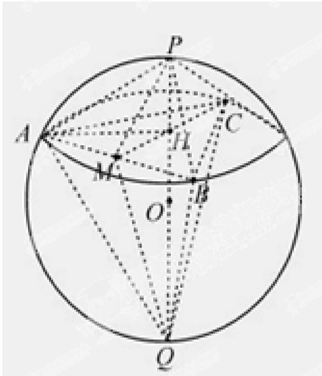
2012年全国高中数学联赛

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分．把答案填在题中的横线上．

1. 设 P 是函数 $y=x+\frac{2}{x}$（$x>0$）的图像上任意一点，过点 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线，垂足分别为 A,B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值是____________．

2. 设 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，则 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值是____________．



3. 设 $x,y,z\in[0,1]$，则 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$ 的最大值是____________．

4. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，A,B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$．设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是____________．

5. 设同底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球．若正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的角为 45°，则正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成角的正切值是____________．

6. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2$．若对任意的 $x\in[a,a+2]$，不等式 $f(x+a)\geq 2f(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____________．

7. 满足 $\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是____________．

8. 某情报站有 A,B,C,D 四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种．设第1周使用 A 种密码，那么第7周也使用 A 种密码的概率是____________．（用最简分数表示）

二、解答题：本大题共 3 小题，共 5 6 分．解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤．

9. （本小题满分16分）已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2},a\in R,a\neq 0$

（1）若对任意 $x\in R$，都有 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围；

（2）若 $a\geq 2$，且存在 $x\in R$，使得 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围．

10. （本小题满分 2 0 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数，且对于任意的正整数 n，都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$$

（1）当 $n=3$ 时，求所有满足条件的三项组成的数列 a_1,a_2,a_3；

（2）是否存在满足条件的无穷数列 $\{a_n\}$，使得 $a_{2013}=-2012$？若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由．

11．（本小题满分20分）

如图5，在平面直角坐标系 XOY 中，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，且 $|OB|=|OD|=6$.

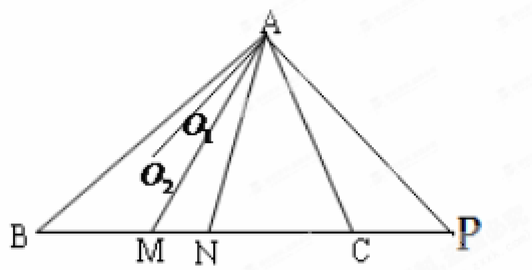
（1）求证：$|OA|\cdot|OC|$ 为定值；

（2）当点A在半圆 $(x-2)^2+y^2=4$（$2\le x\le 4$）上运动时，求点 C 的轨迹.

2012年全国高中数学联赛加试试题

一、（本题满分 40 分）

如图，在锐角 ΔABC 中，$AB>AC,M,N$ 是 BC 边上不同的两点，使得 $\angle BAM=\angle CAN$. 设 ΔABC 和 ΔAMN 的外心分别为 O_1,O_2，求证：O_1,O_2,A 三点共线。



二、（本题满分 40 分）

试证明：集合 $A=\{2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$ 满足

（1）对每个 $a\in A$，及 $b\in N^*$，若 $b<2a-1$，则 $b(b+1)$ 一定不是 $2a$ 的倍数；

（2）对每个 $a\in A$（其中 $\overline{A}$ 表示 A 在N 中的补集)，且 $a\ne 1$，必存在 $b\in N^*$，$b<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

三、（本题满分 50 分）

设 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是平面上 $n+1$ 个点，它们两两间的距离的最小值为 $d(d>0)$

求证：$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdots|P_0P_n|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$

四、（本题满分 50 分）

设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，$n$ 是正整数．证明：对满足 $0 \le a < b \le 1$ 的任意实数 a, b，数列 $\{S_n - [S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a, b)．这里，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．

2012 年全国高中数学联赛试题(A 卷)
参考答案及评分标准

说明:

1、评阅试卷时,请严格按照本评分标准。填空题只设 8 分和 0 分两档;解答题第 9 题 4 分为一个档次,第 10、11 题 5 分为一个档次。不要再增加其他中间档次。

2、对于解答题,如果考生的解答方法和本解答不同,只要思路合理,步骤正确,在评阅时可参考本评分标准适当划分档次评分。

一、填空题:本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分. 把答案填在题中的横线上.

1. 设 P 是函数 $y=x+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$ 的图像上任意一点,过点 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线,垂足分别为 A、B,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值是__________.

解: -1.

【方法 1】设 $P(x_0,x_0+\dfrac{2}{x_0})$,则直线 PA 的方程为

$$y-(x_0+\frac{2}{x_0})=-(x-x_0),\text{即 } y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0}.$$

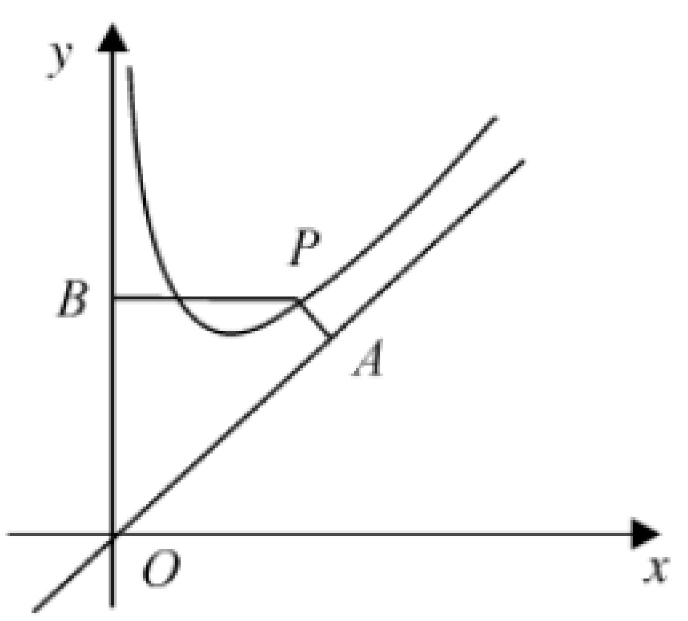


图1

由 $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+2x_0+\dfrac{2}{x_0}, \end{cases}$ 得 $A(x_0+\dfrac{1}{x_0},x_0+\dfrac{1}{x_0})$.

又 $B(0,x_0+\dfrac{2}{x_0})$,所以 $\overrightarrow{PA}=(\dfrac{1}{x_0},-\dfrac{1}{x_0})$,$\overrightarrow{PB}=(-x_0,0)$.

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{x_0}\cdot(-x_0)=-1$.

【方法 2】如图 1,设 $P(x_0,x_0+\dfrac{2}{x_0})(x_0>0)$,则点 P 到直线 $x-y=0$ 和 y 轴的距离分别为

$$|PA|=\frac{\left|x_0-(x_0+\frac{2}{x_0})\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x_0},\ |PB|=x_0.$$

因为 O、A、P、B 四点共圆(O 为坐标原点),所以 $\angle APB=\pi-\angle AOB=\dfrac{3\pi}{4}$.

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\dfrac{3\pi}{4}=-1$.

2. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,且满足 $a\cos B-b\cos A=\dfrac{3}{5}c$,则 $\dfrac{\tan A}{\tan B}$ 的值是__________.

解: 4.

【方法 1】由题设及余弦定理，得

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{5}c,\text{即 } a^2-b^2=\frac{3}{5}c^2.$$

故 $$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\ \cos B}{\sin B\ \cos A}=\frac{a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\frac{8}{5}c^2}{\frac{2}{5}c^2}=4.$$

【方法 2】如图 2，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D，则

$$a\cos B=DB,b\cos A=AD.$$

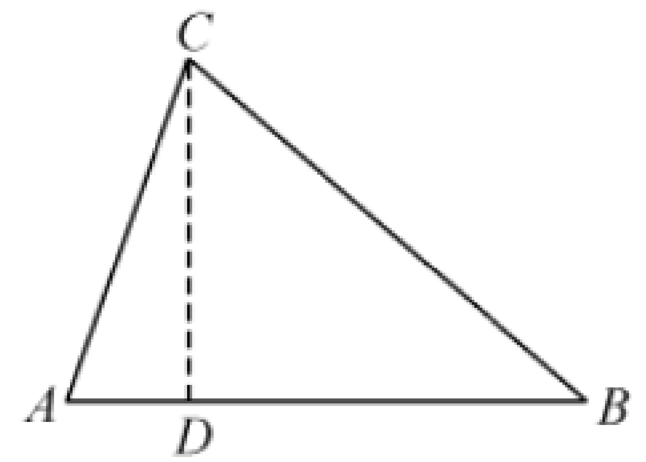


图2

由题设得 $DB-AD=\frac{3}{5}c.$

又 $DB+DA=c.$

联立解得 $AD=\frac{1}{5}c,DB=\frac{4}{5}c.$

故 $$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{CD}{DB}}=\frac{DB}{AD}=4.$$

【方法 3】由射影定理，得 $a\cos B+b\cos A=c.$

又 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c.$

联立解得 $a\cos B=\frac{4}{5}c,b\cos A=\frac{1}{5}c.$

故 $$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{a\cos B}{b\cos A}=\frac{\frac{4}{5}c}{\frac{1}{5}c}=4.$$

3. 设 $x、y、z\in[0,1]$，则 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$的最大值是__________.

解： $\sqrt{2}+1.$

不妨设 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$，则 $M=\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}+\sqrt{z-x}.$

因为 $\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}\leqslant\sqrt{2[(y-x)+(z-y)]}=\sqrt{2(z-x)}$，

所以 $M\leqslant\sqrt{2(z-x)}+\sqrt{z-x}=(\sqrt{2}+1)\sqrt{z-x}\leqslant\sqrt{2}+1.$

当且仅当 $y-x=z-y,x=0,z=1$，即 $x=0,y=\frac{1}{2},z=1$ 时，上式等号同时成立.

故 $M_{max}=\sqrt{2}+1.$

4. 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，$A、B$ 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$. 设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N，则$\frac{|MN|}{|AB|}$的最大值是__________.

解： 1.

【方法 1】设 $\angle ABF=\theta(0<\theta<\frac{2\pi}{3})$，则由正弦定理，得

$$\frac{|AF|}{\sin\theta}=\frac{|BF|}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\frac{|AB|}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

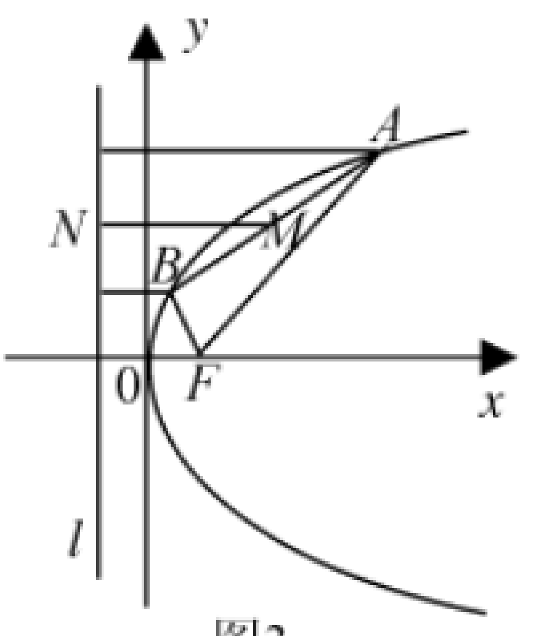


图3

所以 $\dfrac{|AF|+|BF|}{\sin\theta+\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{|AB|}{\sin\frac{\pi}{3}}$,

即 $\dfrac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sin\theta+\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$.

如图 3,由抛物线的定义及梯形的中位线定理,得 $|MN|=\dfrac{|AF|+|BF|}{2}$.

所以 $\dfrac{|MN|}{|AB|}=\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$.

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$时,$\dfrac{|MN|}{|AB|}$取得最大值为 1.

【方法 2】由抛物线的定义及梯形的中位线定理,得 $|MN|=\dfrac{|AF|+|BF|}{2}$.

在$\triangle AFB$ 中,由余弦定理,得

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\frac{\pi}{3}\\&=(|AF|+|BF|)^2-3|AF|\cdot|BF|\\&\geqslant(|AF|+|BF|)^2-3(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2\\&=(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2=|MN|^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $|AF|=|BF|$ 时,等号成立.

故 $\dfrac{|MN|}{|AB|}$的最大值为 1.

5. 设同底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球. 若正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的角为 45°,则正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成角的正切值是________.

解: 4.

如图 4,连结 PQ,则 $PQ\perp$平面 ABC,垂足 H 为正$\triangle ABC$ 的中心,且 PQ 过球心 O. 连结 CH 并延长交 AB 于点 M,则 M 为 AB 的中点,且 $CM\perp AB$. 易知$\angle PMH$、$\angle QMH$ 分别为正三棱锥 $P-ABC$、$Q-ABC$的侧面与底面所成二面角的平面角,则$\angle PMH=45°$,从而 $PH=MH=\frac{1}{2}AH$.

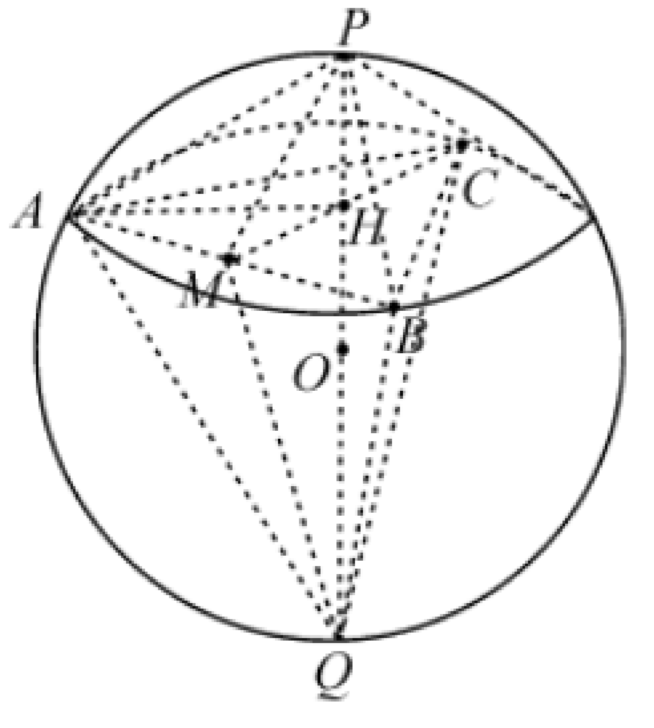


图4

因为 $\angle PAQ=90°$,$AH\perp PQ$,所以

$$AH^2=PH\cdot QH,\text{即 } AH^2=\frac{1}{2}AH\cdot QH.$$

所以 $QH=2AH=4MH$.

故 $\tan\angle QMH=\dfrac{QH}{MH}=4$.

6. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且当$x \geqslant 0$时，$f(x)=x^2$. 若对任意的$x \in [a,a+2]$，不等式$f(x+a) \geqslant 2f(x)$恒成立，则实数a的取值范围是__________.

解： $[\sqrt{2},+\infty)$.

由题设知，$f(x)=\begin{cases} x^2 (x \geqslant 0), \\ -x^2 (x<0), \end{cases}$ 则 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$.

因此，原不等式等价于$f(x+a) \geqslant f(\sqrt{2}x)$.

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，所以$x+a \geqslant \sqrt{2}x$，即$a \geqslant (\sqrt{2}-1)x$.

又$x \in [a,a+2]$，所以当$x=a+2$时，$(\sqrt{2}-1)x$取得最大值为$(\sqrt{2}-1)(a+2)$.

因此，$a \geqslant (\sqrt{2}-1)(a+2)$，解得$a \geqslant \sqrt{2}$.

故a的取值范围是$[\sqrt{2},+\infty)$.

7. 满足$\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$的所有正整数$n$的和是__________.

解： 33.

由正弦函数的凸性，有

当$x \in (0,\frac{\pi}{6})$时，$\frac{3}{\pi}x<\sin x<x$.

由此得 $\sin\frac{\pi}{13}<\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}$，$\sin\frac{\pi}{12}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}$，

$\sin\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}$，$\sin\frac{\pi}{9}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{9}=\frac{1}{3}$.

所以$\sin\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{11}<\sin\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{9}$.

故满足$\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$的正整数$n$的所有值分别为10，11，12，它们的和为33.

8. 某情报站有A、B、C、D四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种. 设第1周使用A种密码，那么第7周也使用A种密码的概率是__________.（用最简分数表示）

解： $\frac{61}{243}$.

用P_k表示第k周用A种密码本的概率，则第k周未用A种密码的概率为$1-P_k$. 于是，有

$$P_{k+1}=\frac{1}{3}(1-P_k), k \in \mathbf{N}^*, \text{即 } P_{k+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(P_k-\frac{1}{4}).$$

由$P_1=1$知，$\left\{P_k-\frac{1}{4}\right\}$是首项为$\frac{3}{4}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

所以$P_k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}$，即$P_k=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}+\frac{1}{4}$.

故$P_7=\frac{61}{243}$.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤.

9. **（本小题满分 16 分）**

已知函数$f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}$，$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$.

(1)若对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2)若 $a\geqslant 2$，且存在 $x\in\mathbf{R}$，使得$f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围.

解：(1)$f(x)=\sin^2 x+a\sin x+a-\frac{3}{a}$.

令 $t=\sin x$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$，则 $g(t)=t^2+at+a-\frac{3}{a}$ ………………………………………… 4 分

对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} g(-1)=1-\frac{3}{a}\leqslant 0, \\ g(1)=1+2a-\frac{3}{a}\leqslant 0. \end{cases}$$

解得 a 的取值范围为$(0,1]$ ………………………………………………………… 8 分

(2)因为 $a\geqslant 2$，所以$-\frac{a}{2}\leqslant -1$.

所以 $g(t)_{min}=g(-1)=1-\frac{3}{a}$ ………………………………………………… 12 分

因此，$f(x)_{min}=1-\frac{3}{a}$.

于是，存在 $x\in\mathbf{R}$，使得$f(x)\leqslant 0$ 的充要条件是

$1-\frac{3}{a}\leqslant 0$，解得 $0<a\leqslant 3$.

故 a 的取值范围是$[2,3]$ ………………………………………………………… 16 分

10. **（本小题满分 20 分）**

已知数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，且对于任意的正整数 n，都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3.$$

(1)当 $n=3$ 时，求所有满足条件的三项组成的数列 a_1,a_2,a_3；

(2)是否存在满足条件的无穷数列$\{a_n\}$，使得 $a_{2013}=-2012$？若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由.

解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1^2=a_1^3$，由 $a_1\neq 0$，得 $a_1=1$.

当 $n=2$ 时，$(1+a_2)^2=1+a_2^3$，由 $a_2\neq 0$，得 $a_2=2$ 或 $a_2=-1$ ……………………… 5 分

当 $n=3$ 时，$(1+a_2+a_3)^2=1+a_2^3+a_3^3$.

若 $a_2=2$，得 $a_3=3$ 或 $a_3=-2$；若 $a_2=-1$，得 $a_3=1$.

综上，满足条件的三项数列有 3 个：1，2，3，或 1，2，−2，或 1，−1，1 ……………………… 10 分

(2)令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则 $S_n^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3(n\in\mathbf{N}^*)$

从而 $(S_n+a_{n+1})^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3+a_{n+1}^3$.

两式相减,结合 $a_{n+1}\neq0$,得 $2S_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$

当 $n=1$ 时,由(1)知 $a_1=1$;

当 $n\geqslant2$ 时,$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_{n+1}^2-a_{n+1})-(a_n^2-a_n)$,

即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$,所以 $a_{n+1}=-a_n$ 或 $a_{n+1}=a_n+1$ …………………… 15 分

又 $a_1=1,a_{2013}=-2012$,

所以 $a_n=\begin{cases}n(1\leqslant n\leqslant2012),\\2012(-1)^n(n\geqslant2013)\end{cases}$ ………………………… 20 分

11. **(本小题满分 20 分)**

如图 5,在平面直角坐标系 XOY 中,菱形 $ABCD$ 的边长为 4,且 $|OB|=|OD|=6$.

(1)求证:$|OA|\cdot|OC|$ 为定值;

(2)当点 A 在半圆 M:$(x-2)^2+y^2=4$ $(2\leqslant x\leqslant4)$ 上运动时,求点 C 的轨迹.

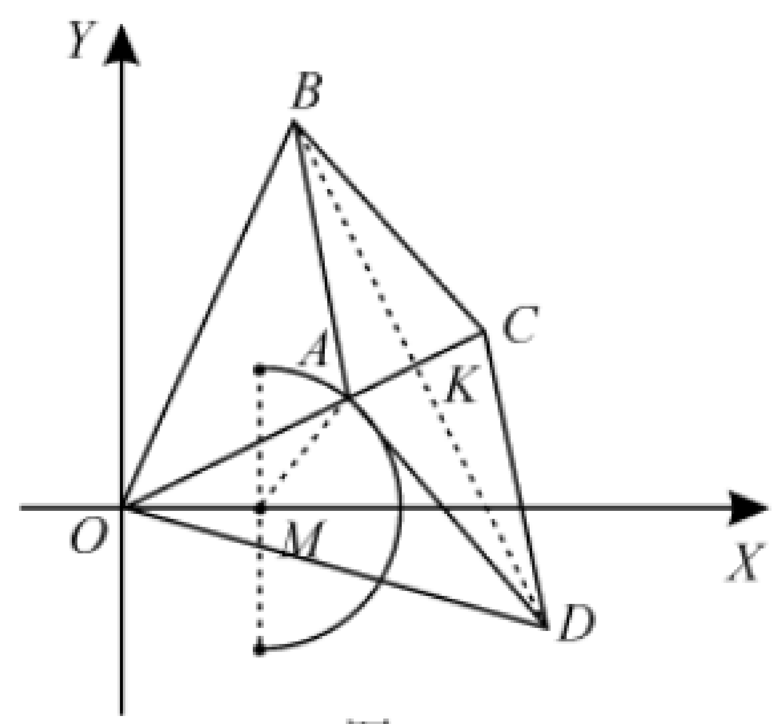


图5

解:(1)因为 $|OB|=|OD|$,$|AB|=|AD|=|CB|=|CD|$,所以 O、A、C 三点共线 ……………………………………………………………………………………………… 5 分

如图 5,连结 BD,则 BD 垂直平分线段 AC,设垂足为 K. 于是,有

$$\begin{aligned}|OA|\cdot|OC|&=(|OK|-|AK|)(|OK|+|AK|)\\&=|OK|^2-|AK|^2\\&=(|OB|^2-|BK|^2)-(|AB|^2-|BK|^2)\\&=|OB|^2-|AB|^2\\&=6^2-4^2=20(\text{定值})\end{aligned}$$ ………………………………………………… 10 分

(2)设 $C(x,y)$、$A(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$,其中 $\alpha=\angle XMA\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $\angle XOC=\dfrac{\alpha}{2}$.

因为 $|OA|^2=(2+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2=8(1+\cos\alpha)=16\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$,

所以 $|OA|=4\cos\dfrac{\alpha}{2}$ …………………………………………………………… 15 分

由(1)的结论,得 $|OC|\cos\dfrac{\alpha}{2}=5$.

所以 $x=|OC|\cos\dfrac{\alpha}{2}=5$.

从而 $y=|OC|\sin\dfrac{\alpha}{2}=5\tan\dfrac{\alpha}{2}\in[-5,5]$.

故点 C 的轨迹是一条线段,其两个端点的坐标分别为$(5,5)$、$(5,-5)$ …………………… 20 分

2012 年全国高中数学联赛加试试题(A 卷)

参考答案及评分标准

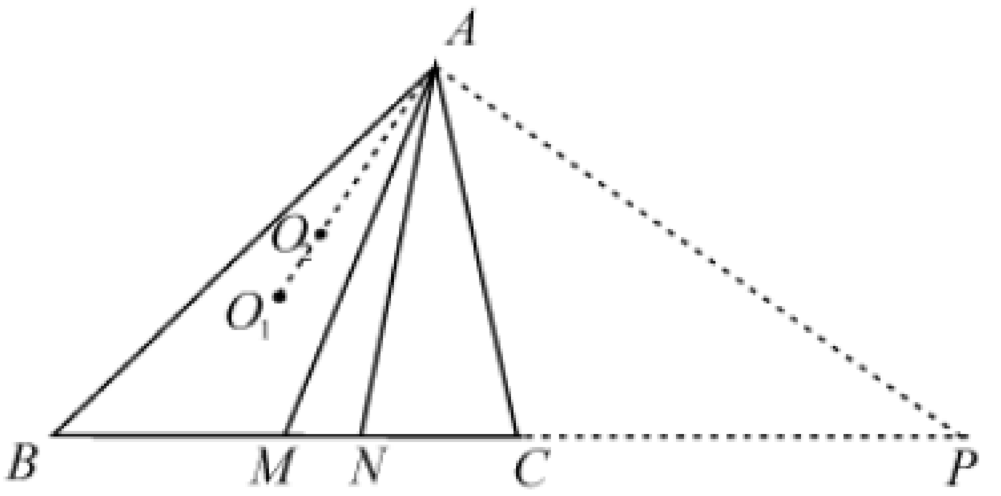
说明:

1、评阅试卷时,请严格按照本评分标准的评分档次给分。

2、如果考生的解答方法和本解答不同,只要思路合理,步骤正确,在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分,10 分为一个档次,不要再增加其他中间档次。

一、(本题满分 40 分)

如图,在锐角$\triangle ABC$中,$AB>AC$,M、N是BC边上不同的两点,使得$\angle BAM=\angle CAN$. 设$\triangle ABC$和$\triangle AMN$的外心分别为O_1、O_2,求证:O_1、O_2、A三点共线.



证明: 如图,连接AO_1、AO_2 过A点作AO_1的垂线AP交BC的延长线于点P,则AP是圆O_1的切线.

因此 $\angle B=\angle PAC$ ………………………………………………………………… 10 分

因为 $\angle BAM=\angle CAN$,

所以 $\angle AMP=\angle B+\angle BAM=\angle PAC+\angle CAN=\angle PAN$ ……………………… 20 分

因而AP是$\triangle AMN$外接圆O_2的切线 ……………………………………………… 30 分

故 $AP\perp AO_2$.

所以 O_1,O_2,A三点共线………………………………………………………………… 40 分

二、(本题满分 40 分)

试证明:集合$A=\{2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$满足

(1)对每个$a\in A$,及$b\in\mathbf{N}^*$,若$b<2a-1$,则$b(b+1)$一定不是$2a$的倍数;

(2)对每个$a\in\overline{A}$(其中$\overline{A}$表示A在$\mathbf{N}^*$中的补集),且$a\neq1$,必存在$b\in\mathbf{N}^*$,$b<2a-1$,使$b(b+1)$是$2a$的倍数.

证明: 对于任意的$a\in A$,设$a=2^k$,$k\in\mathbf{N}^*$,则$2a=2^{k+1}$,如果b是任意一个小于$2a-1$的正整数,则$b+1\leqslant 2a-1$ ……………………………………………………………………………… 10 分

由于b与$b+1$中,一个为奇数,它不含素因子 2,另一个为偶数,它含素因子 2 的幂的次数最多为k,因此,$b(b+1)$一定不是$2a$的倍数 ………………………………………………… 20 分

若$a\in\overline{A}$,且$a\neq1$,设$a=2^k\cdot m$,其中k为非负整数,m为大于 1 的奇数. 则$2a=2^{k+1}\cdot m$…… 30 分

下面给出三种证明方法：

证法 1：令 $b=mx$，$b+1=2^{k+1}y$，消去 b 得 $2^{k+1}y-mx=1$.

由于 $(2^{k+1},m)=1$，这方程必有整数解：

$$\begin{cases}x=x_0+2^{k+1}t,\\ y=y_0+mt\end{cases}\quad(\text{其中 } t\in Z,(x_0,y_0)\text{为方程的特解}).$$

把最小的正整数解记为 (x^*,y^*)，则 $x^*<2^{k+1}$.

故 $b=mx^*<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数 ………………………………………… 40 分

证法 2：由于 $(2^{k+1},m)=1$，由中国剩余定理知，同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv 0 \pmod{2^{k+1}},\\ x\equiv m-1 \pmod{m}.\end{cases}$$

在区间 $(0,2^{k+1}m)$ 上有解 $x=b$，即存在 $b<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数 ………………… 40 分

证法 3：由于 $(2,m)=1$，总存在 $r(r\in\mathbf{N}^*,r\leqslant m-1)$，使 $2^r\equiv 1 \pmod{m}$.

取 $t\in\mathbf{N}^*$，使 $tr>k+1$，则 $2^{tr}\equiv 1 \pmod{m}$.

存在 $b=(2^{tr}-1)-q\cdot(2^{k+1}\cdot m)>0$. $q\in\mathbf{N}$. 使 $0<b<2a-1$.

此时 $m\mid b$，$2^{k+1}\mid b+1$，因而 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数 ………………………………………… 40 分

三、(本题满分 50 分)

设 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是平面上 $n+1$ 个点，它们两两间的距离的最小值为 $d(d>0)$. 求证：

$$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdot\cdots\cdot|P_0P_n|>\left(\frac{d}{3}\right)^n\sqrt{(n+1)!}.$$

证法 1：不妨设 $|P_0P_1|\leqslant|P_0P_2|\leqslant\cdots\leqslant|P_0P_n|$.

先证明：对任意正整数 k，都有 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$.

显然，$|P_0P_k|\geqslant d\geqslant\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 对 $k=1,2,\cdots,8$ 均成立，只有 $k=8$ 时右边取等号 ………… 10 分

所以，只要证明当 $k\geqslant 9$ 时，有 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 即可.

以 $P_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为圆心，$\frac{d}{2}$ 为半径画 $k+1$ 个圆，它们两两相离或外切；以 P_0 为圆心，

$|P_0P_k|+\frac{d}{2}$ 为半径画圆，这个圆覆盖上述 $k+1$ 个圆 ………………………………………… 20 分

所以 $\pi\left(|P_0P_k|+\frac{d}{2}\right)^2>(k+1)\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

约去 π，并开方移项，得 $|P_0P_k|>\frac{d}{2}(\sqrt{k+1}-1)$ ………………………………………… 30 分

由 $k\geqslant 9$ 易知 $\frac{\sqrt{k+1}-1}{2}>\frac{\sqrt{k+1}}{3}$ ………………………………………………………… 40 分

所以 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 对 $k=9,10,\cdots,n$ 也成立.

综上,对任意正整数 k,都有 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$.

因而,$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdot\cdots\cdot|P_0P_n|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$ ………………………………… 50 分

证法 2: 不妨设 $|P_0P_1|\leqslant|P_0P_2|\leqslant\cdots\leqslant|P_0P_n|$.

以 $P_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为圆心,$\frac{d}{2}$ 为半径画 $k+1$ 个圆,它们两两相离或外切 …………… 10 分

设 Q 是圆 P_i 上任意一点,由于

$$|P_0Q|\leqslant|P_0P_i|+|P_iQ|=|P_0P_i|+\frac{1}{2}d\leqslant|P_0P_k|+\frac{1}{2}|P_0P_k|=\frac{3}{2}|P_0P_k| \quad \cdots\cdots 20 \text{ 分}$$

因而,以 P_0 为圆心,$\frac{3}{2}|P_0P_k|$ 为半径的圆覆盖上述 $k+1$ 个圆 ………………………… 30 分

故 $\pi(\frac{3}{2}|P_0P_k|)^2>(k+1)\pi(\frac{d}{2})^2$.

即有 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$ ………………………………………………… 40 分

所以,$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdot\cdots\cdot|P_0P_n|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$ ………………………………… 50 分

四、(本题满分 50 分)

设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,$n$ 是正整数. 证明:对满足 $0\leqslant a<b\leqslant 1$ 的任意实数 a、b,数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b). 这里,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

证法 1: (1)对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,有

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}n \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

令 $N_0=\left[\frac{1}{b-a}\right]+1$,$m=[S_{N_0}]+1$,则 $\frac{1}{b-a}<N_0$,$\frac{1}{N_0}<b-a$,$S_{N_0}<m\leqslant m+a$ …………… 20 分

又令 $N_1=2^{2(m+1)}$，则 $S_{N_1}=S_{2^{2(m+1)}}>m+1\geqslant m+b$.

因此存在 $n\in\mathbf{N}^*$，$N_0<n<N_1$，使得 $m+a<S_n<m+b$，所以，$S_n-[S_n]\in(a,b)$ ………… 30 分

不然一定存在 $N_0<k$，使得 $S_{k-1}\leqslant m+a$，$S_k\geqslant m+b$. 因此

$$S_k-S_{k-1}\geqslant b-a,$$

这与 $S_k-S_{k-1}=\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{N_0}<b-a$ 矛盾. 所以一定存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_n-[S_n]\in(a,b)$ …… 40 分

(2)假设只有有限个正整数 $n_1,\cdots,n_k$，使得 $S_{n_j}-[S_{n_j}]\in(a,b)$，$1\leqslant j\leqslant k$.

令 $c=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{S_{n_j}-[S_{n_j}]\}$，则 $a<c<b$.

则不存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_n-[S_n]\in(a,c)$，这与(1)的结论矛盾.

所以数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b).

综上所述原命题成立 ………………………………………………………………………… 50 分

证法 2：(1)对任意的正整数 n，有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}n\end{aligned}$$ ………………………………… 10 分

因此，当 n 充分大时，S_n 可以大于任何一个正数.

令 $N_0=\left[\dfrac{1}{b-a}\right]+1$，则 $N_0>\dfrac{1}{b-a}$. 当 $k>N_0$ 时，

$$S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}<\frac{1}{N_0}<b-a$$ ………………………………………………… 20 分

因此，对于任何大于 S_{N_0} 的正整数 m，总存在 $n>N_0$，使 $S_n-m\in(a,b)$，即 $m+a<S_n<m+b$. 否则，一定存在 $k>N_0$，使 $S_{k-1}\leqslant m+a$，且 $S_k\geqslant m+b$. 这样就有 $S_k-S_{k-1}\geqslant b-a$.

而 $S_k-S_{k-1}=\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{N_0}<b-a$. 矛盾.

故一定存在 $n>N_0$，使 $m+a<S_n<m+b$ ………………………………………………… 30 分

令 $m_i=[S_{N_0}]+i(i=1,2,3,\cdots)$，则 $m_i>S_{N_0}$. 故一定存在 $n_i>N_0$，使 $m_i+a<S_{n_i}<m_i+b$.

因此 $a<S_{n_i}-m_i=S_{n_i}-[S_{n_i}]<b$ ………………………………………………… 40 分

这样的 i 有无穷多个.

所以数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b) ………………………………………… 50 分