2019 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知正实数 a 满足 $a^a=(9a)^{8a}$，则 $\log_a(3a)$ 的值为____________.

答案：$\frac{9}{16}$.

解：由条件知 $9a=a^{\frac{1}{8}}$，故 $3a=\sqrt{9a\cdot a}=a^{\frac{9}{16}}$，所以 $\log_a(3a)=\frac{9}{16}$.

2. 若实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素与最小元素之差等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为____________.

答案：$-\frac{3}{2}$.

解：假如 $x\geq 0$，则最大、最小元素之差不超过 $\max\{3,x\}$，而所有元素之和大于 $\max\{3,x\}$，不符合条件．故 $x<0$，即 x 为最小元素．于是 $3-x=6+x$，解得 $x=-\frac{3}{2}$.

3. 平面直角坐标系中，$\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，且 $\left|\vec{a}\right|^2\leq 5\left|\vec{a}+t\vec{e}\right|$ 对任意实数 t 成立，则 $\left|\vec{a}\right|$ 的取值范围是____________.

答案：$[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$.

解：不妨设 $\vec{e}=(1,0)$．由于 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，可设 $\vec{a}=(2,s)$，则对任意实数 t，有

$$4+s^2=\left|\vec{a}\right|^2\leq 5\left|\vec{a}+t\vec{e}\right|=5\sqrt{(2+t)^2+s^2},$$

这等价于 $4+s^2\leq 5|s|$，解得 $|s|\in[1,4]$，即 $s^2\in[1,16]$.

于是 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4+s^2}\in[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$.

4. 设 A,B 为椭圆 Γ 的长轴顶点，E,F 为 Γ 的两个焦点，$|AB|=4$，$|AF|=2+\sqrt{3}$，P 为 Γ 上一点，满足 $|PE|\cdot|PF|=2$，则 ΔPEF 的面积为________.

答案：1.

解：不妨设平面直角坐标系中 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.

根据条件得 $2a=|AB|=4,\ a\pm\sqrt{a^2-b^2}=|AF|=2+\sqrt{3}$，可知 $a=2,b=1$，且 $|EF|=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$.

由椭圆定义知$|PE|+|PF|=2a=4$，结合$|PE|\cdot|PF|=2$得

$$|PE|^2+|PF|^2=(|PE|+|PF|)^2-2|PE|\cdot|PF|=12=|EF|^2,$$

所以$\angle EPF$为直角，进而$S_{\Delta PEF}=\frac{1}{2}\cdot|PE|\cdot|PF|=1$.

5. 在$1,2,3,\cdots,10$中随机选出一个数a，在$-1,-2,-3,\cdots,-10$中随机选出一个数b，则a^2+b被3整除的概率为____________.

答案：$\frac{37}{100}$.

解：数组(a,b)共有$10^2=100$种等概率的选法.

考虑其中使a^2+b被3整除的选法数N.

若a被3整除，则b也被3整除．此时a,b各有3种选法，这样的(a,b)有$3^2=9$组．若a不被3整除，则$a^2\equiv 1(\bmod 3)$，从而$b\equiv -1(\bmod 3)$．此时a有7种选法，b有4种选法，这样的(a,b)有$7\times 4=28$组.

因此$N=9+28=37$．于是所求概率为$\frac{37}{100}$.

6. 对任意闭区间I，用M_I表示函数$y=\sin x$在I上的最大值．若正数a满足$M_{[0,a]}=2M_{[a,2a]}$，则a的值为____________.

答案：$\frac{5}{6}\pi$或$\frac{13}{12}\pi$.

解：假如$0<a\le\frac{\pi}{2}$，则由正弦函数图像性质得$0<M_{[0,a]}=\sin a\le M_{[a,2a]}$，与条件不符.

因此$a>\frac{\pi}{2}$，此时$M_{[0,a]}=1$，故$M_{[a,2a]}=\frac{1}{2}$．于是存在非负整数k，使得

$$2k\pi+\frac{5}{6}\pi\le a<2a\le 2k\pi+\frac{13}{6}\pi, \quad ①$$

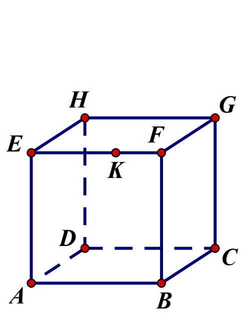
且①中两处“$\le$”至少有一处取到等号.

当$k=0$时，得$a=\frac{5}{6}\pi$或$2a=\frac{13}{6}\pi$．经检验，$a=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{12}\pi$均满足条件.

当$k\ge 1$时，由于$2k\pi+\frac{13}{6}\pi<2\left(2k\pi+\frac{5}{6}\pi\right)$，故不存在满足①的$a$.

综上，a的值为$\frac{5}{6}\pi$或$\frac{13}{12}\pi$.

7. 如图，正方体$ABCD-EFGH$的一个截面经过顶点A,C及棱EF上一点K，且将正方体分成体积比为$3:1$的两部分，则$\frac{EK}{KF}$的值为____________.

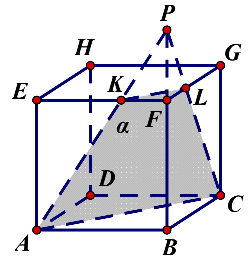


答案：$\sqrt{3}$.

解：记α为截面所在平面．延长AK,BF交于点P，则P在α上，故直线CP是α与平面$BCGF$的交线．设CP与FG交于点L，则四边形$AKLC$为截面.

因平面ABC平行于平面KFL，且AK,BF,CL共点P，故$ABC-KFL$为棱

台．不妨设正方体棱长为 1，则正方体体积为 1，结合条件知棱台 $ABC-KFL$ 的体积 $V=\frac{1}{4}$．



设 $PF=h$，则 $\frac{KF}{AB}=\frac{FL}{BC}=\frac{PF}{PB}=\frac{h}{h+1}$．注意到 PB, PF 分别是棱锥 $P-ABC$ 与棱锥 $P-KFL$ 的高，于是

$$\frac{1}{4}=V=V_{P-ABC}-V_{P-KFL}=\frac{1}{6}AB\cdot BC\cdot PB-\frac{1}{6}KF\cdot FL\cdot PF$$

$$=\frac{1}{6}(h+1)\left(1-\left(\frac{h}{h+1}\right)^3\right)=\frac{3h^2+3h+1}{6(h+1)^2}.$$

化简得 $3h^2=1$，故 $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$． 从而 $\frac{EK}{KF}=\frac{AE}{PF}=\frac{1}{h}=\sqrt{3}$．

8. 将 6 个数 $2, 0, 1, 9, 20, 19$ 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为____________．

答案：498．

解：将 $2, 0, 1, 9, 20, 19$ 的首位不为 0 的排列的全体记为 A．

易知 $|A|=5\times 5!=600$（这里及以下，$|X|$ 表示有限集 X 的元素个数）．

将 A 中 2 的后一项是 0，且 1 的后一项是 9 的排列的全体记为 B；A 中 2 的后一项是 0，但 1 的后一项不是 9 的排列的全体记为 C；A 中 1 的后一项是 9，但 2 的后一项不是 0 的排列的全体记为 D．

易知 $|B|=4!$，$|B|+|C|=5!$，$|B|+|D|=4\times 4!$，即 $|B|=24, |C|=96, |D|=72$．

由 B 中排列产生的每个 8 位数，恰对应 B 中的 $2\times 2=4$ 个排列（这样的排列中，20 可与"$2,0$"互换，19 可与"$1,9$"互换）．类似地，由 C 或 D 中排列产生的每个 8 位数，恰对应 C 或 D 中的 2 个排列．因此满足条件的 8 位数的个数为

$$|A\setminus(B\cup C\cup D)|+\frac{|B|}{4}+\frac{|C|+|D|}{2}$$

$$=|A|-\frac{3|B|}{4}-\frac{|C|}{2}-\frac{|D|}{2}=600-18-48-36=498.$$

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（**本题满分 16 分**）在 ΔABC 中，$BC=a, CA=b, AB=c$．若 b 是 a 与 c 的等比中项，且 $\sin A$ 是 $\sin(B-A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项，求 $\cos B$ 的值．

解：因 b 是 a, c 的等比中项，故存在 $q>0$，满足

$$b=qa,\ c=q^2a. \qquad ①$$

因 $\sin A$ 是 $\sin(B-A), \sin C$ 的等差中项，故

$$2\sin A=\sin(B-A)+\sin C=\sin(B-A)+\sin(B+A)=2\sin B\cos A.$$

……………………4 分

结合正、余弦定理，得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

即 $b^2+c^2-a^2=2ac$． ……………………8 分

将①代入并化简，可知$q^2+q^4-1=2q^2$，即$q^4=q^2+1$，所以

$$q^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$ ……………………12 分

进而

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{q^4+1-q^2}{2q^2}=\frac{1}{q^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

……………………16 分

10.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系xOy中，圆Ω与抛物线$\Gamma: y^2=4x$恰有一个公共点，且圆Ω与x轴相切于Γ的焦点F．求圆Ω的半径.

解：易知Γ的焦点F的坐标为$(1,0)$．设圆Ω的半径为$r\,(r>0)$．由对称性，不妨设Ω在x轴上方与x轴相切于F，故Ω的方程为

$$(x-1)^2+(y-r)^2=r^2. \quad ①$$

将$x=\frac{y^2}{4}$代入①并化简，得$\left(\frac{y^2}{4}-1\right)^2+y^2-2ry=0$．显然$y>0$，故

$$r=\frac{1}{2y}\left(\left(\frac{y^2}{4}-1\right)^2+y^2\right)=\frac{(y^2+4)^2}{32y}. \quad ②$$

……………………5 分

根据条件，②恰有一个正数解y，该y值对应Ω与Γ的唯一公共点.

考虑$f(y)=\frac{(y^2+4)^2}{32y}\,(y>0)$的最小值.

由平均值不等式知$y^2+4=y^2+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\geq 4\sqrt[4]{y^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3}$，从而

$$f(y)\geq\frac{1}{32y}\cdot 16\sqrt{y^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

当且仅当$y^2=\frac{4}{3}$，即$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$f(y)$取到最小值$\frac{4\sqrt{3}}{9}$. ……………………15 分

由②有解可知$r\geq\frac{4\sqrt{3}}{9}$．又假如$r>\frac{4\sqrt{3}}{9}$，因$f(y)$随y连续变化，且$y\to 0^+$及$y\to+\infty$时$f(y)$均可任意大，故②在$\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$及$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上均有解，与解的唯一性矛盾.

综上，仅有$r=\frac{4\sqrt{3}}{9}$满足条件（此时$\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$是$\Omega$与$\Gamma$的唯一公共点）.

……………………20 分

11.（本题满分 20 分） 称一个复数数列$\{z_n\}$为“有趣的”，若$|z_1|=1$，且对任意正整数n，均有$4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．求最大的常数$C$，使得对一切有趣的数列$\{z_n\}$及任意正整数$m$，均有$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\geq C$.

解：考虑有趣的复数数列$\{z_n\}$．归纳地可知$z_n\neq 0\,(n\in\mathbf{N}^*)$．由条件得

$$4\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)+1=0\,(n\in\mathbf{N}^*),$$

解得 $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\,(n\in\mathbf{N}^*)$．因此 $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$，故

$$|z_n|=|z_1|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\,(n\in\mathbf{N}^*). \qquad ①$$

……………………5 分

进而有

$$|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|\frac{3\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n}\,(n\in\mathbf{N}^*). \qquad ②$$

记 $T_m=|z_1+z_2+\cdots+z_m|\,(m\in\mathbf{N}^*)$．

当 $m=2s\,(s\in\mathbf{N}^*)$ 时，利用②可得

$$T_m\geq|z_1+z_2|-\sum_{k=2}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|>\frac{\sqrt{3}}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

……………………10 分

当 $m=2s+1\,(s\in\mathbf{N}^*)$ 时，由①、②可知

$$|z_{2s+1}|=\frac{1}{2^{2s}}<\frac{\sqrt{3}}{3\cdot2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|,$$

故

$$T_m\geq|z_1+z_2|-\left(\sum_{k=2}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|\right)-|z_{2s+1}|>\frac{\sqrt{3}}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

当 $m=1$ 时，$T_1=|z_1|=1>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

以上表明 $C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 满足要求.　　……………………15 分

另一方面，当 $z_1=1,\ z_{2k}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k}},\ z_{2k+1}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k+1}}\,(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，易验证知 $\{z_n\}$ 为有趣的数列．此时

$$\lim_{s\to\infty}T_{2s+1}=\lim_{s\to\infty}\left|z_1+\sum_{k=1}^{s}(z_{2k}+z_{2k+1})\right|$$

$$=\lim_{s\to\infty}\left|1+\sum_{k=1}^{s}\frac{-3-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k+1}}\right|=\left|1+\frac{-3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8}\cdot\frac{4}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

这表明 C 不能大于 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

综上，所求的 C 为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．　　……………………20 分