2017 年全国高中数学联赛 A 卷一试

一、填空题

1.设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$.又当 $0\le x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为_________.

2.若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是_________.

3.在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为_________.

4.若一个三位数中任意两个相邻数码的差不超过 1，则称其为“平稳数”.平稳数的个数是

5.正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=1$，$AP=2$，过 AB 的平面 α 将其体积平分，则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为_________.

6.在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)|x,y=-1,0,1\}$.在 K 中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为 $\sqrt{5}$ 的概率为_________.

7.在 ΔABC 中，M 是边 BC 的中点，N 是线段 BM 的中点.若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为_________.

8.设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则 a_1+b_1 的所有可能值为_________.

二、解答题

9.设 k,m 为实数，不等式 $\left|x^2-kx-m\right|\le 1$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立.证明：$b-a\le 2\sqrt{2}$.

10.设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求 $(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})$ 的最小值和最大值.

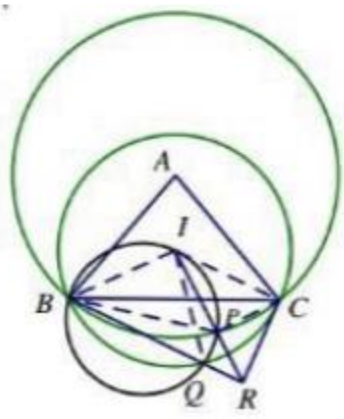
11.设复数 z_1,z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0$，$\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）.

（1）求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

（2）求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值.

2017年全国高中数学联赛A卷二试

一.如图，在ΔABC中，$AB=AC$，I为ΔABC的内心，以A为圆心，AB为半径作圆Γ_1，以I为圆心，IB为半径作圆Γ_2，过点B,I的圆Γ_3与Γ_1,Γ_2分别交于点P,Q（不同于点B）.设IP与BQ交于点R.证明：$BR\perp CR$



二.设数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n,a_n\le n,\\ a_n-n,a_n>n,\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$.求满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数r的个数.

三.将33×33方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等.若相邻连个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”.试求分隔边条数的最小值.

四.设m,n均是大于 1 的整数，$m\geq n$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不超过m的互不相同的正整数，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素.证明：对任意实数x，均存在一个$i(1\leq i\leq n)$，使得$\|a_i x\|\geq \dfrac{2}{m(m+1)}\|x\|$，这里$\|y\|$表示实数$y$到与它最近的整数的距离.

2017 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，**不得增加其他中间档次**.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，**不得增加其他中间档次**.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$. 又当 $0\le x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为________.

答案：$-\dfrac{1}{2}$.

解：由条件知，$f(x+14)=-\dfrac{1}{f(x+7)}=f(x)$，所以

$$f(-100)=f(-100+14\times 7)=f(-2)=-\frac{1}{f(5)}=-\frac{1}{\log_2 4}=-\frac{1}{2}.$$

2. 若实数 x, y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是____________.

答案：$[-1, \sqrt{3}+1]$.

解：由于 $x^2=1-2\cos y\in[-1, 3]$，故 $x\in[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

由 $\cos y=\dfrac{1-x^2}{2}$ 可知，$x-\cos y=x-\dfrac{1-x^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$. 因此当 $x=-1$ 时，$x-\cos y$ 有最小值 -1（这时 y 可以取 $\dfrac{\pi}{2}$）；当 $x=\sqrt{3}$ 时，$x-\cos y$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$（这时 y 可以取 π）. 由于 $\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的值域是 $[-1, \sqrt{3}+1]$，从而 $x-\cos y$ 的取值范围是 $[-1, \sqrt{3}+1]$.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为____________.

答案：$\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

解：易知 $A(3, 0), F(0, 1)$. 设 P 的坐标是 $(3\cos\theta, \sqrt{10}\sin\theta), \theta\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$S_{OAPF}=S_{\Delta OAP}+S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cos\theta$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt{10}\cos\theta+\sin\theta)=\frac{3\sqrt{11}}{2}\sin(\theta+\varphi).$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\theta=\arctan\sqrt{10}$ 时，四边形 $OAPF$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过1，则称其为“平稳数”．平稳数的个数是____________．

答案：75．

解：考虑平稳数$\overline{abc}$．

若$b=0$，则$a=1,\ c\in\{0,1\}$，有2个平稳数．

若$b=1$，则$a\in\{1,2\},\ c\in\{0,1,2\}$，有$2\times3=6$个平稳数．

若$2\le b\le 8$，则$a,c\in\{b-1,b,\ b+1\}$，有$7\times3\times3=63$个平稳数．

若$b=9$，则$a,c\in\{8,9\}$，有$2\times2=4$个平稳数．

综上可知，平稳数的个数是$2+6+63+4=75$．

5. 正三棱锥$P-ABC$中，$AB=1,\ AP=2$，过AB的平面α将其体积平分，则棱PC与平面α所成角的余弦值为____________．

答案：$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

解：设$AB,\ PC$的中点分别为$K,\ M$，则易证平面ABM就是平面α．由中线长公式知

$$AM^2=\frac{1}{2}(AP^2+AC^2)-\frac{1}{4}PC^2=\frac{1}{2}(2^2+1^2)-\frac{1}{4}\times2^2=\frac{3}{2},$$

所以$KM=\sqrt{AM^2-AK^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

又易知直线PC在平面α上的射影是直线MK，而$CM=1,\ KC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

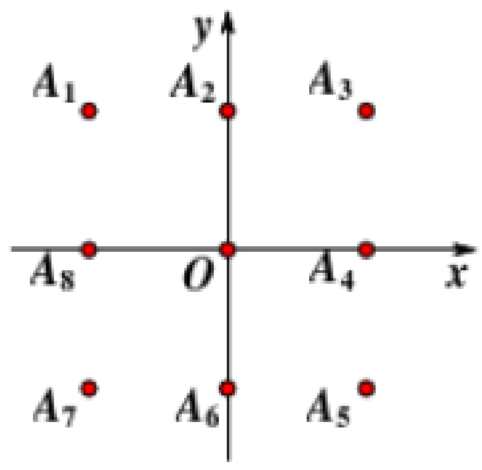
$$\cos\angle KMC=\frac{KM^2+MC^2-KC^2}{2KM\cdot MC}=\frac{\frac{5}{4}+1-\frac{3}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

故棱PC与平面α所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$．在$K$中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为$\sqrt{5}$的概率为____________．

答案：$\dfrac{4}{7}$．

解：易知K中有9个点，故在K中随机取出三个点的方式数为$C_9^3=84$种．



将K中的点按右图标记为$A_1,A_2,\cdots,A_8,O$，其中有8对点之间的距离为$\sqrt{5}$．由对称性，考虑取A_1,A_4两点的情况，则剩下的一个点有7种取法，这样有$7\times8=56$个三点组（不计每组中三点的次序）．对每个$A_i(i=1,2,\cdots,8)$，K中恰有A_{i+3},A_{i+5}两点与之距离为$\sqrt{5}$（这里下标按模8理解），因而恰有$\{A_i,A_{i+3},A_{i+5}\}(i=1,2,\cdots,8)$这8个三点组被计了两次．从而满足条件的三点组个数为$56-8=48$，进而所求概率为$\dfrac{48}{84}=\dfrac{4}{7}$．

7. 在ΔABC中，M是边BC的中点，N是线段BM的中点．若$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为____________．

答案：$\sqrt{3}+1$．

解：由条件知，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\left(3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right).$$

由于$\sqrt{3}=S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，所以$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，进一步可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=2$，从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&\ge\frac{1}{8}\left(2\sqrt{3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}+1.\end{aligned}$$

当$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\times\sqrt[4]{3}$时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为$\sqrt{3}+1$．

8. 设两个严格递增的正整数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数n，有$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则a_1+b_1的所有可能值为__________．

答案：13, 20．

解：由条件可知：a_1,a_2,b_1均为正整数，且$a_1<a_2$．

由于$2017>b_{10}=2^9\cdot b_1=512b_1$，故$b_1\in\{1,2,3\}$．反复运用$\{a_n\}$的递推关系知

$$\begin{aligned}a_{10}&=a_9+a_8=2a_8+a_7=3a_7+2a_6=5a_6+3a_5=8a_5+5a_4\\&=13a_4+8a_3=21a_3+13a_2=34a_2+21a_1,\end{aligned}$$

因此
$$21a_1\equiv a_{10}=b_{10}=512b_1\equiv 2b_1\pmod{34},$$

而$13\times21=34\times8+1$，故有

$$a_1\equiv13\times21a_1\equiv13\times2b_1=26b_1\pmod{34}.\qquad①$$

另一方面，注意到$a_1<a_2$，有$55a_1<34a_2+21a_1=512b_1$，故

$$a_1<\frac{512}{55}b_1.\qquad②$$

当$b_1=1$时，①，②分别化为$a_1\equiv26\pmod{34}$，$a_1<\dfrac{512}{55}$，无解．

当$b_1=2$时，①，②分别化为$a_1\equiv52\pmod{34}$，$a_1<\dfrac{1024}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=18$，此时$a_1+b_1=20$．

当$b_1=3$时，①，②分别化为$a_1\equiv78\pmod{34}$，$a_1<\dfrac{1536}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=10$，此时$a_1+b_1=13$．

综上所述，a_1+b_1的所有可能值为13, 20．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）设 k, m 为实数，不等式 $\left|x^2-kx-m\right|\le 1$ 对所有 $x\in[a, b]$ 成立．证明：$b-a\le 2\sqrt{2}$．

证明：令 $f(x)=x^2-kx-m$，$x\in[a, b]$，则 $f(x)\in[-1, 1]$．于是

$$f(a)=a^2-ka-m\le 1, \quad ①$$

$$f(b)=b^2-kb-m\le 1, \quad ②$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-k\cdot\frac{a+b}{2}-m\ge -1. \quad ③$$

………………4 分

由①＋②－2×③知，

$$\frac{(a-b)^2}{2}=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 4,$$

故 $b-a\le 2\sqrt{2}$．………………16 分

10.（本题满分 20 分）设 x_1, x_2, x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})$$

的最小值和最大值．

解：由柯西不等式

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})\ge(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{3x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{3}}+\sqrt{5x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_3}{5}})^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2=1,$$

当 $x_1=1, x_2=0, x_3=0$ 时不等式等号成立，故欲求的最小值为 1．

………………5 分

因为

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})=\frac{1}{5}(x_1+3x_2+5x_3)(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)$$

$$\le\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\left((x_1+3x_2+5x_3)+(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)\right)^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(6x_1+\frac{14}{3}x_2+6x_3\right)^2 \quad \text{………………10 分}$$

$$\le\frac{1}{20}\left(6x_1+6x_2+6x_3\right)^2=\frac{9}{5},$$

当 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=0, x_3=\frac{1}{2}$ 时不等式等号成立，故欲求的最大值为 $\frac{9}{5}$．………20 分

11.（本题满分 20 分）设复数 z_1, z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0, \mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）．

(1) 求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

(2) 求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值．

解：(1) 对 $k=1,2$，设 $z_k=x_k+y_k\mathbf{i}\,(x_k,\,y_k\in\mathbf{R})$．由条件知

$$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,\ x_k^2-y_k^2=\mathrm{Re}(z_k^2)=2\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}((x_1+y_1\mathbf{i})(x_2+y_2\mathbf{i}))=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{(y_1^2+2)(y_2^2+2)}-y_1y_2\geq\left(\left|y_1y_2\right|+2\right)-y_1y_2\geq 2\,.\end{aligned}$$

又当 $z_1=z_2=\sqrt{2}$ 时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$．这表明，$\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值为 2．

…………………5 分

(2) 对 $k=1,2$，将 z_k 对应到平面直角坐标系 xOy 中的点 $P_k(x_k,\,y_k)$，记 P_2' 是 P_2 关于 x 轴的对称点，则 P_1,P_2' 均位于双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的右支上．

设 F_1,F_2 分别是 C 的左、右焦点，易知 $F_1(-2,0),\ F_2(2,0)$．

根据双曲线的定义，有 $\left|P_1F_1\right|=\left|P_1F_2\right|+2\sqrt{2},\ \left|P_2'F_1\right|=\left|P_2'F_2\right|+2\sqrt{2}$，进而得

$$\begin{aligned}&\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|=\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|z_1-\overline{z_2}\right|\\&=\left|P_1F_1\right|+\left|P_2'F_1\right|-\left|P_1P_2'\right|=4\sqrt{2}+\left|P_1F_2\right|+\left|P_2'F_2\right|-\left|P_1P_2'\right|\geq 4\sqrt{2}\,,\end{aligned}$$

…………………15 分

等号成立当且仅当 F_2 位于线段 P_1P_2' 上（例如，当 $z_1=z_2=2+\sqrt{2}\mathbf{i}$ 时，F_2 恰是 P_1P_2' 的中点）．

综上可知，$\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．　　…………20 分

2017 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

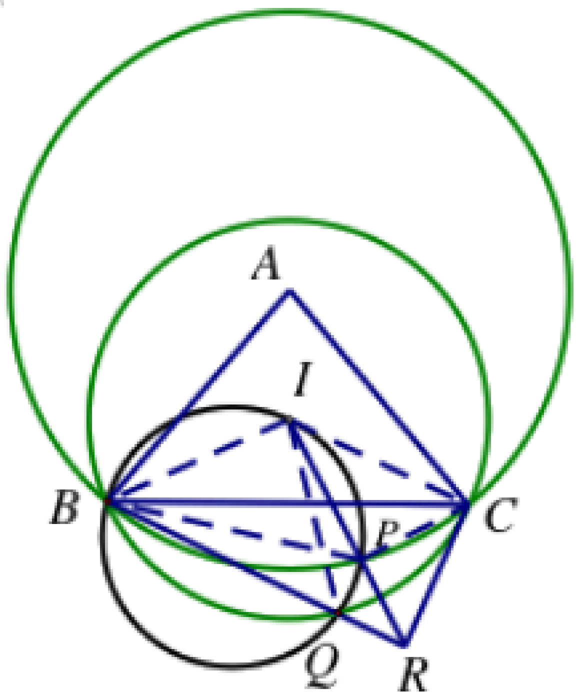
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，**不得增加其他中间档次**．

一、（本题满分 40 分）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，I为$\triangle ABC$的内心．以A为圆心，AB为半径作圆Γ_1，以I为圆心，IB为半径作圆Γ_2，过点B、I的圆Γ_3与Γ_1、Γ_2分别交于点P、Q（不同于点B）．设IP与BQ交于点R．

证明：$BR\perp CR$．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：连接IB，IC，IQ，PB，PC．

由于点Q在圆Γ_2上，故$IB=IQ$，所以$\angle IBQ=\angle IQB$．

又B，I，P，Q四点共圆，所以$\angle IQB=\angle IPB$，于是$\angle IBQ=\angle IPB$，故$\triangle IBP \backsim \triangle IRB$，从而有$\angle IRB=\angle IBP$，且

$$\frac{IB}{IR}=\frac{IP}{IB}.$$ ……………………10 分

注意到$AB=AC$，且I为$\triangle ABC$的内心，故$IB=IC$，所以

$$\frac{IC}{IR}=\frac{IP}{IC},$$

于是$\triangle ICP \backsim \triangle IRC$，故$\angle IRC=\angle ICP$． ……………………20 分

又点P在圆Γ_1的弧BC上，故$\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，因此

$$\begin{aligned}\angle BRC&=\angle IRB+\angle IRC=\angle IBP+\angle ICP\\&=360^\circ-\angle BIC-\angle BPC\\&=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

故$BR\perp CR$． ……………………40 分

二、（本题满分 40 分）设数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, & 若\ a_n\le n,\\ a_n-n, & 若\ a_n>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

求满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数r的个数.

解：由数列的定义可知$a_1=1,a_2=2$．假设对某个整数$r\ge 2$有$a_r=r$，我们证明对$t=1,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2t-1}=2r+t-1>r+2t-1,\quad a_{r+2t}=r-t<r+2t. \qquad ①$$

对t归纳证明.

当$t=1$时，由于$a_r=r\ge r$，由定义，$a_{r+1}=a_r+r=r+r=2r>r+1$，$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=2r-(r+1)=r-1<r+2$，结论成立.

设对某个$1\le t<r-1$，①成立，则由定义

$$a_{r+2t+1}=a_{r+2t}+(r+2t)=r-t+r+2t=2r+t>r+2t+1,$$

$$a_{r+2t+2}=a_{r+2t+1}-(r+2t+1)=2r+t-(r+2t+1)=r-t-1<r+2t+2,$$

即结论对$t+1$也成立．由数学归纳法知，①对所有$t=1,2,\cdots,r-1$成立，特别当$t=r-1$时，有$a_{3r-2}=1$，从而$a_{3r-1}=a_{3r-2}+(3r-2)=3r-1$.

若将所有满足$a_r=r$的正整数r从小到大记为$r_1,r_2,\cdots$，则由上面的结论可知$r_1=1,r_2=2$，$r_{k+1}=3r_k-1$，$k=2,3,\cdots$.　……………………20 分

由此可知，$r_{k+1}-\frac{1}{2}=3\left(r_k-\frac{1}{2}\right)(k=1,\cdots,m-1)$，从而

$$r_m=3^{m-1}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}.$$

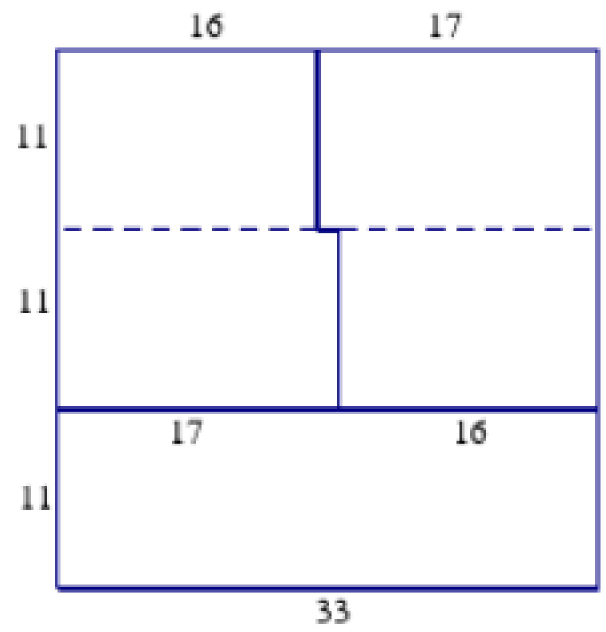
由于$r_{2018}=\frac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\frac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019}$，在$1,2,\cdots,3^{2017}$中满足$a_r=r$的数$r$共有 2018个，为$r_1,r_2,\cdots,r_{2018}$.　……………………30 分

由①可知，对每个$k=1,2,\cdots,2017$，$r_k+1,r_k+2,\cdots,3r_k-2$中恰有一半满足$a_r<r$．由于$r_{2018}+1=\frac{3^{2017}+1}{2}+1$与$3^{2017}$均为奇数，而在$r_{2018}+1,\ \cdots,3^{2017}$中，奇数均满足$a_r>r$，偶数均满足$a_r<r$，其中的偶数比奇数少 1 个. 因此满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数$r$的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}.$$　……………………40 分

三、（本题满分 50 分）将33×33方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等．若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”．试求分隔边条数的最小值.

解：记分隔边的条数为L．首先，将方格纸按如图分成三个区域，分别染成三种颜色，粗线上均为分隔边，此时共有 56 条分隔边，即$L=56$．　…………10 分



下面证明 $L\geq 56$．将方格纸的行从上至下依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{33}$，列从左至右依次记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{33}$．行 A_i 中方格出现的颜色数记为 $n(A_i)$，列 B_i 中方格出现的颜色个数记为 $n(B_i)$．三种颜色分别记为 c_1,c_2,c_3．对于一种颜色 c_j，设 $n(c_j)$ 是含有 c_j 色方格的行数与列数之和．记

$$\delta(A_i,c_j)=\begin{cases}1, & \text{若}A_i\text{行含有}c_j\text{色方格，}\\ 0, & \text{否则，}\end{cases}$$

类似地定义 $\delta(B_i,c_j)$．于是

$$\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))=\sum_{i=1}^{33}\sum_{j=1}^{3}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{33}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))=\sum_{j=1}^{3}n(c_j).$$

由于染 c_j 色的方格有 $\frac{1}{3}\cdot 33^2=363$ 个，设含有 c_j 色方格的行有 a 个，列有 b 个，则 c_j 色的方格一定在这 a 行和 b 列的交叉方格中，因此 $ab\geq 363$，从而

$$n(c_j)=a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{363}>38,$$

故
$$n(c_j)\geq 39,\ j=1,2,3. \qquad ①$$

…………………20 分

由于在行 A_i 中有 $n(A_i)$ 种颜色的方格，因此至少有 $n(A_i)-1$ 条分隔边．同理在列 B_j 中，至少有 $n(B_j)-1$ 条分隔边．于是

$$L\geq\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)-1)+\sum_{i=1}^{33}(n(B_i)-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66 \qquad ②$$

$$=\sum_{j=1}^{3}n(c_j)-66. \qquad ③$$

…………………30 分

下面分两种情形讨论．

情形 1：有一行或一列全部方格同色．不妨设有一行全为 c_1 色，从而方格纸的 33 列中均含有 c_1 色的方格，由于 c_1 色方格有 363 个，故至少有 11 行中含有 c_1 色方格，于是

$$n(c_1) \ge 11 + 33 = 44\,. \qquad ④$$

由①，③及④即得

$$L \ge n(c_1) + n(c_2) + n(c_3) - 66 \ge 44 + 39 + 39 - 66 = 56\,.$$

…………………40 分

情形 2：没有一行也没有一列的全部方格同色．则对任意$1 \le i \le 33$，均有$n(A_i) \ge 2$，$n(B_i) \ge 2$．从而由②知

$$L \ge \sum_{i=1}^{33}(n(A_i) + n(B_i)) - 66 \ge 33 \times 4 - 66 = 66 > 56\,.$$

综上所述，分隔边条数的最小值等于 56． …………………50 分

四、（本题满分 50 分）设m,n均是大于 1 的整数，$m \ge n$．$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不超过m的互不相同的正整数，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素．证明：对任意实数x，均存在一个i（$1 \le i \le n$），使得$\| a_i x \| \ge \dfrac{2}{m(m+1)} \| x \|$，这里$\| y \|$表示实数$y$到与它最近的整数的距离．

证明：首先证明以下两个结论．

结论 1：存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = 1$，并且$|c_i| \le m$，$1 \le i \le n$．

由于$(a_1,a_2,\cdots,a_n) = 1$，由裴蜀定理，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = 1\,. \qquad ①$$

下面证明，通过调整，存在一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$满足①，且绝对值均不超过m．记

$$S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n) = \sum_{c_i > m} c_i \ge 0, \qquad S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n) = \sum_{c_j < -m} |c_j| \ge 0\,.$$

如果$S_1 > 0$，那么存在$c_i > m > 1$，于是$c_ia_i > 1$，又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$均为正数，故由①可知存在$c_j < 0$．令

$$c_i' = c_i - a_j，\ c_j' = c_j + a_i，\ c_k' = c_k（1 \le k \le n，\ k \ne i,j），$$

则

$$c_1'a_1 + c_2'a_2 + \cdots + c_n'a_n = 1\,, \qquad ②$$

并且$0 \le m - a_j \le c_i' < c_i$，$c_j < c_j' < a_i \le m$．

因为$c_i' < c_i$，且$c_j' < m$，所以$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n') < S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．又$c_j' > c_j$及$c_i' > 0$，故$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n') \le S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

如果$S_2 > 0$，那么存在$c_j < -m$，因此有一个$c_i > 0$．令$c_i' = c_i - a_j$，$c_j' = c_j + a_i$，$c_k' = c_k$（$1 \le k \le n$，$k \ne i,j$），那么②成立，并且$-m < c_i' < c_i$，$c_j < c_j' < 0$．与上面类似地可知$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n') \le S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，且$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n') < S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

因为S_1与S_2均是非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得①成立，并且$S_1 = S_2 = 0$．结论 1 获证． …………………20 分

结论 2：（1）对任意实数a,b，均有$\| a+b \| \le \| a \| + \| b \|$．

（2）任意整数u和实数y有$\| uy \| \le |u| \cdot \| y \|$．

由于对任意整数u和实数x，有$\| x+u \|=\| x \|$，故不妨设$a,b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时$\| a \|=| a |$，$\| b \|=| b |$．若$ab\le 0$，不妨设$a\le 0\le b$，则$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，从而

$$\| a+b \|=| a+b |\le| a |+| b |=\| a \|+\| b \|.$$

若$ab>0$，即a,b同号．当$| a |+| b |\le\frac{1}{2}$时，有$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时

$$\| a+b \|=| a+b |=| a |+| b |=\| a \|+\| b \|.$$

当$| a |+| b |>\frac{1}{2}$时，注意总有$\| a+b \|\le\frac{1}{2}$，故

$$\| a+b \|\le\frac{1}{2}<| a |+| b |=\| a \|+\| b \|.$$ ………………30 分

故（1）得证．由（1）及$\| -y \|=\| y \|$即知（2）成立．

回到原问题，由结论 1，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$| c_i |\le m$，$1\le i\le n$．于是

$$\sum_{i=1}^{n} c_ia_ix=x.$$

利用结论 2 得

$$\| x \|=\left\| \sum_{i=1}^{n} c_ia_ix \right\|\le\sum_{i=1}^{n}| c_i |\cdot\| a_ix \|\le m\sum_{i=1}^{n}\| a_ix \|.$$

因此

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{1}{mn}\| x \|. \qquad ③$$

………………40 分

若$n\le\frac{1}{2}(m+1)$，由③可知

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{\| x \|}{mn}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}.$$

若$n>\frac{1}{2}(m+1)$，则在$a_1,a_2,\cdots,a_n$中存在两个相邻正整数．不妨设a_1,a_2相邻，则

$$\| x \|=\| a_2x-a_1x \|\le\| a_2x \|+\| a_1x \|.$$

故$\| a_2x \|$与$\| a_1x \|$中有一个$\ge\frac{\| x \|}{2}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}$．

综上所述，总存在一个i（$1\le i\le n$），满足$\| a_ix \|\ge\frac{2}{m(m+1)}\| x \|$．………50 分