2008年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2008年全国高中数学联赛由重庆市数学会承办。中国数学会普及工作委员会和重庆市数学会负责命题工作。

2008年全国高中数学联赛一试命题范围不超出教育部2000年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容，但在方法的要求上有所提高。主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况，以及综合和灵活运用的能力。全卷包括6道选择题、6道填空题和3道大题，满分150分。答卷时间为100分钟。

全国高中数学联赛加试命题范围与国际数学奥林匹克接轨，在知识方面有所扩展，适当增加一些竞赛教学大纲的内容。全卷包括 3 道大题，其中一道平面几何题，试卷满分 150 分。答卷时间为120分钟。

一　试

一、选择题（每小题6分，共36分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{5-4x+x^2}{2-x}$ 在 $(-\infty,2)$ 上的最小值是（　）。

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

2．设 $A=[-2,4)$，$B=\{x|x^2-ax-4\le 0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为（　）。

（A）$[-1,2)$　　（B）$[-1,2]$　　（C）$[0,3]$　　（D）$[0,3)$

3．甲、乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得1分，负者得0分，比赛进行到有一人比对方多2分或打满6局时停止．设甲在每局中获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$，且各局胜负相互独立，则比赛停止时已打局数 ξ 的期望 $E\xi$ 为（　）。

（A）$\dfrac{241}{81}$　　（B）$\dfrac{266}{81}$　　（C）$\dfrac{274}{81}$　　（D）$\dfrac{670}{243}$

4．若三个棱长均为整数（单位：cm）的正方体的表面积之和为 564 cm^2，则这三个正方体的体积之和为（　）。

（A）764 cm^3 或 586 cm^3　　（B）764 cm^3

（C）586 cm^3 或 564 cm^3　　（D）586 cm^3

5．方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xyz+z=0, \\ xy+yz+xz+y=0 \end{cases}$ 的有理数解 (x,y,z) 的个数为（　）。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

6．设ΔABC的内角A、B、C所对的边a、b、c成等比数列，则$\dfrac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B}$的取值范围是（　）。

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(0,\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$

（C）$(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$　　（D）$(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty)$

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

7．设$f(x)=ax+b$，其中a,b为实数，$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n=1,2,3,\cdots$，若$f_7(x)=128x+381$，则$a+b=$_________.

8．设$f(x)=\cos 2x-2a(1+\cos x)$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$，则$a=$_________.

9．将 24 个志愿者名额分配给 3 个学校，则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有__________种.

10．设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n+a_n=\dfrac{n-1}{n(n+1)}$，$n=1,2,\cdots$，则通项$a_n=$_________.

11．设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，若$f(0)=2008$，且对任意$x\in\mathbf{R}$，满足$f(x+2)-f(x)\le 3\cdot 2^x$，$f(x+6)-f(x)\ge 63\cdot 2^x$，则$f(2008)$=_________.

12．一个半径为 1 的小球在一个内壁棱长为$4\sqrt{6}$的正四面体容器内可向各个方向自由运动，则该小球永远不可能接触到的容器内壁的面积是________.

三、解答题（每小题 20 分，共 60 分）

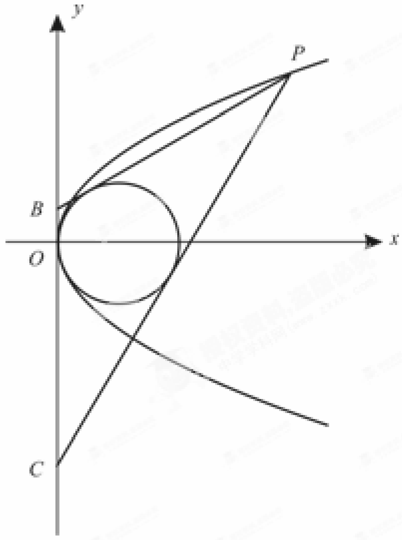
13．已知函数$f(x)=|\sin x|$的图像与直线$y=kx\quad(k>0)$有且仅有三个交点，交点的横坐标的最大值为α，求证：

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}.$$

14．解不等式

$$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1).$$

15. 如图，P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，点 B、C 在 y 轴上，圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 内切于 ΔPBC，求 ΔPBC 面积的最小值.



第 15 题

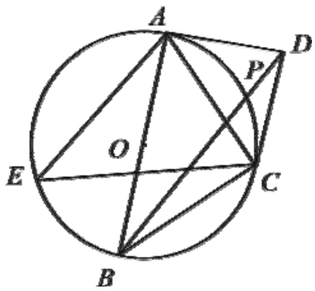
加　试

一、（本题满分 50 分）

如图，给定凸四边形 $ABCD$，$\angle B+\angle D<180^\circ$，$P$ 是平面上的动点，令 $f(P)=PA\cdot BC+PD\cdot CA+PC\cdot AB$.

（1）求证：当 $f(P)$ 达到最小值时，P、A、B、C 四点共圆；

（2）设 E 是 ΔABC 外接圆 O 的 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，满足：$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1$，$\angle ECB=\dfrac{1}{2}\angle ECA$，又 DA,DC 是 $\odot O$ 的切线，$AC=\sqrt{2}$，求 $f(P)$ 的最小值.



答一图 1

二、（本题满分 50 分）

设 $f(x)$ 是周期函数，T 和 1 是 $f(x)$ 的周期且 $0<T<1$．证明：

（1）若 T 为有理数，则存在素数 p，使 $\dfrac{1}{p}$ 是 $f(x)$ 的周期；

（2）若 T 为无理数，则存在各项均为无理数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $1>a_n>a_{n+1}>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且每个 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的周期.

三、（本题满分 50 分）

设 $a_k>0$，$k=1,2,\cdots,2008$．证明：当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^{2008}a_k>1$ 时，存在数列 $\{x_n\}$ 满足以下条件：

（1）$0=x_0<x_n<x_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在；

（3）$x_n - x_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{2008} a_k x_{n+k} - \sum\limits_{k=0}^{2007} a_{k+1} x_{n+k}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$.

一试解答

1. 【答案】C

【解析】当 $x<2$ 时，$2-x>0$，因此 $f(x)=\frac{1+(4-4x+x^2)}{2-x}=\frac{1}{2-x}+(2-x)\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)}$

$=2$，当且仅当 $\frac{1}{2-x}=2-x$ 时取等号．而此方程有解 $x=1\in(-\infty,2)$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上的最小值为 2．故选 C.

2. 【答案】D

【解析】因为 $x^2-ax-4=0$ 有两个实根 $x_1=\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}$，$x_2=\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}$，故 $B\subseteq A$ 等价于 $x_1\geq -2$ 且 $x_2<4$，即 $\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}\geq -2$ 且 $\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}<4$，解之得 $0\leq a<3$．故选 D。

3. 【答案】B

【解析】方法一： 依题意知，ξ 的所有可能值为 2、4、6．设每两局比赛为一轮，则该轮结束时比赛停止的概率为 $(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2=\frac{5}{9}$．若该轮结束时比赛还将继续，则甲、乙在该轮中必是各得一分，此时，该轮比赛结果对下轮比赛是否停止没有影响．从而有 $P(\xi=2)=\frac{5}{9}$，

$P(\xi=4)=(\frac{4}{9})(\frac{5}{9})=\frac{20}{81}$，$P(\xi=6)=(\frac{4}{9})^2=\frac{16}{81}$，故 $E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$．故选 B。

方法二： 依题意知，ξ 的所有可能值为 2、4、6. 令 A_k 表示甲在第 k 局比赛中获胜，则 $\bar{A}_k$ 表示乙在第 k 局比赛中获胜．由独立性与互不相容性得

$P(\xi=2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{5}{9}$，

$$P(\xi=4)=P(A_1\bar{A}_2A_3A_4)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)+P(\bar{A}_1A_2A_3A_4)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$$

$=2[(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})]=\frac{20}{81}$，

$$P(\xi=6)=P(A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)+P(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4)$$

$=4(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2=\frac{16}{81}$，

因此 $E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$． 故选 B。

4. 【答案】A

【解析】设这三个正方体的棱长分别为a、b、c，则有$6\left(a^2+b^2+c^2\right)=564$，即$a^2+b^2+c^2=94$。不妨设$1\le a\le b\le c<10$，从而$3c^2\ge a^2+b^2+c^2=94$，$c^2>31$。故$6\le c<10$，$c$只能取9、8、7、6。

若$c=9$，则$a^2+b^2=94-9^2=13$，易知$a=2$，$b=3$，得一组解$(a,b,c)=(2,3,9)$。

若$c=8$，则$a^2+b^2=94-64=30$，$b\le 5$。但$2b^2\ge 30$，即$b\ge 4$，从而$b=4$或5。若$b=5$，则$a^2=5$无解；若$b=4$，则$a^2=14$无解。因此c=8时无解。

若$c=7$，则$a^2+b^2=94-49=45$，有唯一解$a=3$，$b=6$。

若$c=6$，则$a^2+b^2=94-36=58$，此时$2b^2\ge 58$，即$b^2\ge 29$。故$b\ge 6$，但$b\le c=6$，所以$b=6$，此时$a^2=58-36=22$无解。

综上，共有两组解$(a,b,c)=(2,3,9)$或$(a,b,c)=(3,6,7)$，体积为$V_1=2^3+3^3+9^3=764$（cm^3）或$V_2=3^3+6^3+7^3=586$（cm^3）。故选A。

5. 【答案】 B

【解析】若$z=0$，则$\begin{cases}x+y=0,\\xy+y=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

若$z\ne 0$，则由$xyz+z=0$得$xy=-1$。 ①

由$x+y+z=0$得$z=-x-y$。 ②

将②式代入$xy+yz+xz+y=0$得$x^2+y^2+xy-y=0$。 ③

由①式得$x=-\dfrac{1}{y}$，代入③式化简得$(y-1)(y^3-y-1)=0$。易知$y^3-y-1=0$无有理数根，故$y=1$，由①式得$x=-1$，由②式得$z=0$，与$z\ne 0$矛盾，故该方程组共有两组有理数解$\begin{cases}x=0,\\y=0,\\z=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=1,\\z=0.\end{cases}$故选B。

6.【答案】C

【解析】设a、b、c的公比为q，则$b=aq,c=aq^2$，而

$$\frac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B}=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C}$$
$$=\frac{\sin(A+C)}{\sin(B+C)}=\frac{\sin(\pi-B)}{\sin(\pi-A)}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}=q.$$

因此，只需求q的取值范围．因为a、b、c成等比数列，最大边只能是a或c，因此a、b、c要构成三角形的三边，必须且只需$a+b>c$且$b+c>a$．即有不等式组$\begin{cases}a+aq>aq^2,\\aq+aq^2>a\end{cases}$即

$\begin{cases} q^2-q-1<0, \\ q^2+q-1>0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ q>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \text{或} q<-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{cases}$ 从而 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，因此所求的取值范围是 $(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$． 故选 C。

7.【答案】5

【解析】由题意知 $f_n(x)=a^n x+(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)b=a^n x+\dfrac{a^n-1}{a-1}\cdot b$，由 $f_7(x)=128x+381$ 得 $a^7=128$，$\dfrac{a^7-1}{a-1}\cdot b=381$，因此 $a=2$，$b=3$，$a+b=5$。

8.【答案】$a=-2+\sqrt{3}$

【解析】$f(x)=2\cos^2 x-1-2a-2a\cos x=2(\cos x-\dfrac{a}{2})^2-\dfrac{1}{2}a^2-2a-1$，

(1) $a>2$ 时，$f(x)$ 当 $\cos x=1$ 时取最小值 $1-4a$；

(2) $a<-2$ 时，$f(x)$ 当 $\cos x=-1$ 时取最小值 1；

(3) $-2\le a\le 2$ 时，$f(x)$ 当 $\cos x=\dfrac{a}{2}$ 时取最小值 $-\dfrac{1}{2}a^2-2a-1$．

又 $a>2$ 或 $a<-2$ 时，$f(x)$ 的 c 不能为 $-\dfrac{1}{2}$，

故 $-\dfrac{1}{2}a^2-2a-1=-\dfrac{1}{2}$，解得 $a=-2+\sqrt{3}$，$a=-2-\sqrt{3}$（舍去）．

9. 【答案】222

【解析】方法一：用 4 条棍子间的空隙代表 3 个学校，而用 * 表示名额．如

$$|****|*\cdots*|**|$$

表示第一、二、三个学校分别有 4，18，2 个名额．若把每个“*”与每个“|”都视为一个位置，由于左右两端必须是“|”，故不同的分配方法相当于 $24+2=26$（个）位置（两端不在内）被 2 个“|”占领的一种“占位法”．“每校至少有一个名额的分法”相当于在 24 个“*”之间的 23 个空隙中选出 2 个空隙插入“|”，故有 $C_{23}^2=253$（种）. 又在“每校至少有一个名额的分法”中“至少有两个学校的名额数相同”的分配方法有 31 种．综上知，满足条件的分配方法共有 253－31＝222(种)．

方法二：设分配给 3 个学校的名额数分别为 x_1、x_2、x_3，则每校至少有一个名额的分法数为不定方程 $x_1+x_2+x_3=24$ 的正整数解的个数，即方程 $x_1+x_2+x_3=21$ 的非负整数解的个

数，它等于 3 个不同元素中取 21 个元素的可重组合：$H_3^{21}=C_{23}^{21}=C_{23}^{2}=253$．又在“每校至少有一个名额的分法”中“至少有两个学校的名额数相同”的分配方法有 31 种．综上知，满足条件的分配方法共有 253－31＝222（种）.

【解析】方法一：由题设条件知

$$f(x+2)-f(x)=-(f(x+4)-f(x+2))-(f(x+6)-f(x+4))+(f(x+6)-f(x))$$

$$\geq -3\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+4}+63\cdot 2^{x}=3\cdot 2^{x}，$$

因此有 $f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^{x}$**，故**

$$f(2008)=f(2008)-f(2006)+f(2006)-f(2004)+\cdots+f(2)-f(0)+f(0)$$

$$=3\cdot(2^{2006}+2^{2004}+\cdots+2^{2}+1)+f(0)\quad =3\cdot\frac{4^{1003+1}-1}{4-1}+f(0)\quad =2^{2008}+2007.$$

方法二：令 $g(x)=f(x)-2^{x}$**，则**

$$g(x+2)-g(x)=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^{x}\leq 3\cdot 2^{x}-3\cdot 2^{x}=0，$$

$$g(x+6)-g(x)=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^{x}\geq 63\cdot 2^{x}-63\cdot 2^{x}=0，$$

即 $g(x+2)\leq g(x), g(x+6)\geq g(x)$**，故** $g(x)\leq g(x+6)\leq g(x+4)\leq g(x+2)\leq g(x)$**，得** $g(x)$**是周期为 2 的周期函数，所以** $f(2008)=g(2008)+2^{2008}=g(0)+2^{2008}=2^{2008}+2007$.

11. 【答案】$2^{2008}+2007$

10.【答案】 $a_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}$

【解析】 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}-a_{n+1}-\frac{n-1}{n(n+1)}+a_n$，

即 $2a_{n+1}=\frac{n+2-2}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+a_n=\frac{-2}{(n+1)(n+2)}+a_n+\frac{1}{n(n+1)}$，

由此得 $2(a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)})=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$.

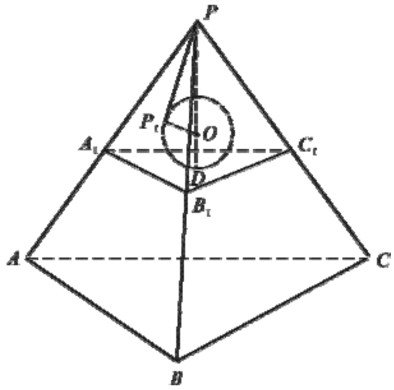
令 $b_n=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$，$b_1=a_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$（$a_1=0$），**有** $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$，**故** $b_n=\frac{1}{2^n}$，**所以** $a_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}$.

12.【答案】$72\sqrt{3}$

【解析】 如图 1，考虑小球挤在一个角时的情况，记小球半径为 r，作平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 ABC，与小球相切于点 D，则小球球心 O 为正四面体 $P-A_1B_1C_1$ 的中心，$PO\perp$面$A_1B_1C_1$，垂足 D 为 $A_1B_1C_1$ 的中心．因 $V_{P-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot PD=4\cdot V_{O-A_1B_1C_1}=4\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot OD$，

故 $PD=4OD=4r$，从而 $PO=PD-OD=4r-r=3r$．

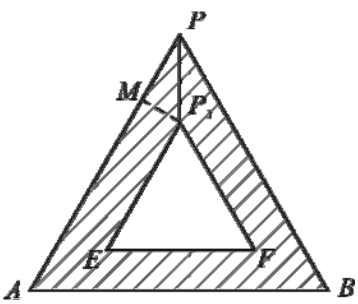
记此时小球与面 PAB 的切点为 P_1，连接 OP_1，则 $PP_1=PO^2-OP_1^2=\sqrt{(3r)^2-r^2}=2\sqrt{2}r$．



（第 12 题图 1）

考虑小球与正四面体的一个面（不妨取为 PAB）相切时的情况，易知小球在面 PAB 上最靠近边的切点的轨迹仍为正三角形，记为 P_1EF，如图 2．记正四面体的棱长为 a，过 P_1 作 $P_1M\perp PA$ 于 M．因 $\angle MPP_1=\frac{\pi}{6}$，有 $PM=PP_1\cdot\cos MPP_1=2\sqrt{2}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}r$，故小三角形的边长 $P_1E=PA-2PM=a-2\sqrt{6}r$．小球与面 PAB 不能接触到的部分的面积为（如图 2 中阴影部分）

$$S_{\Delta PAB}-S_{\Delta P_1EF}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-(a-2\sqrt{6}r)^2)=3\sqrt{2}ar-6\sqrt{3}r^2.$$

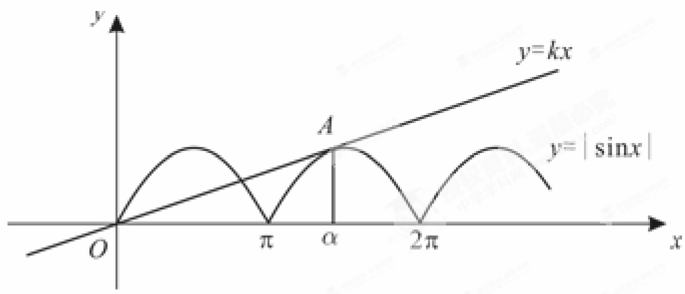


第 12 题图 2）

又 $r=1$，$a=4\sqrt{6}$，所以 $S_{\Delta PAB}-S_{\Delta P_1EF}=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$．由对称性，且正四面体共 4 个面，所以小球不能接触到的容器内壁的面积共为 $72\sqrt{3}$．

13.【解析】 $f(x)$ **的图象与直线** $y=kx$ $(k>0)$ **的三个交点如答 13 图所示，且在** $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ **内相切，其切点为** $A(\alpha,-\sin\alpha)$，$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$．

由于 $f'(x)=-\cos x$，$x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，**所以** $-\cos\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\alpha}$，**即** $\alpha=\tan\alpha$．**因此**



（第 13 题）

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{4\tan\alpha}=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}.$$

14. 【解析】方法一：由$1+\log_2(x^4+1)=\log_2(2x^4+2)$，且$\log_2 y$在$(0,+\infty)$上为增函数，故原不等式等价于$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2$.

即$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6-2x^4-1<0$.

分组分解 $x^{12}+x^{10}-x^8$

$+2x^{10}+2x^8-2x^6$

$+4x^8+4x^6-4x^4$

$+x^6+x^4-x^2$

$+x^4+x^2-1<0$,

$(x^8+2x^6+4x^4+x^2+1)(x^4+x^2-1)<0$,

所以$x^4+x^2-1>0$，$(x^2-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x^2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})<0$．所以$x^2<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，即$-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}<x<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$．故原不等式解集为$(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$.

方法二：由$1+\log_2(x^4+1)=\log_2(2x^4+2)$，且$\log_2 y$在$(0,+\infty)$上为增函数，故原不等式等价于

$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2$.

即$\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^6}>x^6+3x^4+3x^2+1+2x^2+2=(x^2+1)^3+2(x^2+1)$，

$(\frac{1}{x^2})^3+2(\frac{1}{x^2})>(x^2+1)^3+2(x^2+1)$，

令$g(t)=t^3+2t$，则不等式为$g(\frac{1}{x^2})>g(x^2+1)$，显然$g(t)=t^3+2t$在$\mathbf{R}$上为增函数，由此上面不等式等价于$\frac{1}{x^2}>x^2+1$，即$(x^2)^2+x^2-1<0$，解得$x^2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故原不等式解集为$(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$.

15. 【解析】设$P(x_0,y_0),B(0,b),C(0,c)$，不妨设$b>c$．直线PB的方程：$y-b=\frac{y_0-b}{x_0}x$，化简得$(y_0-b)x-x_0y+x_0b=0$．又圆心$(1,0)$到PB的距离为1，$\frac{|y_0-b+x_0b|}{\sqrt{(y_0-b)^2+x_0^2}}=1$，故$(y_0-b)^2+x_0^2=(y_0-b)^2+2x_0b(y_0-b)+x_0^2b^2$，易知$x_0>2$，上式化简得$(x_0-2)b^2+2y_0b-x_0=0$，同理有$(x_0-2)c^2+2y_0c-x_0=0$．所以$b+c=\frac{-2y_0}{x_0-2}$，$bc=\frac{-x_0}{x_0-2}$，

则 $(b-c)^2=\dfrac{4x_0^2+4y_0^2-8x_0}{(x_0-2)^2}$. 因 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线上的点，有 $y_0^2=2x_0$，则 $(b-c)^2=\dfrac{4x_0^2}{(x_0-2)^2}$，$b-c=\dfrac{2x_0}{x_0-2}$． 所以 $S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}(b-c)\cdot x_0=\dfrac{x_0}{x_0-2}\cdot x_0=(x_0-2)+\dfrac{4}{x_0-2}+4\ge 2\sqrt{4}+4=8$． 当 $(x_0-2)^2=4$ 时，上式取等号，此时 $x_0=4, y_0=\pm 2\sqrt{2}$． 因此 $S_{\Delta PBC}$ 的最小值为 8．

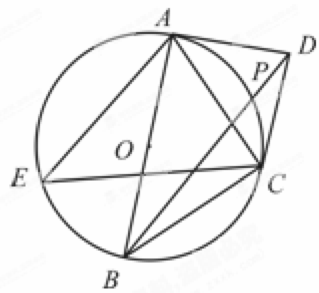
加试解答

一、【解析】方法一：（1）如答一图 1，由托勒密不等式，对平面上的任意点 P，有

$PA\cdot BC+PC\cdot AB\ge PB\cdot AC$．因此

$f(P)=PA\cdot BC+PC\cdot AB+PD\cdot CA\ge PB\cdot CA+PD\cdot CA$

$=(PB+PD)\cdot CA$．



第 1 题图

因为上面不等式当且仅当 P、A、B、C 顺次共圆时取等号，因此当且仅当 P 在 ΔABC 的外接圆且在 $\overset{\frown}{AC}$ 上时，$f(P)=(PB+PD)\cdot CA$． 又因 $PB+PD\ge BD$，此不等式当且仅当 B,P,D 共线且 P 在 BD 上时取等号．因此当且仅当 P 为 ΔABC 的外接圆与 BD 的交点时，$f(P)$ 取最小值 $f(P)_{\min}=AC\cdot BD$．故当 $f(P)$ 达最小值时，P、A、B、C 四点共圆．

（2）记 $\angle ECB=\alpha$，则 $\angle ECA=2\alpha$，由正弦定理有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而

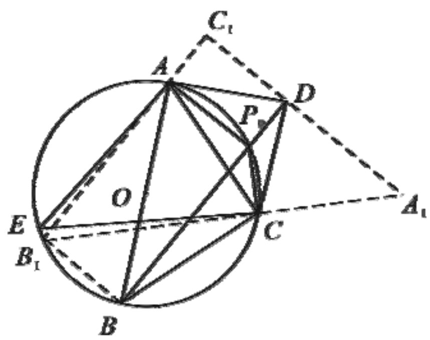
$\sqrt{3}\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha$，即 $\sqrt{3}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha$，所以

$3\sqrt{3}-4\sqrt{3}(1-\cos^2\alpha)-4\cos\alpha=0$，整理得 $4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$，

解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$（舍去），故 $\alpha=30^\circ$，$\angle ACE=60^\circ$． 由已知 $\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\dfrac{\sin\left(\angle EAC-30^0\right)}{\sin\angle EAC}$，有 $\sin(\angle EAC-30^\circ)=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，整理得 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC$，故 $\tan\angle EAC=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可得 $\angle EAC=75^\circ$，从而 $\angle E=45^\circ$，$\angle DAC=\angle DCA=\angle E=45^\circ$，$\Delta ADC$ 为等腰直角三角形．因 $AC=\sqrt{2}$，则 $CD=1$．又 ΔABC 也是等腰直角三角形，故 $BC=\sqrt{2}$，$BD^2=1+2-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135^\circ=5$，$BD=\sqrt{5}$．故 $f(P)_{\min}=BD\cdot AC=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$．

方法二：（1）如图 2，连接 BD 交 ΔABC 的外接圆 O 于 P_0 点（因为 D 在 $\odot O$ 外，故 P_0 在 BD 上）．

过 A,C,D 分别作 P_0A,P_0C,P_0D 的垂线，两两相交得



（第 1 题图 2）

$\Delta A_1B_1C_1$，易知 P_0 在 ΔACD 内，从而在 $\Delta A_1B_1C_1$ 内，记 ΔABC 之三内角分别为 x，y，z，则 $\angle AP_0C=180°-y=z+x$，又因 $B_1C_1\perp P_0A$，$B_1A_1\perp P_0C$，得 $\angle B_1=y$，同理有 $\angle A_1=x$，$\angle C_1=z$，

所以 $\Delta A_1B_1C_1\backsim\Delta ABC$．设 $B_1C_1=\lambda BC$，$C_1A_1=\lambda CA$，$A_1B_1=\lambda AB$，则对平面上任意点 M，有

$$
\begin{aligned}
\lambda f(P_0)&=\lambda(P_0A\cdot BC+P_0D\cdot CA+P_0C\cdot AB)\\
&=P_0A\cdot B_1C_1+P_0D\cdot C_1A_1+P_0C\cdot A_1B_1\\
&=2S_{\Delta A_1B_1C_1}\\
&\le MA\cdot B_1C_1+MD\cdot C_1A_1+MC\cdot A_1B_1\\
&=\lambda(MA\cdot BC+MD\cdot CA+MC\cdot AB)\\
&=\lambda f(M),
\end{aligned}
$$

从而 $f(P_0)\le f(M)$．由 M 点的任意性，知 P_0 点是使 $f(P)$ 达最小值的点．由点 P_0 在 $\odot O$ 上，故 P_0、A、B、C 四点共圆．

（2）由（1），$f(P)$ 的最小值 $f(P_0)=\frac{2}{\lambda}S_{\Delta A_1B_1C_1}=2\lambda S_{\Delta ABC}$，记 $\angle ECB=\alpha$，则 $\angle ECA=2\alpha$，由正弦定理有 $\frac{AE}{AB}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\sqrt{3}\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha$，即 $\sqrt{3}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha$，所以 $3\sqrt{3}-4\sqrt{3}(1-\cos^2\alpha)-4\cos\alpha=0$，整理得 $4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$（舍去），故 $\alpha=30°$，$\angle ACE=60°$．由已知 $\frac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\frac{\sin(\angle EAC-30^0)}{\sin\angle EAC}$，有 $\sin(\angle EAC-30°)=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\frac{1}{2}\cos\angle EAC=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，整理得 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\frac{1}{2}\cos\angle EAC$，故 $\tan\angle EAC=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可得 $\angle EAC=75°$，所以 $\angle E=45°$，ΔABC 为等腰直角三角形，$AC=\sqrt{2}$，$S_{\Delta ABC}=1$，因为 $\angle AB_1C=45°$，B_1 点在⊙ O 上，$\angle AB_1B=90°$，所以 B_1BDC_1 为矩形，$B_1C_1=BD=\sqrt{1+2-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135°}=\sqrt{5}$，故 $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，所以 $f(P)_{\min}=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot 1=\sqrt{10}$．

方法三：（1）引进复平面，仍用 A,B,C 等代表 A,B,C 所对应的复数．由三角形不等式，对于复数 z_1,z_2，有 $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$，当且仅当 z_1 与 z_2（复向量）同向时取等号．

有 $\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}\right|\ge\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}\right|$，

所以 $|(A-P)(C-B)|+|(C-P)(B-A)|$

$$\ge|(A-P)(C-B)+(C-P)(B-A)| \quad ①$$

$$=|-P\cdot C-A\cdot B+C\cdot B+P\cdot A| =|(B-P)(C-A)|=|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|,$$

从 而 $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{CA}| \ge|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{AC}| =(|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PD}|)\cdot|\overrightarrow{AC}|$

$\ge|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$②

①式取等号的条件是复数 $(A-P)(C-B)$ 与 $(C-P)(B-A)$ 同向，故存在实数 $\lambda>0$，使得

$(A-P)(C-B)=\lambda(C-P)(B-A)$，$\dfrac{A-P}{C-P}=\lambda\dfrac{B-A}{C-B}$，所以 $\arg(\dfrac{A-P}{C-P})=\arg(\dfrac{B-A}{C-B})$，

向量 $\overrightarrow{PC}$ 旋转到 $\overrightarrow{PA}$ 所成的角等于 $\overrightarrow{BC}$ 旋转到 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角，从而 P、A、B、C 四点共圆．

②式取等号的条件显然为 B,P,D 共线且 P 在 BD 上．故当 $f(P)$ 达最小值时 P 点在 ΔABC 之外接圆上，P、A、B、C 四点共圆．

（2）由（1）知 $f(P)_{\min}=BD\cdot AC$．以下同方法一．

二、【解析】（1）若 T 是有理数，则存在正整数 m,n 使得 $T=\dfrac{n}{m}$ 且 $(m,n)=1$，从而存在整数 a,b，使得 $ma+nb=1$．于是 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{ma+nb}{m}=a+bT=a\cdot1+b\cdot T$ 是 $f(x)$ 的周期．又因 $0<T<1$，从而 $m\ge2$．设 p 是 m 的素因子，则 $m=pm'$，$m'\in\mathbf{N}^*$，从而 $\dfrac{1}{p}=m'\cdot\dfrac{1}{m}$ 是 $f(x)$ 的周期．

（2）若 T 是无理数，令 $a_1=1-\left[\dfrac{1}{T}\right]T$，则 $0<a_1<1$，且 a_1 是无理数，令 $a_2=1-\left[\dfrac{1}{a_1}\right]a_1$，$a_{n+1}=1-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]a_n$，由数学归纳法易知 a_n 均为无理数且 $0<a_n<1$．又 $\dfrac{1}{a_n}-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]<1$，故 $1<a_n+\left[\dfrac{1}{a_n}\right]a_n$，即 $a_{n+1}=1-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]a_n<a_n$．因此 $\{a_n\}$ 是递减数列．

最后证：每个 a_n 是 $f(x)$ 的周期．事实上，因 1 和 T 是 $f(x)$ 的周期，故 $a_1=1-\left[\dfrac{1}{T}\right]T$ 亦是 $f(x)$ 的周期．假设 a_k 是 $f(x)$ 的周期，则 $a_{k+1}=1-\left[\dfrac{1}{a_k}\right]a_k$ 也是 $f(x)$ 的周期．由数学归纳法，已证得 a_n 均是 $f(x)$ 的周期．

三、【解析】必要性：假设存在$\{x_n\}$满足（1），（2），（3）．注意到（3）中式子可化为

$$x_n - x_{n-1} = \sum_{k=1}^{2008} a_k(x_{n+k} - x_{n+k-1}),\quad n \in \mathbf{N}^*,$$

其中 $x_0 = 0$ ．将上式从第 1 项加到第 n 项，并注意到 $x_0 = 0$ 得 $x_n = a_1(x_{n+1} - x_1) + a_2(x_{n+2} - x_2) + \cdots + a_{2008}(x_{n+2008} - x_{2008})$．由（ii）可设 $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，将上式取极限得

$$b = a_1(b - x_1) + a_2(b - x_2) + \cdots + a_{2008}(b - x_{2008}) = b \cdot \sum_{k=1}^{2008} a_k - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{2008}x_{2008})$$

$$< b \cdot \sum_{k=1}^{2008} a_k,$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k > 1$．

充分性：假设 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k > 1$．定义多项式函数如下：$f(s) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{2008} a_k s^k$，$s \in [0,1]$，则 $f(s)$ 在[0, 1]上是递增函数，且 $f(0) = -1 < 0$，$f(1) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{2008} a_k > 0$．因此方程 $f(s) = 0$ 在[0, 1]内有唯一的根 $s = s_0$，且 $0 < s_0 < 1$，即 $f(s_0) = 0$．

下取数列$\{x_n\}$为 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} s_0^k$，$n = 1, 2, \cdots$，则明显地$\{x_n\}$满足题设条件（ i ），且

$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} s_0^k = \dfrac{s_0 - s_0^{n+1}}{1 - s_0}$．因 $0 < s_0 < 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_0^{n+1} = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_0 - s_0^{n+1}}{1 - s_0} = \dfrac{s_0}{1 - s_0}$，即$\{x_n\}$的极限存在，满足（2）． 最后验证$\{x_n\}$满足（3），因 $f(s_0) = 0$，即 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k s_0^k = 1$，从而

$$x_n - x_{n-1} = s_0^n = (\sum_{k=1}^{2008} a_k s_0^k) s_0^n = \sum_{k=1}^{2008} a_k s_0^{n+k} = \sum_{k=1}^{2008} a_k (x_{n+k} - x_{n+k-1}).$$

综上，存在数列$\{x_n\}$满足（1）．