2003 年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

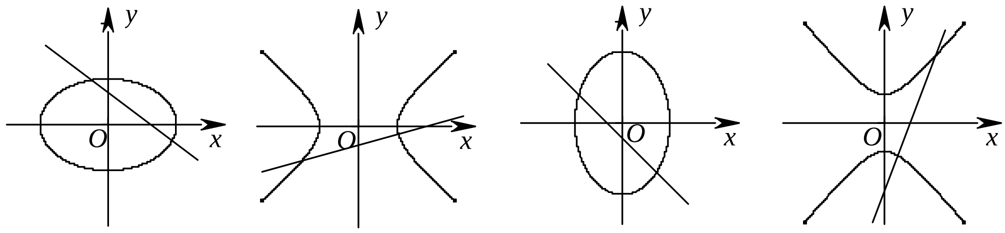
（10 月 12 日上午 8:00-9:40）

一、选择题(每小题 6 分，共 36 分)

1．(2003 年全国高中数学联赛)删去正整数数列 1，2，3，……中的所有完全平方数，得到一个新数列．这个数列的第 2003 项是

(A) 2046　　(B) 2047　　(C) 2048　　(D) 2049

2．设 a，$b\in$R，$ab\neq 0$，那么直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是



A.　　B.　　C.　　D.

3．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线，若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，则线段 PF 的长等于

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

4．若 $x\in[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}]$，则 $y=\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值是

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

5．已知 x，y 都在区间(−2，2)内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

6．在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7．不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是____________________.

8．设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则△PF_1F_2 的面积等于________________.

9．已知 $A=\{x|x^2-4x+3<0,\ x\in R\}$，

$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant 0,\ x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,\ x\in\text{R}\}$

若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________________.

10. 已知 a, b, c, d 均为正整数，且 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$，若 $a-c=9$，则 $b-d=$______________.

11．将八个半径都为 1 的球分放两层放置在一个圆柱内，并使得每个球都和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于_________________.

12． 设 $M_n=\{$(十进制)n 位纯小数 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\ |a_i$ 只取 0 或 1($i=1，2，\cdots，n-1$)，$a_n=1\}$，T_n 是 M_n 中元素的个数，S_n 是 M_n 中所有元素的和，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=$______________.

三、(本题满分 20 分)

13．设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$，证明不等式

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

四、(本题满分 20 分)

14．设 A、B、C 分别是复数 $Z_0=ai$，$Z_1=\frac{1}{2}+bi$，$Z_2=1+ci$(其中 a、b、c 都是实数)对应的不共线的三点．证明：曲线

$$Z=Z_0\cos^4 t+2Z_1\cos^2 t\sin^2 t+Z_2\sin^4 t \qquad (t\in R)$$

与△ABC 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点．

五、(本题满分 20 分)

15．一张纸上画有一个半径为 R 的圆 O 和圆内一个定点 A，且 $OA=a$，折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与点 A 重合．这样的每一种折法，都留下一条折痕．当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合．

加试题

(10 月 12 日上午 10:00–12:00)

一、(本题 50 分)

过圆外一点 P 作圆的两条切线和一条割线，切点为 A、B，所作割线交圆于 C、D 两点，C 在 P、D 之间．在弦 CD 上取一点 Q，使 $\angle DAQ=\angle PBC$.

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.

二、(本题 50 分)

设三角形的三边长分别是正整数 l，m，n．且 $l>m>n>0$.

已知$\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$，其中$\{x\}=x-[x]$，而$[x]$表示不超过 x 的最大整数．求这种三角形周长的最小值.

三、(本题 50 分)

由 n 个点和这些点之间的 l 条连线段组成一个空间图形，其中 $n=q^2+q+1$，$l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant 2$，$q\in N$．已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有 $q+2$ 条连线段．证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点 A、B、C、D 和四条连线段 AB、BC、CD、DA 组成的图形)．

2003年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1．删去正整数数列1，2，3，……中的所有完全平方数，得到一个新数列．这个数列的第2003项是

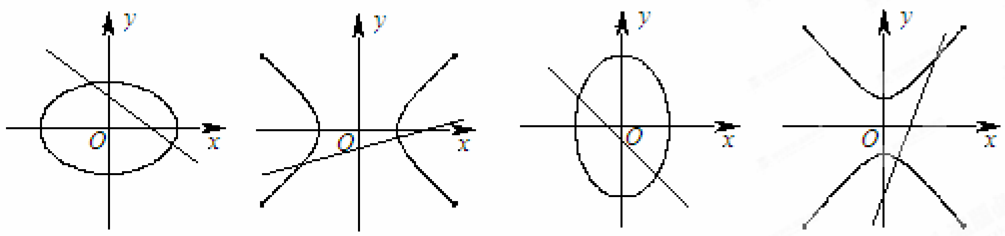
(A) 2046　　(B) 2047　　(C) 2048　　(D) 2049

【答案】C

【解析】$45^2=2025$，$46^2=2116$．

在1至2025之间有完全平方数45个，而2026至2115之间没有完全平方数．故1至2025中共有新数列中的2025－45=1980项．还缺2003－1980=23项．由2025+23=2048．知选*C*.

2．设 a、$b\in R$，$ab\neq0$，那么直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】B

【解析】曲线方程为$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$，直线方程为 $y=ax+b$.

由直线图形，可知 *A*、*C* 中的 $a<0$，*A* 图的 $b>0$，*C* 图的 $b<0$，与 *A*、*C* 中曲线为椭圆矛盾．由直线图形，可知 *B*、*D* 中的 $a>0$，$b<0$，则曲线为焦点在 x 轴上的双曲线，故选 *B*.

3．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为60°的直线，若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，则线段 PF 的长等于

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】抛物线的焦点为原点(0，0)，弦 AB 所在直线方程为 $y=\sqrt{3}x$，弦的中点在 $y=\frac{p}{k}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ 上，即 AB 中点为$(\frac{4}{3}，\frac{4}{\sqrt{3}})$，中垂线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{4}{3})+\frac{4}{\sqrt{3}}$，令 $y=0$，得点 P 的坐标为$\frac{16}{3}$.

∴ $PF=\frac{16}{3}$．选 *A*.

4．若 $x\in[-\frac{5\pi}{12}，-\frac{\pi}{3}]$，则 $y=\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值是

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】令 $x+\frac{\pi}{6}=u$，则 $x+\frac{2\pi}{3}=u+\frac{\pi}{2}$，当 $x\in[-\frac{5\pi}{12}，-\frac{\pi}{3}]$时，$u\in[-\frac{\pi}{4}，-\frac{\pi}{6}]$，

$y=-(\cot u+\tan u)+\cos u=-\frac{2}{\sin 2u}+\cos u$. 在 $u\in[-\frac{\pi}{4}，-\frac{\pi}{6}]$时，$\sin 2u$ 与 $\cos u$ 都单调递增，从而 y 单调递增．于是 $u=-\frac{\pi}{6}$时，y 取得最大值$\frac{11}{6}\sqrt{3}$，故选 C.

5．已知 x，y都在区间$(-2，2)$内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$的最小值是

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

【答案】D

【解析】由 x，$y\in(-2，2)$，$xy=-1$知，$x\in(-2，-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}，2)$，

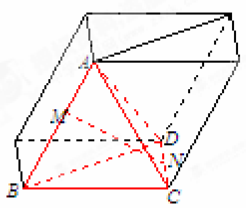
$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=\frac{-9x^4+72x^2-4}{-9x^4+37x^2-4}=1+\frac{35}{37-(9x^2+\frac{4}{x^2})}$.

当 $x\in(-2，-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}，2)$时，$x^2\in(\frac{1}{4}，4)$，此时，$9x^2+\frac{4}{x^2}\geq 12$.（当且仅当 $x^2=\frac{2}{3}$时等号成立）.

此时函数的最小值为$\frac{12}{5}$，故选 D.

6．在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为$\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



【答案】B

【解析】如图，把四面体补成平行六面体，则此平行六面体的体积$=1\times\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}\times 2=3$．而四面体 $ABCD$ 的体积$=\frac{1}{6}\times$平行六面体体积$=\frac{1}{2}$．故选 B.

二．填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7．不等式$|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是____________________.

【答案】$(-3，-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(\frac{\sqrt{5}-1}{2}，3)$.

【解析】即 $|x|^3-2|x|^2-4|x|+3<0$，$\Rightarrow(|x|-3)(|x|-\frac{\sqrt{5}-1}{2})(|x|+\frac{\sqrt{5}+1}{2})<0$．$\Rightarrow|x|<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|x|<3$．

∴ 解为 $(-3,\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 3)$．

8．设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则△PF_1F_2 的面积等于______________．

【答案】4

【解析】$F_1(-\sqrt{5},\ 0)$，$F_2(\sqrt{5},\ 0)$；$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$．

$|PF_1|+|PF_2|=6$，$\Rightarrow|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$．由于 $4^2+2^2=(2\sqrt{5})^2$．故△PF_1F_2 是直角三角形 $\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$．

∴ $S=4$．

9．已知 $A=\{x|x^2-4x+3<0,\ x\in R\}$，

$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant 0,\ x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,\ x\in \mathrm{R}\}$

若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________________．

【答案】$-4\leqslant a\leqslant -1$．

【解析】$A=(1,\ 3)$；

又，$a\leqslant -2^{1-x}\in(-1,\ -\frac{1}{4})$，当 $x\in(1,\ 3)$ 时，$a\geqslant\frac{x^2+5}{2x}-7\in(\sqrt{5}-7,\ -4)$．

∴ $-4\leqslant a\leqslant -1$．

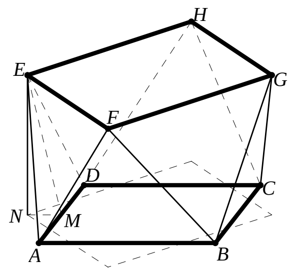
10．已知 a, b, c, d 均为正整数，且 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$，若 $a-c=9$，则 $b-d=$______________．

【答案】93

【解析】$a^3=b^2$，$c^5=d^4$，设 $a=x^2$，$b=x^3$；$c=y^4$，$d=y^5$，$x^2-y^4=9$．$(x+y^2)(x-y^2)=9$．

∴ $x+y^2=9$，$x-y^2=1$，$x=5$，$y^2=4$．$b-d=5^3-2^5=125-32=93$．

11．将八个半径都为 1 的球分放两层放置在一个圆柱内，并使得每个球都和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于__________________．



【答案】$2+\sqrt[4]{8}$

【解析】如图，$ABCD$ 是下层四个球的球心，$EFGH$ 是上层的四个球心．每个球心与其相切的球的球心距离 $=2$．$EFGH$ 在平面 $ABCD$ 上的射影是一个正方形．是把正方形 $ABCD$ 绕其中心旋转 45°而得．设 E 的射影为 N，则

$MN=\sqrt{2}-1$．$EM=\sqrt{3}$，故 $EN^2=3-(\sqrt{2}-1)^2=2\sqrt{2}$．∴ $EN=\sqrt[4]{8}$．所求圆柱的高 $=2+\sqrt[4]{8}$．

12．设 M_n={(十进制)n 位纯小数 0.$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ | a_i 只取 0 或 1(i=1，2，…，n−1)，a_n=1}，T_n 是 M_n 中元素的个数，S_n 是 M_n 中所有元素的和，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$=______________．

【答案】$\frac{1}{18}$

【解析】由于 a_1，a_2，…，a_{n-1} 中的每一个都可以取 0 与 1 两个数，$T_n=2^{n-1}$．

在每一位(从第一位到第 $n-1$ 位)小数上，数字 0 与 1 各出现 2^{n-2} 次．第 n 位则 1 出现 2^{n-1} 次．

∴ $S_n=2^{n-2}\times0.11\cdots1+2^{n-2}\times10^{-n}$．

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$．

三、(本题满分 20 分)

13．设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant5$，证明不等式

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

【解析】$x+1\geqslant0$，$2x-3\geqslant0$，$15-3x\geqslant0$．$\Rightarrow\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant5$.

由平均不等式 $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}}{4}\leqslant\sqrt{\frac{x+1+x+1+2x-3+15-3x}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{14+x}{4}}$.

∴ $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant2\sqrt{14+x}$.

但 $2\sqrt{14+x}$ 在 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant5$ 时单调增．即 $2\sqrt{14+x}\leqslant2\sqrt{14+5}=2\sqrt{19}$.

故证．

四、(本题满分 20 分)

14．设 A、B、C 分别是复数 Z_0=ai，$Z_1=\frac{1}{2}+b$i，Z_2=1+ci(其中 a，b，c 都是实数)对应的不共线的三点．证明：曲线

$$Z=Z_0\cos^4t+2Z_1\cos^2t\sin^2t+Z_2\sin^4t \qquad (t\in R)$$

与△ABC 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点．

【解析】曲线方程为：$Z=a\mathrm{i}\cos^4t+(1+2b\mathrm{i})\cos^2t\sin^2t+(1+c\mathrm{i})\sin^4t=(\cos^2t\sin^2t+\sin^4t)+\mathrm{i}(a\cos^4t+2b\cos^2t\sin^2t+c\sin^4t)$

∴ $x=\cos^2t\sin^2t+\sin^4t=\sin^2t(\cos^2t+\sin^2t)=\sin^2t$．$(0\leqslant x\leqslant1)$

$y=a\cos^4t+2b\cos^2t\sin^2t+c\sin^4t=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2$

即 $y=(a-2b+c)x^2+2(b-a)x+a$ $(0\leqslant x\leqslant1)$．　　　　①

若 $a-2b+c=0$，则 Z_0、Z_1、Z_2 三点共线，与已知矛盾，故 $a-2b+c\neq0$．于是此曲线为轴与 x 轴垂直的抛物线．

AB 中点 M：$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(a+b)$i，$BC$ 中点 N：$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(b+c)$i．

与 AC 平行的中位线经过 $M(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}(a+b))$ 及 $N(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}(b+c))$ 两点，其方程为

$4(a-c)x+4y-3a-2b+c=0$．$(\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4})$．　　　　②

令　$4(a-2b+c)x^2+8(b-a)x+4a=4(c-a)x+3a+2b-c$．

即 $4(a-2b+c)x^2+4(2b-a-c)x+a-2b+c=0$．由 $a-2b+c\neq 0$，得

$$4x^2+4x+1=0,$$

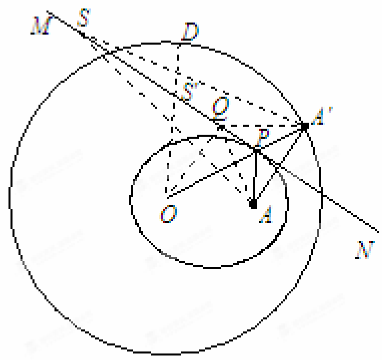
此方程在 $[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}]$ 内有惟一解：　　$x=\frac{1}{2}$.

以 $x=\frac{1}{2}$ 代入②得，　　$y=\frac{1}{4}(a+2b+c)$．

∴ 所求公共点坐标为 $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}(a+2b+c))$．

五、（本题满分 20 分）

15．一张纸上画有一个半径为 R 的圆 O 和圆内一个定点 A，且 $OA=a$，折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与点 A 重合．这样的每一种折法，都留下一条折痕．当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合．



【解析】对于⊙O 上任意一点 A'，连 AA'，作 AA' 的垂直平分线 MN，连 OA'．交 MN 于点 P．显然 $OP+PA=OA'=R$．由于点 A 在⊙O 内，故 $OA=a<R$．从而当点 A' 取遍圆周上所有点时，点 P 的轨迹是以 O、A 为焦点，$OA=a$ 为焦距，$R(R>a)$ 为长轴的椭圆 C．

而 MN 上任一异于 P 的点 Q，都有 $OQ+QA=OQ+QA'>OA'$．故点 Q 在椭圆 C 外．即折痕上所有的点都在椭圆 C 上及 C 外．

反之，对于椭圆 C 上或外的一点 S，以 S 为圆心，SA 为半径作圆，交⊙O 于 A'，则 S 在 AA' 的垂直平分线上，从而 S 在某条折痕上．

最后证明所作⊙S 与⊙O 必相交．

1° 当 S 在⊙O 外时，由于 A 在⊙O 内，故⊙S 与⊙O 必相交；

2° 当 S 在⊙O 内时（例如在⊙O 内，但在椭圆 C 外或其上的点 S'），取过 S' 的半径 OD，则由点 S' 在椭圆 C 外，故 $OS'+S'A\geqslant R$（椭圆的长轴）．即 $S'A\geqslant S'D$．于是 D 在⊙S' 内或上，即⊙S' 与⊙O 必有交点．

于是上述证明成立．

综上可知，折痕上的点的集合为椭圆 C 上及 C 外的所有点的集合．

加试题

(10 月 12 日上午 10:00–12:00)

一、(本题 50 分)

过圆外一点 P 作圆的两条切线和一条割线，切点为 A、B，所作割线交圆于 C、D 两点，C 在 P、D 之间．在弦 CD 上取一点 Q，使 $\angle DAQ=\angle PBC$．

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$．

分析：由 $\angle PBC=\angle CDB$，若 $\angle DBQ=\angle PAC=\angle ADQ$，则 $\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$．反之，若 $\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$．则本题成立．而要证 $\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$，只要证 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DQ}{AQ}$ 即可．

【解析】 证明：连 AB.

∵ $\Delta PBC\backsim\Delta PDB$,

∴ $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{PD}{PB}$, 同理，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{PD}{PA}$.

∵ $PA=PB$, ∴ $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$.

∵ $\angle BAC=\angle PBC=\angle DAQ$, $\angle ABC=\angle ADQ$.

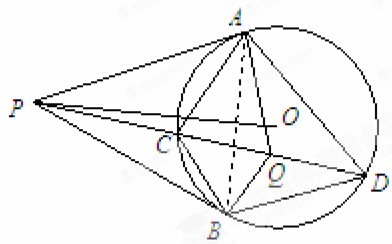
∴ $\Delta ABC\backsim\Delta ADQ$.

∴ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DQ}{AQ}$. ∴ $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DQ}{AQ}$.

∵ $\angle DAQ=\angle PBC=\angle BDQ$.

∴ $\Delta ADQ\backsim\Delta DBQ$.

∴ $\angle DBQ=\angle ADQ=\angle PAC$. 证毕.



二、(本题 50 分)

设三角形的三边长分别是正整数 l，m，n．且 $l>m>n>0$．

已知 $\left\{\dfrac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\dfrac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\dfrac{3^n}{10^4}\right\}$，其中 $\{x\}=x-[x]$，而 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．求这种三角形周长的最小值．

【解析】当 3^l、3^m、3^n 的末四位数字相同时，$\left\{\dfrac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\dfrac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\dfrac{3^n}{10^4}\right\}$.

即求满足 $3^l\equiv3^m\equiv3^n(\bmod 10^4)$ 的 l、m、n. ∴ $3^n(3^{l-n}-1)\equiv0 \pmod{10^4}$．($l-n>0$)

但 $(3^n,10^4)=1$，故必有 $3^{l-n}\equiv1\pmod{10^4}$；同理 $3^{m-n}\equiv1\pmod{10^4}$．

下面先求满足 $3^x\equiv1\pmod{10^4}$ 的最小正整数 x.

∵ $\varphi(10^4)=10^4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}=4000$．故 $x|4000$．用 4000 的约数试验：

∵ $x=1$，2，时 $3^x\not\equiv1\pmod{10}$，而 $3^4\equiv1\pmod{10}$，∴ x 必须是 4 的倍数；

∵ $x=4$，8，12，16 时 $3^x\not\equiv1\pmod{10^2}$，而 $3^{20}\equiv1\pmod{10^2}$，∴ x 必须是 20 的倍数；

∵ $x=20$，40，60，80 时 $3^x\not\equiv1\pmod{10^3}$，而 $3^{100}\equiv1\pmod{10^3}$，∴ x 必须是 100 的倍数；

∵ $x=100$，200，300，400 时 $3^x\not\equiv1\pmod{10^4}$，而 $3^{500}\equiv1\pmod{10^4}$．

即，使 $3^x\equiv1\pmod{10^4}$ 成立的最小正整数 $x=500$，从而 $l-n$、$m-n$ 都是 500 的倍数，

设 $l-n=500k$，$m-n=500h$，(k，$h\in N^*$，$k>h$)．

由 $m+n>l$，即 $n+500h+n>n+500k$，$\Rightarrow n>500(k-h)\geqslant500$，故 $n\geqslant501$．

取 $n=501$，$m=1001$，$l=1501$，即为满足题意的最小三个值．
∴ 所求周长的最小值=3003．

三、（本题 50 分）

由 n 个点和这些点之间的 l 条连线段组成一个空间图形，其中 $n=q^2+q+1$，$l\geq\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geq2$，$q\in\mathbf{N}$．已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有 $q+2$ 条连线段．证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点 A、B、C、D 和四条连线段 AB、BC、CD、DA 组成的图形)．

【解析】证明：设点集为 $V=\{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\}$，与 A_i 连线的点集为 B_i，且 $|B_i|=b_i$．于是 $1\leq b_i\leq n-1$．又显然有 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i=2l\geq q(q+1)^2+2$．

若存在一点与其余点都连线，不妨设 $b_0=n-1$．

则 B_0 中 $n-1$ 个点的连线数 $l-b_0\geq\frac{1}{2}q(q+1)^2+1-(n-1)$（注意：$q(q+1)=q^2+q=n-1$）$=\frac{1}{2}(q+1)(n-1)-(n-1)+1=\frac{1}{2}(q-1)(n-1)+1\geq\frac{1}{2}(n-1)+1\geq[\frac{1}{2}(n-1)]+1$．（由 $q\geq2$）

但若在这 $n-1$ 个点内，没有任一点同时与其余两点连线，则这 $n-1$ 个点内至多连线 $[\frac{n-1}{2}]$ 条，故在 B_0 中存在一点 A_i，它与两点 A_j、A_k（i、j、k 互不相等，且 $1\leq i$，j，k）连了线，于是 A_0、A_i、A_j、A_k 连成四边形．

现设任一点连的线数 $\leq n-2$．且设 $b_0=q+2\leq n-2$．且设图中没有四边形．于是当 $i\neq j$ 时，B_i 与 B_j 没有公共的点对，即 $|B_i\cap B_j|\leq1(0\leq i，j\leq n-1)$．记 $\overline{B_0}=V\setminus B_0$，则由 $|B_i\cap B_0|\leq1$，得 $|B_i\cap\overline{B_0}|\geq b_i-1(i=1，2，\cdots，n-1)$，且当 $1\leq i，j\leq n-1$ 且 $i\neq j$ 时，$B_i\cap\overline{B_0}$ 与 $B_j\cap\overline{B_0}$ 无公共点对．从而

$\overline{B_0}$ 中点对个数 $\geq\sum\limits_{i=1}^{n-1}$($B_i\cap\overline{B_0}$ 中点对个数)．即

$$C_{n-b_0}^2\geq\sum_{i=1}^{n-1}C_{|B_i\cap\overline{B_0}|}^2\geq\sum_{i=1}^{n-1}C_{b_i-1}^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b_i^2-3b_i+2)\geq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}b_i\right)^2-3\sum_{i=1}^{n-1}b_i+2(n-1)\right]\text{(由平均不等式)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}(2l-b_0)^2-3(2l-b_0)+2(n-1)\right]=\frac{1}{2(n-1)}\left[(2l-b_0)^2-3(n-1)(2l-b_0)+2(n-1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}(2l-b_0-n+1)(2l-b_0-2n+2)\ (2l\geq q(q+1)^2+2=(n-1)(q+1)+2)$$

$$\geq\frac{1}{2(n-1)}[(n-1)(q+1)+2-b_0-n+1][(n-1)(q+1)+2-b_0-2n+2]$$

$=\frac{1}{2(n-1)}[(n-1)q+2-b_0][(n-1)(q-1)+2-b_0]$．(两边同乘以 $2(n-1)$即

$(n-1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$．($n-1\geqslant q(q+1)$代入)

得 $q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$．(各取一部分因数比较) ①

但$(nq-q-n+3-b_0)-q(n-b_0-1)=(q-1)b_0-n+3(b_0\geqslant q+2)\geqslant(q-1)(q+2)-n+3=q^2+q+1-n=0$．②

$(nq-q+2-b_0)-(q+1)(n-b_0)=qb_0-q-n+2\geqslant q(q+1)-n+2=1>0$． ③

又$(nq-q-n+3-b_0)$、$(nq-q+2-b_0)$、$q(n-b_0-1)$、$(q+1)(n-b_0)$均为正整数，

从而由②、③得， $q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)<(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$． ④

由①、④矛盾，知原命题成立．

又证：画一个 $n\times n$ 表格，记题中 n 个点为 A_1，A_2，…，A_n，若 A_i与 A_j连了线，则将表格中第 i 行 j 列的方格中心涂红．于是表中共有 $2l$ 个红点，当 $d(A_i)=m$时，则表格中的 i 行及 i 列各有 m个红点．且表格的主对角线上的方格中心都没有涂红．

由已知，表格中必有一行有 $q+2$ 个红点．不妨设最后一行前 $q+2$ 格为红点．其余格则不为红点(若有红点则更易证)，于是：问题转化为：证明存在四个红点是一个边平行于格线的矩形顶点．

若否，则表格中任何四个红点其中心都不是一个边平行于格线的矩形顶点．于是，前 $n-1$ 行的前 $q+2$ 个方格中，每行至多有 1 个红点．去掉表格的第 n 行及前 $q+2$ 列，则至多去掉 $q+2+(n-1)=q+2+q^2+q=(q+1)^2+1$ 个红点．于是在余下$(n-1)\times(n-q-2)$方格表中，至少有

$2l-(q+1)^2-1=q(q+1)^2+2-(q+1)^2-1=(q-1)(q+1)^2+1=q^3+q^2-q$个红点．

设此表格中第 i 行有 $m_i(i=1，2，…，n-1)$个红点，于是，同行的红点点对数的总和

$=\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$．其中 $n-1=q^2+q$．(由于当 $n>k$ 时，$C_n^2+C_k^2<C_{n+1}^2+C_{k-1}^2$，故当红点总数

为 q^3+q^2-q个时，可取 q^2行每行取 q个红点，q行每行取 $q-1$ 个红点时 $\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$取最小值，

由下证可知红点数多于此数时更有利于证明．即)

但 $q^2C_q^2+qC_{q-1}^2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$．

由假设，不存在处在不同行的 2 个红点对，使此四点两两同列，所以，有(由于去掉了 $q+2$

列，故还余 q^2-1 列，不同的列对数为 $C_{q^2-1}^2$) $\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2\leqslant C_{q^2-1}^2$．

所以 $q^2\cdot q(q-1)+q(q-1)(q-2)\leqslant(q^2-1)(q^2-2)$．

$\Rightarrow$ $q(q-1)(q^2+q-2)\leqslant(q-1)(q+1)(q^2-2)\Rightarrow q^3+q^2-2q\leqslant q^3+q^2-2q-2$．矛盾．故证．