二〇〇五年全国高中数学联合竞赛

说明：

13、 评阅试卷时，请依据本评分标准。选择题只设 6 分和 0 分两档，填空题只设 9 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次。

14、 如果考生的解题方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次。

一、 选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

本题共有 6 小题，每小题均给出 A，B，C，D 四个结论，其中有且仅有一个是正确的。请将正确答案的代表字母填在题后的括号内。每小题选对得 6 分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得 0 分。

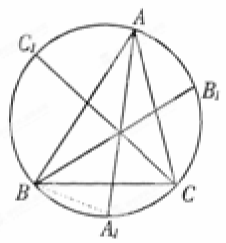
1．使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geq k$ 有解的实数 k 的最大值是（　　）

A． $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　B． $\sqrt{3}$　　C． $\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　D． $\sqrt{6}$

2.空间四点 A、B、C、D 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3, |BC|=7, |CD|=11, |DA|=9$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值（　　　）

A．只有一个　　B．有二个　　C．有四个　　D．有无穷多个

3． ΔABC 内接于单位圆，三个内角 A、B、C 的平分线延长后分别交此圆于 A_1、B_1、C_1。则 $\dfrac{AA_1\cdot\cos\frac{A}{2}+BB_1\cdot\cos\frac{B}{2}+CC_1\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为（　　）



A． 2　　B． 4　　C． 6　　D． 8

4． 如图， $ABCD-A'B'C'D'$ 为正方体。任作平面 α 与对角线 AC' 垂直，使得 α 与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为 S，周长为 l .则（　　　）

A． S 为定值， l 不为定值　　B． S 不为定值， l 为定值

C． S 与 l 均为定值　　D． S 与 l 均不为定值

5.方程 $\dfrac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\dfrac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$ 表示的曲线是（　　　）

A． 焦点在 x 轴上的椭圆　　B． 焦点在 x 轴上的双曲线

C． 焦点在 y 轴上的椭圆　　D． 焦点在 y 轴上的双曲线

6. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}, M=\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}$, 将 M 中的元素

按从大到小的顺序排列，则第 2005 个数是（　　　　）

A. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{3}{7^4}$　　B. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{2}{7^4}$

C. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$　　D. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{3}{7^4}$

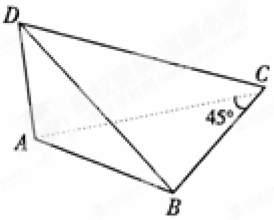
二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上。

7. 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$. 则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$ ________.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立，则 a 的取值范围是 ________________。

9. 设 α、β、γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，若对于任意 $x\in R$, $\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$, 则 $\gamma-\alpha=$ __________.



（第 10 题图）

10. 如图，四面体 DABC 的体积为 $\frac{1}{6}$，且满足 $\angle ACB=45°$, $AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}=3$, 则 $CD=$ ________.

11. 若正方形 ABCD 的一条边在直线 $y=2x-17$ 上，另外两个顶点在抛物线 $y=x^2$ 上. 则该正方形面积的最小值为________.

12. 如果自然数 a 的各位数字之和等于 7，那么称 a 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$, 若 $a_n=2005$, 则 $a_{5n}=$ _______.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=1, a_{n+1}=\frac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}, n\in N.$

证明：(1) 对任意 $n\in N$, a_n 为正整数；(2) 对任意 $n\in N$, $a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数。

14. 将编号为 1, 2, …, 9 的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上，每个等分点上各有一个小球. 设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为要S. 求使S达到最小值的放法的概率.（注：如果某种放法，经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合，则认为是相同的放法）

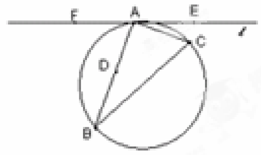
15. 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 A（1, 1）作抛物线的切线，分别交 x 轴于 D，交 y 轴于 B. 点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足 $\frac{AE}{EC}=\lambda_1$；点 F 在线段 BC 上，满足 $\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EF 交于点 P. 当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程.

2005 年全国高中数学联赛试题（二）

一、（本题满分 50 分）

如图，在△ABC 中，设 AB>AC，过 A 作△ABC 的外接圆的切线 l，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D；交直线 l 于 E、F。

证明：直线 DE、DF 分别通过△ABC 的内心与一个旁心。



（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心。）

二、（本题满分 50 分）

设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a, az+cx=b; bx+ay=c.$

求函数 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

三、（本题满分 50 分）

对每个正整数 n，定义函数 $f(n)=\begin{cases}0 & \text{当}n\text{为平方数,}\\ [\frac{1}{\{\sqrt{n}\}}] & \text{当}n\text{不为平方数.}\end{cases}$

（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$）. 试求：$\sum_{k=1}^{240} f(k)$ 的值.

2005年全国高中数学联赛解答

一、 选择题（本题满分36分，每小题6分）

本题共有6小题，每小题均给出A，B，C，D四个结论，其中有且仅有一个是正确的。请将正确答案的代表字母填在题后的括号内。每小题选对得6分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得0分。

1．使关于x的不等式$\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\ge k$有解的实数$k$的最大值是（　　）

A．$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

【答案】D

【解析】令$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}, 3\le x\le 6$，则$y^2=(x-3)+(6-x)+2\sqrt{(x-3)(6-x)}\le 2[(x-3)+(6-x)]=6$. $\therefore 0<y\le\sqrt{6}$, $\therefore$实数k的最大值为$\sqrt{6}$。选D。

2.空间四点A、B、C、D满足$|\overrightarrow{AB}|=3, |\overrightarrow{BC}|=7, |\overrightarrow{CD}|=11, |\overrightarrow{DA}|=9$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值（　　）

A．只有一个　　B．有二个　　C．有四个　　D．有无穷多个

【答案】A

【解析】注意到$3^2+11^2=1130=7^2+9^2$，由于$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$，则

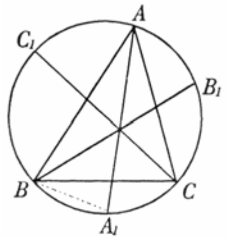
$DA^2=\overrightarrow{DA}^2=$

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=AB^2+BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})=AB^2-$

$BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}+$

$\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$，即$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2=0$, $\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$只有一个值得0，故选A。

3．ΔABC内接于单位圆，三个内角A、B、C的平分线延长后分别交此圆于A_1、B_1、C_1。则$\dfrac{AA_1\cdot\cos\frac{A}{2}+BB_1\cdot\cos\frac{B}{2}+CC_1\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$的值为（　　）



A．2　　B．4　　C．6　　D．8

【答案】A

【解析】如图，连BA_1，则$AA_1=2\sin(B+\frac{A}{2})=2\sin(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$

$=2\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$.

$$\therefore AA_1\cos\frac{A}{2}=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A+C-B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

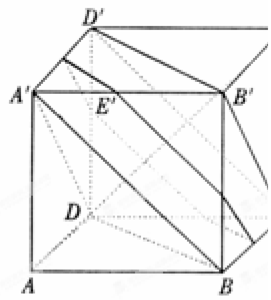
$$=\sin C+\sin B,\text{同理}BB_1\cos\frac{B}{2}=\sin A+\sin C,CC_1\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B,\therefore AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cdot$$

$$\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}=2(\sin A+\sin B+\sin C),\therefore \text{原式}=\frac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2.\text{选}A.$$

4. 如图，$ABCD-A'B'C'D'$为正方体。任作平面α与对角线AC'垂直，使得α与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为 S，周长为l.则（　　）

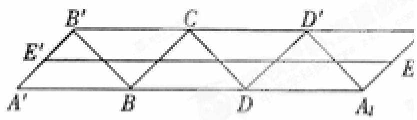
A. S 为定值，l不为定值　　　B. S 不为定值，l为定值

C. S 与l均为定值　　　D. S 与l均不为定值



【答案】B

【解析】将正方体切去两个正三棱锥$A-A'BD$与$C'-D'B'C$后，得到一个以平行平面$A'BD$与$D'B'C$为上、下底面的几何体 V，V 的每个侧面都是等腰直角三角形，截面多边形 W 的每一条边分别与 V 的底面上的一条边平行，将 V 的侧面沿棱$A'B'$剪开，展平在一张平面上，得到一个▱$A'B'B_1A_1$，而多边形 W 的周界展开后便成为一条与$A'A_1$平行的线段（如图中$E'E_1$），显然$E'E_1=A'A_1$，故l为定值。



当E'位于$A'B'$中点时，多边形 W 为正六边形，而当E'移至A'处时，W 为正三角形，易知周长为定值l的正六边形与正三角形面积分别为$\frac{\sqrt{3}}{24}l^2$与$\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$，故 S 不为定值。选 B。

5. 方程$\dfrac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\dfrac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$表示的曲线是（　　）

A．焦点在x轴上的椭圆　　　B．焦点在x轴上的双曲线

C．焦点在y轴上的椭圆　　　D．焦点在y轴上的双曲线

【答案】C

【解析】

$\because \sqrt{2}+\sqrt{3}>\pi,\therefore 0<\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}<\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2},\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)>\cos\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right),$ 即

$\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}.$

又 $0<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi,\therefore \cos\sqrt{2}>0,\cos\sqrt{3}<0,\therefore \cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>0,$ 方程表示的曲线是椭圆。

$$\because (\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3})-(\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3})=2\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\ldots\ldots(*)$$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0, \therefore \sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0, \frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\frac{3\pi}{4}, \therefore \frac{3\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi.$

$\therefore \sin(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4})>0, \therefore (*)式<0.$

即 $\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}<\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}. \therefore$ 曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆，选 C。

6. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}, M=\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4} \mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}$，将 M 中的元素按从大到小的顺序排列，则第 2005 个数是（　　）

A. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{3}{7^4}$　　**B.** $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{2}{7^4}$

C. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$　　**D.** $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{3}{7^4}$

【答案】C

【解析】用 $[a_1a_2\ldots a_k]_p$ 表示 k 位 p 进制数，将集合 M 中的每个数乘以 7^4，得

$M'=\{a_1\cdot 7^3+a_2\cdot 7^2+a_3\cdot 7+a_4 \mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}=\{[a_1a_2a_3a_4]_7 \mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}.$

M' 中的最大数为 $[6666]_7=[2400]_{10}$。

在十进制数中，从 2400 起从大到小顺序排列的第 2005 个数是 2400−2004=396。而 $[396]_{10}=[1104]_7$ 将此数除以 7^4，便得 M 中的数 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$. 故选 C。

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上。

7. 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表为关于 y 的多项式 $g(y)=$

$a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$. 则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$_________.

【答案】$\frac{5^{21}+1}{6}$

【解析】由题设知，$f(x)$ 和式中的各项构成首项为 1，公比为 $-x$ 的等比数列，由等比数列的求和公式，得：$f(x)=\frac{(-x)^{21}-1}{-x-1}=\frac{x^{21}+1}{x+1}$. 令 $x=y+4$, 得 $g(y)=\frac{(y+4)^{21}+1}{y+5}$,

取 $y=1$,

有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=g(1)=\dfrac{5^{21}+1}{6}$.

8.已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立，则 a 的取值范围是_______________.

【答案】 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

【解析】 $\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义，又 $2a^2+a+1=2(a+\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{7}{8}>0;3a^2-4a+1=(3a-1)$ $\cdot(a-1)$, 仅当 $a>1$ 或 $a<\dfrac{1}{3}$ 时，$3a^2-4a+1>0.(*)$

$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$\therefore 2a^2+a+1>3a^2-4a+1,\Rightarrow a^2-5a<0,\therefore 0<a<5$, 结合（*）知 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

9. 设 α 、 β 、 γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$ ，若对于任意 $x\in R,\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$, 则 $\gamma-\alpha=$__________。

【答案】 $\dfrac{4\pi}{3}$.

【解析】设 $f(x)=\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)$, 由 $x\in R$， $f(x)\equiv 0$ 知，$f(-\alpha)=0,\ f(-\gamma)=0,\ f(-\beta)=0$, 即 $\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=-1,\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\beta)=-1,\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=-1.\therefore\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\dfrac{1}{2}.\because 0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi,\therefore\beta-\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-\beta\in\{\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\}$, 又 $\beta-\alpha<\gamma-\alpha,\gamma-\beta<\gamma-\alpha$. 只有 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{2\pi}{3}.\therefore\gamma-\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$.

另一方面，当 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$，有 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}, \gamma=\alpha+\frac{4\pi}{3}, \forall x\in R$，记 $x+\alpha=\theta$，由于三点 $(\cos\theta,\sin\theta),(\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})),(\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{4\pi}{3}))$ 构成单位圆 $x^2+y^2=1$ 上正三角形的三个顶点.其中心位于原点，显然有 $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})=0$.

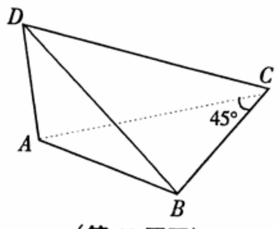
即 $\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$.

10. 如 图， 四 面 体 DABC 的 体 积 为 $\frac{1}{6}$， 且 满 足 $\angle ACB=45°, AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}=3$, 则 $CD=$_____.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because \frac{1}{3}AD\cdot(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot\sin 45°)\ge V_{DABC}=\frac{1}{6}$,

即 $$AD\cdot BC\cdot\frac{AC}{\sqrt{2}}\ge 1.$$ 又



（第 10 题图）

$$3=AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}\ge 3\sqrt[3]{AD\cdot BC\cdot\frac{AC}{\sqrt{2}}}\ge 3,$$

等号当且仅当 $AD=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=1$ 时成立，这时 $AB=1, AD\perp$ 面 ABC，$\therefore DC=\sqrt{3}$.

11. 若正方形 ABCD 的一条边在直线 $y=2x-17$ 上，另外两个顶点在抛物线 $y=x^2$ 上. 则该正方形面积的最小值为________.

【答案】80

【解析】设正方形的边 AB 在直线 $y=2x-17$ 上，而位于抛物线上的两个顶点坐标为 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 CD 所在直线 l 的方程 $y=2x+b$，将直线 l 的方程与抛物线方程联立，得 $x^2=2x+b\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{b+1}$.

令正方形边长为 a，则 $a^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2=20(b+1)$.①

在 $y=2x-17$ 上任取一点(6,,5)，它到直线 $y=2x+b$ 的距离为 a，$\therefore a=\frac{|17+b|}{\sqrt{5}}$②.

①、②联立解得 $b_1=3, b_2=63. \therefore a^2=80$，或 $a^2=1280. \therefore a_{\min}^2=80$.

12. 如果自然数 a 的各位数字之和等于 7，那么称 a 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 若 $a_n = 2005$, 则 $a_{5n} =$ ______.

【答案】5200

【解析】∵方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$ 的非负整数解的个数为 C_{m+k-1}^{m}. 而使 $x_1 \ge 1, x_i \ge 0 (i \ge 2)$ 的整数解个数为 C_{m+k-2}^{m-1}. 现取 $m = 7$，可知，k 位“吉祥数”的个数为 $P(k) = C_{k+5}^{6}$.

∵2005 是形如 $\overline{2abc}$ 的数中最小的一个“吉祥数”，且 $P(1) = C_6^6 = 1, P(2) = C_7^6 = 7,$

$P(3) = C_8^6 = 28$, 对于四位“吉祥数” $\overline{1abc}$，其个数为满足 $a + b + c = 6$ 的非负整数解个数，即 $C_{6+3-1}^{6} = 28$ 个。

∵2005 是第 1+7+28+28+1=65 个“吉祥数”，即 $a_{65} = 2005$. 从而 $n = 65, 5n = 325$.

又 $P(4) = C_9^6 = 84, P(5) = C_{10}^6 = 210$, 而 $\sum_{k=1}^{5} P(k) = 330$.

∴从大到小最后六个五位“吉祥数”依次是：70000，61000, 60100, 60010, 60001, 52000. ∴第 325 个“吉祥数”是 52000，即 $a_{5n} = 52000$.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, n \in N$.

【解析】证明：(1) 对任意 $n \in N, a_n$ 为正整数；(2) 对任意 $n \in N, a_n a_{n+1} - 1$ 为完全平方数。

证明：（1）由题设得 $a_1 = 5$, 且 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 将条件式变形得 $2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36}$, 两边平方整理得 $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$ ①

$\therefore a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0$ ②

①-②得 $(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 7a_n) = 0, \because a_{n+1} > a_n, \therefore a_{n+1} + a_{n=1} - 7a_n = 0 \Rightarrow$

$a_{n+1} = 7a_n - a_{b-1}$. ③

由③式及 $a_0 = 1, a_1 = 5$ 可知，对任意 $n \in N, a_n$ 为正整数.

（2）将①两边配方，得$(a_{n+1}+a_n)^2=9(a_na_{n+1}-1)$，$\therefore a_na_{n+1}-1=(\frac{a_{n+1}a_n}{3})^2$.④

由③ $a_{n+1}+a_n=9a_n-(a_{n-1}+a_n)\equiv-(a_n+a_{n-1})(\bmod 3)$

∴ $a_{n+1}+a_n\equiv(-1)^n(a_1+a_0)\equiv 0$（mod3）∴ $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$为正整数

④式成立.

$\therefore a_na_{n+1}-1$是完全平方数.

14. 将编号为 1,2，…，9 的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上，每个等分点上各有一个小球. 设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为要S. 求使S达到最小值的放法的概率.（注：如果某种放法，经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合，则认为是相同的放法）

【解析】九个编号不同的小球放在圆周的九个等分点上，每点放一个，相当于九个不同元素在圆周上的一个圆形排列，故共有8!种放法，考虑到翻转因素，则本质不同的放法有$\frac{8!}{2}$种. …5分

下求使 S 达到最小值的放法数：在圆周上，从 1 到 9 有优弧与劣弧两条路径，对其中任一条路径，设$x_1,x_2,\cdots,x_k$是依次排列于这段弧上的小球号码，则

$$|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+||x_k-9|\ge|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-9)|=|1-9|=8.$$

上式取等号当且仅当$1<x_1<x_2<\cdots<x_k<9$，即每一弧段上的小球编号都是由 1 到 9 递增排列.

因此$S_{最小}=2\cdot 8=16$.

由上知，当每个弧段上的球号$\{1,x_1,x_2,\cdots x_k,9\}$确定之后，达到最小值的排序方案便唯一确定.

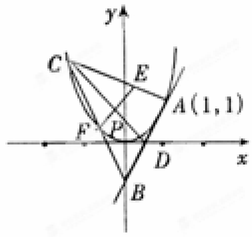
在 1,2，…，9 中，除 1 与 9 外，剩下 7 个球号 2,3，…，8，将它们分为两个子集，元素较少的一个子集共有$C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=2^6$种情况，每种情况对应着圆周上使 S 值达到最小的唯一排法，即有利事件总数是2^6种，故所求概率$P=\frac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\frac{1}{315}$.

15. 过抛物线$y=x^2$上的一点 A（1,1）作抛物线的切线，分别交x轴于 D，交y轴于 B. 点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足$\frac{AE}{EC}=\lambda_1$；点 F 在线段 BC 上，满足$\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，且$\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EF 交于点 P. 当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程.

【解析】解一：过抛物线上点 A 的切线斜率为：$y'=2x|_{x=1}=2$，$\therefore$ 切线 AB 的方程为 $y=2x-1$．$\therefore B$、D 的坐标为 $B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，$\therefore D$ 是线段 AB 的中点．

设 $P(x,y)$、$C(x_0,x_0^2)$、$E(x_1,y_1)$、$F(x_2,y_2)$，则由 $\frac{AE}{EC}=\lambda_1$ 知，

$x_1=\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}$，$y_1=\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}$；$\frac{BE}{FC}=\lambda_2$，得 $x_2=\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}$，$y_2=\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}$．



$\therefore$ EF 所在直线方程为：$$\frac{y-\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}{\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}=\frac{x-\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}}{\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}},$$

化简得 $[(\lambda_2-\lambda_1)x_0-(1+\lambda_2)]y=[(\lambda_2-\lambda_1)x_0^2-3]x+1+x_0-\lambda_2x_0^2$．

当 $x_0\neq\frac{1}{2}$ 时，直线 CD 的方程为：$y=\frac{2x_0^2x-x_0^2}{2x_0-1}$ …②

联立①、②解得 $\begin{cases}x=\frac{x_0+1}{3}\\ y=\frac{x_0^2}{3}\end{cases}$，消去 x_0，得 P 点轨迹方程为：$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$．

当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，EF 方程为：$-\frac{3}{2}y=(\frac{1}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_1-3)x+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\lambda_2$，$CD$ 方程为：$x=\frac{1}{2}$，联立解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{1}{12}.\end{cases}$ 也在 P 点轨迹上．因 C 与 A 不能重合，$\therefore x_0\neq1$，$\therefore x\neq\frac{2}{3}$．

$\therefore$ 所求轨迹方程为 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2\ (x\neq\frac{2}{3})$．

解二：由解一知，AB 的方程为 $y=2x-1$，$B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，故 D 是 AB 的中点．

令 $\gamma=\frac{CD}{CP}$，$t_1=\frac{CA}{CE}=1+\lambda_1$，$t_2=\frac{CB}{CF}=1+\lambda_2$，则 $t_1+t_2=3$．因为 CD 为 ΔABC 的中线，

$\therefore S_{\Delta CAB}=2S_{\Delta CAD}=2S_{\Delta CBD}$．

而

$$\frac{1}{t_1t_2}=\frac{CE\cdot CF}{CA\cdot CB}=\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{S_{\Delta CEP}}{2S_{\Delta CAD}}+\frac{S_{\Delta CFP}}{2S_{\Delta CBD}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{t_1\gamma}+\frac{1}{t_2\gamma})=\frac{t_1+t_2}{2t_1t_2\gamma}=\frac{3}{2t_1t_2\gamma},\therefore\gamma=\frac{3}{2},$$

$\therefore P$ 是 ΔABC 的重心．

设 $P(x,y),C(x_0,x_0^2)$, 因点 C 异于 A，则 $x_0\neq 1$, 故重心 P 的坐标为

$$x=\frac{0+1+x_0}{3}=\frac{1+x_0}{3},(x\neq\frac{2}{3}),y=\frac{-1+1+x_0^2}{3}=\frac{x_0^2}{3},\text{消去 }x_0,\text{得 }y=\frac{1}{3}(3x-1)^2.$$

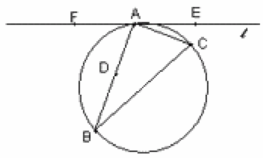
故所求轨迹方程为 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3})$.

2005 年全国高中数学联赛试题（二）

一、（本题满分 50 分）

如图，在△ABC 中，设 AB>AC，过 A 作△ABC 的外接圆的切线 *l*，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D；交直线 *l* 于 E、F。

证明：直线 DE、DF 分别通过△ABC 的内心与一个旁心。

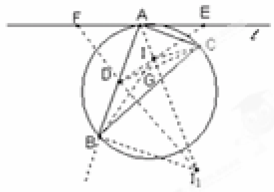


（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心。）

【解析】证明：（1）先证 DE 过△ABC 的内心。

如图，连 DE、DC，作∠BAC 的平分线分别交 DC 于 G、DE 于 I，连 IC，则由 AD=AC，得，AG⊥DC，ID=IC.

又 D、C、E 在⊙A 上，



∴∠IAC= $\frac{1}{2}$ ∠DAC=∠IEC，∴A、I、C、E 四点共圆，

∴∠CIE=∠CAE=∠ABC，而∠CIE=2∠ICD，

∴∠ICD= $\frac{1}{2}$ ∠ABC.

∴∠AIC=∠IGC+∠ICG=90° + $\frac{1}{2}$ ∠ABC，∴∠ACI= $\frac{1}{2}$ ∠ACB，∴I 为△ABC 的内心.

（2）再证 DF 过△ABC 的一个旁心.

连 FD 并延长交∠ABC 的外角平分线于 I_1，连 II_1、B I_1、B I，由（1）知，I 为内心，

∴∠IBI_1=90° =∠EDI_1，∴D、B、I_1、I 四点共圆，

∵∠BI I_1 =∠BDI_1=90° －∠ADI_1

=（$\frac{1}{2}$∠BAC+∠ADG）－∠ADI=$\frac{1}{2}$∠BAC+∠IDG，∴A、I、I_1 共线.

I_1 是△ABC 的 BC 边外的旁心

二、（本题满分 50 分）

设正数 *a*、b、c、*x*、y、z 满足 $cy+bz=a,az+cx=b;bx+ay=c.$

求函数 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

【解析】由条件得，$b(az+cx-b)+c(bx+ay-c)-a(cy+bz-a)=0$，

即 $2bcx+a^2-b^2-c^2=0$，

$\therefore x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，同理，得 $y=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

∵ a、b、c、x、y、z 为正数，据以上三式知，

$b^2+c^2>a^2, a^2+c^2>b^2, a^2+b^2>c^2$，

故以 a、b、c 为边长，可构成一个锐角三角形 ABC，

$\therefore x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$，问题转化为：在锐角△ABC 中，

求函数 $f(\cos A$、$\cos B$、$\cos C$）$=\dfrac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\dfrac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\dfrac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的最小值.

令 $u=\cot A, v=\cot B, w=\cot C$, 则 $u,v,w\in R^+, uv+vw+wu=1$,

且 $u^2+1=(u+v)(u+w), v^2+1=(u+v)(v+w), w^2+1=(u+w)(v+w)$.

$$\therefore \frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\frac{\dfrac{u^2}{u^2+1}}{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}}=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}(\sqrt{u^2+1}+u)}=\frac{u^2(\sqrt{u^2+1}-u)}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}u^2-\frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}\ge u^2-\frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}\right),$$

同理，$\dfrac{\cos^2 B}{1+\cos B}\ge v^2-\dfrac{v^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{u+w}\right), \dfrac{\cos^2 C}{1+\cos C}\ge w^2-\dfrac{w^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+w}+\dfrac{1}{v+w}\right)$.

$\therefore f\ge u^2+v^2+w^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^3+v^3}{u+v}+\dfrac{v^3+w^3}{v+w}+\dfrac{u^3+w^3}{u+w}\right)=u^2+v^2+w^2-\dfrac{1}{2}[(u^2-uv+v^2)$

$+(v^2-vw+w^2)+(u^2-uw+w^2)]=\dfrac{1}{2}(uv+vw+uw)=\dfrac{1}{2}$.（取等号当且仅当 $u=v=w$，

此时，$a=b=c, x=y=z=\dfrac{1}{2}$), $[f(x,y,z)]_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

三、（本题满分 50 分）

对每个正整数 n，定义函数 $f(n)=\begin{cases}0 & \text{当}n\text{为平方数},\\ \left[\dfrac{1}{\{\sqrt{n}\}}\right] & \text{当}n\text{不为平方数}.\end{cases}$

（其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$）. 试求：$\sum_{k=1}^{240} f(k)$的值.

【解析】对任意$a,k\in N^*$，若$k^2<a<(k+1)^2$，则$1\le a-k^2\le 2k$，设$\sqrt{a}=k+\theta,0<\theta<1$,

则 $\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\sqrt{a}-k}=\frac{\sqrt{a}+k}{a-k^2}=\frac{2k+\theta}{a-k^2}<\frac{2k}{a-k^2}+1,\therefore[\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}]=[\frac{2k}{a-k^2}]$.

让 a 跑遍区间$(k^2,(k+1)^2)$中的所有整数，则 $\sum_{k^2<a<(k+1)^2}[\frac{1}{\{a\}}]=\sum_{i=1}^{2k}[\frac{2k}{i}]$,

于是 $\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{2k}[\frac{2k}{i}]$……①

下面计算$\sum_{i=1}^{2k}[\frac{2k}{i}]$,画一张 2k×2k 的表，第 i 行中，凡是 i 行中的位数处填写“*”号，则这行的“*”号共$[\frac{2k}{i}]$个，全表的“*”号共$\sum_{i=1}^{2k}[\frac{2k}{i}]$个；另一方面，按列收集“*”号数，第 j 列中，若 j 有 T（j）个正因数，则该列使有 T（j）个“*”号，故全表的“*”号个数共

$\sum_{j=1}^{2k}T(j)$个，因此$\sum_{i=1}^{2k}[\frac{2k}{i}]=\sum_{j=1}^{2k}T(j)$.

示例如下：

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	*	*	*	*	*	*
2		*		*		*
3			*			*
4				*		
5						
6						*

则

$$\sum_{i=1}^{n} f(a)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2k}T(j)=n[T(1)+T(2)]+(n-1)[T(3)+T(4)]+\cdots+[T(2n-1)+T(2n)]$$

……②

由此，$\sum_{k=1}^{256} f(k)=\sum_{k=1}^{15}(16-k)[T(2k-1)+T(k)]$……③

记 $a_k=T(2k-1)+T(2k),k=1,2,\cdots,15,$ 易得 a_k 的取值情况如下：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

a_k	3	5	6	6	7	8	6	9	8	8	8	10	7	10	10

因此，$\sum_{k=1}^{16^n} f(k) = \sum_{k=1}^{15}(16-k)a_k = 783$……④

据定义 $f(256)=f(16^2)=0$，

又当 $k\in\{241,242,\cdots,255\}$，设 $k=15^2+r\quad(16\le r\le 30)$，

$\sqrt{k}-15=\sqrt{15^2+r}-15=\dfrac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}\cdot\dfrac{r}{31}<\dfrac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}<\dfrac{r}{30}$，

$1\le\dfrac{30}{r}<\dfrac{1}{\{\sqrt{15^2+r}\}}<\dfrac{31}{r}<2$，则 $[\dfrac{1}{\{\sqrt{k}\}}]=1, k\in\{241,242,\cdots,255\}$……⑤

从则 $\sum_{i=1}^{240} f(k)=783-\sum_{i=1}^{256} f(k)=783-15=768.$

2005 年全国高中数学联赛加试第 2 题的探讨

本文对 2005 年的全国高中数学联赛加试第 2 题的解法及来历作以探讨，供感兴趣的读者参考。

题目：设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a$；$az+cx=b$; $\mathrm{bx}+\mathrm{ay}=\mathrm{c}$，求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{y^2}{1+y}+\dfrac{z^2}{1+z}$ 的最小值。

一．几种迷茫思路的分析

这道题目初看起来比较平易，给人一种立刻想到直接使用 Cauchy 不等式的通畅思路的惊喜，殊不知，这是一个极大的误区，本题的难度和技巧正好在这里设置了较好的陷阱。

思路一：

由 Cauchy 不等式知 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{y^2}{1+y}+\dfrac{z^2}{1+z}\ge$

$=\dfrac{(x+y+z)^2}{3+x+y+z}=\dfrac{u^2}{3+u}(记u=x+y+z)=u+3+\dfrac{9}{u+3}-6$

到此，在 u>0 的情况下，力图使用函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的性质无法得到最小值。

思路二：考虑到题目的条件是 6 个变量的 3 个等量关系，于是，可根据三个条件等式容易求出 x、y、z 用 a、b、c 表达的式子：

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\qquad y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\qquad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

因为 a、b、c；x、y、z 都是正数，所以，

$$a^2+b^2-c^2>0;\quad b^2+c^2-a^2>0;\quad c^2+a^2-b^2>0$$

即以 a、b、c 为对应边可以构成一个锐角△ABC，令 $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$，从而，结合 Cauchy 不等式有

$$f(x,y,z)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\ge\frac{(\cos A+\cos B+\cos C)^2}{3+\cos A+\cos B+\cos C}$$

令 $u=\cos A+\cos B+\cos C$，**则**

$$f(x,y,z)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\ge\frac{u^2}{3+u}=u+3+\frac{9}{u+3}-6$$

因为 $u=\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1$

$u=\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$，∴ $4<u+3\le 3+\frac{3}{2}$

到此，似乎胜利的曙光就在眼前，立刻想到在区间 $\left(4,\frac{9}{2}\right]$ 内使用函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的性质，但也无法得到最小值，而此时的最大值正好与题目的最小值 $\frac{1}{2}$（由于函数 $f(x,y,z)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的对称性，可以猜测其最小值在 $A=B=C=60^0$ 时达到 $\frac{1}{2}$）吻合，实际上，这是一条无用的信息（表明使用 Cauchy 不等式过当！），它是答题人再次陷入不能自拔的困境。

俗话说得好，失败是成功之母，上面的思路也昭示我们，对原式不能直接使用 Cauchy 不等式，需要再对原式做更好的更有用的恒等变形，可能是正确的途径。

二．赛题的解答

为证明本赛题，我们先证明如下一个引理。

引理：在△ABC 中，求证：

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\qquad ①$$

等号成立的条件是△ABC 为等边三角形。

证明：用向量方法证明如下

设 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是平面上的单位向量，且 $\vec{j}$ 与 $\vec{k}$ 成角为 π-A， $\vec{k}$ 与 $\vec{i}$ 成角为 π-B， $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 成角

为π-C,那么， $(\vec{i}\tan\frac{A}{2}+\vec{j}\tan\frac{B}{2}+\vec{k}\tan\frac{C}{2})^2\ge 0$，所以

$$\begin{aligned}
&\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\\
&\ge 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cos C+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A+2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\cos B\\
&=2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}(1-2\sin^2\frac{C}{2})+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(1-2\sin^2\frac{A}{2})+\\
&+2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}(1-2\sin^2\frac{B}{2})\\
&=2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)-\\
&-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)\\
&=2-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
&=2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

注意到，在△ABC 中有熟知的等式：$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

从而①得证。

有了上面的引理，本题的解答就容易多了，下面看本题的解法。

解：同思路二得到，以 a、b、c 为对应边可以构成一个锐角△ABC，

令 $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$，从而

$$f(x,y,z)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}=\frac{1-\sin^2 A}{2\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1-\sin^2 B}{2\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1-\sin^2 C}{2\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1-4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1-4\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1-4\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-4\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$+\frac{\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-4\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2})-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2})-2(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$$

$$\geq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})-2(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$$

$$=\frac{1}{2}$$

等号成立的条件显然是 A=B=C=60^0 时达到，最后一个不等式是根据引理而得到的。

所以，$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

显然，在 $\angle A=\angle B=\angle C=60^0$ 时，等号成立，所以 $f(x,y,z)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

三．背景探索

早在 1994 年，华东交大刘健先生就提出了如下猜想命题：

在△ABC 中，是否有：$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C+\sin^2 A}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}\geq\frac{1}{2}$ ②

后来，湖南师大附中黄军华（现为深圳中学教师）先生在文[1]曾证明了这一猜想。

请看证明：分两种情况

（1）当△ABC 为钝角三角形时，此时不妨设 A＞90^0， 于是 $a^2>b^2+c^2$，

所以 $\sin^2 A>\sin^2 B+\sin^2 C=2-\cos^2 B-\cos^2 C$，$\therefore$ $\cos^2 B+\cos^2 C>1+\cos^2 A$

再据 $\sin A>\sin B$， $\sin A>\sin C$，所以，

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C+\sin^2 A}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}$$

$$>\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}$$

$$>\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}$$

$$>\frac{\cos^2 B+\cos^2 C}{2\sin^2 A}=\frac{1}{2}$$

即此种情况②得证。

（2）当△ABC 为非钝角三角形时，

$$\sin^2 B+\sin^2 C=1-\cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$=1+\cos A\cos(B-C)\le 1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$$

所以，

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}\ge\frac{\cos^2 A}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\sin^2 A}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}$$

从而 $$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C+\sin^2 A}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}$$

$$\ge\frac{\cos^2 A}{2\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2 B}{2\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\cos^2 C}{2\cos^2\frac{C}{2}} \qquad ③$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2})-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$$

$$\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})-2(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})=\frac{1}{2}$$

即三角形为非钝角三角形时结论也成立，综上结论得证。

对比③之后的叙述与今年的这道竞赛加试第 2 题的解法，不难知道，今年的这道赛题无非是在②的第 2 种情况的基础上增加了一个解方程组的程序(并由此判断△ABC 为锐角三角形）罢了，即今年的这道加试题可以看作是由解方程组（初中知识的要求），判断三角形种类、与求最值（高中知识的要求）三个问题的简单合成（串联）。

顺便指出，①的证明曾经是上世纪 1990 年前后在文[2]等刊物上讨论过几年的一个结论。

四．条件等式的几何解释

对比条件等式 $cy+bz=a$；$az+cx=b$；　$bx+ay=c$ **（注意 a、b、c、x、y、z 为正数）与△ABC 中的斜射影定理** $c\cos B+b\cos C=a$

$a\cos C+c\cos A=b$　　　　$b\cos A+a\cos B=c$

以及余弦定理，可知，应有 $x=\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$y=\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，

$z=\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，**从而，求解本题中的解方程组的环节就可以看作是余弦定理的默认结果。另外，有了上边的余弦定理结构，解答中的构造三角形法已经水到渠成了。**