1983年全国高中数学联赛

第一试

1．选择题(本题满分32分，每题答对者得4分，答错者得0分，不答得1分)

(1) 设p、q是自然数，条件甲：p^3-q^3是偶数；条件乙：$p+q$是偶数．那么

A. 甲是乙的充分而非必要条件　　*B.* 甲是乙的必要而非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　*D.* 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

(2) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$的值是属于区间

A. $(-2,-1)$　　*B.* $(1,2)$　　*C.* $(-3,-2)$　　*D.* $(2,3)$

(3) 已知等腰三角形ABC的底边BC及高AD的长都是整数，那么，$\sin A$和$\cos A$中

A. 一个是有理数，另一个是无理数　　*B.* 两个都是有理数

C. 两个都是无理数　　*D.* 是有理数还是无理数要根据BC和AD的数值来确定

(4) 已知$M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使$M\cap N=N$成立的充要条件是

A. $a\geqslant 1\frac{1}{4}$　　*B.* $a=1\frac{1}{4}$　　*C.* $a\geqslant 1$　　*D.* $0<a<1$

(5) 已知函数$f(x)=ax^2-c$，满足

$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\quad -1\leqslant f(2)\leqslant 5.$$

那么，$f(3)$应满足

A. $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　*B.* $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$　　*C.* $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　*D.* $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$

(6) 设a，b，c，d，m，n都是正实数，

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么

A. $P\geqslant Q$　　*B.* $P\leqslant Q$

C. $P<Q$　　*D.* P、Q的大小关系不确定，而与m，n的大小有关．

(7) 在正方形$ABCD$所在平面上有点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$都是等腰三角形，那么具有这样性质的点P的个数有

A. 9个　　*B.* 17个　　*C.* 1个　　*D.* 5个

(8) 任意$\triangle ABC$，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为l、R与r，那么

A. $l>R+r$　　*B.* $l\leqslant R+r$　　*C.* $\frac{l}{6}<R+r<6l$　　*D.* *A*、*B*、*C*三种关系都不对

2．填充题(本题满分18分，每小题6分)

(1) 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，那么$\cos C$的值等于__________．

⑵ 三边均为整数，且最大边长为 11 的三角形，共有_________个．

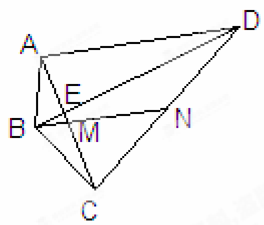
⑶ 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球半径之比是一个既约分数$\frac{m}{n}$，那么积 $m\cdot n$ 是_____________．

第二试

1．(本题满分 8 分)求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1,1]$

2．(本题满分 16 分)函数 $f(x)$在$[0,1]$上有定义，$f(0)=f(1)$．如果对于任意不同的 x_1，$x_2\in[0,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$．求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$．

3．(本题满分 16 分) 在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 3∶4∶1，点 M、N 分别在 AC、CD 上满足 AM∶AC=CN∶CD，并且 B、M、N 三点共线．求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点．



4．(本题满分 16 分)在在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大体积是多少？证明你的结论．

5．(本题满分 18 分) 函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论．

1983年全国高中数学联赛解答

第一试

1．选择题(本题满分32分，每题答对者得4分，答错者得0分，不答得1分)

(1) 设p、q是自然数，条件甲：p^3-q^3是偶数；条件乙：$p+q$是偶数．那么

A. 甲是乙的充分而非必要条件　　*B*. 甲是乙的必要而非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　*D*. 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】$p^3-q^3=(p-q)(p^2+pq+q^2)$．又$p+q=p-q+2q$，故$p+q$与$p-q$的奇偶性相同．

∴ $p+q$为偶数，$\Rightarrow p-q$为偶数，$\Rightarrow p^3-q^3$为偶数．

$p+q$为奇数，$\Rightarrow p$、q一奇一偶，$\Rightarrow p^3-q^3$为奇数．故选*C*.

(2) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$的值是属于区间

A. (－2，－1)　　*B*. (1，2)　　*C*. (－3，－2)　　*D*. (2，3)

【答案】D

【解析】$x=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10\in(2,3)$，选*D*.

(3) 已知等腰三角形*ABC*的底边*BC*及高*AD*的长都是整数，那么，sin*A*和cos*A*中

***A*. 一个是有理数，另一个是无理数　　*B*. 两个都是有理数**

***C*. 两个都是无理数　　*D*. 是有理数还是无理数要根据*BC*和*AD*的数值来确定**

【答案】B

【解析】$\tan\frac{A}{2}$为有理数，$\Rightarrow\sin A$、$\cos A$都是有理数．选*B*.

(4) 已知$M=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使$M\cap N=N$成立的充要条件是

A. $a\geqslant 1\frac{1}{4}$　　*B*. $a=1\frac{1}{4}$　　*C*. $a\geqslant 1$　　*D*. $0<a<1$

【答案】A

【解析】$M\cap N=N$的充要条件是圆$x^2+(y-a)^2\leqslant 1$在抛物线$y=x^2$内部(上方)．即$a\geqslant 1$，且方程

$$y^2-(2a-1)y+a^2-1=0\text{ 的}\triangle=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0,\ \Rightarrow a\geqslant 1\tfrac{1}{4}，\text{选 }A.$$

(5) 已知函数$f(x)=ax^2-c$，满足

$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\quad -1\leqslant f(2)\leqslant 5.$$

那么，$f(3)$应满足

A. $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　*B*. $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$　　*C*. $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　*D*. $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{35}{3}$

【答案】C

【解析】$f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，$f(3)=9a-c$. 令 $9a-c=\lambda(a-c)+\mu(4a-c)$，

∴ $\lambda+4\mu=9$，$\lambda+\mu=1$. ∴ $\lambda=-\frac{5}{3}$，$\mu=\frac{8}{3}$. 即 $f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)$.

但 $\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{40}{3}$，$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$，

∴ $-1\leqslant-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)\leqslant20$.. 选 C.

(6) 设 a，b，c，d，m，n 都是正实数，

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P<Q$　　D. P、Q 的大小关系不确定，而与 m，n 的大小有关.

【答案】B

【解析】由柯西不等式，$Q\geqslant P$. 选 B.

(7) 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使△PAB、△PBC、△PCD、△PDA 都是等腰三角形，那么具有这样性质的点 P 的个数有

A. 9 个　　B. 17 个　　C. 1 个　　D. 5 个

【答案】A

【解析】如图，以正方形的顶点为圆心，边长为半径作 4 个圆，其 8 个交点满足要求，正方形的中心满足要求，共有 9 个点. 选 A.

(8) 任意△ABC，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为 l、R 与 r，那么

A. $l>R+r$　　B. $l\leqslant R+r$　　C. $\frac{l}{6}<R+r<6l$　　D. A、B、C 三种关系都不对

【答案】D

【解析】$R=\frac{a}{2\sin A}$，当 $A\to180°$ 时，a 最大，而 R 可大于任意指定的正数 M，从而可有 $R<6l$，否定 A、C.

又正三角形中，$R+r=\frac{\sqrt{3}}{2}a<l$，否定 B. 故选 D.

2．填充题(本题满分 18 分，每小题 6 分)

(1) 在△ABC 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，那么 $\cos C$ 的值等于____________.

【答案】$\frac{16}{65}$

【解析】$\cos A=\pm\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{12}{13}$，但若 $\cos A=-\frac{4}{5}$，则 $A>135°$，$\cos B=\frac{5}{13}<\cos60°$，$B>60°$.，矛盾. 故 $\cos A=\frac{4}{5}$. ∴ $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$.

⑵ 三边均为整数，且最大边长为 11 的三角形，共有_________个．

【答案】36

【解析】设另两边为 x，y，且 $x\leqslant y$．则得 $x\leqslant y\leqslant 11$，$x+y>11$，在直角坐标系内作直线 $y=x$，$y=11$，$x=11$，$x+y=11$，则所求三角形数等于由此四条直线围成三角形内的整点数．(含 $y=11$，$y=x$ 上的整点，不含 $x+y=11$ 上的整点)共有 $12^2\div 4=36$ 个．即填 36．

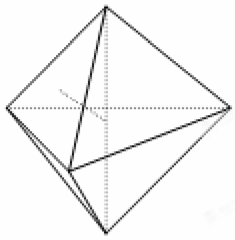
⑶ 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球半径之比是一个既约分数$\frac{m}{n}$，那么积 mn 是_____________．

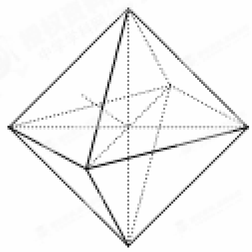
【答案】6

【解析】此六面体可看成是由两个正四面体粘成．每个正四面体的高 $h_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，于是，利用体积可得 $Sh_1=3Sr_1$，$r_1=\frac{\sqrt{6}}{9}a$

同样，正八面体可看成两个四棱锥粘成，每个四棱锥的高 $h_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，又可得 $a^2h_2=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2r_2$，$r_2=\frac{\sqrt{6}}{6}a$

$\therefore \frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$，$\therefore mn=6$.





第二试

1．(本题满分 8 分)求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1，1]$

【解析】证明：由于 $x\in[-1，1]$，故 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 有意义，

$\sin(\frac{\pi}{2}-\arccos x)=\cos(\arccos x)=x$，由于 $\arccos x\in[0，\pi]$，$\therefore$ $\frac{\pi}{2}-\arccos x\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$．

故根据反正弦定义，有 $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$．故证．

2．(本题满分 16 分)函数 $f(x)$在$[0，1]$上有定义，$f(0)=f(1)$．如果对于任意不同的 x_1，$x_2\in[0，1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$．求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

【解析】证明：不妨取 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，若$|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{2}$，则必有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|<\frac{1}{2}$.

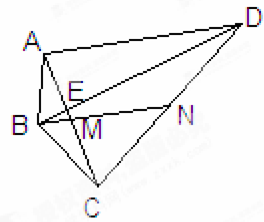
若$|x_1-x_2|>\frac{1}{2}$，则 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，于是 $1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$，即 $1-x_2+x_1-0<\frac{1}{2}$.

而$|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-f(0))-(f(x_2)-f(1))|\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|<|x_1-0|+|1-x_2|$

$=1-x_2+x_1-0<\frac{1}{2}$．故证．

3．（本题满分 16 分）在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 3∶4∶1，点 M、N 分别在 AC、CD 上满足 $AM∶AC=CN∶CD$，并且 B、M、N 三点共线．求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点．

【解析】证明 设 AC、BD 交于点 E．由 $AM∶AC=CN∶CD$，故 $AM∶MC=CN∶ND$，令 $CN∶ND=r(r>0)$，则 $AM∶MC=r$．



由 $S_{ABD}=3S_{ABC}$，$S_{BCD}=4S_{ABC}$，即 $S_{ABD}∶S_{BCD}=3∶4$．

从而 $AE∶EC∶AC=3∶4∶7$．

$S_{ACD}∶S_{ABC}=6∶1$，故 $DE∶EB=6∶1$，$\therefore DB∶BE=7∶1$．

$AM∶AC=r∶(r+1)$，即 $AM=\frac{r}{r+1}AC$，$AE=\frac{3}{7}AC$，

$\therefore EM=(\frac{r}{r+1}-\frac{3}{7})AC=\frac{4r-3}{7(r+1)}AC$．$MC=\frac{1}{r+1}AC$，

$\therefore EM∶MC=\frac{4r-3}{7}$．由 Menelaus 定理，知 $\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1$，代入得

$r\cdot 7\cdot\frac{4r-3}{7}=1$，即 $4r^2-3r-1=0$，这个方程有惟一的正根 $r=1$．故 $CN∶ND=1$，就是 N 为 CD 中点，M 为 AC 中点．

4．（本题满分 16 分）在在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大体积是多少？证明你的结论．

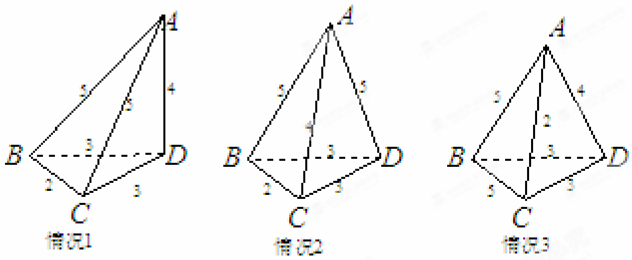
【解析】解：边长为 2 的三角形，其余两边可能是：

(1) 3，3；(2) 3，4；(3) 4，5；(4) 5，5．

按这几条棱的组合情况，以 2 为公共棱的两个侧面可能是：

① (1)，(4)；② (1)，(3)；③ (2)，(4)．

先考虑较特殊的情况①：由于 $3^2+4^2=5^2$，即图中 $AD\perp$ 平面 BCD．



$\therefore$ $V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3^2-1^2}\cdot 4=\frac{8}{3}\sqrt{2}$；

情况②：由于此情况的底面与情况②相同，但 AC 不与底垂直，故高<4，于是得 $V_2<V_1$．

情况③：高<2，底面积$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{5}{4}\sqrt{11}$．

$\therefore$ $V_3<\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{11}=\frac{5}{6}\sqrt{11}<\frac{8}{3}\sqrt{2}$．

$\therefore$ 最大体积为$\frac{8}{3}\sqrt{2}$．

5．（本题满分 18 分）函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论．

【解析】$F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$．取 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，则 $g(\frac{\pi}{8})=g(\frac{9\pi}{8})=\sqrt{2}$．$g(\frac{5\pi}{8})=-\sqrt{2}$．

取 $h(x)=Ax+B$，若 $A=0$，$B\neq0$，则当 $B>0$ 时，$F(\frac{\pi}{8})>\sqrt{2}$，当 $B<0$ 时，$F(\frac{5\pi}{8})<\sqrt{2}$．从而 $M>\sqrt{2}$．

若 $A\neq0$，则当 $h(\frac{5\pi}{8})<0$ 时，$F(\frac{5\pi}{8})>\sqrt{2}$，当 $h(\frac{5\pi}{8})\geqslant0$ 时，由于 $h(x)$ 是一次函数，当 $A>0$ 时 $h(x)$ 递增，$h(\frac{9\pi}{8})>h(\frac{5\pi}{8})>0$，此时 $F(\frac{9\pi}{8})>\sqrt{2}$；当 $A<0$ 时 $h(x)$ 递减，$h(\frac{\pi}{8})>h(\frac{5\pi}{8})>0$，此时 $F(\frac{\pi}{8})>\sqrt{2}$．故此时 $M>\sqrt{2}$．

若 $A=B=0$，显然有 $M=\sqrt{2}$．

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$，这个最小值在 $A=B=0$ 时取得．