”意味着排列中存在逆序，换言之，此排列不具有单调递增性．

将不是好排列的排列称为“坏排列”，下面先求坏排列的个数，再用所有排列数减去坏排列数．注意坏排列同时满足：（1）奇数位必填奇数，偶数位必填偶数；（2）单调递增． ··················10 分

下面来求坏排列的个数．设 P 是坏排列全体，Q 是在 $1,\ 2,\cdots,\left[\dfrac{n+m}{2}\right]$ 中任取 m 项组成的单调递增数列的全体．

对于 P 中的任意一个排列 $a_1,\ a_2,\cdots,a_m$，定义

$$f(a_1,\ a_2,\cdots,a_m)=\left(\frac{a_1+1}{2},\ \frac{a_2+2}{2},\cdots,\frac{a_m+m}{2}\right).$$

因为 $a_k\le n,\ k\le m$，故由条件（1）可知，所有的 $\dfrac{a_k+k}{2}$ 均属于集合 $\left\{1,\ 2,\cdots,\left[\dfrac{n+m}{2}\right]\right\}$．再由条件（2）可知，$\left\{\dfrac{a_k+k}{2}\right\}(k=1,2,\cdots,m)$ 单调递增．故如上定义的 f 给出了 $P\to Q$ 的一个映射．显然 f 是一个单射． ···············30 分

下面证明 f 是一个满射．事实上，对于 Q 中任一个数列 $b_1,\ b_2,\cdots,b_m$，令 $a_k=2b_k-k\,(k=1,2,\cdots,m)$．因为整数 $b_{k+1}>b_k$，故 $b_{k+1}\ge b_k+1$，从而

$$a_{k+1}-a_k=2(b_{k+1}-b_k)-1\ge 1\,(1\le k\le m-1),$$

故 $a_1,\ a_2,\cdots,a_m$ 单调递增．

又 $a_1\ge 1$，而 $a_m\le 2\left[\dfrac{n+m}{2}\right]-m\le n$，及 $a_k+k=2b_k$ 为偶数，故 $a_1,\ a_2,\cdots,a_m$ 为 P 中的一个排列．显然 $f(a_1,\ a_2,\cdots,a_m)=\left(b_1,\ b_2,\cdots,b_m\right)$，故 f 是一个满射．

综上可见，f 是 $P \to Q$ 的一个一一映射，故 $|P| = |Q|$.　　　　…………40 分

又 Q 中的所有数列与集合 $\left\{1, 2, \cdots, \left[\frac{n+m}{2}\right]\right\}$ 的所有 m 元子集一一对应，故 $|Q| = \mathrm{C}_{\left[\frac{n+m}{2}\right]}^{m}$，从而 $|P| = \mathrm{C}_{\left[\frac{n+m}{2}\right]}^{m}$.

最后，我们用总的排列数 $\mathrm{P}_{n}^{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$ 扣除坏排列的数目，得所有的排列的个数为 $\frac{n!}{(n-m)!} - \mathrm{C}_{\left[\frac{n+m}{2}\right]}^{m}$.　　　　…………………50 分