2006 年全国高中数学联赛试题

第一试

一、　选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 已知△ABC，若对任意$t\in R$，$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$，则△ABC 一定为

A．锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 答案不确定　【答案】（　）

2. 设$\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2\ -1$，则$x$的取值范围为

A. $\frac{1}{2}<x<1$　B. $x>\frac{1}{2}$,且$x\neq1$　C. $x>1$　D. $0<x<1$　【答案】(　)

3. 已知集合$A=\{x|5x-a\leq0\}$，$B=\{x|6x-b>0\}$，$a,b\in N$，且$A\cap B\cap N=\{2,3,4\}$，则整数对(a,b)的个数为

A. 20　B. 25　C. 30　D. 42　【答案】(　)

4. 在直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$．已知G与E分别为A_1B_1和CC_1的中点，D与F分别为线段AC和AB上的动点（不包括端点）．若$GD\perp EF$，则线段DF的长度的取值范围为

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\ 1\right)$　B. $\left[\frac{1}{5},\ 2\right)$　C. $\left[1,\ \sqrt{2}\right)$　D. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sqrt{2}\right)$　【答案】（　）

5. 设$f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，则对任意实数$a,b$，$a+b\geq0$是$f(a)+f(b)\geq0$的

A. 充分必要条件　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　D. 既不充分也不必要条件　【答案】（　）

6. 数码$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2006}$中有奇数个 9 的 2007 位十进制数$\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$的个数为

A. $\frac{1}{2}(10^{2006}+8^{2006})$　B. $\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$　C. $10^{2006}+8^{2006}$　D. $10^{2006}-8^{2006}$　【答案】(　)

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 设$f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x$，则$f(x)$的值域是_______。

8. 若对一切$\theta\in$R，复数$z=(a+\cos\theta)+(2a-\sin\theta)\mathrm{i}$的模不超过 2，则实数$a$的取值范围为_.

9. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为$F_1$与$F_2$，点$P$在直线$l$: $x-\sqrt{3}y+8+2\sqrt{3}=0$

上．当 $\angle F_1PF_2$ 取最大值时，比 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为______.

10. 底面半径为 1cm 的圆柱形容器里放有四个半径为 $\dfrac{1}{2}$ cm 的实心铁球，四个球两两相切，其中底层两球与容器底面相切．现往容器里注水，使水面恰好浸没所有铁球，则需要注水____cm^3.

11. 方程 $(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$ 的实数解的个数为____.

12. 袋内有 8 个白球和 2 个红球，每次从中随机取出一个球，然后放回 1 个白球，则第 4 次恰好取完所有红球的概率为______________.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 给定整数 $n\ge 2$，设 $M_0(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=nx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点．试证明对于任意正整数 m，必存在整数 $k\ge 2$，使 (x_0^m,y_0^m) 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点．

14. 将 2006 表示成 5 个正整数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 之和．记 $S=\sum\limits_{1\le i<j\le 5}x_ix_j$．问：

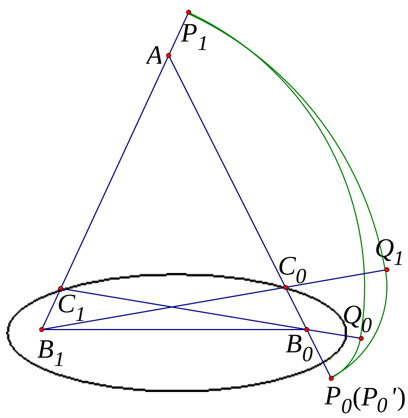
（1）当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时，S 取到最大值；

（2）进一步地，对任意 $1\le i,j\le 5$ 有 $|x_i-x_j|\le 2$，当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时，S 取到最小值．说明理由．

15. 设 $f(x)=x^2+a$．记 $f^1(x)=f(x)$，$f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$，$n=2,3,\cdots$，

$$M=\left\{a\in\mathrm{R}\,\middle|\,对所有正整数\ n,\ |f^n(0)|\le 2\right\}.$$

证明：$M=\left[-2,\ \dfrac{1}{4}\right]$.



2006 年全国高中数学联合竞赛加试试卷

（考试时间：上午 10：00—12：00）

一、以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与△AB_0B_1 的边 AB_i 交于 C_i（i=0，1）。在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧 P_0Q_0 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 Q_0P_1 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 P_1Q_1 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $Q_1P'_0$，交 AB_0 的延长线于 P'_0。试证：

（1）点 P'_0 与点 P_0 重合，且圆弧 P_0Q_0 与 P_0Q_1 相内切于 P_0；

（2）四点 P_0、Q_0、Q_1、P_1 共圆。

二、已知无穷数列{a_n}满足 $a_0=x$，$a_1=y$，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n=1$、2、…。

（1）对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n\geq n_0$ 时 a_n 恒为常数？

（2）求数列{a_n}的通项公式。

三、解方程组 $\begin{cases} x-y+z-w=2 \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6 \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20 \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66 \end{cases}$。

2006年一试参考答案

一、 选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1.【答案】 （ C ）

【解析】令 $\angle ABC=\alpha$，过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D。由 $|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\ge|\overrightarrow{AC}|$，推出

$|\overrightarrow{BA}|^2-2t\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}+t^2|\overrightarrow{BC}|^2\ge|\overrightarrow{AC}|^2$.，令 $t=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$，代入上式，得

$|\overrightarrow{BA}|^2-2|\overrightarrow{BA}|^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha|\overrightarrow{BA}|^2\ge|\overrightarrow{AC}|^2$，即 $|\overrightarrow{BA}|^2\sin^2\alpha\ge|\overrightarrow{AC}|^2$，也即

$|\overrightarrow{BA}|\sin\alpha\ge|\overrightarrow{AC}|$。从而有 $|\overrightarrow{AD}|\ge|\overrightarrow{AC}|$。由此可得 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$。

2.【答案】(B)

【解析】因为 $\begin{cases}x>0,x\ne1\\2x^2+x-1>0\end{cases}$，**解得** $x>\dfrac{1}{2},x\ne1$. **由**

$\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2\ -1\quad\Rightarrow\log_x(2x^3+x^2-x)>\log_x 2\quad\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\2x^3+x^2-x<2\end{cases}$

解得 $0<x<1$；**或** $\begin{cases}x>1\\2x^3+x^2-x>2\end{cases}$ **解得** $x>1$，**所以** x **的取值范围为**

$x>\dfrac{1}{2}$, 且 $x\ne1$.

3.【答案】 （ C ）

【解析】 $5x-a\le0\Rightarrow x\le\dfrac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\dfrac{b}{6}$。要使 $A\cap B\cap N=\{2,3,4\}$，则

$\begin{cases}1\le\dfrac{b}{6}<2\\4\le\dfrac{a}{5}<5\end{cases}$，即 $\begin{cases}6\le b<12\\20\le a<25\end{cases}$。所以数对 (a,b) 共有 $C_6^1C_5^1=30$。

4.【答案】 （ A ）

【解析】建立直角坐标系，以 A 为坐标原点，A B 为 x 轴，A C 为 y 轴，A A_1 为 z 轴，则 $F(t_1,0,0)$（$0<t_1<1$），$E(0,1,\dfrac{1}{2})$，$G(\dfrac{1}{2},0,1)$，$D(0,t_2,0)$（$0<t_2<1$）。所以

$\overrightarrow{EF}=(t_1,-1,-\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{GD}=(-\dfrac{1}{2},t_2,-1)$。因为 $GD\perp EF$，所以 $t_1+2t_2=1$，由此推出

$0<t_2<\dfrac{1}{2}$。又 $\overrightarrow{DF}=(t_1,-t_2,0)$，$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\sqrt{5t_2^2-4t_2+1}=\sqrt{5(t_2-\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}}$，

从而有 $\sqrt{\dfrac{1}{5}}\le|\overrightarrow{DF}|<1$。

5.【答案】 （ A ）

【解析】显然 $f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为奇函数，且单调递增。于是

若 $a+b\geq 0$，则 $a\geq -b$，有 $f(a)\geq f(-b)$，即 $f(a)\geq -f(b)$，从而有 $f(a)+f(b)\geq 0$。

反之，若 $f(a)+f(b)\geq 0$，则 $f(a)\geq -f(b)=f(-b)$，推出 $a\geq -b$，即 $a+b\geq 0$。

6、【答案】(B)

【解析】出现奇数个 9 的十进制数个数有 $A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$。又由

于 $(9+1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}$ 以及 $(9-1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^k9^{2006-k}$，从而得

$$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9=\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})。$$

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7.【答案】$0\leq f(x)\leq\frac{9}{8}$

【解析】 $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x$。令 $t=\sin 2x$，则

$f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2$。因此 $\min\limits_{-1\leq t\leq 1}g(t)=g(1)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=0$,

$\max\limits_{-1\leq t\leq 1}g(t)=g(-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{9}{8}$。即得 $0\leq f(x)\leq\frac{9}{8}$。

8.【答案】$\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$。

【解析】依题意，得 $|z|\leq 2\ \Leftrightarrow (a+\cos\theta)^2+(2a-\sin\theta)^2\leq 4$

$\Leftrightarrow 2a(\cos\theta-2\sin\theta)\leq 3-5a^2 \Leftrightarrow -2\sqrt{5}a\sin(\theta-\varphi)\leq 3-5a^2$ （$\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$）（对任意实数 θ 成立）$\Rightarrow 2\sqrt{5}|a|\leq 3-5a^2$ $\Rightarrow |a|\leq\frac{\sqrt{5}}{5}$．故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$。

9. 【答案】$\sqrt{3}-1$

【解析】 由平面几何知，要使 $\angle F_1PF_2$ 最大，则过 F_1,F_2，P 三点的圆必定和直线 l 相

切于 P 点。设直线 l 交 x 轴于 $A(-8-2\sqrt{3},0)$，则 $\angle APF_1=\angle AF_2P$，即 $\Delta APF_1\sim\Delta AF_2P$，

即 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{|AP|}{|AF_2|}$ （1），又由圆幂定理，

$|AP|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|$（2），而 $F_1(-2\sqrt{3},0)$，$F_2(2\sqrt{3},0)$，$A(-8-2\sqrt{3},0)$，从而有 $|AF_1|=8$，

$|AF_2|=8+4\sqrt{3}$。代入（1），（2）得 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{\dfrac{|AF_1|}{|AF_2|}}=\sqrt{\dfrac{8}{8+4\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$。

10. 【答案】$(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$

【解析】设四个实心铁球的球心为 O_1,O_2,O_3,O_4，其中 O_1,O_2 为下层两球的球心，A,B,C,D 分别为四个球心在底面的射影。则 $ABCD$ 是一个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形。所以注水高为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$。故应注水 $\pi(1+\frac{\sqrt{2}}{2})-4\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$。

11.【答案】1

【解析】$(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$

$\Leftrightarrow(x+\frac{1}{x^{2005}})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006$

$\Leftrightarrow x+x^3+x^5+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}+\frac{1}{x^{2003}}+\frac{1}{x^{2001}}+\cdots+\frac{1}{x}=2006$

$\Leftrightarrow 2006=x+\frac{1}{x}+x^3+\frac{1}{x^3}+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}\geq 2\cdot 1003=2006$

要使等号成立，必须 $x=\frac{1}{x},x^3=\frac{1}{x^3},\cdots,x^{2005}=\frac{1}{x^{2005}}$，即 $x=\pm 1$。

但是 $x\leq 0$ 时，不满足原方程。所以 $x=1$ 是原方程的全部解。因此原方程的实数解个数为 1。

12. 【答案】0.0434

【解析】第 4 次恰好取完所有红球的概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=0.0434.$$

三. 解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 【证明】 因为 $y^2=nx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 $x_0=y_0=\dfrac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$. 显然有

$x_0+\dfrac{1}{x_0}=n$。

若$(x_0{}^m, y_0{}^m)$为抛物线$y^2=kx-1$与直线$y=x$的一个交点，则$k=x_0{}^m+\dfrac{1}{x_0{}^m}$. 记

$k_m=x_0{}^m+\dfrac{1}{x_0{}^m}$，则 $k_{m+1}=k_m(x_0+\dfrac{1}{x_0})-k_{m-1}=nk_m-k_{m-1}$， $(m\ge 2)$ （13.1）

由于$k_1=n$是整数，$k_2=x_0{}^2+\dfrac{1}{x_0{}^2}=(x_0+\dfrac{1}{x_0})^2-2=n^2-2$也是整数，所以根据数学归纳法，通过（13.1）式可证明对于一切正整数m，$k_m=x_0{}^m+\dfrac{1}{x_0{}^m}$是正整数. 现在对于任意正整数$m$，取$k=x_0{}^m+\dfrac{1}{x_0{}^m}$，使得$y^2=kx-1$与$y=x$的交点为$(x_0{}^m, y_0{}^m)$.

14. 【解析】（1） 首先这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值。 若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，**且使** $S=\sum\limits_{1\le i<j\le 5}x_ix_j$ **取到最大值，则必有**

$$|x_i-x_j|\le 1,\qquad (1\le i,j\le 5)\qquad (*)$$

事实上，假设（*）不成立，不妨假设 $x_1-x_2\ge 2$。**则令** $x_1'=x_1-1$，$x_2'=x_2+1$，$x_i'=x_i$（$i=3,4,5$）

有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$，$x_1'\cdot x_2'=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$。**将 S 改写成**

$$S=\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$$

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$。**于是有** $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$。**这与 S 在** x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 **时取到最大值矛盾。所以必有** $|x_i-x_j|\le 1$，$(1\le i,j\le 5)$。**因此当** $x_1=402, x_2=x_3=x_4=x_5=401$ **取到最大值。**

（2）当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\le 2$ 时，只有

（I）　402，402，402，400，400；

（II）　402，402，401，401，400；

（III）　402，401，401，401，401；

三种情形满足要求。

而后面两种情形是在第一组情形下作 $x_i'=x_i-1$，$x_j'=x_j+1$ 调整下得到的。根据上一小题的证明可以知道，每调整一次，和式 $S=\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j$ 变大。所以在 $x_1=x_2=x_3=402, x_4=x_5=400$ 情形取到最小值。

15. 【证明】（1）如果 $a<-2$，则 $|f^1(0)|=|a|>2$，$a\notin M$。

（2）如果 $-2\le a\le\frac{1}{4}$，由题意 $f^1(0)=a$，$f^n(0)=(f^{n-1}(0))^2+a$，$n=2,3,\cdots$．则

① 当 $0\le a\le\frac{1}{4}$ 时，$|f^n(0)|\le\frac{1}{2}$（$\forall n\ge1$）．事实上，当 $n=1$ 时，$|f^1(0)|=|a|\le\frac{1}{2}$，设 $n=k-1$ 时成立（$k\ge2$ 为某整数），则对 $n=k$，$|f^k(0)|\le|f^{k-1}(0)|^2+a\le\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

② 当 $-2\le a<0$ 时，$|f^n(0)|\le|a|$（$\forall n\ge1$）．事实上，当 $n=1$ 时，$|f^1(0)|\le|a|$，设 $n=k-1$ 时成立（$k\ge2$ 为某整数），则对 $n=k$，有 $-|a|=a\le f^k(0)=\left(f^{k-1}(0)\right)^2+a\le a^2+a$．注意到 当 $-2\le a<0$ 时，总有 $a^2\le-2a$，即 $a^2+a\le-a=|a|$．从而有 $|f^k(0)|\le|a|$．由归纳法，推出 $\left[-2,\frac{1}{4}\right]\subseteq M$．

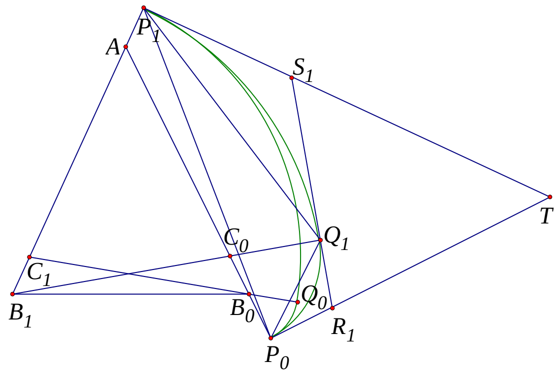
（3）当 $a>\frac{1}{4}$ 时，记 $a_n=f^n(0)$，则对于任意 $n\ge1$，$a_n>a>\frac{1}{4}$ 且 $a_{n+1}=f^{n+1}(0)=f(f^n(0))=f(a_n)=a_n^2+a$。对于任意 $n\ge1$，$a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=(a_n-\frac{1}{2})^2+a-\frac{1}{4}\ge a-\frac{1}{4}$，则 $a_{n+1}-a_n\ge a-\frac{1}{4}$。所以，$a_{n+1}-a=a_{n+1}-a_1\ge n(a-\frac{1}{4})$。当 $n>\frac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$ 时，$a_{n+1}\ge n(a-\frac{1}{4})+a>2-a+a=2$，即 $f^{n+1}(0)>2$。因此 $a\notin M$。综合（1）（2）（3），我们有 $M=\left[-2,\ \frac{1}{4}\right]$。

2006年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案

一、(本题满分 50 分)以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与△AB_0B_1 的边 AB_i 交于 C_i(i=0，1)。在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧 P_0Q_0 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 Q_0P_1 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 P_1Q_1 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $Q_1P'_0$，交 AB_0 的延长线于 P'_0。试证：

(1)点 P'_0 与点 P_0 重合，且圆弧 P_0Q_0 与 P_0Q_1 相内切于 P_0；

(2)四点 P_0、Q_0、Q_1、P_1 共圆。



【解析】证明：(1)显然 $B_0P_0=B_0Q_0$，并由圆弧 P_0Q_0 和 Q_0P_1，Q_0P_1 和 P_1Q_1，P_1Q_1 和 $Q_1P'_0$ 分别相内切于点 Q_0、P_1、Q_1，得 $C_1B_0+B_0Q_0=C_1P_1$，$B_1C_1+C_1P_1=B_1C_0+C_0Q_1$ 以及 $C_0Q_1=C_0B_0+B_0P'_0$。四式相加，利用 $B_1C_1+C_1B_0=B_1C_0+C_0B_0$ 以及 P'_0 在 B_0P_0 或其延长线上，有 $B_0P_0=B_0P'_0$。

从而可知点 P'_0 与点 P_0 重合。由于圆弧 Q_1P_0 的圆心 C_0、圆弧 P_0Q_0 的圆心 B_0 以及 P_0 在同一直线上，所以圆弧 Q_1P_0 和 P_0Q_0 相内切于点 P_0。

(2)现在分别过点 P_0 和 P_1 引上述相应相切圆弧的公切线 P_0T 和 P_1T 交于点 T。又过点 Q_1 引相应相切圆弧的公切线 R_1S_1，分别交 P_0T 和 P_1T 于点 R_1 和 S_1。连接 P_0Q_1 和 P_1Q_1，得等腰三角形 $P_0Q_1R_1$ 和 $P_1Q_1S_1$。基于此，我们可由

$\angle P_0Q_1P_1=\pi-\angle P_0Q_1R_1-\angle P_1Q_1S_1=\pi-(\angle P_1P_0T-\angle Q_1P_0P_1)-(\angle P_0P_1T-\angle Q_1P_1P_0)$

而 $\pi-\angle P_0Q_1P_1=\angle Q_1P_0P_1+\angle Q_1P_1P_0$，代入上式后，即得

$\angle P_0Q_1P_1=\pi-\frac{1}{2}(\angle P_1P_0T+\angle P_0P_1T)$，同理可得 $\angle P_0Q_0P_1=\pi-\frac{1}{2}(\angle P_1P_0T+\angle P_0P_1T)$。所以四点 P_0、Q_0、Q_1、P_1 共圆。

二、(本题满分 50 分)已知无穷数列$\{a_n\}$满足 $a_0=x$，$a_1=y$，$a_{n+1}=\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n$=1、2、…。

(1)对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n_0\geqslant n$ 时 a_n 恒为常数?

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式。

【解析】(1) 我们有 $a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}=\frac{a_n^2+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n$=1、2、…。 (2.1)

所以，如果对某个正整数 n 有 $a_{n+1}=a_n$，则必有$(a_n)^2=1$，且 $a_n+a_{n-1}\neq0$。

如果该 n=1，我们得$|y|=1$ 且 $x\neq-y$。 (2.2)

如果该 n>1，我们有 $a_n-1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}-1=\frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}$，$n\geqslant2$， (2.3)

和 $a_n+1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}+1=\frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}$，$n\geqslant2$。 (2.4)

将式(2.3)和(2.4)两端相乘，得 $a_n^2-1=\frac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}$，$n\geqslant2$。 (2.5)

由(2.5)递推，必有(2.2)或$|x|=1$ 且 $y\neq-x$。 (2.6)

反之，如果条件(2.2)或(2.6)满足，则当 $n\geqslant2$ 时，必有 a_n=常数，且常数是 1 或—1。

(2)由(2.3)和(2.4)，我们得到 $\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1}$，$n\geqslant2$。 (2.7)

记 $b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$，则当 $n\geqslant2$ 时，

$$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}b_{n-3})b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$$

由此递推，我们得到 $\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=(\dfrac{y-1}{y+1})^{F_{n-1}}\cdot(\dfrac{x-1}{x+1})^{F_{n-2}}$，$n\geqslant 2$，（2.8）

这里 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 2$，$F_0=F_1=1$。（2.9）

由（2.9）解得 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$。（2.10）

上式中的 n 还可以向负向延伸，例如 $F_{-1}=0$，$F_{-2}=1$。

这样一来，式（2.8）对所有的 $n\geqslant 0$ 都成立。由（2.8）解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-1}}(y-1)^{F_{n-2}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-1}}(y-1)^{F_{n-2}}}，n\geqslant 0。\qquad (2.11)$$

式（2.11）中的 F_{-1}、F_{-2} 由（2.10）确定。

三、（本题满分 50 分）解方程组 $\begin{cases}x-y+z-w=2\\x^2-y^2+z^2-w^2=6\\x^3-y^3+z^3-w^3=20\\x^4-y^4+z^4-w^4=66\end{cases}$.

【解析】令 $p=x+z$、$q=xz$，我们有 $p^2=x^2+z^2+2q$，$p^3=x^3+z^3+3pq$，$p^4=x^4+z^4+4p^2q-2q^2$。同样，令 $s=y+w$，$t=yw$，有 $s^2=y^2+w^2+2t$，$s^3=y^3+w^3+3st$，$s^4=y^4+w^4+4s^2t-2t^2$。

在此记号系统下，原方程组的第一个方程为 $p=s+2$。（3.1）

于是 $p^2=s^2+4s+4$，$p^3=s^3+6s^2+12s+8$，$p^4=s^4+8s^3+24s^2+32s+16$。现在将上面准备的 p^2、p^3、p^4 和 s^2、s^3、s^4 的表达式代入，得 $x^2+z^2+2q=y^2+w^2+2t+4s+4$，$x^3+z^3+3pq=y^3+w^3+3st+6s^2+12s+8$，$x^4+z^4+4p^2q-2q^2=y^4+w^4+4s^2t-2t^2+8s^3+24s^2+32s+16$。

利用原方程组的第二至四式化简，得 $q=t+2s-1$，（3.2）

$pq=st+2s^2+4s-4$，（3.3）

$2p^2q-q^2=2s^2t-t^2+4s^3+12s^2+16s-25$。（3.4）

将（3.1）和（3.2）代入（3.3），得 $t=\dfrac{s}{2}-1$，（3.5）

将（3.5）代入（3.2），得 $q=\dfrac{5s}{2}-2$，（3.6）

将（3.1）（3.5）（3.6）代入（3.4），得 $s=2$。所以有 $t=0$，$p=4$，$q=3$。

这样一来，x、z 和 y、w 分别是方程 $X^2-4X+3=0$ 和 $Y^2-2Y=0$ 的两根，即 $\begin{cases}x=3\\z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\z=3\end{cases}$，且 $\begin{cases}y=2\\w=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=0\\w=2\end{cases}$. 详言之，方程组有如下四组解：$x=3$，$y=2$，$z=1$，$w=0$；或 $x=3$，$y=0$，$z=1$，$w=2$；或 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$w=0$；或 $x=1$，$y=0$，$z=3$，$w=2$。

注：如果只得到一组解，或者不完整，最多得 40 分。

2006 年全国高中数学联赛加试试题的另解

2006 年全国高中数学联赛加试第一题

以 $\boldsymbol{B_0}$ 和 $\boldsymbol{B_1}$ 为焦点的椭圆与 $\Delta \boldsymbol{AB_0B_1}$ 的边 $\boldsymbol{AB_i}$ 交于 $\boldsymbol{C_i(i=0,1)}$。在 $\boldsymbol{AB_0}$ 的延长线上任取点 $\boldsymbol{P_0}$，以 $\boldsymbol{B_0}$ 为圆心，$\boldsymbol{B_0P_0}$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{\boldsymbol{P_0Q_0}}$ 交 $\boldsymbol{C_1B_0}$ 的延长线于 $\boldsymbol{Q_0}$；以 $\boldsymbol{C_1}$ 为

圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0'}$，交 AB_0 的延长线于 P_0'。

试证：

7. 点 P_0' 与点 P_0 重合，且圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相切于点 P_0；

8. 四点 P_0、Q_0、Q_1、P_1 共圆。（原题图略）

第（1）问的证明略，下面着重讨论第 2 问的另一种证明方法：

构思：证明四点共圆，如果能找（或猜测）到该圆的圆心，转而证明圆心到四点距离相等，也是一个常用的方法，那么圆心究竟在哪里？

试验：由题意可以知道：$C_1B_0+C_1B_1=C_0B_1+C_0B_0$=常数（大于 B_0B_1）。

利用《几何画板》制作如图 1 所示的试验场景，其中圆 O 为四边形 $P_1Q_0Q_1P_1$ 的外接圆。

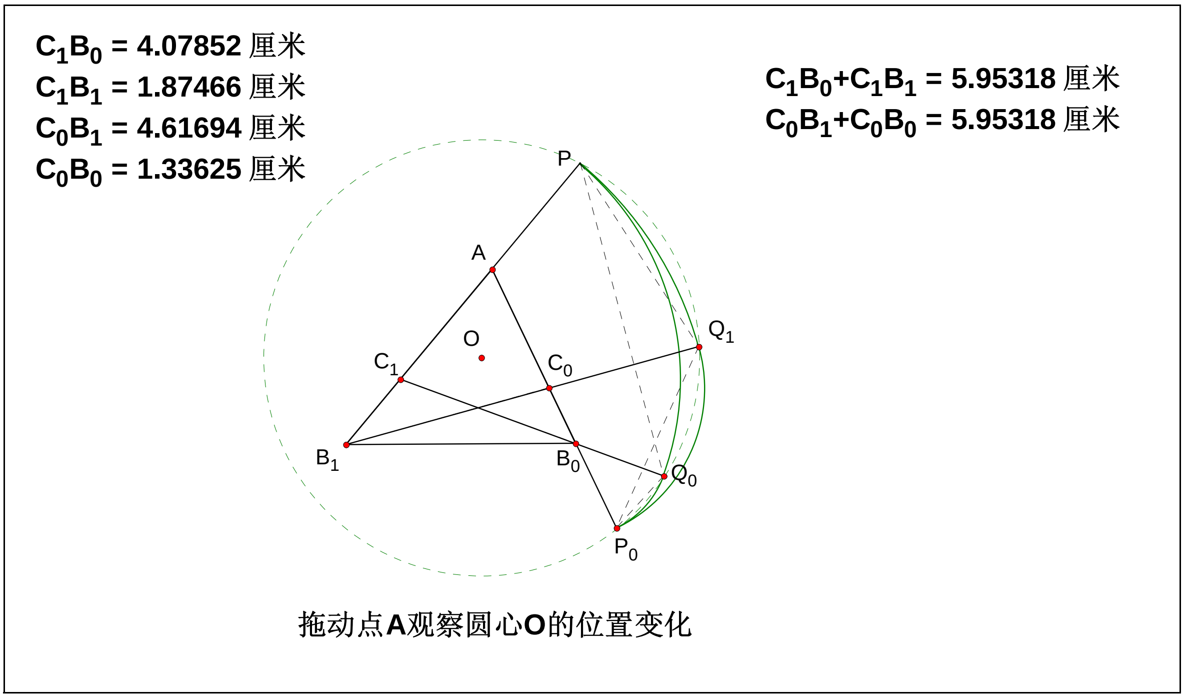


图 1

拖动点 A，观察圆心 O 位置的变化，猜测点 O 可能是 ΔAC_1B_0 的内心与 ΔAC_0B_1 的内心（这两个三角形的内心可能是重合的）。利用《几何画板》中的测量工具测得相关角的度数，可以验证这个猜想是正确的！

所以我们就有了下面的另解：

证明：首先证明 ΔAC_1B_0 的内心与 ΔAC_0B_1 的内心重合：

假设这两个三角形的内心不重合，并设 O 为 ΔAC_1B_0 的内心，M、N、F 分别为切

点。则可从点 B_1 引圆 O 的切线与圆 O 切于点 E 、与线段 AB_0 交于点 D，而且点 D 与点 C_0

不重合，如图 2。

由切线性质，可以得到：

$B_1E = B_1M, DE = DN$ ……………………①

$C_1F = C_1M, B_0F = B_0N$ ……………………②

分别将①、②中的等式相加，得到：

$B_1D = B_1M + DN$ ……………………③

$C_1B_0 = C_1M + B_0N$ ……………………④

③-④： $B_1D - C_1B_0 = B_1M - C_1M - (B_0N - DN)$

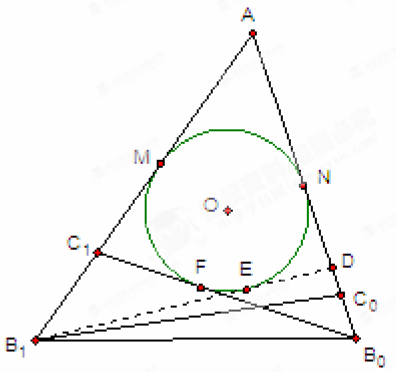


图 2

$\therefore DB_1 + DB_0 = C_1B_1 + C_1B_0$

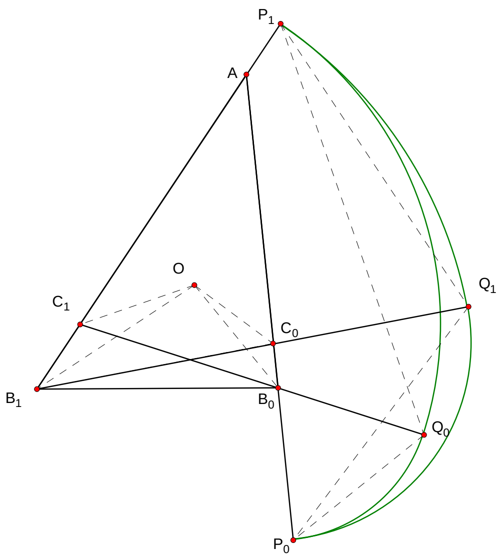
又因为

$C_0B_1 + C_0B_0 = C_1B_1 + C_1B_0$，

$\therefore DB_1 + DB_0 = C_0B_1 + C_0B_0$

$\therefore DB_1 + DC_0 = C_0B_1$，这与点 D 与点 C_0 不重合矛盾，所以假设不成立，因此：ΔAC_1B_0 的内心与 ΔAC_0B_1 的内心重合。

设 ΔAC_1B_0 、 ΔAC_0B_1 的内心为 O，如图 3。



由于直线 OC_0 平分 $\angle AC_0B_1$，又 $C_0Q_1 = C_0P_0'$，$\therefore$ 直线 OC_0 垂直平分线段 $P_0'Q_1$，$\therefore OP_0' = OQ_1$

同理：

直线 OB_0 垂直平分线段 P_0Q_0，$\therefore OP_0 = OQ_0$

直线 C_1O 垂直平分线段 P_1Q_0，$\therefore OP_1 = OQ_0$

图 3

直线 B_1O 垂直平分线段 P_1Q_1，∴ $OP_1=OQ_1$

∴ $OQ_1=OQ_0$，∴ $OP_0=OP_0'$

又点 P、P_0' 都在 AB_0 的延长线上，∴点 P_0、P_0' 重合，且圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相切于点 P_0。

∴ $OP_1=OP_0=OQ_1=OQ_0$

所以四点 P_0、Q_0、P_1、Q_1 共圆