2013 年全国高中数学联赛一试试题

一．填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分。

1.设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x|-x\in A,2-x^2\notin A\}$，则集合 B 中所有元素的和为

2.在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，F 是抛物线的焦点，则 $S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}$=

3.在 ΔABC 中，已知 $\sin A=10\sin B\cdot\sin C,\cos A=10\cos B\cdot\cos C$，则 $\tan A$ 的值为

4.已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为

5.设 a、b 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$，则 ab 的最大值为

6.从 $1,2,\cdots,20$ 中任取 5 个不同的数，其中至少有 2 个是相邻数的概率为

7.若实数 x，y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是

8.已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$ 均有 $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\dfrac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为

二．解答题：本大题共 3 小题，共 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9.（本题满分 16 分）给定正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\ge 2S_{n-1},n=2,3,\cdots$，这里 $S_n=x_1+\cdots+x_n$.
证明：存在常数 $C>0$，使得
$x_n\ge C\cdot 2^n,n=1,2,\cdots$

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1,A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点，F_1,F_2 分别为椭圆的左右焦点，P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点.若平面中有两个点 Q,R 满足 $QA_1\perp PA_1,QA_2\perp PA_2,RF_1\perp PF_1,RF_2\perp PF_2$，试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系，并给出证明。

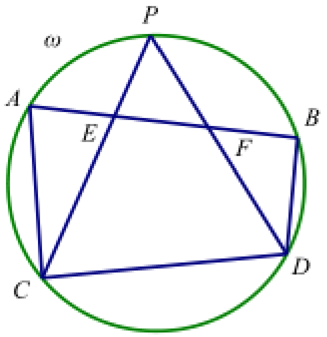
11.（本题满分 20 分）设函数 $f(x)=ax^2+b$，求所有的正实数对 (a,b)，使得对任意实数 x,y 均有 $f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y)$

2013年全国高中数学联合竞赛加试试题

一．（本题满分40分）如图，AB是圆ω的一条弦，P为弧AB内一点，E、F为线段AB上两点，满足$AE=EF=FB$.连接PE、PF并延长，与圆ω分别项交于点C、D.求证：

$EF\cdot CD=AC\cdot BD$

(解题时请将图画在答卷纸上)



二．（本题满分40分）给定正整数u、v.数列$\{a_n\}$的定义如下：$a_1=u+v$，对整数$m\geq 1$，

$$\begin{cases} a_{2m}=a_m+u, \\ a_{2m+1}=a_m+v. \end{cases}$$

记$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m(m=1,2,\cdots)$.证明：数列$\{S_n\}$中有无穷多项是完全平方数。

三．（本题满分50分）一次考试共有m道试题，n个学生参加，其中$m,n\geq 2$为给定的整数.每道题的得分规则是：若该题恰有x个学生没有答对，则每个答对盖提的学生得x分，未答对的学生得0分.每个学生的总分为其m道题的得分总和.将所有的学生总分从高到低排列为$p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$，求$p_1+p_2$的最大可能值。

四．（本题满分50分）设n,k为大于1的整数，$n<2^k$.证明：存在$2k$个不被n整除的整数，若将他们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被n整除。

2013年全国高中数学联合竞赛一试试题参考答案及评分标准

说明：

1.评阅试卷时，请依据本评分标准。填空题只设8分和0分；其他各题的评阅，请严格按照本标准评分档次给给分，不要增加其他中间档次。

2.如果考生的解答和本解答的不同，只要给合理的思路、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9题4分为一个档次.第10、11小题5分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一．填空题：本大题共8小题，没小题8分，共64分.

1.答案：-5

【解答】易知$B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$.当$x=-2,-3$时，$2-x^2=-2,-7$，有$2-x^2\notin A$；

而当$x=0,-1$时，$2-x^2=2,1$，有$2-x^2\in A$.因此，根据B的定义可知$B=\{-2,-3\}$.

所以，集合B中所有元素的和为-5.

2.答案：2

【解答】点F的坐标为（1,0）.设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1=\frac{y_1^2}{4},x_2=\frac{y_2^2}{4}$，故

$$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2$$

即$\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故$y_1y_2=-8$

$$S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|)\cdot(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|)=\frac{1}{4}|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2$$

3.答案：11

【解答】由于$\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$，

所以$\sin A=11\cos A$，故$\tan A=11$

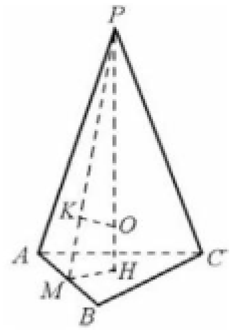
4.答案：$\frac{\sqrt{2}}{6}$

【解答】如图，设球心O在面ABC与面ABP内的摄影分别为H和K，AB中点为M，内切球半径为r,则P、K、M共线，$\angle PHM=\angle PKO=\frac{\pi}{2}$，

且$OH=OK=r,PO=PH-OH=\sqrt{2}-r$，$MH=\frac{\sqrt{3}}{6}AB=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{2+\frac{1}{12}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$,于是$\frac{r}{\sqrt{2}-r}=\frac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\frac{MH}{PM}=\frac{1}{5}$

解得：$r=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$



5.答案：$\dfrac{1}{4}$

【解答】易知$a=f(1)-f(0),b=f(0)$，则

$$ab=f(0)\cdot(f(1)-f(0))=-(f(0)-\frac{1}{2}f(1))^2+\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}$$

当$2f(0)=f(1)=\pm1$即$a=b=\pm\dfrac{1}{2}$时，$ab=\dfrac{1}{4}$，故ab的最大值为$\dfrac{1}{4}$

6.答案$\dfrac{232}{323}$

【解答】设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$取自$1,2,\cdots,20$.若a_1,a_2,a_3,a_4,a_5互不相邻，则

$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le16$

由此可知从$1,2,\cdots,20$中取 5 个互不相邻的数的选法与从$1,2,\cdots,16$中取 5 个不同的数的选法相同，即C_{16}^5种.所以从$1,2,\cdots,20$中任取 5 个不同的数，其中至少有 2 个是相邻的概率为：

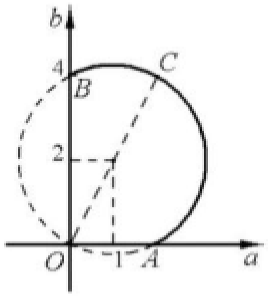
$$\frac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\frac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\frac{232}{323}$$

7.答案：$\{0\}\cup[4,20]$

【解答】令$\sqrt{y}=a,\sqrt{x-y}=b(a,b\ge0)$，此时$x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为$a^2+b^2-4a=b$，从而$a,b$满足方程：$(a-2)^2+(b-1)^2=5(a,b\ge0)$

如图所示，在aOb平面内，点(a,b)的轨迹是以$(1,2)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆在$a,b\ge0$的部分，即点 O 与弧ACB的并集，因此$\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup[2,2\sqrt{5}]$，从而

$x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4,20]$



8.答案：491.

【解答】令 $b_i=\dfrac{a_{i+1}}{a_i}(1\le i\le 8)$，则对每个符合条件的数列 $\{a_n\}$，有 $\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\dfrac{a_{i+1}}{a_i}=\dfrac{a_9}{a_1}=1$

且 $b_i\in\left\{2,1,-\dfrac{1}{2}\right\}$（$1\le i\le 8$）①

反之，由符合条件①的 8 项数列 $\{b_n\}$ 可能唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列 $\{a_n\}$。

记符合条件①的数列 $\{b_n\}$ 的个数为 N，显然 $b_i\ (1\le i\le 8)$ 中有偶数个 $-\dfrac{1}{2}$，即 $2k$ 个 $-\dfrac{1}{2}$；继而有 $2k$ 个 2，$8-4k$ 个 1.当给定 k 时，$\{b_n\}$ 的取法有 $C_8^{2k}C_{8-2k}^{2k}$ 种，易见 k 的可能值只有：0,1,2

所以 $N=1+C_8^2C_6^2+C_8^4C_4^4=1+28\times15+70\times1=491$

因此，根据对应原理，符合条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 491.

二．解答题：本大题共 3 小题，共 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9.【解答】当 $n\ge 2$ 时，$S_n\ge 2S_{n-1}$ 等价于 $x_n\ge x_1+\cdots+x_{n-1}$

对常数 $C=\dfrac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：$x_n\ge C\cdot 2^n,n=1,2,\cdots$

$n=1$ 时结论显然成立.又 $x_2\ge x_1=C\cdot 2^2$

对 $n\ge 3$，假设 $x_k\ge C\cdot 2^k,k=1,2,\cdots,n-1$，则由式①可知

$x_n\ge x_1+(x_2+\cdots+x_{n-1})\ge x_1+(C\cdot 2^2+\cdots+C\cdot 2^{n-1})=C\cdot 2^n$

所以，由归纳法可知上式成立。

10.【解答】令 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.设 $P(x_0,y_0)$，

$Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$，其中$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$， $y_0\neq 0$.由$QA\perp PA_1,QA_2\perp PA_2$可知：

$$\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0 ①$$

$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0$ ②

将①、②相减得：$2a(x_1+x_0)=0$，即$x_1=-x_0$，将其代入①可得：$-x_0^2+a^2+y_1y=0$

故$y_1=\frac{x_0^2-a^2}{y_0}$，于是$Q(-x_0,\frac{x_0^2-a^2}{y_0})$

根据$RF_1\perp PF_1,RF_2\perp PF_2$,同理可得$R(-x_0,\frac{x_0^2-c^2}{y_0})$

因此$|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|}$

由于$|y_0|\in(0,b]$，故$|QR|\geq b$（其中等号成立的充分必要条件是$|y_0|=b$，即点 P 的坐标是$(0,\pm b)$）

11.【解答】已知条件可以转化为：对任意实数x,y，有

$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\geq(ax^2+b)(ay^2+b) ①$$

先寻求 a、b 所满足的必要条件，在①中令$y=0$得：$b+(ax^2+b)\geq(ax^2+b)b$

即对任意的实数 x，有：$(1-b)ax^2+b(2-b)\geq 0$

由于$a>0$，故ax^2可以取到任意大的值，因此必有$1-b\geq 0$，即：$0<b\leq 1$

在①式中再令$y=-x$，得：$(ax^4+b)+b\geq(ax^2+b)^2$，即对任意实数 x,有

$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geq 0$②

将②式的左边记作为$g(x)$，显然$a-a^2\neq 0$（否则，由$a>0$可知$a=1$，此时$g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中$b>0$，故$g(x)$可取到负值，矛盾），于是

$g(x)=(a-a^2)(x^2-\frac{ab}{a-a^2})^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+2b-b^2$

$=(a-a^2)(x^2-\dfrac{b}{1-a})^2+\dfrac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$ 对一切实数 x 成立，从而必有：$a-a^2>0$，即 $0<a<1$

进一步考虑到 $\dfrac{b}{1-a}>0$，再根据 $g(\sqrt{\dfrac{b}{1-a}})=\dfrac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，可得：$2a+b\leq 2$

至此，求得 a,b 满足的必要条件如下：

$0<b\leq 1,0<a<1,2a+b\leq 2$ ③

下面证明，对满足 ③的任意实数对 (a,b) 以及任意实数 x,y，总有①成立，即：

$h(x,y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$

对任意 x,y 取非负值。

事实上，在③式成立时，有 $a(1-b)\geq 0,a-a^2>0,\dfrac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$

再结合 $x^2+y^2\geq -2xy$，可得：

$$h(x,y)\geq (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2)$$

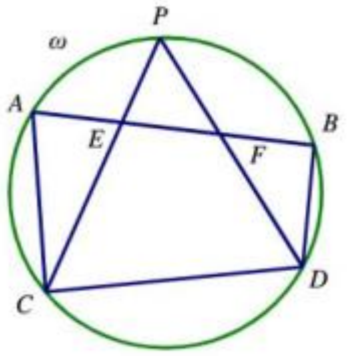
$$=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+2b-b^2$$

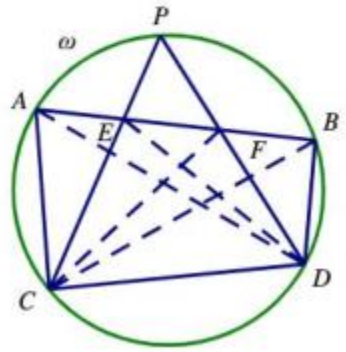
$$=(a-a^2)(xy+\frac{b}{1-a})^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

综上所述，所求的正实数对 (a,b) 全体为 $\{(a,b)|0<b\leq 1,0<a<1,2a+b\leq 2\}$

2013 年全国高中数学联赛加试试题参考答案及评分标准

一.





【证明】连接 AD, BC, CF, DE .由于 $AE = EF = FB$,从而

$$\frac{BC\cdot\sin\angle BCE}{AC\cdot\sin\angle ACE}=\frac{BE}{AE}=2 \quad ①$$

同理可得：

$$\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle BDF}=\frac{AF}{BF}=2 \quad ②$$

另一方面，由于

$\angle BCE=\angle BCP=\angle BDP=BDF$

$\angle ACE=\angle ACP=\angle ADP=\angle ADF$

故将①②两式相乘可得：

$\dfrac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=4$，即

$$BC\cdot AD=4AC\cdot BD \quad ③$$

由托勒密定理

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD+AB\cdot CD \quad ④$$

由 ③ ④得：$AC\cdot CD=3AC\cdot BD$

即：$EF\cdot CD=AC\cdot BD$

二. 【证明】对正整数n，有

$$S_{2^{n+1}-1}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2^{n+1}-2}+a_{2^{n+1}-1})$$

$$=u+v+(a_1+u+a_1+v)+(a_2+u+a_2+v)+\cdots+(a_{2^n-1}+u+a_{2^n-1}+v)$$

$$=2^n(u+v)+2S_{2^n-1}$$

所以 $S_{2^n-1}=2^{n-1}(u+v)+2S_{2^{n-1}-1}=2^{n-1}(u+v)+2(2^{n-2}(u+v)+2S_{2^{n-2}-1})$

$$=2\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^2S_{2^{n-2}-1}$$

$$=(n-1)\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^{n-1}(u+v)$$

$=(u+v)n\cdot 2^{n-1}$

设 $u+v=2^k\cdot q$，其中 k 是非负整数，q 是奇数.取 $n=q\cdot l^2$，其中 l 为满足 $l\equiv k-1 \pmod 2$ 的任意正整数，此时 $S_{2^n-1}=q^2l^2\cdot 2^{k-1+ql^2}$，注意到 q 是奇数，故：

$$k-1+ql^2\equiv k-1+l^2\equiv k-1+(k-1)^2=k(k-1)\equiv 0 \pmod 2$$

所以，S_{2^n-1} 是完全平方数.由于 l 有无穷多个，故数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数。

三．【解答】

对任意的 $k=1,2,\cdots,m,$ 设第 k 题没有答对者有 x_k 人，则第 k 答对者有 $n-x_k$ 人，由得分规则知，这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分.设 n 个学生的得分和为 S，则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=S=\sum_{k=1}^{m}x_k(n-x_k)=n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分，故

$$p_1\le\sum_{k=1}^{m}x_k$$

由于 $p_2\ge\cdots\ge p_n$，故有 $p_n\le\dfrac{p_2+p_3+\cdots+p_n}{n-1}=\dfrac{S-p_1}{n-1}$，所以

$$p_1+p_n\le p_1+\frac{S-p_1}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}p_1+\frac{S}{n-1}\le\frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k+\frac{1}{n-1}\cdot(n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2)$$

$$=2\sum_{k=1}^{m}x_k-\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k^2$$

由柯西不等式可得：$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}x_k^2\ge\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}x_k)^2$

于是 $\displaystyle p_1+p_m\le 2\sum_{k=1}^{m}x_k-\frac{1}{m(n-1)}\cdot(\sum_{k=1}^{m}x_k)^2=-\frac{1}{m(n-1)}\cdot(\sum_{k=1}^{m}x_k-m(n-1))^2+m(n-1)$

$\le m(n-1)$

另一方面，若有一个学生全部答对，其他 $n-1$ 个学生全部答错，则

$$p_1+p_n=p_1=\sum_{k=1}^{m}(n-1)=m(n-1)$$

综上所述，p_1+p_n的最大值为$m(n-1)$

四.【证明】

先考虑n为 2 的幂的情形。设$n=2^r$，则$r<k$.取3个2^{r-1}及$2k-3$个 1，显然这些数字均不被 n 整除.将 $2k$ 个数任意分成两组，则总有一组中含有 2 个2^{r-1}，他们的和为2^r，被 n 整除。

现在设 n 不是 2 的幂，取 $2k$ 个数为

$$-1,-1,-2,-2^2,\cdots,-2^{k-2},1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$$

因为 n 不是 2 的幂，故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除。

若可将这些分成两组，使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除。不妨设 1 在第一组，由于-1+1=0，被 n 整除，故两个-1 必须在第二组；因为（-1）+（-1）+2=0，被 n 整除，故 2 在第一组，进而推出-2 在第二组。

现在归纳假设$1,2,\cdots,2^l$均在第一组，而$-1,-1,-2,\cdots,-2^l$均在第二组，这里$1\le l\le k-2$，由于$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+(-2)^l+2^{l+1}=0$，被 n 整除，故2^{l+1}在第一组，从而-2^{l+1}在第二组，故由归纳法可知，$1,2,2^2,\cdots,2^{k-2}$在第一组，$-1,-1,-2,-2^2,\cdots,-2^{k-2}$在第二组。最后，由于$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+(-2^{k-2})+2^{k-1}=0$被 n 整除，故2^{k-1}在第一组。因此$1,2,2^2,\cdots2^{k-1}$中若干个数的和，特别地，因为$n\le 2^k-1$，故在第一组中有若干个数的和为 n，当然被 n 整除，矛盾！

因此，将前述 $2k$ 个整数任意分成 2 组，则总有一组中有若干个数之和被 n 整除。