1989 年全国高中数学联赛

(10 月 15 日上午 8：00—10：00)

一．选择题(本题满分 30 分，每小题 5 分)：

1．若 A、B 是锐角△ABC 的两个内角，则复数

$$z=(\cos B-\sin A)+i(\sin B-\cos A)$$

在复平面内所对应的点位于(　　)

A. 第一象限　　*B*. 第二象限　　*C*. 第三象限　　*D*. 第四象限

2．函数 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin x$ 的值域是(　　)

A. $(-\pi,\ \pi)$　　*B*. $[-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi]$　　*C*. $(-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi)$　　*D*. $[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi]$

3. 对任意的函数 $y=f(x)$，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x-1)$ 与函数 $y=f(-x+1)$ 的图象恒(　　)

***A*. 关于 x 轴对称　　*B*. 关于直线 $x=1$ 对称　　*C*. 关于直线 $x=-1$ 对称　　*D*. 关于 y 轴对称**

4. 以长方体 8 个顶点中任意 3 个为顶点的所有三角形中，锐角三角形的个数为(　　)

***A*. 0　　*B*. 6　　*C*. 8　　*D*. 24**

5. 若

$$M=\{z|\ z=\frac{t}{1+t}+i\frac{1+t}{t},\ t\in R,\ t\neq -1,\ t\neq 0\},$$

$$N=\{z|\ z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+i\cos(\arccos t)],\ t\in R,\ |t|\leq 1\}.$$

则 $M\cap N$ 中元素的个数为

***A*. 0　　*B*. 1　　*C*. 2　　*D*. 4**

6. 集合

$$M=\{u|u=12m+8n+4l,\ 其中\ m,\ n,\ l\in Z\}$$

$$N=\{u|u=20p+16q+12r,\ 其中\ p,\ q,\ r\in Z\}$$

的关系为

***A*. $M=N$　　*B*. $M\not\subset N$，$N\not\subset M$　　*C*. $M\subsetneqq N$　　*D*. $N\subsetneqq M$**

三．填空题(本题满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $\log_a\sqrt{2}<1$，则 a 的取值范围是___________.

2．已知直线 l: $2x+y=10$，过点 $(-10,0)$ 作直线 $l'\perp l$，则 l' 与 l 的交点坐标为__________.

3．设函数 $f_0(x)=|x|$，$f_1(x)=|f_0(x)-1|$，$f_2(x)=|f_1(x)-2|$，则函数 $y=f_2(x)$ 的图象与 x 轴所围成图形中的封闭部分的面积是______________.

4．一个正数，若其小数部分、整数部分和其自身成等比数列，则该数为____________.

5．如果从数 1，2，3，…，14 中，按由小到大的顺序取出 a_1，a_2，a_3，使同时满足

$a_2-a_1\geq 3$，与 $a_3-a_2\geq 3$，

那么，所有符合上述要求的不同取法有__________种.

6．当 s 和 t 取遍所有实数时，则

$$(s+5-3|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$$

所能达到的最小值为__________.

三．（本题满分 20 分）

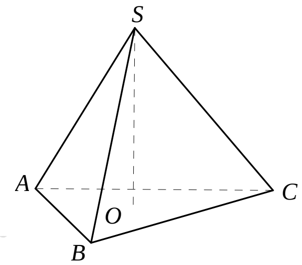
已知 a_1，a_2，…，a_n是 n 个正数，满足

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1.$$

求证：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geqslant 3^n$.

四．（本题满分 20 分）

已知正三棱锥 S—ABC 的高 $SO=3$，底面边长为 6，过点 A 向其所对侧面 SBC 作垂线，垂足为 O，在 AO 上取一点 P，使 $\dfrac{AP}{PO}=8$，求经过点 P 且平行于底面的截面的面积．



五．（本题满分 20 分）

已知：对任意的 $n\in N^*$，有 $a_n>0$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)^2$．求证：$a_n=n$.

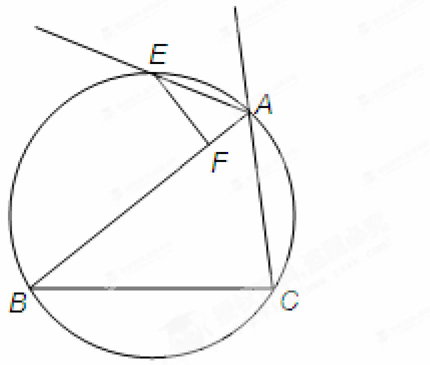
第二试

（上午 10∶30—12∶30）

一．（本题满分 35 分）

已知　在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的一个外角的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F.

求证　$2AF=AB-AC$.



二．（本题满分 35 分）

已知 $x_i\in R$（$i=1$，2，…，n；$n\geqslant 2$），满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

求证： $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{i}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}$.

三．（本题满分 35 分）

有 $n\times n$（$n\geqslant 4$）的一张空白方格表，在它的每一个方格内任意的填入+1 与-1 这两个数中的一个，现将表内 n 个两两既不同行(横)又不同列(竖)的方格中的数的乘积称为一个基本项．试证明：按上述方式所填成的每一个方格表，它的全部基本项之和总能被 4 整除（即总能表示成 $4k$ 的形式，其中 $k\in Z$）.

1989年全国高中数学联赛解答

第一试

一．选择题(本题满分30分，每小题5分)：

1．若A、B是锐角△ABC的两个内角，则复数

$$z=(\cos B-\sin A)+i(\sin B-\cos A)$$

在复平面内所对应的点位于(　　)

A．第一象限　　*B*．第二象限　　*C*．第三象限　　*D*．第四象限

【答案】B

【解析】$0°<A$、$B<90°<A+B<180°$．故$90°>A>90°-B>0°$，$\sin A>\cos B$，$\cos A<\sin B$．故$\cos B-\sin A<0$，$\sin B-\cos A>0$．点Z位于第二象限．选B

2．函数$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin x$的值域是(　　)

A．$(-\pi,\ \pi)$　　B．$[-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi]$　　C．$(-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi)$　　D．$[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi]$

【答案】D

【解析】因$x\in[-1,\ 1]$，故$\arctan x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$，$\frac{1}{2}\arcsin x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$，且$f(-1)=-\frac{\pi}{2}$，$f(1)=\frac{\pi}{2}$．选$D$

3．对任意的函数$y=f(x)$，在同一个直角坐标系中，函数$y=f(x-1)$与函数$y=f(-x+1)$的图象恒(　　)

A．关于x轴对称　*B*．关于直线$x=1$对称　*C*．关于直线$x=-1$对称　*D*．关于y轴对称

【答案】B

【解析】令$x-1=t$，则得$f(t)=f(-t)$，即$f(t)$关于$t=0$对称，即此二图象关于$x=1$对称．选B

4．以长方体8个顶点中任意3个为顶点的所有三角形中，锐角三角形的个数为(　　)

A．0　　B．6　　C．8　　D．24

【答案】C

【解析】以不相邻的4个顶点为顶点的四面体的8个面都是锐角三角形．其余的三角形都不是锐角三角形．选C．

5．若

$$M=\{z|\ z=\frac{t}{1+t}+i\frac{1+t}{t},\ t\in R,\ t\neq-1,\ t\neq0\},$$

$$N=\{z|\ z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+i\cos(\arccos t)],\ t\in R,\ |t|\leqslant1\}.$$

则$M\cap N$中元素的个数为

A．0　　*B*．1　　*C*．2　　*D*．4

【答案】A

【解析】M的图象为双曲线$xy=1(x\neq0,\ x\neq1)$ N的图象为$x^2+y^2=2(x\geqslant0)$，二者无公共

点．选 A.

6．集合

$M=\{u|u=12m+8n+4l$，其中 m，n，$l\in Z\}$

$N=\{u|u=20p+16q+12r$，其中 p，q，$r\in Z\}$

的关系为

A．$M=N$　　　B．$M\not\subseteq N$，$N\not\subseteq M$　　　C．$M\subsetneq N$　　　D．$N\subsetneq M$

【答案】A

【解析】$u=12m+8n+4l=4(3m+2n+l)$，由于 $3m+2n+l$ 可以取任意整数值，故 M 表示所有 4 的倍数的集合．

同理 $u=20p+16q+12r=4(5p+4q+3r)$ 也表示全体 4 的倍数的集合．于是 $M=N$.

三．填空题(本题满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $\log_a\sqrt{2}<1$，则 a 的取值范围是____________.

【答案】$(0，1)\cup(\sqrt{2}，+\infty)$

【解析】若 $0<a<1$，则 $\log_a\sqrt{2}<0$，若 $a>1$，则得 $a>\sqrt{2}$．故填 $(0，1)\cup(\sqrt{2}，+\infty)$

2.已知直线 $l:2x+y=10$,过点$(-10,0)$作直线 $l'\perp l$,则 l'与 l 的交点坐标为__________.

【答案】$(2，6)$

【解析】直线 l'方程为$(x+10)-2y=0$，解得交点为$(2，6)$.

3．设函数 $f_0(x)=|x|$，$f_1(x)=|f_0(x)-1|$，$f_2(x)=|f_1(x)-2|$，则函数 $y=f_2(x)$的图象与 x 轴所围成图形中的封闭部分的面积是______________.

【答案】7

【解析】 图 1 是函数 $f_0(x)=|x|$的图形，把此图形向下平行移动 1 个单位就得到函数 $f_1(x)=|x|-1$ 的图形，作该图形的在 x 轴下方的部分关于 x 轴的对称图形得出图 2，其中在 x 轴上方的部分即是 $f_1(x)=|f_0(x)-1|$的图象，再把该图象向下平行移动 2 个单位得到 $f_2(x)=|x|-2$ 的图象，作该图象在 x 轴下方的部分关于 x 轴的对称图形得到图 3，其中 x 轴上方的部分即是 $f_2(x)=|f_1(x)-2|$的图象。易得所求面积为 7。

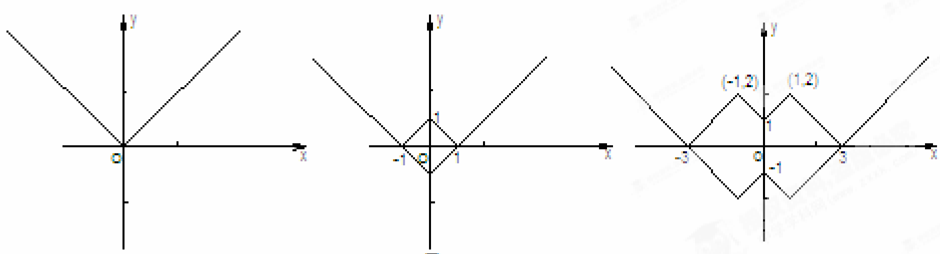


图1　　图2　　图3

4．一个正数，若其小数部分、整数部分和其自身成等比数列，则该数为____________.

【答案】$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】设其小数部分为 $a\,(0<a<1)$，整数部分为 $n\,(n\in N^*)$，则得，$a(n+a)=n^2$，

∴ $n^2<n+a<n+1$.

∴ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

但 $n\in N^*$，故 $n=1$，得，$a^2+a-1=0$，

∴ $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

由 $\alpha>0$，知，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ∴ 原数为$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5．如果从数 1，2，3，…，14 中，按由小到大的顺序取出 a_1，a_2，a_3，使同时满足

$$a_2-a_1\geqslant 3，与 a_3-a_2\geqslant 3，$$

那么，所有符合上述要求的不同取法有__________种.

【答案】120

【解析】令 $a_1'=a_1$，$a_2'=a_2-2$，$a_3'=a_3-4$，则得 $1\leqslant a_1'<a_2'<a_3'\leqslant 10$．所求取法为 $C_{10}^3=120$.

6．当 s 和 t 取遍所有实数时，则

$$(s+5-3|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$$

所能达到的最小值为__________.

【答案】2

【解析】令 $x=3|\cos t|$，$y=2|\sin t|$，则得椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在第一象限内的弧段.

再令 $x=s+5$，$y=s$，则得 $y=x-5$，表示一条直线．$(s+5-3|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$表示椭圆弧段上点与直线上点距离平方．其最小值为点(3，0)与直线 $y=x-5$ 距离平方=2.

三．(本题满分 20 分)

已知 a_1，a_2，…，a_n是 n 个正数，满足

$$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1.$$

求证：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.

【解析】证明：∵ $2+a_i=1+1+a_i\geqslant 3\sqrt[3]{a_i}$，($i=1$，2，…，$n$)

∴ $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)=(1+1+a_1)(1+1+a_2)\cdots(1+1+a_n)\geqslant 3\sqrt[3]{a_1}\cdot 3\sqrt[3]{a_2}\cdot\cdots\cdot 3\sqrt[3]{a_n}\geqslant$

$3^n\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}=3^n$.

证法 2：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)=2^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)2^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)2^{n-2}+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$

但 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=n=C_n^1$，

$$a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n\geqslant C_n^2\sqrt[C_n^2]{(a_1a_2\cdots a_n)^{n-1}}=C_n^2，\cdots\cdots，$$

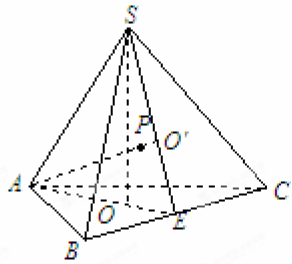
∴ $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)=2^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)2^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)2^{n-2}+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$

$$\geqslant 2^n+C_n^12^{n-1}+C_n^22^{n-2}+\cdots+C_n^n=(2+1)^n=3^n.$$

四．（本题满分 20 分）

已知正三棱锥 $S—ABC$ 的高 $SO=3$，底面边长为 6，过点 A 向其所对侧面 SBC 作垂线，垂足为 O'，在 AO' 上取一点 P，使 $\frac{AP}{PO'}=8$，求经过点 P 且平行于底面的截面的面积．

【解析】 正三棱锥 $S—ABC$ 的高为 SO，故 $AO\perp BC$，设 AO 交 BC 于 E，连 SE．则可证 $BC\perp$ 面 AES．故面 $AES\perp$ 面 SBC．



由 $AO'\perp$ 面 SBC 于 O'，则 AO' 在面 AES 内，O' 在 SE 上．AO' 与 SO 相交于点 F．

∵ ABC 为正三角形，$AB=6$，故 $AE=3\sqrt{3}$，$OE=\sqrt{3}$．

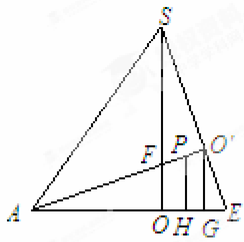
∵ $SO=3$，∴ $\tan\angle OES=\sqrt{3}$，$\angle E=60°$．

∴ $O'E=AE\cos60°=\frac{3}{2}\sqrt{3}$．

作 $O'G\perp$ 平面 ABC，则垂足 G 在 AE 上．$O'G=O'E\sin60°=\frac{9}{4}$．

∵ $\frac{AP}{PO'}=8$，∴ $\frac{PH}{O'G}=\frac{8}{9}$，$\Rightarrow PH=2$．

设过 P 与底面平行的截面面积为 s，截面与顶点 S 的距离 $=3-2=1$．



∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot6^2=9\sqrt{3}$．

∴ $\frac{s}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{1}{3})^2$，故 $s=\sqrt{3}$．

五．（本题满分 20 分）

已知：对任意的 $n\in N^*$，有 $a_n>0$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j)^2$．求证：$a_n=n$．

【解析】证明：由已知，$a_1^3=a_1^2$，$a_1>0$，∴ $a_1=1$．

设 $n\leqslant k(k\in N$，且 $k\geqslant1)$ 时，由 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j)^2$ 成立可证 $a_k=k$ 成立．

当 $n=k+1$ 时，$\sum\limits_{j=1}^{k+1}a_j^3=(\sum\limits_{j=1}^{k+1}a_j)^2=(\sum\limits_{j=1}^{k}a_j)^2+2a_{k+1}(\sum\limits_{j=1}^{k}a_j)+a_{k+1}^2$．

即 $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+a_{k+1}^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+2a_{k+1}\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+a_{k+1}^2$．

∴ $a_{k+1}^2-a_{k+1}-k(k+1)=0$，解此方程，得 $a_{k+1}=-k$ 或 $a_{k+1}=k+1$．由 $a_n>0$ 知，只有 $a_{k+1}=k+1$ 成立．

即 $n=k+1$ 时命题也成立．由数学归纳原理知对于一切 $n\in N^*$，$a_n=n$ 成立．

第二试

一．（本题满分 35 分）

已知　在 ΔABC 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的一个外角的平分线交 ΔABC 的外接圆于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F.

求证　$2AF=AB-AC$.

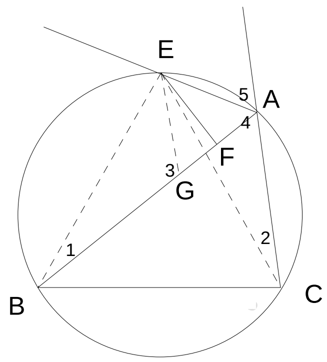
【解析】证明：在 FB 上取 $FG=AF$，连 EG、EC、EB，

于是 ΔAEG 为等腰三角形，$\therefore EG=EA$.

又$\angle 3=180°-\angle EGA=180°-\angle EAG=180°-\angle 5=\angle 4$.

$\angle 1=\angle 2$．于是 $\Delta EGB\cong\Delta EAC$．$\therefore BG=AC$，

故证



二．已知 $x_i\in\mathrm{R}$（$i=1$，2，…，n；$n\geq 2$），满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

求证：$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

【解析】证明：由已知可知，必有 $x_i>0$，也必有 $x_j<0$（i，$j\in\{1$，2，…，n，且 $i\neq j\}$）.

设 x_{i_1}，x_{i_2}，…，x_{i_k}为诸 x_i中所有>0 的数，x_{j_1}，x_{j_2}，…，x_{j_m}为诸 x_i中所有<0 的数．由已知得

$$X=x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}=\frac{1}{2},\quad Y=x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_m}=-\frac{1}{2}.$$

于是当 $\sum_{l=1}^{k}\frac{x_{i_l}}{l}>-\sum_{h=1}^{m}\frac{x_{j_h}}{h}$**时，** $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\sum_{l=1}^{k}\frac{x_{i_l}}{l}+\sum_{h=1}^{m}\frac{x_{j_h}}{h}\leq\sum_{l=1}^{k}x_{i_l}-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{m}x_{j_h}=\frac{X}{2}-\frac{-Y}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

于是当 $\sum_{l=1}^{k}\frac{x_{i_l}}{l}<-\sum_{h=1}^{m}\frac{x_{j_h}}{h}$**时，** $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=-\sum_{l=1}^{k}\frac{x_{i_l}}{l}-\sum_{h=1}^{m}\frac{x_{j_h}}{h}\leq-\sum_{l=1}^{k}x_{i_l}-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{m}x_{j_h}=\frac{-Y}{2}-\frac{X}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

总之， $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$**成立.**

三．有 $n\times n$（$n\geq 4$）的一张空白方格表，在它的每一个方格内任意的填入+1 与-1 这两个数中的一个，现将表内 n 个两两既不同行（横）又不同列（竖）的方格中的数的乘积称为一个基本项．试证明：按上述方式所填成的每一个方格表，它的全部基本项之和总能被 4 整除（即总能表示成 $4k$ 的形式，其中 $k\in\mathrm{Z}$）.

【解析】证明 ：基本项共有 $n!$个，$n>3$，则基本项的个数为 4 的倍数，设共有 $4m$ 项.

其中每个数 a_{ij}（$=\pm 1$）都要在（$n-1$）!个基本项中出现，故把所有基本项乘起来后，每个 a_{ij}都乘了（$n-1$）!次，而 $n>3$，故（$n-1$）!为偶数，于是该乘积等于 1．这说明等于-1 的

基

本项有偶数个，同样，等于+1的基本项也有偶数个.

若等于－1的基本项有 $4l$ 个，则等于+1的基本项有 $4m-4l$ 个，其和为 $4m-4l-4l=4(m-2l)$ 为4的倍数；

若等于－1的基本项有 $4l-2$ 个，则等于+1的基本项有 $4m-4l+2$ 个，其和为 $4m-4l+2-4l+2=4(m-2l+1)$ 为4的倍数．故证.