2017年全国高中数学联合竞赛一试（B卷）

一、填空题：本大题共8个小题,每小题8分,共64分.

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$，则$\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$的值为________.

2. 设复数z满足$z+9=10\bar{z}+22i$，则$|z|$的值为________.

3. 设$f(x)$是定义在R上的函数，若$f(x)+x^2$是奇函数，$f(x)+2^x$是偶函数，则$f(1)$的值为_______.

4. 在ΔABC中，若$\sin A=2\sin C$，且三条边a,b,c成等比数列，则$\cos A$的值为________.

5. 在正四面体$ABCD$中，E,F分别在棱AB,AC上，满足$BE=3$，$EF=4$，且EF与平面BCD平行，则ΔDEF的面积为________.

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\{(x,y)\,|\,x,y=-1,0,1\}$，在$K$中随机取出三个点，则这三个点两两之间距离均不超过2的概率为________.

7. 设a为非零实数，在平面直角坐标系xOy中，二次曲线$x^2+ay^2+a^2=0$的焦距为4，则a的值为________.

8. 若正整数a,b,c满足$2017\ge 10a\ge 100b\ge 1000c$，则数组$(a,b,c)$的个数为________.

二、解答题 （本大题共3小题，共56分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9. 设不等式$|2^x-a|<|5-2^x|$对所有$x\in[1,2]$成立，求实数a的取值范围.

10. 设数列$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2$， $n=1,2,\cdots$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$也是等差数列；

（2）设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的公差均是$d\neq 0$，并且存在正整数s,t，使得a_s+b_t是整数，求$|a_1|$的最小值.

11. 在平面直角坐标系xOy中，曲线$C_1: y^2=4x$，曲线$C_2:(x-4)^2+y^2=8$，经过C_1上一点P作一条倾斜角为45°的直线l，与C_2交于两个不同的点Q,R，求$|PQ|\cdot|PR|$的取值范围.

2017 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）

一、（本题满分 40 分）

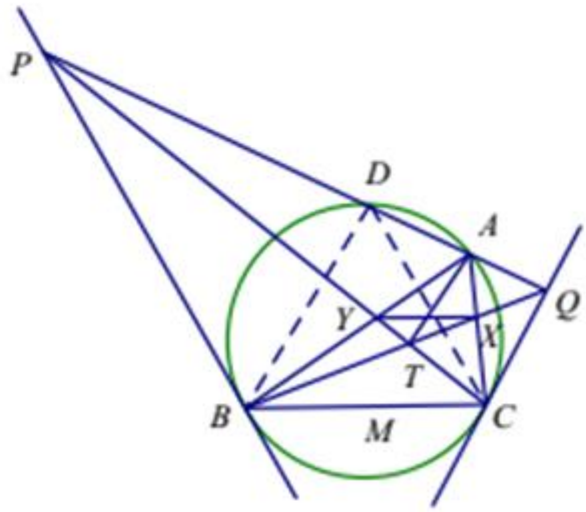
设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$，证明：$|(1+a)(1+b)(1+c)|\geq 1-d^2$

二、（本题满分 40 分）

给定正整数 m，证明：存在正整数 k，使得可将正整数集 N_+ 分拆为 k 个互不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，每个子集 A_i 中均不存在 4 个数 a,b,c,d（可以相同），满足 $ab-cd=m$.

三、（本题满分 50 分）

如图，点 D 是锐角 ΔABC 的外接圆 ω 上弧 BC 的中点，直线 DA 与圆 ω 过点 B,C 的切线分别相交于点 P,Q，BQ 与 AC 的交点为 X，CP 与 AB 的交点为 Y，BQ 与 CP 的交点为 T，求证：AT 平分线段 XY.



四、（本题满分 50 分）

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}\in\{1,2,\cdots,5\}$，$b_1,b_2,\cdots,b_{20}\in\{1,2,\cdots,10\}$，集合

$X=\{(i,j)\,|\,1\le i<j\le 20,(a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

2017 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，**不得增加其他中间档次**.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，**不得增加其他中间档次**.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=\sqrt{2}, a_3=\sqrt[3]{3}$，则 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$ 的值为____________.

答案： $\dfrac{8}{9}$.

解： 数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$，故 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}=\dfrac{a_1+a_{2011}}{q^6(a_1+a_{2011})}=\dfrac{1}{q^6}=\dfrac{8}{9}$.

2. 设复数 z 满足 $z+9=10\bar{z}+22\mathrm{i}$，则 $|z|$ 的值为____________.

答案： $\sqrt{5}$.

解： 设 $z=a+b\mathrm{i},\ a,b\in\mathbf{R}$. 由条件得

$$(a+9)+b\mathrm{i}=10a+(-10b+22)\mathrm{i}.$$

比较两边实虚部可得

$$\begin{cases} a+9=10a, \\ b=-10b+22, \end{cases}$$

解得 $a=1,\ b=2$，故 $z=1+2\mathrm{i}$，进而 $|z|=\sqrt{5}$.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数， $f(x)+2^x$ 是偶函数，则 $f(1)$ 的值为____________.

答案： $-\dfrac{7}{4}$.

解：由条件知， $f(1)+1=-\left(f(-1)+(-1)^2\right)=-f(-1)-1,\ f(1)+2=f(-1)+\dfrac{1}{2}$，两式相加消去 $f(-1)$，可知 $2f(1)+3=-\dfrac{1}{2}$，即 $f(1)=-\dfrac{7}{4}$.

4. 在 ΔABC 中，若 $\sin A=2\sin C$，且三条边 a,b,c 成等比数列，则 $\cos A$ 的值为________.

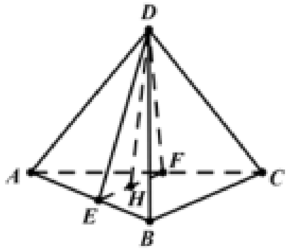
答案： $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解：由正弦定理知，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=2$，又 $b^2=ac$，于是 $a:b:c=2:\sqrt{2}:1$，从而由余弦定理得，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{2})^2+1^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times 1}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

5. 在正四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别在棱 AB,AC 上，满足 $BE=3,\ EF=4$，且 EF 与面 BCD 平行，则 ΔDEF 的面积为____________.

答案：$2\sqrt{33}$.

解：由条件知，EF 平行于 BC．因为正四面体 $ABCD$ 的各个面是全等的正三角形，故



$AE=AF=EF=4,\ AD=AB=AE+BE=7$.

由余弦定理得，

$$DE=\sqrt{AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cdot\cos 60^\circ}$$
$$=\sqrt{49+16-28}=\sqrt{37},$$

同理有 $DF=\sqrt{37}$.

作等腰 ΔDEF 底边 EF 上的高 DH，则 $EH=\dfrac{1}{2}EF=2$，故

$$DH=\sqrt{DE^2-EH^2}=\sqrt{33},$$

于是 $S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}\cdot EF\cdot DH=2\sqrt{33}$.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$．在 K 中随机取出三个点，则这三个点两两之间距离均不超过 2 的概率为__________.

答案：$\dfrac{5}{14}$.

解：注意 K 中共有 9 个点，故在 K 中随机取出三个点的方式数为 $C_9^3=84$ 种.

当取出的三点两两之间距离不超过 2 时，有如下三种情况：

（1）三点在一横线或一纵线上，有 6 种情况.

（2）三点是边长为 $1,1,\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形的顶点，有 $4\times4=16$ 种情况.

（3）三点是边长为 $\sqrt{2},\sqrt{2},2$ 的等腰直角三角形的顶点，其中，直角顶点位于 $(0,0)$ 的有 4 个，直角顶点位于 $(\pm1,0),(0,\pm1)$ 的各有一个，共有 8 种情况.

综上可知，选出三点两两之间距离不超过 2 的情况数为 $6+16+8=30$，进

而所求概率为$\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$.

7. 设a为非零实数，在平面直角坐标系xOy中，二次曲线$x^2+ay^2+a^2=0$的焦距为4，则a的值为____________.

答案：$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

解：二次曲线方程可写成$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a}=1$. 显然必须$-a>0$，故二次曲线为双曲线，其标准方程为$\frac{y^2}{(\sqrt{-a})^2}-\frac{x^2}{(-a)^2}=1$. 则$c^2=(\sqrt{-a})^2+(-a)^2=a^2-a$，注意到焦距$2c=4$，可知$a^2-a=4$，又$a<0$，所以$a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

8. 若正整数a, b, c满足$2017\geq 10a\geq 100b\geq 1000c$，则数组$(a, b, c)$的个数为____________.

答案：574.

解：由条件知$c\leq\left[\frac{2017}{1000}\right]=2$.

当$c=1$时，有$10\leq b\leq 20$. 对于每个这样的正整数b，由$10b\leq a\leq 201$知，

相应的a的个数为$202-10b$. 从而这样的正整数组的个数为

$$\sum_{b=10}^{20}(202-10b)=\frac{(102+2)\times 11}{2}=572.$$

当$c=2$时，由$20\leq b\leq\left[\frac{2017}{100}\right]$，知$b=20$. 进而$200\leq a\leq\left[\frac{2017}{10}\right]=201$，故$a=200, 201$. 此时共有2组$(a, b, c)$.

综上所述，满足条件的正整数组的个数为$572+2=574$.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分）设不等式$\left|2^x-a\right|<\left|5-2^x\right|$对所有$x\in[1, 2]$成立，求实数$a$的取值范围．

解：设$t=2^x$，则$t\in[2, 4]$，于是$|t-a|<|5-t|$对所有$t\in[2, 4]$成立．由于

$$|t-a|<|5-t|\Leftrightarrow(t-a)^2<(5-t)^2$$
$$\Leftrightarrow(2t-a-5)(5-a)<0.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{分}$$

对给定实数a，设$f(t)=(2t-a-5)(5-a)$，则$f(t)$是关于t的一次函数或常值函数．注意$t\in[2, 4]$，因此$f(t)<0$等价于

$$\begin{cases}f(2)=(-1-a)(5-a)<0,\\ f(4)=(3-a)(5-a)<0,\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12\text{分}$$

解得$3<a<5$.

所以实数a的取值范围是$3<a<5$.　　　　　　　　　　　　　　　　······················16分

10. （本题满分 20 分）设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2,n=1,2,\cdots$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列；

（2）设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公差均是 $d\neq 0$，并且存在正整数 s, t，使得 a_s+b_t 是整数，求 $|a_1|$ 的最小值.

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+2}a_{n+3}-a_{n+1}^2)-(a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2)\\&=a_{n+2}(a_{n+3}-a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)\\&=a_{n+2}\cdot 2d-(a_{n+1}+a_n)\cdot d\\&=(2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)\cdot d=3d^2.\end{aligned}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列. ………………5 分

（2） 由已知条件及（1）的结果知 $3d^2=d$. 因为 $d\neq 0$，故 $d=\dfrac{1}{3}$. 这样

$$\begin{aligned}b_n&=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2=(a_n+d)(a_n+2d)-a_n^2\\&=3da_n+2d^2=a_n+\frac{2}{9}.\end{aligned}$$ ………………10 分

若正整数 s, t 满足 $a_s+b_t\in\mathbf{Z}$，则

$$\begin{aligned}a_s+b_t&=a_s+a_t+\frac{2}{9}=a_1+(s-1)d+a_1+(t-1)d+\frac{2}{9}\\&=2a_1+\frac{s+t-2}{3}+\frac{2}{9}\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

记 $l=2a_1+\dfrac{s+t-2}{3}+\dfrac{2}{9}$，则 $l\in\mathbf{Z}$，且 $18a_1=3(3l-s-t+1)+1$ 是一个非零的整数，故 $|18a_1|\geq 1$，从而 $|a_1|\geq\dfrac{1}{18}$. ………………15 分

又当 $a_1=\dfrac{1}{18}$ 时，有 $a_1+b_3=\dfrac{1}{18}+\dfrac{17}{18}=1\in\mathbf{Z}$.

综上所述，$|a_1|$ 的最小值为 $\dfrac{1}{18}$. ………………20 分

11. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1: y^2=4x$，曲线 $C_2:(x-4)^2+y^2=8$. 经过 C_1 上一点 P 作一条倾斜角为 $45°$ 的直线 l，与 C_2 交于两个不同的点 Q,R，求 $|PQ|\cdot|PR|$ 的取值范围.

解：设 $P(t^2,2t)$，则直线 l 的方程为 $y=x+2t-t^2$，代入曲线 C_2 的方程得，

$$(x-4)^2+(x+2t-t^2)^2=8,$$

化简可得 $$2x^2-2(t^2-2t+4)x+(t^2-2t)^2+8=0. \qquad ①$$

由于 l 与 C_2 交于两个不同的点，故关于 x 的方程①的判别式 Δ 为正. 计算得，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4}&=(t^2-2t+4)^2-2((t^2-2t)^2+8)=(t^2-2t)^2-8(t^2-2t)+16-2(t^2-2t)^2-16\\&=-(t^2-2t)^2+8(t^2-2t)=-(t^2-2t)(t^2-2t-8)=-t(t-2)(t+2)(t-4),\end{aligned}$$

因此有 $$t\in(-2,0)\cup(2,4). \qquad ②$$

………………10 分

…………………10 分

设 Q, R 的横坐标分别为 x_1, x_2，由①知，

$$x_1+x_2=t^2-2t+4,\ x_1x_2=\frac{1}{2}((t^2-2t)^2+8),$$

因此，结合 l 的倾斜角为 $45°$ 可知，

$$\begin{aligned}|PQ|\cdot|PR|&=\sqrt{2}(x_1-t^2)\cdot\sqrt{2}(x_2-t^2)=2x_1x_2-2t^2(x_1+x_2)+2t^4\\&=(t^2-2t)^2+8-2t^2(t^2-2t+4)+2t^4\\&=t^4-4t^3+4t^2+8-2t^4+4t^3-8t^2+2t^4\\&=t^4-4t^2+8=(t^2-2)^2+4.\end{aligned} \qquad ③$$

…………………15 分

由②可知，$t^2-2\in(-2,2)\cup(2,14)$，故 $(t^2-2)^2\in[0,4)\cup(4,196)$，从而由③得，

$$|PQ|\cdot|PR|=(t^2-2)^2+4\in[4,8)\cup(8,200).$$ …………………20 分

注 1：利用 C_2 的圆心到 l 的距离小于 C_2 的半径，列出不等式 $\left|\frac{4+2t-t^2}{\sqrt{2}}\right|<2\sqrt{2}$，同样可以求得②中 t 的范围.

注 2：更简便的计算 $|PQ|\cdot|PR|$ 的方式是利用圆幂定理．事实上，C_2 的圆心为 $M(4,0)$，半径为 $r=2\sqrt{2}$，故

$$|PQ|\cdot|PR|=|PM|^2-r^2=(t^2-4)^2+(2t)^2-(2\sqrt{2})^2=t^4-4t^2+8.$$

2017 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$．令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$．证明：

$$|(1+a)(1+b)(1+c)|\geq 1-d^2.$$

证明：当 $d\geq 1$ 时，不等式显然成立． …………………10 分

以下设 $0\leq d<1$．不妨设 a, b 不异号，即 $ab\geq 0$，那么有

$$(1+a)(1+b)=1+a+b+ab\geq 1+a+b=1-c\geq 1-d>0.$$

…………………20 分

因此

$$|(1+a)(1+b)(1+c)|\geq|(1-c)(1+c)|=1-c^2=1-|c|^2\geq 1-d^2.$$

…………………40 分

二、（本题满分 40 分）给定正整数m，证明：存在正整数k，使得可将正整数集N_+分拆为k个互不相交的子集$A_1,A_2,\cdots,A_k$，每个子集A_i中均不存在 4 个数a,b,c,d（可以相同），满足$ab-cd=m$.

证明：取$k=m+1$，令$A_i=\{x \mid x\equiv i\ (\bmod m+1), x\in N_+\}$，$i=1,2,\cdots,m+1$.

……………………20 分

设$a,b,c,d\in A_i$，则

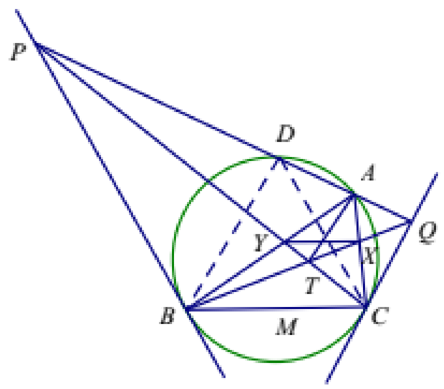
$$ab-cd\equiv i\cdot i-i\cdot i=0(\bmod m+1),$$

故$m+1\mid ab-cd$，而$m+1\nmid m$，所以在A_i中不存在 4 个数a,b,c,d，满足$ab-cd=m$.

……………………40 分

三、（本题满分 50 分）如图，点D是锐角$\triangle ABC$的外接圆ω上弧BC的中点，直线DA与圆ω过点B,C的切线分别相交于点P,Q，BQ与AC的交点为X，CP与AB的交点为Y，BQ与CP的交点为T．求证：AT平分线段XY．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证明： 首先证明 $YX \parallel BC$，即证 $\frac{AX}{XC}=\frac{AY}{YB}$.

连接 BD, CD．因为

$$\frac{S_{\Delta ACQ}}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABP}}=\frac{S_{\Delta ACQ}}{S_{\Delta ABP}},$$

所以

$$\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CQ\sin\angle ACQ}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC}\cdot\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB}{\frac{1}{2}AB\cdot BP\sin\angle ABP}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot AQ\sin\angle CAQ}{\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\angle BAP}, \quad ①$$

由题设，BP, CQ 是圆 ω 的切线，所以 $\angle ACQ=\angle ABC, \angle ACB=\angle ABP$， 又 $\angle CAQ=\angle DBC=\angle DCB=\angle BAP$（注意 D 是弧 BC 的中点），于是由①知

$$\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP}=\frac{CQ}{BP}. \quad ②$$

……………………20 分

因为 $\angle CAQ=\angle BAP$，所以 $\angle BAQ=\angle CAP$，于是

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACP}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AQ\sin\angle BAQ}{\frac{1}{2}AC\cdot AP\sin\angle CAP}=\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP}, \quad ③$$

而

$$\frac{S_{\Delta BCQ}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CQ\sin\angle BCQ}{\frac{1}{2}BC\cdot BP\sin\angle CBP}=\frac{CQ}{BP}, \quad ④$$

由②，③，④得

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACP}}=\frac{S_{\Delta CBQ}}{S_{\Delta BCP}},$$

即

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}=\frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCP}},$$

又

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}=\frac{AX}{XC},\quad \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{AY}{YB},$$

故 $\frac{AX}{XC}=\frac{AY}{YB}$. ……………………40 分

设边 BC 的中点为 M，因为

$$\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BY}{YA}=1,$$

所以由塞瓦定理知，AM, BX, CY 三线共点，交点即为 T，故由 $YX \parallel BC$ 可得，AT 平分线段 XY. ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}\in\{1, 2, \cdots, 5\}$, $b_1, b_2, \cdots, b_{20}\in\{1, 2, \cdots, 10\}$，集合 $X=\{(i, j)\,|\,1\le i<j\le 20, (a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

解：考虑一组满足条件的正整数 $(a_1, a_2, \cdots, a_{20}, b_1, b_2, \cdots, b_{20})$.

对 $k=1, 2, \cdots, 5$，设 $a_1, \cdots, a_{20}$ 中取值为 k 的数有 t_k 个．根据 X 的定义，当 $a_i=a_j$

时，$(i,j)\notin X$，因此至少有$\sum\limits_{k=1}^{5}\mathrm{C}_{t_k}^2$个$(i,j)$不在$X$中．注意到$\sum\limits_{k=1}^{5}t_k=20$，由柯西不等式，我们有

$$\sum_{k=1}^{5}\mathrm{C}_{t_k}^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{5}t_k^2-\sum_{k=1}^{5}t_k\right)\geq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{5}t_k\right)^2-\sum_{k=1}^{5}t_k\right)=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{20}{5}-1\right)=30,$$

从而X的元素个数不超过$\mathrm{C}_{20}^2-30=190-30=160$．　　　……………………30分

另一方面，取$a_{4k-3}=a_{4k-2}=a_{4k-1}=a_{4k}=k\,(k=1,2,\cdots,5)$，$b_i=6-a_i(i=1,2,\cdots,20)$，则对任意$i,j\,(1\leq i<j\leq 20)$，有

$$(a_i-a_j)(b_i-b_j)=(a_i-a_j)((6-a_i)-(6-a_j))=-(a_i-a_j)^2\leq 0,$$

等号成立当且仅当$a_i=a_j$，这恰好发生$5C_4^2=30$次．此时X的元素个数达到$\mathrm{C}_{20}^2-30=160$．

综上所述，X的元素个数的最大值为160．　　　……………………50分