1999年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

一、选择题

本题共有 6 小题，每题均给出（A）、（B）、（C）、（D）四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内，每小题选对得 6 分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得 0 分。

一、给定公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，设 $b_1=a_1+a_2+a_3$，$b_2=a_4+a_5+a_6$，…，$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，…，则数列 $\{b_n\}$　　【答】(　　)

(A) 是等差数列　　(B) 是公比为 q 的等比数列

(C) 是公比为 q^3 的等比数列　　(D) 既非等差数列也非等比数列

2. 平面直角坐标系中，纵、横坐标都是整数的点叫做整点，那么，满足不等式 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 的整点 (x,y) 的个数是　　【答】(　　)

(A) 16　　(B) 17　　(C) 18　　(D) 25

3. 若 $(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$，则　　【答】(　　)

(A) $x-y\geqslant0$　　(B) $x+y\geqslant0$　　(C) $x-y\leqslant0$　　(D) $x+y\leqslant0$

4. 给定下列两个关于异面直线的命题：

命题Ⅰ：若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 为异面直线，直线 c 是 α 与 β 的交线，那么，c 至多与 a,b 中的一条相交；

命题Ⅱ：不存在这样的无穷多条直线，它们中的任意两条都是异面直线。

那么　　【答】(　　)

(A) 命题Ⅰ正确，命题Ⅱ不正确　　(B) 命题Ⅱ正确，命题Ⅰ不正确

(C) 两个命题都正确　　(D) 两个命题都不正确

一、在某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了，这样，全部比赛只进行了 50 场。那么，在上述 3 名选手之间比赛的场数是　　【答】(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

一、已知点 $A(1,2)$，过点 $(5,-2)$ 的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于另外两点 B,C，那么，$\triangle ABC$ 是

(A) 锐角三角形　(B) 钝角三角形　(C) 直角三角形　(D) 不确定　【答】(　　)

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上。

7. 已知正整数 n 不超过 2000，并且能表示成不少于 60 个连续正整数之和，那么，这样的 n 的个数是__________.

8、已知 $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$，那么，复数 $z=\dfrac{\cos2\theta+i\sin2\theta}{239+i}$ 的辐角主值是__________.

9、在△ABC 中，记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若 $9a^2+9b^2-19c^2=0$，则 $\dfrac{\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}=$__________.

10、已知点 P 在双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，并且 P 到这条双曲线的右准线的距离恰是 P 到这条双曲线的两个焦点的距离的等差中项，那么，P 的横坐标是______.

11、已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，那么，这样的直线的条数是______.

12、已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形，A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是△SBC 的垂心，二面角 $H-AB-C$ 的平面角等于 30°，$SA=2\sqrt{3}$。那么三棱锥 $S-ABC$ 的体积为__________.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

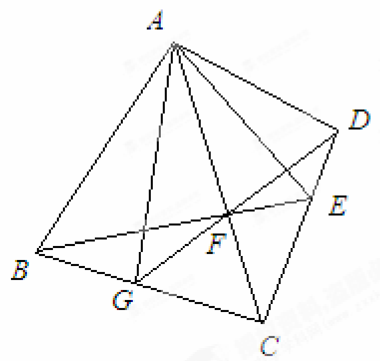
13. 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta - x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，试求的取值范围。

14. 给定 $A(-2,2)$，已知 B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的动点，F 是左焦点，当 $|AB|+\dfrac{5}{3}|BF|$ 取最小值时，求 B 的坐标。

15. 给定正整数 n 和正数 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots.$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值。

第二试

一、（满分 50 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$。在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G。求证：$\angle GAC=\angle EAC$。



二、（满分 50 分）给定实数 a，b，c，已知复数 z_1，z_2，z_3 满足：

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}=1\end{cases}$$，**求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值。**

三、（满分 50 分）给定正整数 n，已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1, 2, 3, \cdots, n$ 克的所有物品。

（1）求 k 的最小值 $f(n)$；

（2）当且仅当 n 取什么值时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是唯一确定的？并证明你的结论。

1999 年全国高中数学联合竞赛答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	A	B	D	B	C

1. 给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，设 $b_1=a_1+a_2+a_3$，$b_2=a_4+a_5+a_6$，…，$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，…，则数列 $\{b_n\}$ 【答】(　　)

(A) 是等差数列　　(B) 是公比为 q 的等比数列

(C) 是公比为 q^3 的等比数列　　(D) 既非等差数列也非等比数列

【答案】(C).

【解析】由题设，$a_n=a_1q^{n-1}$，

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3}}{a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}}=\frac{a_1q^{3n}+a_1q^{3n+1}+a_1q^{3n+2}}{a_1q^{3n-3}+a_1q^{3n-2}+a_1q^{3n-1}}$$

$$=\frac{a_1q^{3n}(1+q+q^2)}{a_1q^{3n-3}(1+q+q^2)}=q^3$$

因此，$\{b_n\}$是公比为 q^3 的等比数列.

2. 平面直角坐标系中，纵、横坐标都是整数的点叫做整点，那么，满足不等式 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 的整点 (x, y) 的个数是 【答】(　　)

(A) 16　　(B) 17　　(C) 18　　(D) 25

【答案】(A)

【解析】由 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$，可得(|x|-1, |y|-1)为(0, 0)，(0, 1)，(0, -1)，(1, 0)或(-1, 0).从而，不难得到(x, y)共有 16 个.

3. 若 $(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$，则 【答】(　　)

(A) $x-y\geqslant 0$　　(B) $x+y\geqslant 0$　　(C) $x-y\leqslant 0$　　(D) $x+y\leqslant 0$

【答案】(B)

【解析】记 $f(t)=(\log_2 3)^t-(\log_5 3)^t$，则 f(t)在 R 上是严格增函数.原不等式即 $f(x)\geqslant f(-y)$. 故 $x\geqslant -y$，即 $x+y\geqslant 0$.

4. 给定下列两个关于异面直线的命题：

命题Ⅰ：若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 为异面直线，直线 c 是 α 与 β 的交线，那么，c 至多与 a, b 中的一条相交；

命题Ⅱ：不存在这样的无穷多条直线，它们中的任意两条都是异面直线。

那么 【答】(　　)

(A) 命题Ⅰ正确，命题Ⅱ不正确　　(B) 命题Ⅱ正确，命题Ⅰ不正确

(C) 两个命题都正确　　(D) 两个命题都不正确

【答案】(D).

【解析】易知命题Ⅰ不正确；又可以取无穷多个平行平面，在每个平面上取一条直线，且使这些直线两两不同向，则这些直线中的任意两条都是异面直线，从而命题Ⅱ也不正确.

5. 在某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了，这样，全部比赛只进行了 50 场。那么，在上述 3 名选手之间比赛的场数是 【答】(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(B)

【解析】设这三名选手之间的比赛场数是 r，共 n 名选手参赛. 由题意，可得 $C_{n-3}^2+6-r=50$，即 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$=44+r. 由于 0≤r≤3，经检验可知，仅当 r=1 时，n=13 为正整数.

6. 已知点 $A(1,2)$，过点(5,−2)的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于另外两点 B, C，那么，△ABC 是

(A) 锐角三角形　(B) 钝角三角形　(C) 直角三角形　(D) 不确定 【答】(　)

【答案】(C)

【解析】 设 B(t^2, 2t), C(s^2, 2s), s≠t, s≠1, t≠1，则直线 BC 的方程为，化得 2x−(s+t)y+2st=0.

由于直线 BC 过点(5，−2)，故 2×5−(s+t)(−2)+2st=0，即(s+1)(t+1)=−4.

因此，$k_{AB}k_{AC}=\frac{4}{(t+1)(s+1)}=-1$，所以，∠BAC=90°，从而△ABC 是直角三角形.

二、填空题

题号	7	8	9	10	11	12
答案	6	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{64}{5}$	43	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

7. 已知正整数 n 不超过 2000，并且能表示成不少于 60 个连续正整数之和，那么，这样的 n 的个数是___________.

【答案】6.

【解析】首项为 a 为的连续 k 个正整数之和为 $S_k=\frac{(2a+k-1)k}{2}\geq\frac{k(k+1)}{2}$

由 Sk≤2000，可得 60≤k≤62.

当 k=60 时，Sk=60a+30×59，由 Sk≤2000，可得 a≤3，故 Sk=1830, 1890, 1950;

当 k=61 时，Sk=61a+30×61，由 Sk≤2000，可得 a≤2，故 Sk=1891，1952;

当 k=62 时，Sk=62a+31×61，由 Sk≤2000，可得 a≤1，故 Sk=1953.

于是，题中的 n 有 6 个.

8. 已知 θ=arctg$\frac{5}{12}$，那么，复数 $z=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{239+i}$ 的辐角主值是_________.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 z 的辐角主值　argz=arg［(12+5i)^2(239−i)］

=arg［(119+120i)　(239−i)］　=arg［28561+28561i］$=\frac{\pi}{4}$

9. 在△ABC 中，记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若 $9a^2+9b^2-19c^2=0$，则 $\frac{\text{ctg}C}{\text{ctg}A+\text{ctg}B}$ =__________.

【答案】 $\frac{5}{9}$.

【解析】

$$\frac{\operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}=\frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}}=\frac{\sin A \sin B}{\sin^2 C}\cos C$$

$$=\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^2}=\frac{9a^2+9b^2-9c^2}{2\times 9c^2}$$

$$=\frac{19c^2-9c^2}{2\times 9c^2}=\frac{5}{9}$$

10. 已知点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上，并且 P 到这条双曲线的右准线的距离恰是 P 到这条双曲线的两个焦点的距离的等差中项，那么，P 的横坐标是_____.

【答案】$-\frac{64}{5}$

【解析】记半实轴、半虚轴、半焦距的长分别为 a、b、c，离心率为 e，点 P 到右准线 l 的距离为 d，则 a=4，b=3，c=5，，右准线 l 为.

如果 P 在双曲线右支，则 $|PF_1|=|PF_2|+2a=ed+2a$.

从而，$|PF_1|+|PF_2|=(ed+2a)+ed=2ed+2a>2d$，

这不可能；故 P 在双曲线的左支，则 $|PF_2|-|PF_1|=2a$，$|PF_1|+|PF_2|=2d$.

两式相加得 $2|PF_2|=2a+2d$.　又 $|PF_1|=ed$, 从而 $ed=a+d$.

故 $d=\frac{a}{e-1}=16$. 因此，P 的横坐标为 $x=\frac{a^2}{c}-d=-\frac{64}{5}$.

11. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a, b, c 是取自集合{-3,-2,-1,0,1,2,3}中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，那么，这样的直线的条数是______.

【答案】43

【解析】设倾斜角为 θ，则 tgθ=->0. 不妨设 a>0，则 b<0.

(1) c=0, a 有三种取法，b 有三种取法，排除 2 个重复 (3x-3y=0, 2x-2y=0 与 x-y=0 为同一直线)，故这样的直线有 3×3-2=7 条；

(2) c≠0，则 a 有三种取法，b 有三种取法，c 有四种取法，且其中任两条直线均不相同，故这样的直线有 3×3×4=36 条.

从而，符合要求的直线有 7+36=43 条.

12. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形，A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是△SBC 的垂心，二面角 $H-AB-C$ 的平面角等于 30°，$SA=2\sqrt{3}$。那么三棱锥 $S-ABC$ 的体积为__________.

【答案】$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

【解析】由题设，AH⊥面 SBC. 作 BH⊥SC 于 E. 由三垂线定理可知 SC⊥AE，SC⊥AB. 故 SC⊥面 ABE. 设 S 在面 ABC 内射影为 O，则 SO⊥面 ABC. 由三垂线定理之逆定理，可知 CO⊥AB 于 F. 同理，BO⊥AC. 故 O 为△ABC 的垂心.

又因为△ABC 是等边三角形，故 O 为△ABC 的中心，从而 SA=SB=SC=.

因为 CF⊥AB，CF 是 EF 在面 ABC 上的射影，由三垂线定理，EF⊥AB. 所以，∠EFC 是二面角 H-AB-C 的平面角. 故∠EFC=30°，

OC=SCcos60° $=\sqrt{3}$，SO= OC tg60° =3.

又 OC=$\frac{\sqrt{3}}{3}$AB，故 AB=$\sqrt{3}$OC=3.　所以，VS-ABC=$\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

三、解答题

13. 已知当 $x\in[0,1]$时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$恒成立，试求的取值范围。

【解析】

若对一切 x∈ [0，1]，恒有 f(x)= $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$，

则 cos θ=f(1)>0， sin θ=f(0)>0. (1)

取 x∈ (0，1)，由于 $f(x)\ge 2x(1-x)\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-x(1-x)$，

所以，$f(x)>0$恒成立，当且仅当 $2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-1>0$ (2)

先在 [0,2π] 中解(1)与(2)：由 cos θ >0, sin θ >0，可得 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

又由 (2) 得 $\sin 2\theta>\frac{1}{2}$ 注意到 0<2θ<π，故有$\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5\pi}{6}$，

所以，$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}$.

因此，原题中 θ 的取值范围是 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}$ ，k∈Z.

或解：若 对 一 切 x∈ [0， 1]， 恒 有

$f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$，

则 cos θ =f(1)>0, sin θ =f(0)>0. (1)

取 $x_0=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}\in(0,1)$，则 $\sqrt{\cos\theta}x_0-\sqrt{\sin\theta}(1-x_0)=0$.

由 于 $f(x)=\left[\sqrt{\cos\theta}x-\sqrt{\sin\theta}(1-x)\right]^2+2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x(1-x)$，

所 以， $0<f(x_0)=2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x_0(1-x_0)$.

故 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$ (2)

反 之， 当 (1)， (2)成 立 时， f(0)=sin θ >0， f(1)=cos θ >0， 且 x∈ (0，1)时， $f(x)\geqslant 2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right)x(1-x)>0$.

先 在 [0, 2 π] 中 解 (1)与 (2)：

由 cos θ >0, sin θ >0， 可 得 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

又 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$, $\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>\frac{1}{2}$ ，

$\frac{1}{2}\sin 2\theta>\frac{1}{4}$, $\sin 2\theta>\frac{1}{2}$,

注 意 到 0<2 θ < π ， 故 有 $\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5\pi}{6}$ ，

所 以， $\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}$.

因 此， 原 题 中 θ 的 取 值 范 围 是 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}$, k∈ Z

14. 给定 $A(-2,2)$，已知 B 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上的动点，$F$ 是左焦点，当$|AB|+\frac{5}{3}|BF|$取最小值时，求 B 的坐标。

【解析】

记椭圆的半长轴、半短轴、半焦距分别为 a、b、c，离心率为 e.则 a=5, b=4, c=3, e=$\frac{3}{5}$，左准线为 x=$-\frac{25}{3}$，过点 B 作左准线 x=$-\frac{25}{3}$ 的垂线，垂足为 N，过 A 作此准线的垂线，垂足为 M. 由椭圆定义，|BN|=$\frac{5}{3}$|BF|.

于是，|AB|+$\frac{5}{3}$|BF|=|AB|+|BN|≥|AM|(定值)，等号成立当且仅当 B 是 AM 与椭圆的交点时，

此时 B($-\frac{5\sqrt{3}}{2}$，2)，所以，当|AB|+$\frac{5}{3}$|BF|取最小值时，B 的坐标为($-\frac{5\sqrt{3}}{2}$，2).

15. 给定正整数 n 和正数 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，试求

$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值。

【解析】设公差为 d, $a_{n+1}=\alpha$，则 S=$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$=(n+1)α+$\frac{n(n+1)}{2}$d.

故 $\alpha+\frac{nd}{2}=\frac{S}{n+1}$.

$$M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=(\alpha-nd)^2+\alpha^2$$

$$=\frac{4}{10}(\alpha+\frac{nd}{2})^2+\frac{1}{10}(4\alpha-3nd)^2$$

则 $\geqslant\frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2$

因此 |S|≤$\frac{3}{\sqrt{10}}$(n+1)$\sqrt{M}$，且当 α=$\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$，d=$\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{M}$ 时，

S=(n+1)($\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}+\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{M}$)

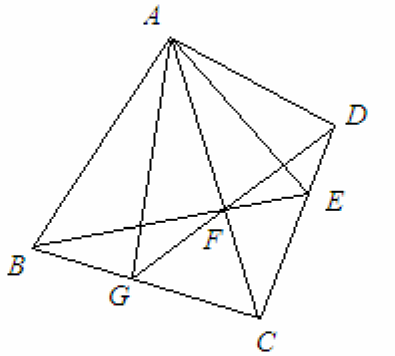
=(n+1)$\frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$=$\frac{\sqrt{10}}{2}$(n+1)$\sqrt{M}$

由于此时 4α=3nd，故 $a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2=\frac{4}{10}\cdot\frac{10}{4}M=M$.

所以，S 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$(n+1)$\sqrt{M}$.

1999年全国高中数学联合竞赛加试参考答案及评分标准

一、（满分50分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$。在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G。求证：$\angle GAC=\angle EAC$.



【解析】连结BD交AC于H.对△BCD用塞瓦定理，可得 $\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{BH}{HD}\cdot\dfrac{DE}{BC}=1$

因为AH是∠BAD的平分线，由角平分线定理，可得 $\dfrac{BH}{HD}=\dfrac{AB}{AD}$.

故 $\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{DE}{BC}=1$.

过点C作AB的平行线AG的延长线于I，过点C作AD的平行线交AE的延长线于J.

则 $\dfrac{CG}{GB}=\dfrac{CI}{AB}$，$\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{AD}{CJ}$. 所以，$\dfrac{CI}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{AD}{CJ}=1$

从而，CI=CJ.

又因为CI∥AB，CJ∥AD，

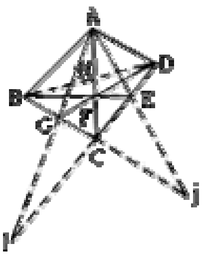
故 ∠ACI=π－∠ABC=π－∠DAC=∠ACJ.

因此，△ACI≌△ACJ.

从而，∠IAC=∠JAC，即 ∠GAC=∠EAC

二、（满分50分）给定实数 a，b，c，已知复数 z_1，z_2，z_3 满足：

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}=1\end{cases}$$，求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值。



【解析】 记 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

可设 $\dfrac{z_1}{z_2}=e^{i\theta}$，$\dfrac{z_2}{z_3}=e^{i\varphi}$，则 $\dfrac{z_1}{z_3}=e^{i(\theta+\varphi)}$.

由题设，有 $e^{i\theta}+e^{i\varphi}+e^{-i(\theta+\varphi)}=1$. φ

两边取虚部，有

$0=\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)$

$$=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}-\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

故 $\theta=2k\pi$ 或 $\phi=2k\pi$ 或 $\theta+\phi=2k\pi$，$k\in Z$.

因而，$z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

如果 $z_1=z_2$，代入原式即 $1+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$.

故 $(\frac{z_3}{z_1})^2+1=0,\frac{z_3}{z_1}=\pm i$.

这时，$|az_1+bz_2+cz_3|=|z_1||a+b\pm ci|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

类似地，如果 $z_2=z_3$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(b+c)^2+a^2}$;

如果 $z_3=z_1$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(c+a)^2+b^2}$.

所以，$|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值为 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 或 $\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ 或 $\sqrt{(c+a)^2+b^2}$.

三、（满分 50 分）给定正整数 n，已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 克的所有物品。

（1）求 k 的最小值 $f(n)$；

（2）当且仅当 n 取什么值时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是唯一确定的？并证明你的结论。

【解析】(1) 设这 k 块砝码的质量数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，$a_i\in Z$，$1\leqslant i\leqslant k$. 因为天平两端都可以放砝码，故可称质量为 $\sum_{i=1}^{k}x_ia_i$, $x_i\in\{-1,0,1\}$. 若利用这 k 块砝码可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 的物品，则上述表示式中含有 $1,2,\cdots,n$，由对称性易知也含有 $0,-1,-2,\cdots,-n$，即

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{0,\pm1,\cdots,\pm n\}.$$

所以，$2n+1=|\{0,\pm1,\cdots,\pm n\}|\leqslant\left|\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\right|\leqslant 3^k$,

即 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$

设 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$ $(m\geqslant 1, m\in Z)$，则 $k\geqslant m$.

且 $k=m$ 时，可取 $a_1=1, a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$.

由数的三进制表示可知，对任意 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$，都有 $p=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}$，其中 $y_i\in\{0, 1, 2\}$.

则 $p-\frac{3^{m-1}-1}{2}=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}-\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1}$.

令 $x_i=y_i-1$，则 $x_i\in\{-1, 0, 1\}$.

故对一切 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$ 的整数 l，都有 $l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}$，其中 $x_i\in\{-1, 0, 1\}$.

由于 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，因此，对一切 $-n\leqslant l\leqslant n$ 的整数 l，也有上述表示.

综上，可知 k 的最小值

$f(n)=m\cdot\left(\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}\right)$.

(2) Ⅰ.当 $\frac{3^m-1}{2}<n<3\frac{3^{m+1}-1}{2}$ 时，由(1)可知 $1, 3, \cdots, 3^{m-1}, 3^m$ 就是一种砝码的组成方式. 下面我们证明 $1, 3, \cdots, 3^{m-1}, 3^m-1$ 也是一种方式

若 $1\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，由(1)可知 $l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}$，$x_i\in\{-1, 0, 1\}$.

则 $l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}+0\cdot(3^m-1)$;

若 $\frac{3^m-1}{2}<l\leqslant n<3\frac{3^{m+1}-1}{2}$，

则 $\frac{3^m-1}{2}<l+1\leqslant\frac{3^{m+1}-1}{2}$.

由(1)可知

$l+1=\sum_{i=1}^{m+1}x_i3^{i-1}$，其中 $x_i\in\{-1, 0, 1\}$.

易知 $x_{m+1}=1$.(否则 $l\leqslant\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}-1=\frac{3^m-1}{2}-1$，矛盾)则 $l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}\cdot(3^m-1)$.

所以，当 $n\neq\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

Ⅱ.下面我们证明：当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)=m$ 块砝码的组成方式是惟

一的，即 $a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

若对每个 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，都有 $l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i$，$x_i\in\{-1,0,1\}$.

即 $\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\}\supseteq\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\}$.

注意左边集合中至多有 3m 个元素. 故必有

$\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\}=\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\}$.

从而，对每个 l，$-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，都可以惟一地表示为

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i，其中\ x_i\in\{-1,0,1\}.$$

因而，$\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{3^m-1}{2}$. 则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+1)a_i=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\frac{3^m-1}{2}$.

令 $y_i=x_i+1$，则 $y_i\in\{0,1,2\}$.

由上可知，对每个 $0\leqslant l\leqslant 3^m-1$，都可以惟一地表示为

$l=\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$，其中 $y_i\in\{0,1,2\}$.

特别地，易知 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$.

下面用归纳法证明 $a_i=3^{i-1}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$.

当 $i=1$ 时，易知 $\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$ 中最小的正整数是 a_1，故 $a_1=1$.

假设当 $1\leqslant i\leqslant p$ 时，$a_i=3^{i-1}$.

由于 $\sum_{i=1}^{p}y_ia_i=\sum_{i=1}^{p}y_i3^{i-1}$，$y_i\in\{0,1,2\}$ 就是数的三进制表示，易知它们正好是 $0,1,2,\cdots,3^p-1$，故 a_{p+1} 应是除上述表示外 $\{\sum_{i=1}^{m}y_ia_i \mid y_i\in\{0,1,2\}\}$ 中最小的数，因此，$a_{p+1}=3^p$.

由归纳法可知，$a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

综合Ⅰ，Ⅱ可知，当且仅当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.