2010年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准（B卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、填空题（本题满分64分，每小题8分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是 $\underline{[-3,\sqrt{3}]}$.

解：易知 $f(x)$ 的定义域是 $[5,8]$，且 $f(x)$ 在 $[5,8]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是 $\underline{-\frac{3}{2}\le a\le 12}$.

解：令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$，即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $\quad -at^3+(a-3)t\ge -3$，

$$-at(t^2-1)-3(t-1)\ge 0,$$

$(t-1)(-at(t+1)-3)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知

$-at(t+1)-3\le 0$ 即 $\quad a(t^2+t)\ge -3 \qquad$ （1）

当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；

对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$.

从而可知 $\qquad -\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是 $\underline{\ 9800\ }$.

解：由对称性知，只要先考虑 x 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,99)$ 与双曲线右半支于 A_k，交

直线$x=100$于B_k，则线段A_kB_k内部的整点的个数为$99-k$，从而在x轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{99}(99-k)=99\times 49=4851.$$

又x轴上有 98 个整点，所以所求整点的个数为

$$2\times 4851+98=9800.$$

4. 已知$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，其中$a_1=3,b_1=1,a_2=b_2,3a_5=b_3$，且存在常数$\alpha,\beta$使得对每一个正整数$n$都有$a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则$\alpha+\beta=$ $\underline{\sqrt[3]{3}+3}$.

解：设$\{a_n\}$的公差为$d,\{b_n\}$的公比为q，则

$$3+d=q, \qquad (1)$$

$$3(3+4d)=q^2, \qquad (2)$$

（1）代入（2）得

$$9+12d=d^2+6d+9$$，求得$d=6,q=9$.

从而有 $3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$ 对一切正整数n都成立，

即 $6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数n都成立.

从而 $\log_\alpha 9=6,-3=-\log_\alpha 9+\beta$，

求得 $\alpha=\sqrt[3]{3},\beta=3$， $\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数$f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0,a\neq 1)$ 在区间$x\in[-1,1]$上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 $\underline{-\frac{1}{4}}$.

解：令$a^x=y$,则原函数化为$g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$在$(-\frac{3}{2},+\infty)$上是递增的.

当$0<a<1$时，$y\in[a,a^{-1}]$，

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以 $g(y)_{\min}=(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4}$；

当 $a>1$时，$y\in[a^{-1},a]$，

$$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2,$$

所以 $g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\dfrac{1}{4}$.

综上 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最小值为 $-\dfrac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 $\underline{\dfrac{12}{17}}$.

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

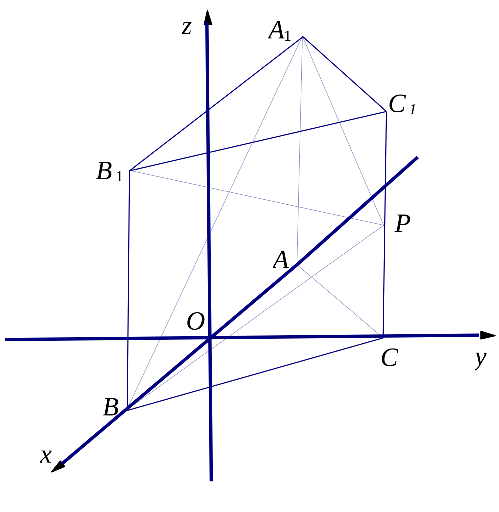
$$\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^2\times\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^4\times\frac{7}{12}+\cdots$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{12}{17}.$$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{4}}$.

解一：如图，以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0),B_1(1,0,2),A_1(-1,0,2),P(0,\sqrt{3},1)$，从而，

$$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1),\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0),\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1).$$

设分别与平面 BA_1P 、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则



$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$$

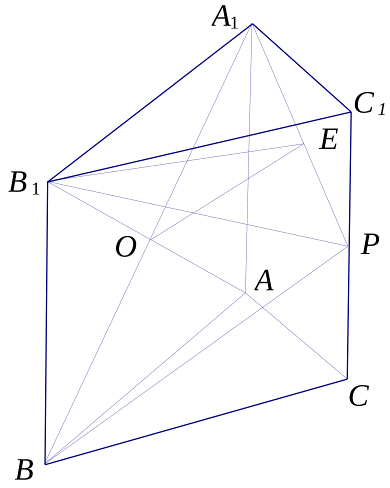
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$$

由此可设 $\vec{m}=(1,0,1),\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $|\vec{m}\cdot\vec{n}|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}||\cos\alpha|$，

即 $\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2|\cos\alpha|\Rightarrow|\cos\alpha|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



解二：如图，$PC=PC_1, PA_1=PB$.

设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，则

$OA_1=OB, OA=OB_1, A_1B\perp AB_1$.

因为 $PA=PB_1$，所以 $PO\perp AB_1$，

从而 $AB_1\perp$ 平面 PA_1B .

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE\perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B-A_1P-B_1$ 的平面角.

设 $AA_1=2$，则易求得

$PB=PA_1=\sqrt{5}, A_1O=B_1O=\sqrt{2}, PO=\sqrt{3}$.

在直角 ΔPA_1O 中，$A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，

即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE, \therefore OE=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}, \therefore B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\dfrac{6}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\frac{B_1O}{B_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

8. 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解（x, y, z）的个数是 <u>336675</u> .

解：首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times1004$.

把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解分为三类：

（1） x, y, z 均相等的正整数解的个数显然为 1；

（2） x, y, z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数，易知为 1003；

(3) 设 x, y, z 两两均不相等的正整数解为 k.

易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$，

$$6k=2009\times1004-3\times1003-1$$
$$=2006\times1005-2009+3\times2-1=2006\times1005-2004，$$
$$k=1003\times335-334=335671.$$

从而满足 $x\le y\le z$ 的正整数解的个数为

$$1+1003+335671=336675.$$

二、解答题（本题满分 56 分）

9.（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne0)$，当 $0\le x\le1$ 时，$|f'(x)|\le1$，试求 a 的最大值.

解一： $f'(x)=3ax^2+2bx+c,$

由 $\begin{cases} f'(0)=c, \\ f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}a+b+c, \\ f'(1)=3a+2b+c \end{cases}$ 得 （4 分）

$$3a=2f'(0)+2f'(1)-4f'(\frac{1}{2}).$$ （8 分）

所以 $3|a|=\left|2f'(0)+2f'(1)-4f'(\frac{1}{2})\right|$

$$\le2|f'(0)|+2|f'(1)|+4\left|f'(\frac{1}{2})\right|$$

$$\le8，$$

$$a\le\frac{8}{3}.$$ （12 分）

又易知当 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.（16 分）

解二：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

设 $g(x)=f'(x)+1$，则当 $0\le x\le1$ 时，$0\le g(x)\le2$.

设 $z=2x-1$，则 $x=\frac{z+1}{2},-1\le z\le1.$

$$h(z)=g(\frac{z+1}{2})=\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a+2b}{2}z+\frac{3a}{4}+b+c+1.$$ （4 分）

容易知道当 $-1\le z\le1$ 时，$0\le h(z)\le2,0\le h(-z)\le2$. （8 分）

从而当 $-1\le z\le1$ 时，$0\le\frac{h(z)+h(-z)}{2}\le2$ ，

即 $0\le\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a}{4}+b+c+1\le2$，

从而 $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge 0$，$\dfrac{3a}{4}z^2\le 2$，

由 $0\le z^2\le 1$知$a\le\dfrac{8}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　（12 分）

又易知当 $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$为常数）满足题设条件，所以$a$最大值为$\dfrac{8}{3}$.

（16 分）

10.（**本小题满分 20 分**）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\ne x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

解一：设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2,y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}\quad.$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2).\qquad（1）$$

易知 $x=5,y=0$ 是（1）的一个解，所以线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　（5 分）

由（1）知直线 AB 的方程为

$$y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)，即\ x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2.\qquad（2）$$

（2）代入 $y^2=6x$ 得

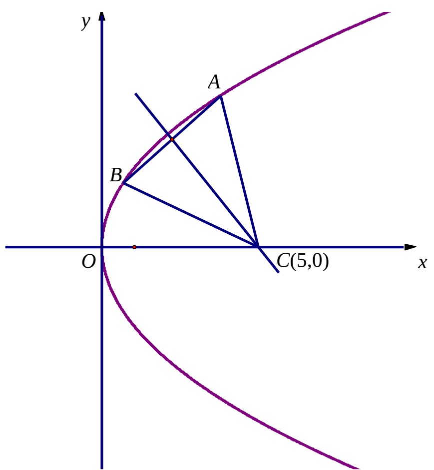
$$y^2=2y_0(y-y_0)+12，即\ y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0.（3）$$

依题意，y_1,y_2 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\ne y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

$$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}.$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



$$=\sqrt{(1+(\frac{y_0}{3})^2)(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})(4y_0^2-4(2y_0^2-12))}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点$C(5,0)$到线段AB的距离

$$h=|CM|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}\ .$$ （10 分）

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3})^3}$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$ （15 分）

当且仅当$9+y_0^2=24-2y_0^2$，即$y_0=\pm\sqrt{5}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$时等号成立.

所以ΔABC面积的最大值为$\frac{14}{3}\sqrt{7}$.　（20 分）

解二：同解一，线段AB的垂直平分线与x轴的交点C为定点，且点C坐标为$(5,0)$.

（5 分）

设$x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$$的绝对值，　（10 分）

$$S_{\Delta ABC}^2=(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2))^2$$

$$=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$

$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)$$

$$\le\frac{3}{2}(\frac{14}{3})^3,$$

$S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$, （15 分）

当且仅当$(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$且$t_1^2+t_2^2=4$，

即$t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$， $t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$时等号成立.

所以ΔABC面积的最大值是$\frac{14}{3}\sqrt{7}$. （20 分）

11.（**本小题满分 20 分**）数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3},a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}(n=1,2,\cdots)$.

求证：$\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^n}}$. （1）

证明：由$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$ 知 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_n}+1$，

$$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{a_n}(\frac{1}{a_n}-1).$$ （2）

所以 $\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{a_n^2}{1-a_n}=\frac{a_n}{1-a_n}-a_n$,

即 $a_n=\frac{a_n}{1-a_n}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$. （5 分）

从而 $a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\frac{a_1}{1-a_1}-\frac{a_2}{1-a_2}+\frac{a_2}{1-a_2}-\frac{a_3}{1-a_3}+\cdots+\frac{a_n}{1-a_n}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$$

$$=\frac{a_1}{1-a_1}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}.$$

所以（1）等价于

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<\frac{1}{2}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^{n}}},$$

即 $3^{2^{n-1}}<\frac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}}<3^{2^{n}}$. （3） （10 分）

由 $a_1=\frac{1}{3}$ 及 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$ 知 $a_2=\frac{1}{7}$.

当 $n=1$ 时 ，$\frac{1-a_2}{a_2}=6$，$3^{2^{1-1}}<6<3^{2^{1}}$ ，

即 $n=1$ 时，（3）成立.

设 $n=k(k\ge 1)$ 时，（3）成立，即 $3^{2^{k-1}}<\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}<3^{2^{k}}$.

当 $n=k+1$ 时，由（2）知

$$\frac{1-a_{k+2}}{a_{k+2}}=\frac{1}{a_{k+1}}\left(\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}\right)>\left(\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}\right)^2>3^{2^{k}};$$ （15 分）

又由（2）及 $a_1=\frac{1}{3}$ 知 $\frac{1-a_n}{a_n}(n\ge 1)$ 均为整数，

从而由 $\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}<3^{2^{k}}$ 有 $\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}\le 3^{2^{k}}-1$ 即 $\frac{1}{a_{k+1}}\le 3^{2^{k}}$ ，

所以 $\frac{1-a_{k+2}}{a_{k+2}}=\frac{1}{a_{k+1}}\cdot\frac{1-a_{k+1}}{a_{k+1}}<3^{2^{k}}\cdot 3^{2^{k}}<3^{2^{k+1}}$ ，

即（3）对 $n=k+1$ 也成立.

所以（3）对 $n\ge 1$ 的正整数都成立，即（1）对 $n\ge 1$ 的正整数都成立. （20 分）

2010 年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准（B 卷）

说明：

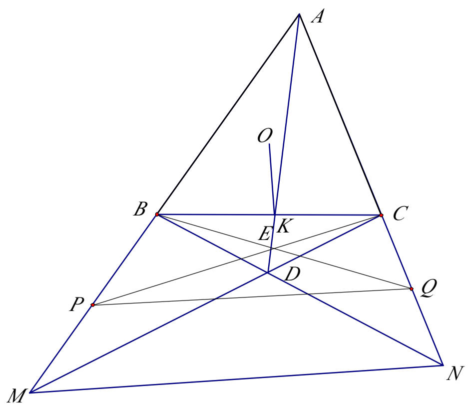
1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，**10** 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、（本题满分 40 分）

如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M. 求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆.

证明：用反证法．若 A，B，D，C 不四点共圆，设三角形 ABC 的外接圆与 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接 CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ.



因为 $PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）

$$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

同理
$$QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

所以
$$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故
$$OK\perp PQ.$$
（10 分）

由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ// MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \qquad ①$$

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \qquad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \qquad ③$$

由①，②，③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$
（30 分）

所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$，故△$DMN$∽△$DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC// MN$，故 $OK\perp BC$，

即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A,B,D,C 四点共圆. （40 分）

注 1：“$PK^2=P$的幂（关于⊙O）$+K$的幂（关于⊙O）”的证明：延长 PK 至点 F，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \qquad ④$$

则 P，E，F，A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

从而 E，C，F，K 四点共圆，于是

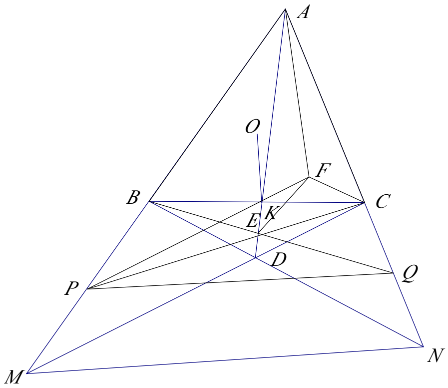
$$PK\cdot PF=PE\cdot PC, \qquad ⑤$$

⑤-④，得

$$PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE$$

$=P$的幂（关于⊙O）$+K$的幂（关于⊙O）.

注 2：若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.



二、（本题满分 40 分）

设 m 和 n 是大于 1 的整数，求证：

$$1^m+2^m+\cdots+n^m=\frac{1}{m+1}\left\{(n+1)\sum_{k=1}^{m}C_m^k n^k-\sum_{j=1}^{m-1}\left(C_{m+1}^j\sum_{i=1}^{n}i^j\right)\right\}.$$

证明：由 $(q+1)^{m+1}=\sum_{j=0}^{m+1}C_{m+1}^j q^j$ 得到

$$(q+1)^{m+1}-q^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^j q^j,$$

分别将 $q=1,2,\cdots,n$ 代入上式得：

$$2^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^j,$$

$$3^{m+1}-2^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^j 2^j,$$

$\cdots\cdots$

$$n^{m+1}-(n-1)^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^{j}(n-1)^{j},$$

$$(n+1)^{m+1}-n^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^{j}n^{j}.$$

将上面n个等式两边分别相加得到：

$$(n+1)^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n}i^{j}),$$ （20分）

$$(n+1)(n+1)^{m}-1=n+\sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n}i^{j})+(m+1)\sum_{i=1}^{n}i^{m},$$

$$1^{m}+2^{m}+\cdots+n^{m}=\frac{1}{m+1}\left\{(n+1)\sum_{k=1}^{m}C_{m}^{k}n^{k}-\sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n}i^{j})\right\}.$$ （40分）

三、（本题满分 50 分）

设x,y,z为非负实数，求证：

$$(\frac{xy+yz+zx}{3})^{3}\le(x^{2}-xy+y^{2})(y^{2}-yz+z^{2})(z^{2}-zx+x^{2})\le(\frac{x^{2}+y^{2}+z^{2}}{2})^{3}.$$

证明：首先证明左边不等式.

因为 $x^{2}-xy+y^{2}=\frac{1}{4}[(x+y)^{2}+3(x-y)^{2}]\ge\frac{1}{4}(x+y)^{2}$,

同理,有

$$y^{2}-yz+z^{2}\ge\frac{1}{4}(y+z)^{2},\quad z^{2}-zx+x^{2}\ge\frac{1}{4}(z+x)^{2};$$ （10分）

于是

$$(x^{2}-xy+y^{2})(y^{2}-yz+z^{2})(z^{2}-zx+x^{2})\ge\frac{1}{64}[(x+y)(y+z)(z+x)]^{2}$$

$$=\frac{1}{64}[(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz]^{2};$$ （20分）

由算术-几何平均不等式，得 $xyz\le\frac{1}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$,所以

$$(x^{2}-xy+y^{2})(y^{2}-yz+z^{2})(z^{2}-zx+x^{2})\ge\frac{1}{81}(x+y+z)^{2}(xy+yz+zx)^{2}$$

$$=\frac{1}{81}(x^{2}+y^{2}+z^{2}+2xy+2yz+2zx)(xy+yz+zx)^{2}\ge(\frac{xy+yz+zx}{3})^{3}.$$

左边不等式获证，其中等号当且仅当$x=y=z$时成立. （30分）

下面证明右边不等式.

根据欲证不等式关于x,y,z对称，不妨设$x\ge y\ge z$，于是

$$(z^{2}-zx+x^{2})(y^{2}-yz+z^{2})\le x^{2}y^{2},$$

所以

$$(x^{2}-xy+y^{2})(y^{2}-yz+z^{2})(z^{2}-zx+x^{2})\le(x^{2}-xy+y^{2})x^{2}y^{2}.$$ （40分）

运用算术-几何平均不等式, 得

$$(x^2-xy+y^2)x^2y^2=(x^2-xy+y^2)\cdot xy\cdot xy\le(\frac{x^2-xy+y^2+xy}{2})^2\cdot xy$$

$$\le(\frac{x^2-xy+y^2+xy}{2})^2\cdot(\frac{x^2+y^2}{2})=(\frac{x^2+y^2}{2})^3\le(\frac{x^2+y^2+z^2}{2})^3.$$

右边不等式获证, 其中等号当且仅当 x,y,z 中有一个为 0,且另外两个相等时成立. （50 分）

四、（本题满分 50 分）

设 k 是给定的正整数，$r=k+\frac{1}{2}$. 记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)),\ l\ge 2$. 证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数. 这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$.

证明：记 $\nu_2(n)$ 表示正整数 n 所含的 2 的幂次. 则当 $m=\nu_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数.

下面我们对 $\nu_2(k)=\nu$ 用数学归纳法.

当 $\nu=0$ 时，k 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时 $f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+1\right)$ 为整数. （10 分)

假设命题对 $\nu-1(\nu\ge 1)$ 成立.

对于 $\nu\ge 1$，设 k 的二进制表示具有形式

$$k=2^{\nu}+\alpha_{\nu+1}\cdot 2^{\nu+1}+\alpha_{\nu+2}\cdot 2^{\nu+2}+\cdots,$$

这里，$\alpha_i=0$ 或者 1，$i=\nu+1,\ \nu+2,\cdots$. （20 分)

于是
$$f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+k^2+k$$

$$=\frac{1}{2}+2^{\nu-1}+(\alpha_{\nu+1}+1)\cdot 2^{\nu}+(\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu+2})\cdot 2^{\nu+1}+\cdots+2^{2\nu}+\cdots$$

$$=k'+\frac{1}{2},\qquad ①$$ （40 分）

这里 $k'=2^{\nu-1}+(\alpha_{\nu+1}+1)\cdot 2^{\nu}+(\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu+2})\cdot 2^{\nu+1}+\cdots+2^{2\nu}+\cdots$. 显然 k' 中所含的 2 的幂次为 $\nu-1$. 故由归纳假设知，$r'=k'+\frac{1}{2}$ 经过 f 的 ν 次迭代得到整数，由①知，$f^{(\nu+1)}(r)$ 是一个整数，这就完成了归纳证明. （50 分）