1990年全国高中数学联赛

第一试

（10月14日上午8：00—10：00）

一．选择题（本题满分30分，每小题5分）

1．设 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$，$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$，$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$的大小顺序是

A. $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

B. $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

C. $(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

D. $(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

2．设 $f(x)$是定义在实数集上的周期为2的函数，且是偶函数，已知当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$时，$f(x)$的解析式是（　　）

A. $f(x)=x+4$　　B. $f(x)=2-x$　　C. $f(x)=3-|x+1|$　　D. $f(x)=2+|x+1|$

3．设双曲线的左右焦点是 F_1、F_2，左右顶点是 M、N，若$\triangle PF_1F_2$的顶点 P在双曲线上，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆与边 F_1F_2的切点位置是（　　）

A. 在线段 MN内部　　B. 在线段 F_1M内部或在线段 NF_2内部

C. 点 M或点 N　　D. 不能确定的

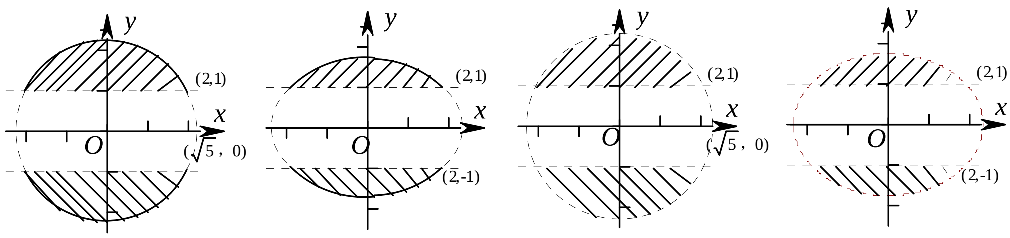
4．点集$\{(x,y)|\lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\}$中元素个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 多于2

5．设非零复数 x、y满足 $x^2+xy+y^2=0$，则代数式$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}$的值是（　　）

A. 2^{-1989}　　B. -1　　C. 1　　D. 以上答案都不对

6．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$通过点(2，1)，所有这些椭圆上满足$|y|>1$的点的集合用阴影表示是下面图中的（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

二．填空题（本题满分30分，每小题5分）

1．设 n为自然数，a、b为正实数，且满足 $a+b=2$，则$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$的最小值是__________．

2．设 $A(2,0)$为平面上一定点，$P(\sin(2t-60°),\cos(2t-60°))$为动点，则当 t由15°变到45°时，线段 AP扫过的面积是_____________．

3．设 n为自然数，对于任意实数 x，y，z，恒有$(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant n(x^4+y^4+z^4)$成立，则 n的最小值是_____．

4．对任意正整数 n，连结原点 O与点 $A_n(n,n+3)$，用 $f(n)$表示线段 OA_n上的整点个数（不

计端点)，试求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)$．

5．设 n=1990，则

$$\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1998}-3^{995}C_n^{1990}=\underline{\qquad\qquad}.$$

6．8 个女孩与 25 个男孩围成一圈，任何两个女孩之间至少站两个男孩，则共有种不同和排列方法．(只要把圆旋转一下就能重合的排法认为是相同的)．

三．(本题满分 20 分)

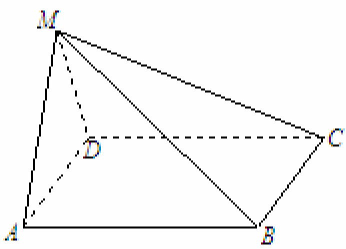
已知 a，b 均为正整数，且 $a>b$，$\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，(其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$．求证：对于一切自然数 n，A_n 均为整数．

四．n^2 个正数排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等．已知 $a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+\cdots\cdots+a_{nn}$．

五．设棱锥 $M-ABCD$ 的底面为正方形，且 $MA=MD$，$MA\perp AB$，如果△AMD 的面积为 1，试求能够放入这个棱锥的最大球的半径．

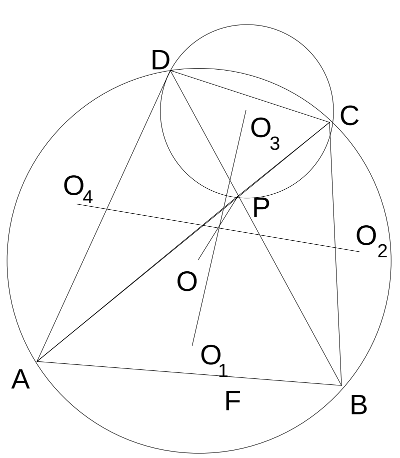


第二试

（10 月 14 日上午 10∶30—12∶30）

一．（本题满分 35 分）

四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P，设三角形 ABP、BCP、CDP 和 DAP 的外接圆圆心分别是 O_1、O_2、O_3、O_4．求证 OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点．



二．（本题满分 35 分）

设 $E=\{1，2，3，……，200\}$，

$G=\{a_1，a_2，……，a_{100}\}\subsetneqq E$.

且 G 具有下列两条性质：

⑴ 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有

$a_i+a_j\neq 201$；

⑵ $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i=10080$.

试证明：G 中的奇数的个数是 4 的倍数．且 G 中所有数字的平方和为一个定数．

三．（本题满分 35 分）

某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名代表（$1\leqslant C_i\leqslant 39$，$1\leqslant i\leqslant n$）来到体育馆观看球赛，全部学生总数为 $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i=1990$．看台上每一横排有 199 个座位，要求同一学校的学生必须坐在同一横排，问体育馆最少要安排多少横排才能够保证全部学生都能坐下．

1990年全国高中数学联赛解答

第一试

一．选择题(本题满分30分，每小题5分)

1．设 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$，$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$，$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$的大小顺序是

A．$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

B．$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

C．$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

D．$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

【答案】D

【解析】$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\Rightarrow 0<\cos\alpha<\sin\alpha<1$，

∴ $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$；$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$；选 *D*.

2．设 $f(x)$是定义在实数集上的周期为2的函数，且是偶函数，已知当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$时，$f(x)$的解析式是(　　)

A．$f(x)=x+4$　　*B*．$f(x)=2-x$　　*C*．$f(x)=3-|x+1|$　　*D*．$f(x)=2+|x+1|$

【答案】C

【解析】设 $x\in[-2,-1]$，则 $x+4\in[2,3]$，于是 $f(x+4)=x+4$，但 $f(x)=f(x+4)=x+4$ $(x\in[-2,-1])$，

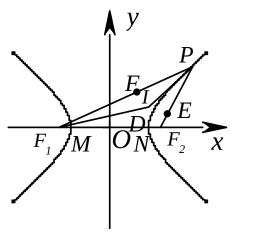
又设 $x\in[-1,0)$，则 $-x\in(0,1]$，故 $f(-x)=-x+2$，由 $f(x)=f(-x)=-x+2$ $(x\in[-1,0))$.

$$f(x)=3-|x+1|=\begin{cases}3-(-x-1)=x+4 & (x\in[-2,-1]),\\ 3-(x+1)=-x+2 & (x\in(-1,0)).\end{cases}$$ **故选 *C*.**

3．设双曲线的左右焦点是 F_1、F_2，左右顶点是 M、N，若△PF_1F_2的顶点 P在双曲线上，则△PF_1F_2的内切圆与边 F_1F_2的切点位置是(　　)

A．在线段 MN内部　　*B*．在线段 F_1M内部或在线段 NF_2内部

C．点 M或点 N　　*D*．不能确定的



【答案】C

【解析】设内切圆在三边上切点分别为 *D*、*E*、*F*，当 *P*在右支上时，$PF_1-PF_2=2a$.

但 $PF_1-PF_2=F_1D-F_2D=2a$，即 *D*与 *N*重合，当 *P*在左支上时，*D*与 *M*重合．故选 *C*.

4．点集$\{(x,y)|\lg(x^3+\frac{1}{3}$错误！未指定书签。$y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\}$中元素个数为(　　)

A．0　　*B*．1　　*C*．2　　*D*．多于2

【答案】B

【解析】$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy>0$．但 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}$ $=xy$错误！未指定书签。，等号

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$时，即 $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ，$y=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ 时成立．故选 *B*.

5．设非零复数 x、y满足 $x^2+xy+y^2=0$，则代数式$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}$的值是(　　)

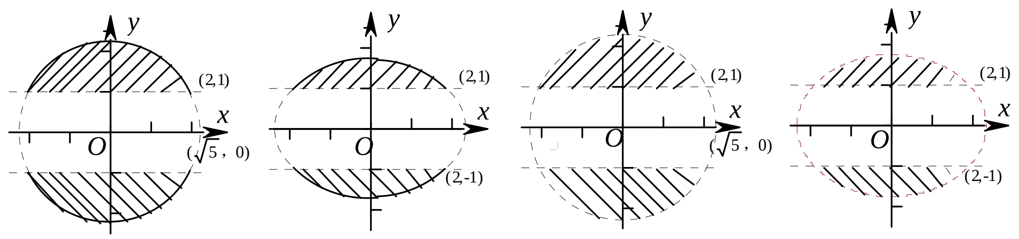
A. 2^{-1989}　　*B*. -1　　*C*. 1　　*D*. 以上答案都不对

【答案】B

【解析】$\frac{x}{y}=\omega$ 或 ω^2，其中 $\omega=\cos120°+i\sin120°$．$1+\omega+\omega^2=0$．且 $\omega^3=1$.

若$\frac{x}{y}=\omega$，则得$\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1990}+\left(\frac{1}{\omega+1}\right)^{1990}=-1$．若$\frac{x}{y}=\omega^2$，则得$\left(\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)^{1990}+\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right)^{1990}=-1$．选 *B*.

6．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$通过点(2，1)，所有这些椭圆上满足$|y|>1$ 的点的集合用阴影表示是下面图中的(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】C

【解析】$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，由 $a^2>b^2$，故得$\frac{1}{b^2}<1<\frac{4}{b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{5}{b^2}$，$1<b<\sqrt{5}$．$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow\frac{5}{a^2}<1$，$a^2>5$．故选 *C*.

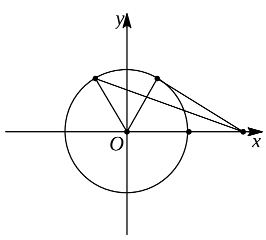
二．填空题(本题满分 30 分，每小题 5 分)

1．设 n 为自然数，a、b 为正实数，且满足 $a+b=2$，则$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$的最小值是__________.

【答案】1

【解析】$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，从而 $a^nb^n\leqslant1$，故$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}=\frac{1+a^n+1+b^n}{1+a^n+b^n+a^nb^n}\geqslant1$．等号当且仅当 $a=b=1$ 时成立．即所求最小值=1.

2．设 $A(2，0)$为平面上一定点，$P(\sin(2t-60°)，\cos(2t-60°))$为动点，则当 t 由 15° 变到 45° 时，线段 AP 扫过的面积是______________.



【答案】$\frac{1}{6}\pi$

【解析】点 P 在单位圆上，$\sin(2t-60°)=\cos(150°-2t)$，$\cos(2t-60°)=\sin(150°-2t)$．当 t 由 15° 变到 45° 时，点 P 沿单位圆从$\left(-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

运动到$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$．线段 AP 扫过的面积=扇形面积$=\frac{1}{6}\pi$．

3．设 n 为自然数，对于任意实数 x，y，z，恒有$(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant n(x^4+y^4+z^4)$成立，则 n 的最小值是____________．

【答案】3

【解析】$(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2\leqslant x^4+y^4+z^4+(x^4+y^4)+(y^4+z^4)+(z^4+x^4)=3(x^4+y^4+z^4)$．等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立．故 $n=3$．

4. 对任意正整数 n 连结原点 O 与点 $A(n,n+3)$，用 $f(n)$表示线段 OA 上的整点个数(不计端点)，试求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)$．

【答案】1326

【解析】线段 OA 的方程为 $y=\frac{n+3}{n}x\ (0\leqslant x\leqslant n)$，故 $f(n)$等于该线段内的格点数．

若 $n=3k\ (k\in N)$，则得 $y=\frac{k+1}{k}x\ (0\leqslant x\leqslant n)\ (k\in N^*)$，其内有两个整点$(k,k+1)$，$(2k,2k+2)$，此时 $f(n)=2$；

若 $n=3k\pm1\ (k\in N)$时，则由于 n 与 $n+3$ 互质，故 OA 内没有格点，此时 $f(n)=0$．

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)=2[\frac{1990}{3}]=1326$．

5．设 $n=1990$，则

$$\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1998}-3^{995}C_n^{1990}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】取$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1990}$展开的实部即为此式．而$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1990}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$．故原式$=-\frac{1}{2}$．

6．8 个女孩与 25 个男孩围成一圈，任何两个女孩之间至少站两个男孩，则共有种不同和排列方法．(只要把圆旋转一下就能重合的排法认为是相同的)．

【答案】$C_{25}^{7}\cdot7!\cdot25!$

【解析】每个女孩与其后的两个男孩组成一组，共 8 组，与余下 9 个男孩进行排列，某个女孩始终站第一个位子，其余 7 组在 8+9—1 个位子中选择 7 个位子，得 $C_{8+9-1}^{7}=C_{16}^{7}$种选法．

7 个女孩可任意换位，25 个男孩也可任意换位，故共得 $C_{25}^{7}\cdot7!\cdot25!$种排列方法．

三．(本题满分 20 分)

已知 a，b 均为正整数，且 $a>b$，$\sin\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，(其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)，$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$．求证：对于一切自然数 n，A_n 均为整数．

【解析】证明：由 $\sin\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，得 $\cos\theta=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$．记 $B_n=(a^2+b^2)^n\cos n\theta$．

当 a、b 均为正整数时，$A_1=2ab$、$B_1=a^2-b^2$ 均为整数．

$A_2=4ab(a^2-b^2)$，$B_2=2(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2$ 也为整数．

若 $A_k=(a^2+b^2)^k\sin k\theta$、$B_k=(a^2+b^2)^k\cos k\theta$ 均为整数，

则 $A_{k+1}=(a^2+b^2)^{k+1}\sin(k+1)\theta=(a^2+b^2)^{k+1}\sin k\theta\cos\theta+(a^2+b^2)\cos k\theta\sin\theta=A_k\cdot B_1+A_1B_k$ 为整数．

$B_{k+1}=(a^2+b^2)^{k+1}\cos(k+1)\theta=(a^2+b^2)^{k+1}\cos k\theta\cos\theta-(a^2+b^2)^{k+1}\sin k\theta\sin\theta=B_kB_1-A_kA_1$ 为整数．

由数学归纳原理知对于一切 $n\in N^*$，A_n、B_n 为整数．

四．n^2 个正数排成 n 行 n 列

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots a_{3n} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots a_{4n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots\cdots a_{nn}
\end{array}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等．已知 $a_{24}=1$，$a_{42}=\dfrac{1}{8}$，$a_{43}=\dfrac{3}{16}$，

求 $a_{11}+a_{22}+\cdots\cdots+a_{nn}$．(1990 年全国高中数学联赛)

分析 由 a_{42}、a_{43} 或求 a_{44}，由 a_{24}，a_{44} 可求公比．

【解析】 设第一行等差数列的公差为 d，各列的公比为 q．

∴ $$a_{44}=2a_{43}-a_{42}=\frac{1}{4}.$$

由 $a_{44}=a_{24}\cdot q^2$，得，

$$q=\frac{1}{2}.$$

∴ $$a_{12}=a_{42}\cdot q^{-3}=1.$$

∴ $$d=\frac{a_{14}-a_{12}}{4-2}=\frac{1}{2},$$

∴ $$a_{1k}=a_{12}+(k-2)d=\frac{1}{2}k\ (k=1,2,3,\cdots,n)$$

∴ $$a_{kk}=a_{1k}q^{k-1}=\frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot k.$$

令 $S_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$．

则 $$S-\frac{1}{2}S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{2^k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

$\therefore\ S=2-\frac{n+2}{2^n}$.

五．设棱锥 $M—ABCD$ 的底面为正方形，且 $MA=MD$，$MA\perp AB$，如果△AMD 的面积为 1，试求能够放入这个棱锥的最大球的半径．

【解析】取 AD、BC 中点 E、F，则 $ME\perp AD$，$AB\perp MA$，$AB\perp AD$，$\Rightarrow AB\perp$平面 MAD.

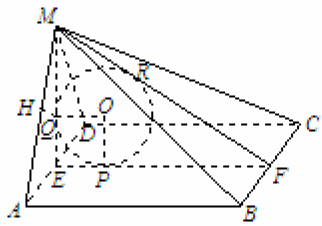
$\therefore$ 平面 $MAD\perp$平面 ABC.　$\therefore$ $ME\perp$平面 ABC.

$\therefore$ 平面 $MEF\perp$平面 ABC.

$\because$ $EF\parallel AB$，故 $EF\perp$平面 MAD，$\therefore$ 平面 $MEF\perp$平面 MAD.

$\because$ $BC\perp EF$，$BC\perp ME$，$\therefore$ $BC\perp$平面 MEF，

$\therefore$平面 $MEF\perp$平面 MBC.



设 $AB=a$，则 $ME=\frac{2}{a}$，$MF=\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}$，$a+\frac{2}{a}\geqslant 2\sqrt{2}$，$\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}\geqslant 2$.

取△MEF 的内切圆圆心 O，作 $OP\perp EF$、$OQ\perp ME$，$OR\perp MF$，由于平面 MEF 与平面 MAD、ABC、MBC 均垂直，则 OP、OQ、OR 分别与平面 ABC、MAD、MBC 垂直．从而以此内切圆半径为半径的球与平面 MAD、ABC、MBC 都相切，设此球的半径为 r，则

$\therefore\ r=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}-\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}\right)\leqslant\dfrac{2}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$．等号当且仅当 $a=\frac{2}{a}$，即 $a=\sqrt{2}$时成立．

作 $QH\perp MA$，由于 $OQ\parallel AB$，故 $OQ\parallel$平面 MAB，故球心 O 与平面 MAB 的距离$=QH$.

当 $AB=\sqrt{2}$，$ME=\sqrt{2}$，$MA=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$MQ=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$.

$\because$ △MQH∽△MAE，$\therefore\frac{QH}{MQ}=\frac{AE}{MA}$，$QH=\frac{MQ\cdot AE}{MA}=\dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}>\sqrt{2}-1$.

即 O 与平面 MAB 的距离$>r$，同理 O 与平面 MCD 的距离$>r$．故球 O 是放入此棱锥的最大球．

$\therefore$ 所求的最大球半径$=\sqrt{2}-1$.

第二试

（10 月 14 日上午 10：30—12：30）

一．（本题满分 35 分）

四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P，设三角形 ABP、BCP、CDP 和 DAP 的外接圆圆心分别是 O_1、O_2、O_3、O_4．求证 OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点．

【解析】证明 ∵ O 为 $\triangle ABC$ 的外心，∴ $OA=OB$.

∵ O_1 为 $\triangle PAB$ 的外心，∴ $O_1A=O_1B$.

∴ $OO_1\perp AB$.

作 $\triangle PCD$ 的外接圆⊙O_3，延长 PO_3 与所作圆交于点 E，并与 AB 交于点 F，连 DE，则 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle EPD=\angle BPF$，

∴ $\angle PFB=\angle EDP=90°$.

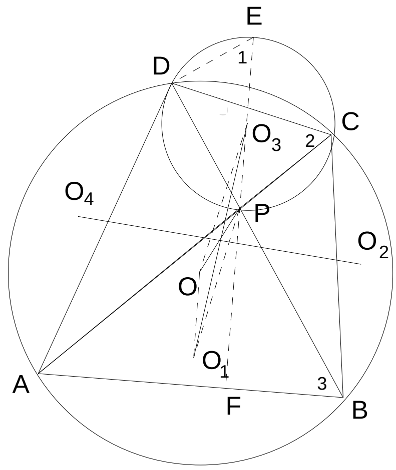
∴ $PO_3\perp AB$，即 $OO_1\parallel PO_3$.

同理，$OO_3\parallel PO_1$．即 OO_1PO_3 是平行四边形．

∴ O_1O_3 与 PO 互相平分，即 O_1O_3 过 PO 的中点．

同理，O_2O_4 过 PO 中点．

∴ OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点．



二．（本题满分 35 分）

设 $E=\{1，2，3，\cdots\cdots，200\}$，

$G=\{a_1，a_2，\cdots\cdots，a_{100}\}\subsetneqq E$.

且 G 具有下列两条性质：

(1) 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有

$a_i+a_j\neq 201$；

(2) $\sum_{i=1}^{100} a_i=10080$.

试证明：G 中的奇数的个数是 4 的倍数．且 G 中所有数字的平方和为一个定数．

【解析】证明：(1)取 100 个集合：$\{a_i，b_i\}$：$a_i=i$，$b_i=201-i(i=1，2，\cdots，100)$，于是每个集合中至多能取出 1 个数．于是至多可以选出 00 个数．现要求选出 100 个数，故每个集合恰选出 1 个数．

把这 100 个集合分成两类：① $\{4k+1，200-4k\}$；② $\{4k-1，202-4k\}$．每类都有 50 个集合．

设第①类选出 m 个奇数，$50-m$ 个偶数，第②类中选出 n 个奇数，$50-n$ 个偶数．

于是 $1\cdot m+0\cdot(50-m)+(-1)\cdot n+2\cdot(50-n)\equiv 10080\equiv 0\pmod 4$．即 $m-3n\equiv 0\pmod 4$，即 $m+n\equiv 0\pmod 4$

∴ G 中的奇数的个数是 4 的倍数．

(2) 设选出的 100 个数为 $x_1，x_2，\cdots，x_{100}$，于是未选出的 100 个数为 $201-x_1，201-x_2，\cdots，201-x_{100}$.

故 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=10080$.

$$\begin{aligned}\therefore\ & x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2+(201-x_1)^2+(201-x_2)^2+\cdots+(201-x_{100})^2\\ &=2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2)-2\times 201\times(x_1+x_2+\cdots+x_{100})+100\times 201^2\\ &=2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2)-2\times 201\times 10080+100\times 201^2\end{aligned}$$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+200^2$.

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots+200^2)+2\times201\times10080-100\times201^2]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{6}\times200\times201\times401+201\times20160-20100\times201]$

$=\frac{1}{2}\times[100\times67\times401+201\times60]=1349380$. 为定值.

三.（本题满分 35 分）

某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名代表($1\leqslant C_i\leqslant39$，$1\leqslant i\leqslant n$)来到体育馆观看球赛，全部学生总数为 $\sum_{i=1}^{n} C_i=1990$. 看台上每一横排有 199 个座位，要求同一学校的学生必须坐在同一横排，问体育馆最少要安排多少横排才能够保证全部学生都能坐下.

【解析】首先，199>39×5，故每排至少可坐 5 所学校的学生.

1990=199×10，故如果没有“同一学校的学生必须坐在同一横排”的限制，则全部学生只要坐在 10 排就够了.

现让这些学生先按学校顺序入坐，从第一排坐起，一个学校的学生全部坐好后，另一个学校的学生接下去坐，如果在某一行不够坐，则余下的学生坐到下一行. 这样一个空位都不留，则坐 10 排，这些学生就全部坐完. 这时，有些学校的学生可能分坐在两行，让这些学校的学生全部从原坐处起来，坐到第 11、12 排去. 由于，这种情况只可能在第一行末尾与第二行开头、第二行末尾与第三行开头、……第九行末尾与第十行开头这 9 处发生，故需要调整的学校不超过 10 所，于是第 11、12 行至多各坐 5 所学校的学生，就可全部坐完. 这说明 12 行保证够坐.

其次证明，11 行不能保证就此学生按条件全部入坐：199=6×33+1. 1990=34×58+18.

取 59 所学校，其中 58 所学校 34 人，1 所学校 18 人. 则对前 58 所学校的学生，每排只能坐 5 所学校而不能坐 6 所学校. 故 11 排只能坐其中 55 所学校的学生. 即 11 排不够坐.

综上可知，最少要安排 12 横排才能保证全部学生都能坐下.