2020 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若实数 x 满足 $\log_2 x = \log_4(2x) + \log_8(4x)$，则 $x =$______.

答案： 128.

解： 由条件知

$$\log_2 x = \log_4 2 + \log_4 x + \log_8 4 + \log_8 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2 x,$$

解得 $\log_2 x = 7$，故 $x = 128$.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 经过点 $(0,0), (2,4), (3,3)$，则圆 Ω 上的点到原点的距离的最大值为______.

答案： $2\sqrt{5}$.

解： 记 $A(2,4), B(3,3)$，圆 Ω 经过点 O, A, B．注意到 $\angle OBA = 90^\circ$（直线 OB 与 AB 的斜率分别为 1 和 -1），故 OA 为圆 Ω 的直径．从而圆 Ω 上的点到原点 O 的距离的最大值为 $|OA| = 2\sqrt{5}$.

3. 设集合 $X = \{1, 2, \cdots, 20\}$，A 是 X 的子集，A 的元素个数至少是 2，且 A 的所有元素可排成连续的正整数，则这样的集合 A 的个数为______.

答案： 190.

解： 每个满足条件的集合 A 可由其最小元素 a 与最大元素 b 唯一确定，其中 $a, b \in X$，$a < b$，这样的 (a, b) 的取法共有 $C_{20}^2 = 190$ 种，所以这样的集合 A 的个数为 190.

4. 在三角形 ABC 中，$BC = 4, CA = 5, AB = 6$，则 $\sin^6\frac{A}{2} + \cos^6\frac{A}{2} =$______.

答案： $\frac{43}{64}$.

解： 由余弦定理得 $\cos A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA\cdot AB} = \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{3}{4}$，所以

$$\sin^6\frac{A}{2} + \cos^6\frac{A}{2} = \left(\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} + \cos^4\frac{A}{2}\right)$$

$$= \left(\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right)^2 - 3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 A$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 A=\frac{43}{64}.$$

5. 设 9 元集合 $A=\{a+bi \mid a,b\in\{1,2,3\}\}$，i 是虚数单位．$\alpha=(z_1,z_2,\cdots,z_9)$ 是 A 中所有元素的一个排列，满足 $|z_1|\le|z_2|\le\cdots\le|z_9|$，则这样的排列 α 的个数为______.

答案：8.

解：由于

$$|1+\mathrm{i}|<|2+\mathrm{i}|=|1+2\mathrm{i}|<|2+2\mathrm{i}|<|3+\mathrm{i}|=|1+3\mathrm{i}|<|3+2\mathrm{i}|=|2+3\mathrm{i}|<|3+3\mathrm{i}|,$$

故

$$z_1=1+\mathrm{i},\{z_2,z_3\}=\{2+\mathrm{i},1+2\mathrm{i}\},z_4=2+2\mathrm{i},\{z_5,z_6\}=\{3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i}\},$$

$$\{z_7,z_8\}=\{3+2\mathrm{i},2+3\mathrm{i}\},z_9=3+3\mathrm{i},$$

由乘法原理知，满足条件的排列 α 的个数为 $2^3=8$.

6. 已知一个正三棱柱的各条棱长均为 3，则其外接球的体积为________.

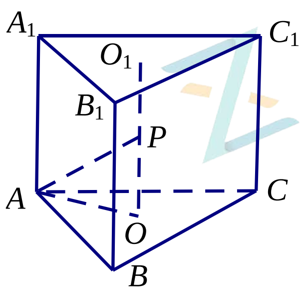
答案：$\frac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.

解：如图，设面 ABC 和面 $A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O 和 O_1，记线段 OO_1 的中点为 P，由对称性知，P 为正三棱柱外接球的球心，PA 为外接球的半径.

易知 $PO\perp AO$，所以

$$PA=\sqrt{PO^2+AO^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2},$$

故外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^3=\frac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.



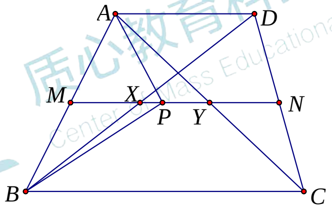
7. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$. 点 P 是四边形 $ABCD$ 所在平面上一点，满足 $\overrightarrow{PA}+2020\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2020\overrightarrow{PD}=\vec{0}$. 设 s,t 分别为四边形 $ABCD$ 与 ΔPAB 的面积，则 $\frac{t}{s}=$__________.

答案：$\frac{337}{2021}$.

解：不妨假设 $AD=2, BC=4$. 记 M, N, X, Y 分别是 AB, CD, BD, AC 的中点，则 M, X, Y, N 顺次共线并且 $MX=XY=YN=1$. 由于

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PY},\quad \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PX},$$

故结合条件可知$\overrightarrow{PY}+2020\overrightarrow{PX}=\vec{0}$．故点$P$在线段$XY$上且$PX=\dfrac{1}{2021}$． 设$A$到$MN$的距离为$h$，由面积公式可知



$$\frac{t}{s}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{ABCD}}=\frac{PM\cdot h}{MN\cdot 2h}=\frac{PM}{2MN}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2021}}{2\times 3}=\frac{337}{2021}.$$

8. 已知首项系数为 1 的五次多项式$f(x)$满足：$f(n)=8n,n=1,2,\cdots,5$，则$f(x)$的一次项系数为_______．

答案：282．

解：令$g(x)=f(x)-8x$，则$g(x)$也是一个首项系数为 1 的五次多项式，且

$$g(n)=f(n)-8n=0,\ n=1,2,\cdots,5,$$

故$g(x)$有 5 个实数根$1,2,\cdots,5$，所以$g(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-5)$，于是

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-5)+8x,$$

所以$f(x)$的一次项系数等于$\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)\cdot 5!+8=282$．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分） 在椭圆Γ中，A为长轴的一个端点，B为短轴的一个端点，F_1,F_2为两个焦点．若$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，求$\tan\angle ABF_1\cdot\tan\angle ABF_2$的值．

解：由对称性，设椭圆Γ的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(a,0),B(0,b)$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$．

由条件知

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+(-c^2+b^2)=a^2+b^2-2c^2=0.$$

……………………4 分

所以$a^2+b^2-2c^2=-a^2+3b^2=0$，故$a=\sqrt{3}b$，$c=\sqrt{2}b$．

……………………8 分

记O为坐标原点，则

$$\tan\angle ABO=\frac{a}{b}=\sqrt{3},\quad \tan\angle OBF_1=\tan\angle OBF_2=\frac{c}{b}=\sqrt{2}.$$

……………………12 分

所以

$$\tan\angle ABF_1\cdot\tan\angle ABF_2=\tan(\angle ABO+\angle OBF_1)\cdot\tan(\angle ABO-\angle OBF_1)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{5}.$$ ……………………16 分

10. **（本题满分 20 分）** 设正实数 a,b,c 满足 $a^2+4b^2+9c^2=4b+12c-2$，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ 的最小值.

解： 由题设条件得

$$a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2=3, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

由柯西不等式得

$$3\left[a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2\right]\ge(a+2b-1+3c-2)^2,$$

即 $(a+2b+3c-3)^2\le 9$，故

$$a+2b+3c\le 6. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

又由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)(a+2b+3c)\ge(1+2+3)^2,$$

所以

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge\frac{36}{a+2b+3c}\ge 6, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 15\text{ 分}$$

当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ 的最小值是 6. ……………………20 分

11. **（本题满分 20 分）** 设数列 a_n 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), n=1,2,\cdots.$$

证明：存在无穷多个正整数 m，使得 $a_{m+4}a_m-1$ 是完全平方数.

证明： 记 $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则 $q_1+q_2=1, q_1q_2=-1$，于是

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^n-q_2^n\ , n=1,2,\cdots.$$

所以 $a_1=1, a_2=1$．又注意到 $q_i+1=q_i^2(i=1,2)$，有

$$\begin{aligned}a_{n+1}+a_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\ +\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^n-q_2^n\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^n\ \ q_1+1\ -q_2^n\ \ q_2+1\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^{n+2}-q_2^{n+2}\ ,\end{aligned}$$

即

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n=1,2,\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

由此易知，数列 a_n 的每一项都是正整数.

由计算易得 $q_1^4+q_2^4=7$，故

$$a_{2n+3}a_{2n-1}-1=\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^{2n+3}-q_2^{2n+3}\ \cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\ q_1^{2n-1}-q_2^{2n-1}\ -1$$

$$=\frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2}+q_2^{4n+2}-\left(q_1q_2\right)^{2n-1}q_1^4-\left(q_1q_2\right)^{2n-1}q_2^4\right)-1$$

$$=\frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2}+q_2^{4n+2}+q_1^4+q_2^4\right)-1$$

$$=\frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2}+q_2^{4n+2}+7\right)-1$$

$$=\frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2}+q_2^{4n+2}+2\right)$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{2n+1}-q_2^{2n+1}\right)\right]^2=a_{2n+1}^2,$$ ……………………15 分

所以，对任意正整数 n， $a_{2n+3}a_{2n-1}-1$ 都是完全平方数．于是对于正奇数 m，$a_{m+4}a_m-1$ 均为完全平方数． ……………………20 分

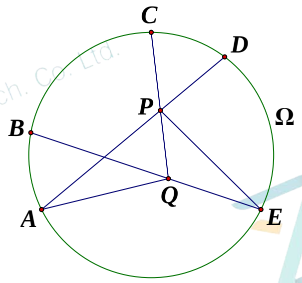
2020年全国高中数学联合竞赛加试（B卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、（本题满分 40 分） 如图，A, B, C, D, E 是圆 Ω 上顺次的五点，满足 $ABC = BCD = CDE$，点 P, Q 分别在线段 AD, BE 上，且 P 在线段 CQ 上．证明：$\angle PAQ = \angle PEQ$．

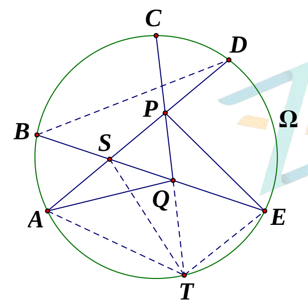


证明：记 S 为 AD 与 BE 的交点，T 为 CQ 延长线与圆 Ω 的交点．

注意到 $ABC = BCD = CDE$，可设 AB, CD 所对的圆周角均为 α，BC, DE 所对的圆周角均为 β．

于是

$$\angle ATQ = \angle ATC = \alpha + \beta,$$
$$\angle PTE = \angle CTE = \alpha + \beta,$$
$$\angle PSQ = \angle BDA + \angle DBE = \alpha + \beta. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 20\text{ 分}$$



由 $\angle ATQ = \angle PSQ$ 得 S, A, T, Q 四点共圆，又由 $\angle PTE = \angle PSQ$ 得 P, S, T, E 四点共圆．

所以 $\angle PAQ = \angle PTS = \angle PEQ$．　　　　……………40分

二、（本题满分 40 分） 设集合 $A = \{1, 2, \cdots, 19\}$．是否存在集合 A 的非空子集 S_1, S_2，满足

（1）$S_1 \cap S_2 = \varnothing$，$S_1 \cup S_2 = A$；

（2）S_1, S_2 都至少有 4 个元素；

（3）S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积？

证明你的结论．

解：答案是肯定的.

设 $S_2=\ 1,2,x,y\ ,2<x<y\le 19$， ……………10 分

则 $1+2+\cdots+19-1-2-x-y=2xy$，所以

$$2xy+x+y=187,$$ ……………20 分

故

$$(2x+1)(2y+1)=375=15\times 25,$$

所以 $x=7,\ y=12$ 是一组解. ……………30 分

故取 $S_1=\ 3,4,5,6,7,8,10,11,13,14,15,16,17,18,19\ $，$S_2=\ 1,2,7,12\ $，则这样的 S_1,S_2 满足条件. ……………40 分

注：直接给出例子并验证给 40 分.

三、（本题满分 50 分） 给定整数 $n\ge 2$．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n>0$，满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

且对任意 $i,j\ (1\le i<j\le n)$，均有 $a_ia_j\ge b_i+b_j$．求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的最小值.

解：记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$．

由条件知

$$\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\ge\sum_{1\le i<j\le n}(b_i+b_j)=(n-1)S.$$ ……………10 分

又

$$\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\le\sum_{1\le i<j\le n}\frac{a_i^2+a_j^2}{2}=\frac{n-1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$ ……………20 分

于是

$$S^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\ge\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\ge 2nS.$$

……………40 分

注意 $S>0$，故 $S\ge 2n$.

另一方面，当 $a_i=b_i=2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，条件满足，且 $S=2n$.

综上，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的最小值为 $2n$. ……………50 分

四、（本题满分 50 分） 设 a,b 为不超过 12 的正整数，满足：存在常数 C，使得 $a^n+b^{n+9}\equiv C\ (\mathrm{mod}\,13)$ 对任意正整数 n 成立．求所有满足条件的有序数对 (a,b).

解法 1：由条件知，对任意正整数 n，有

$$a^n+b^{n+9}\equiv a^{n+3}+b^{n+12}\pmod{13}.\qquad ①$$

注意到 13 为素数，a,b 均与 13 互素，由费马小定理知 $a^{12}\equiv b^{12}\equiv 1\pmod{13}$.

因此在①中取 $n=12$，化简得 $1+b^9\equiv a^3+1\pmod{13}$，故

$$b^9\equiv a^3\pmod{13}.$$

代入①，得 $a^n+a^3b^n\equiv a^{n+3}+b^{n+12}\equiv a^{n+3}+b^n\pmod{13}$，即

$$(a^n-b^n)(1-a^3)\equiv 0\pmod{13}.\qquad ②$$

……………20 分

分两种情况讨论.

(i) 若 $a^3\equiv 1(\bmod 13)$，则 $b^3\equiv a^3b^3\equiv b^{12}\equiv 1(\bmod 13)$，又 $a,b\in\{1,2,\cdots,12\}$，经检验可知 $a,b\in\{1,3,9\}$.

此时 $a^n+b^{n+9}\equiv a^n+b^n(\bmod 13)$. 由条件知 $a+b\equiv a^3+b^3\equiv 2(\bmod 13)$，从而只能是 $a=b=1$.

经检验，当 $(a,b)=(1,1)$ 时，对任意正整数 n，a^n+b^{n+9} 模 13 余 2 为常数，满足条件. ……………30 分

(ii) 若 $a^3\not\equiv 1(\bmod 13)$，则由②知，对任意正整数 n，有 $a^n\equiv b^n(\bmod 13)$.

特别地，$a\equiv b(\bmod 13)$，故 $a=b$. 所以 $a^3\equiv b^9=a^9(\bmod 13)$，即

$$a^3(a^3-1)(a^3+1)\equiv 0(\bmod 13),$$

故 $a^3\equiv -1(\bmod 13)$. 通过检验 $a\equiv \pm1,\pm2,\cdots,\pm6(\bmod 13)$，可知 $a=4,10,12$.

经检验，当 $(a,b)=(4,4),(10,10),(12,12)$ 时，对任意正整数 n，有

$$a^n+b^{n+9}=a^n+a^{n+9}=a^n(1+(a^3)^3)\equiv 0(\bmod 13),$$

满足条件.

综合(i)、(ii)，所求的有序数对 (a,b) 为 $(1,1),(4,4),(10,10),(12,12)$.

……………50 分

解法 2：由条件知，对任意正整数 n，有

$$(a^n+b^{n+9})(a^{n+2}+b^{n+11})\equiv(a^{n+1}+b^{n+10})^2(\bmod 13),$$

……………10 分

化简得 $a^nb^{n+11}+a^{n+2}b^{n+9}\equiv 2a^{n+1}b^{n+10}(\bmod 13)$，即

$$a^nb^{n+9}(a-b)^2\equiv 0(\bmod 13).$$

由于13为素数，$a,b\in\{1,2,\cdots,12\}$，故 $13\mid(a-b)^2$，进而 $a=b$.

……………20 分

因此，当 n 变化时，$a^n+b^{n+9}=a^n(1+a^9)$ 模13的余数为常数.

当 $1+a^9\not\equiv 0(\bmod 13)$ 时，由上式知，a^n 模13的余数为常数，特别地，有 $a^2\equiv a(\bmod 13)$，故 $a=1$. ……………30 分

当 $1+a^9\equiv 0(\bmod 13)$ 时，由费马小定理得 $a^{12}\equiv 1(\bmod 13)$，故

$$a^3\equiv a^3\cdot(-a^9)\equiv -a^{12}\equiv -1(\bmod 13).$$

通过检验 $a\equiv \pm1,\pm2,\cdots,\pm6(\bmod 13)$，可知 $a=4,10,12$.

综上，所求的有序数对 (a,b) 为 $(1,1),(4,4),(10,10),(12,12)$. …………50 分