# 1988年全国高中数学联赛试题

## 第一试(10月16日上午8：00——9：30)

一．选择题(本大题共5小题，每小题有一个正确答案，选对得7分，选错、不选或多选均得0分)：

1．设有三个函数，第一个是 $y=\phi(x)$，它的反函数是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于 $x+y=0$ 对称，那么，第三个函数是(　　)

A．$y=-\phi(x)$　　B．$y=-\phi(-x)$　　C．$y=-\phi^{-1}(x)$　　D．$y=-\phi^{-1}(-x)$

2．已知原点在椭圆 $k^2x^2+y^2-4kx+2ky+k^2-1=0$ 的内部，那么参数 $k$ 的取值范围是(　　)

A．$|k|>1$　　B．$|k|\neq 1$　　C．$-1<k<1$　　D．$0<|k|<1$

3．平面上有三个点集 $M$、$N$、$P$：

$$M=\{(x,\ y)\mid |x|+|y|<1\},$$

$$N=\{(x,\ y)\mid \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}<2\sqrt{2}\},$$

$$P=\{(x,\ y)\mid |x+y|<1,\ |x|<1,\ |y|<1\}.$$ 则

A．$M\subsetneqq P\subsetneqq N$　　B．$M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　C．$P\subsetneqq N\subsetneqq M$　　D．$A$、$B$、$C$都不成立

4．已知三个平面 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，每两个之间的夹角都是 $\theta$，且 $\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$．若有命题甲：$\theta>\frac{\pi}{3}$；　　命题乙：$a$、$b$、$c$ 相交于一点．　则

A．甲是乙的充分条件但不必要　　B．甲是乙的必要条件但不充分

C．甲是乙的充分必要条件　　D．$A$、$B$、$C$都不对

5．在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点叫做整点，我们用 $I$ 表示所有直线的集合，$M$ 表示恰好通过1个整点的集合，$N$ 表示不通过任何整点的直线的集合，$P$ 表示通过无穷多个整点的直线的集合．那么表达式 (1) $M\cup N\cup P=I$;　(2) $N\neq\varnothing$.　(3) $M\neq\varnothing$.　(4) $P\neq\varnothing$ 中，正确的表达式的个数是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二．填空题(本大题共4小题，每小题10分)：

1．设 $x\neq y$，且两数列 $x$，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$y$ 和 $b_1$，$x$，$b_2$，$b_3$，$y$，$b_4$ 均为等差数列，那么 $\dfrac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=$______.

2．$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中，$x$的整数次幂的各项系数之和为__________.

3．在△$ABC$中，已知∠$A=\alpha$，$CD$、$BE$分别是$AB$、$AC$上的高，则$\frac{DE}{BC}$=__________.

**4．甲乙两队各出7名队员，按事先排好顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由1号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方2号队员比赛，……直至一方队员全部淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程．那么所有可能出现的比赛过程的种数为__________．**

**三．(15分)长为$\sqrt{2}$，宽为1的矩形，以它的一条对角线所在的直线为轴旋转一周，求得到的旋转体的体积．**

**四．(15分) 复平面上动点$Z_1$的轨迹方程为$|Z_1-Z_0|=|Z_1|$，$Z_0$为定点，$Z_0\neq 0$，另一个动点$Z$满足$Z_1Z=-1$，求点$Z$的轨迹，指出它在复平面上的形状和位置．**

**五．(15分)已知$a$、$b$为正实数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，试证：对每一个$n\in N^*$，**

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geq 2^{2n}-2^{n+1}.$$

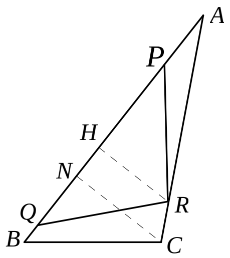
# 1988年全国高中数学联赛二试题

一．已知数列$\{a_n\}$，其中$a_1=1$，$a_2=2$，

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n(a_n\cdot a_{n+1}\text{为偶数}),\\ a_{n+1}-a_n(a_n\cdot a_{n+1}\text{为奇数}).\end{cases}$$

试证：对一切$n\in\mathbb{N}^*$，$a_n\neq 0$.

二．如图，在$\triangle ABC$中，$P$、$Q$、$R$将其周长三等分，且$P$、$Q$在$AB$边上，求证：$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{2}{9}$.




三．在坐标平面上，是否存在一个含有无穷多直线$l_1$，$l_2$，……，$l_n$，…的直线族，它满足条件：

⑴ 点$(1，1)\in l_n$，$(n=1，2，3，……)$；

⑵ $k_{n+1}=a_n-b_n$，其中$k_{n+1}$是$l_{n+1}$的斜率，$a_n$和$b_n$分别是$l_n$在$x$轴和$y$轴上的截距，$(n=1，2，3，……)$；

⑶ $k_nk_{n+1}\geqslant 0$，$(n=1，2，3，……)$.

并证明你的结论.

# 1988年全国高中数学联赛解答

**一试题**

一．选择题(本大题共5小题，每小题有一个正确答案，选对得7分，选错、不选或多选均得0分)：

1．设有三个函数，第一个是$y=\varphi(x)$，它的反函数是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于$x+y=0$对称，那么，第三个函数是(　　)

A．$y=-\varphi(x)$　　B．$y=-\varphi(-x)$　　C．$y=-\varphi^{-1}(x)$　　D．$y=-\varphi^{-1}(-x)$

解：第二个函数是$y=\varphi^{-1}(x)$．第三个函数是$-x=\varphi^{-1}(-y)$，即$y=-\varphi(-x)$．选B．

2．已知原点在椭圆$k^2x^2+y^2-4kx+2ky+k^2-1=0$的内部，那么参数$k$的取值范围是(　　)

A．$|k|>1$　　B．$|k|\neq1$　　C．$-1<k<1$　　D．$0<|k|<1$

解：因是椭圆，故$k\neq0$，以(0，0)代入方程，得$k^2-1<0$，选D．

3．平面上有三个点集$M$，$N$，$P$：

$M=\{(x，y)|\ |x|+|y|<1\}$，

$N=\{(x，y)|\ \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}<2\sqrt{2}\}$，

$P=\{(x，y)|\ |x+y|<1，|x|<1，|y|<1\}$．则

A．$M\subsetneqq P\subsetneqq N$　　B．$M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　C．$P\subsetneqq N\subsetneqq M$　　D．$A$、$B$、$C$都不成立

解：$M$表示以(1，0)，(0．1)，(−1，0)，(0，−1)为顶点的正方形内部的点的集合(不包括边界)；$N$表示焦点为$(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$，$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$，长轴为$2\sqrt{2}$的椭圆内部的点的集合，$P$表示由$x+y=\pm1$，$x=\pm1$，$y=\pm1$围成的六边形内部的点的集合．故选A．

4．已知三个平面$\alpha$、$\beta$、$\gamma$，每两个之间的夹角都是$\theta$，且$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$．若有

命题甲：$\theta>\frac{\pi}{3}$；

命题乙：$a$、$b$、$c$相交于一点．

则

A．甲是乙的充分条件但不必要　　B．甲是乙的必要条件但不充分

C．甲是乙的充分必要条件　　D．$A$、$B$、$C$都不对

解：$a$，$b$，$c$或平行，或交于一点．但当$a/\!/b/\!/c$时，$\theta=\frac{\pi}{3}$．当它们交于一点时，$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$．选C．

5．在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点叫做整点，我们用$I$表示所有直线的集合，$M$表示恰好通过1个整点的集合，$N$表示不通过任何整点的直线的集合，$P$表示通过无穷多个整点的直线的集合．那么表达式 ⑴ $M\cup N\cup P=I$；　⑵ $N\neq\varnothing$．　⑶ $M\neq\varnothing$．　⑷ $P\neq\varnothing$中，正确的表达式的个数是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

解：均正确，选D．

二．填空题(本大题共4小题，每小题10分)：

1．设$x\neq y$，且两数列$x$，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$y$和$b_1$，$x$，$b_2$，$b_3$，$y$，$b_4$均为等差数列，那么$\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}$=______．

解：$a_2-a_1=\frac{1}{4}(y-x)$，$b_4-b_3=\frac{2}{3}(y-x)$，$\Rightarrow\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=\frac{8}{3}$．

2．$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中，$x$的整数次幂的各项系数之和为__________．

解：$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}-(\sqrt{x}-2)^{2n+1}=2(C_{2n+1}^{1}2x^n+C_{2n+1}^{3}2^3x^{n-1}+C_{2n+1}^{5}2^5x^{n-2}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1})$．

令$x=1$，得所求系数和$=\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$．

3．在△$ABC$ 中，已知∠$A=\alpha$，$CD$、$BE$ 分别是 $AB$、$AC$ 上的高，则$\dfrac{DE}{BC}$=__________.

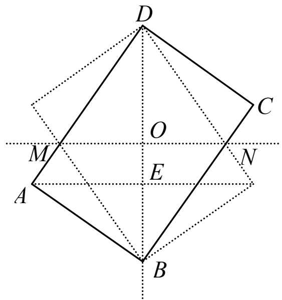
解：△$AED$∽△$ABC$，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AC}=|\cos\alpha|$.

4．甲乙两队各出 7 名队员，按事先排好顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，……直至一方队员全部淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程．那么所有可能出现的比赛过程的种数为____________.

解　画 1 行 14 个格子，每个格子依次代表一场比赛，如果某场比赛某人输了，就在相应的格子中写上他的顺序号(两方的人各用一种颜色写以示区别)．如果某一方 7 人都已失败则在后面的格子中依次填入另一方未出场的队员的顺序号．于是每一种比赛结果都对应一种填表方法，每一种填表方法对应一种比赛结果．这是一一对应关系．故所求方法数等于在 14 个格子中任选 7 个写入某一方的号码的方法数．

∴共有 $C_{14}^{7}$种比赛方式．

三．(15 分)长为$\sqrt{2}$，宽为 1 的矩形，以它的一条对角线所在的直线为轴旋转一周，求得到的旋转体的体积．




解：过轴所在对角线 $BD$ 中点 $O$ 作 $MN\perp BD$ 交边 $AD$、$BC$ 于 $M$、$N$，作 $AE\perp BD$ 于 $E$，

则△$ABD$ 旋转所得旋转体为两个有公共底面的圆锥，底面半径 $AE=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．其体积 $V=\dfrac{\pi}{3}(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2\cdot\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$．同样，

△$BCD$ 旋转所得旋转体的体积$=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

其重叠部分也是两个圆锥，由△$DOM$∽△$DAB$，$DO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$OM=\dfrac{DO\cdot AB}{DA}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

∴其体积$=2\cdot\dfrac{1}{3}\pi\cdot(\dfrac{\sqrt{6}}{4})^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi$.

∴ 所求体积$=2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi=\dfrac{23}{72}\sqrt{3}\pi$.

四．(15 分)　复平面上动点 $Z_1$ 的轨迹方程为$|Z_1-Z_0|=|Z_1|$，$Z_0$ 为定点，$Z_0\neq0$，另一个动点 $Z$ 满足 $Z_1Z=-1$，求点 $Z$ 的轨迹，指出它在复平面上的形状和位置．

解：$Z_1=-\dfrac{1}{Z}$，故得$|-\dfrac{1}{Z}-Z_0|=|\dfrac{1}{Z}|$，即$|ZZ_0+1|=1$．$|Z+\dfrac{1}{Z0}|=|\dfrac{1}{Z0}|$．即以$-\dfrac{1}{Z0}$为圆心$|\dfrac{1}{Z0}|$为半径的圆．

五．(15 分)已知 $a$、$b$ 为正实数，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$．试证：对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$，

$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant2^{2n}-2^{n+1}$.

证明：由已知得 $a+b=ab$．又 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，∴ $ab\geqslant2\sqrt{ab}$，故 $a+b=ab\geqslant4$．于是$(a+b)^k=(ab)^k\geqslant2^{2k}$．又 $a^k+b^k\geqslant2\sqrt{a^kb^k}=2\sqrt{(a+b)^k}\geqslant2^{k+1}$．下面用数学归纳法证明：

1° 当 $n=1$ 时，左=右=0．左≥右成立．

2° 设当 $n=k(k\geqslant1，k\in\mathbf{N})$时结论成立，即$(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant2^{2k}-2^{k+1}$成立．

则$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}=(a+b)(a+b)^k-(a^k+b^k)(a+b)+ab(a^{k-1}+b^{k-1})$

$=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+\ ab(a^{k-1}+b^{k-1})\geqslant4\cdot(2^{2k}-2^{k+1})+4\cdot2^k=2^{2(k+1)}-4\cdot2^{k+1}+4\cdot2^k=2^{2(k+1)}-2^{(k+1)+1}$．即命题对于 $n=k+1$ 也成立．

故对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$，命题成立．

二试题

一．已知数列$\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$a_2=2$，

$$a_{n+2}=\begin{cases}5an\ +\ 1-3an(an\cdot an\ +\ 1\text{为偶数}),\\ \ an\ +\ 1-an(an\cdot an\ +\ 1\text{为奇数}).\end{cases}$$

试证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq 0$．（1988 年全国高中竞赛试题）

分析：改证 $a_n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$或 $a_n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$．

证明：由 $a_1=1$，$a_2=2$, 得 $a_3=7$，$a_4=29$，……

∴ $a_1\equiv 1$，$a_2\equiv 2$，$a_3\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$．

设 $a_{3k-2}\equiv 1$，$a_{3k-1}\equiv 2$，$a_{3k}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$．

则 $a_{3k+1}\equiv 5\times 3-3\times 2=9\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$；$a_{3k+2}\equiv 1-3=-2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$；$a_{3k+3}\equiv 5\times 2-3\times 1=7\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$．

根据归纳原理知，对于一切 $n\in N$，$a_{3n-2}\equiv 1$，$a_{3n-1}\equiv 2$，$a_{3n}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$恒成立，故 $a_n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$成立，从而 $a_n\neq 0$．

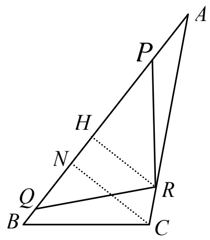
又证：$a_1\equiv 1$，$a_2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$．

设 $a_{2k-1}\equiv 1$，$a_{2k}\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$成立，则

当 $a_{2k-1}\cdot a_{2k}$ 为偶数时 $a_{2k+1}\equiv 5\times 2-3\times 1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，当 $a_{2k-1}\cdot a_{2k}$ 为奇数时 $a_{2k+1}\equiv 2-1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，总之 $a_{2k+1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$．

当 $a_{2k}\cdot a_{2k+1}$ 为偶数时 $a_{2k+2}\equiv 5\times 1-3\times 2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$，当 $a_{2k}\cdot a_{2k+1}$ 为奇数时 $a_{2k+2}\equiv 1-2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$，总之，$a_{2k+2}\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$．于是 $a_n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$．故 $a_n\neq 0$．

二．如图，在$\Delta ABC$ 中，$P$、$Q$、$R$ 将其周长三等分，且 $P$、$Q$ 在 $AB$ 边上，求证：$\dfrac{S\Delta PQR}{S\Delta ABC}>\dfrac{2}{9}$．




证明：作△$ABC$ 及△$PQR$ 的高 $CN$、$RH$．设△$ABC$ 的周长为 1．则 $PQ=\frac{1}{3}$．

则$\dfrac{S\Delta PQR}{S\Delta ABC}=\dfrac{PQ\cdot RH}{AB\cdot CN}=\dfrac{PQ}{AB}\cdot\dfrac{AR}{AC}$，但 $AB<\frac{1}{2}$，于是$\dfrac{PQ}{AB}>\dfrac{2}{3}$，

$AP\leqslant AB-PQ<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，∴ $AR=\frac{1}{3}-AP>\frac{1}{6}$，$AC<\frac{1}{2}$，故$\dfrac{AR}{AC}>\dfrac{1}{3}$，从而$\dfrac{S\Delta PQR}{S\Delta ABC}>\dfrac{2}{9}$．

三．在坐标平面上，是否存在一个含有无穷多直线 $l_1$，$l_2$，……，$l_n$，…的直线族，它满足条件：

⑴ 点(1，1)$\in l_n$，($n$=1，2，3，……)；

⑵ $k_{n+1}=a_n-b_n$，其中 $k_{n+1}$ 是 $l_{n+1}$ 的斜率，$a_n$ 和 $b_n$ 分别是 $l_n$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距，($n$=1，2，3，……)；

⑶ $k_nk_{n+1}\geqslant 0$，($n$=1，2，3，……)．

并证明你的结论．

证明：设 $a_n=b_n\neq 0$，即 $k_{n-1}=-1$，或 $a_n=b_n=0$，即 $k_n=1$，就有 $k_{n+1}=0$，此时 $a_{n+1}$ 不存在，故 $k_n\neq\pm 1$．

现设 $k_n\neq 0$，1，则 $y=k_n(x-1)+1$，得 $b_n=1-k_n$，$a_n=1-\dfrac{1}{kn}$，∴ $k_{n+1}=k_n-\dfrac{1}{kn}$．此时 $k_nk_{n+1}=k_n^2-1$．

∴ $k_n>1$ 或 $k_n<-1$．从而 $k_1>1$ 或 $k_1<-1$．

⑴ 当 $k_1>1$ 时，由于 $0<\dfrac{1}{k1}<1$，故 $k_1>k_2=k_1-\dfrac{1}{k1}>0$，若 $k_2>1$，则又有 $k_1>k_2>k_3>0$，依此类推，知当 $k_m>1$ 时，有 $k_1>k_2>k_3>\cdots>k_m>k_{m+1}>0$，且 $0<\dfrac{1}{k1}<\dfrac{1}{k2}<\cdots<\dfrac{1}{km}<1$，

$$k_{m+1}=k_m-\frac{1}{km}<k_m-\frac{1}{k1}=k_{m-1}-\frac{1}{km-1}-\frac{1}{k1}<k_{m-1}-\frac{2}{k1}<\cdots<k_1-\frac{m}{k1}.$$

由于 $k_1-\dfrac{m}{k1}$随 $m$ 的增大而线性减小，故必存在一个 $m$ 值，$m=m_0$，使 $k_1-\dfrac{m0}{k1}\leqslant 1$，从而必存在一个 $m$ 值 $m=m_1\leqslant m_0$，使 $k_{m1-1}\geqslant 1$，而 $1>k_{m1}=k_{m1-1}-\dfrac{1}{k}>0$，此时 $k_{m1}\cdot k_{m1\ +\ 1}<0$．

即此时不存在这样的直线族．

(2) 当 $k_1<-1$ 时，同样有 $-1<\frac{1}{k1}<0$，得 $k_1<k_2=k_1-\frac{1}{k1}<0$．若 $k_2<-1$，又有 $k_1<k_2<k_3<0$，依此类推，知当 $k_m<-1$ 时，有 $k_1<k_2<k_3<\cdots<k_m<k_{m+1}<0$，且 $0>\frac{1}{k1}>\frac{1}{k2}>\cdots>\frac{1}{km}>-1$，

$k_{m+1}=k_m-\frac{1}{km}>k_m-\frac{1}{k1}=k_{m-1}-\frac{1}{km-1}-\frac{1}{k1}>k_{m-1}-\frac{2}{k1}>\cdots>k_1-\frac{m}{k1}$.

由于 $k_1-\frac{m}{km}$ 随 $m$ 的增大而线性增大，故必存在一个 $m$ 值，$m=m_0$，使 $k_1-\frac{m0}{k1}\geqslant-1$，从而必存在一个 $m$ 值，$m=m_1(m_1\leqslant m_0)$，使 $k_{m1-1}\leqslant-1$，而 $-1<k_{m1}=k_{m1}-\frac{1}{k}<0$，此时 $k_{m1}\cdot k_{m1+1}<0$.

即此时不存在这样的直线族．

综上可知这样的直线族不存在．