二○○二年全国高中数学联合竞赛

说明：

1． 评阅试卷时，请依据本评分标准，选择题只设 6 分的 0 分两档，填空题只设 9 分和 0 分两档，其它各题的评阅，请严格按照本评分标准规定的评分档次给分，不要再啬其他中间档次。
2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准适当档次评分，可以 5 分为一个档次，不要再增加其它中间档次。

一、 选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1、 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间是

(A) (-∞，-1)　　(B) (-∞，1)　　(C) (1，+∞)　　(D) (3，+∞)

2、 若实数 x，y 满足 $(x+5)^2+(y\ \ 12)^2=14^2$，则 x^2+y^2 的最小值为

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

3、 函数 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$

(A) 是偶函数但不是奇函数　　(B) 是奇函数但不是偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数　　(D) 既不是奇函数又不是偶函数

4、 直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于 A，B 两点，该圆上点 P，使得⊿PAB 面积等于 3，这样的点 P 共有

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

5、 已知两个实数集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中的每一个元素都有原象，且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射共有

(A) C_{100}^{50}　　(B) C_{90}^{50}　　(C) C_{100}^{49}　　(D) C_{99}^{49}

6、 由曲线 $x^2=4y$，$x^2=\ \ 4y$，$x=4$，$x=\ \ 4$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所得为旋转体的体积为 V_1，满足 $x^2+y^2\leqslant16$，$x^2+(y-2)^2\geqslant4$，$x^2+(y+2)^2\geqslant4$ 的点 (x,y) 组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2，则

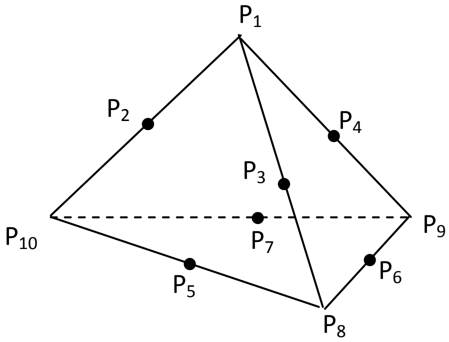
(A) $V_1=\frac{1}{2}V_2$　　(B) $V_1=\frac{2}{3}V_2$　　(C) $V_1=V_2$　　(D) $V_1=2V_2$

二、 填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7、 已知复数 Z_1,Z_2 满足 $|Z_1|=2$，$|Z_2|=3$，若它们所对应向量的夹角为 60°，则 $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=$________ 。

8、 将二项式 $(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ 的展开式按 x 的降幂排列，若前三项系数成等差数列，则该展

开式中 x 的指数是整数的项共有___________个。



6、如图，点 $P_1, P_2, \cdots, P_{10}$ 分别是四面体点或棱的中点，那么在同一平面上的四点组 (P_1, P_i, P_j, P_k) $(1<i<j<k\leqslant 10)$ 有_____个。

7、 已知 f(x)是定义在 R 上的函数，f(1)=1 且对任意 x∈R 都有

$f(x+5)\geqslant f(x)+5$　　　　$f(x+1)\leqslant f(x)+1$

若 g(x)=f(x)+1　x，则 g(2002)=_______ 。

8、 若 $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，则 |x|　|y| 的最小值是________。

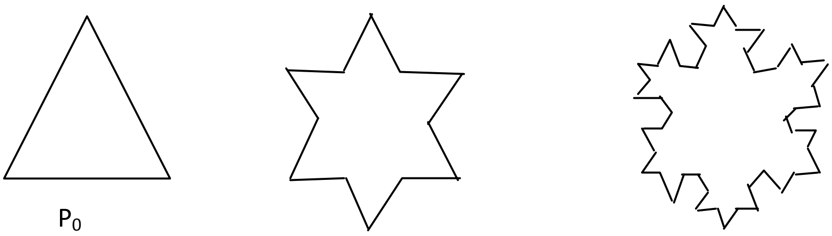
9、 使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 x∈R 恒成立的负数 a 的取值范围是________。

三、　　解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13、 已知点 A(0,2)和抛物线 $y=x^2+4$ 上两点 B、C 使得 AB⊥BC,求点 C 的纵坐标的取值范围。

14、 如图，有一列曲线 P_0，P_1，P_2，……，已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形，P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到的：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉(k=0,1,2,3,…)，记 S_n 为曲线 P_k 所围成图形面积。

①求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式；②求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 。



P_0　　　　P_1　　　　P_2

15、 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c∈R,a≠0)满足条件：

① 当 x∈R 时，f(x-4)=f(2-x)，且 $f(x)\geqslant x$；

② 当 x∈(0,2)时，$f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$

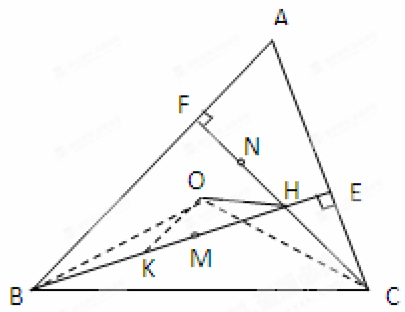
③ f(x)在 R 上的最小值为 0。

求最大值 m(m>1)，使得存在 t∈R，只要 x∈[1,m]，就有 f(x+t)≤x

二〇〇二年全国高中数学联合竞赛加试试题

一、（本题满分 50 分）

如图，在⊿ABC 中，∠A=60°，AB>AC，点 O 是外心，两条高 BE、CF 交于 H 点，点 M、N 分别在线段 BH、HF 上，且满足 BM=CN，求 $\frac{MH+NH}{OH}$ 的值。



二、（本题满分 50 分）

实数 a,b,c 和正数 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3，且满足

① x_2 x_1= ，

② $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、（本题满分 50 分）

在世界杯足球赛前，F 国教练为了考察 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 这七名，准备让他们在三场训练比赛(每场 90 分钟)都上场，假设在比赛的任何时刻，这些中有且仅有一人在场上，并且 A_1,A_2,A_3,A_4 每人上场的总时间(以分钟为单位)均被 13 整除，如果每场换人次数不限，那么按每名队员上场的总时间计算，共有多少种不同的情况。

2002 全国高中数学联赛答案

一、选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1、函数 f(x)= $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间是

(A) (-∞，-1)　　(B) (-∞，1)　　(C) (1，+∞)　　(D) (3，+∞)

【答案】A

【解析】由 $x^2-2x-3>0 \Rightarrow x<-1$ 或 $x>3$，令 f(x)= $\log_{\frac{1}{2}} u$， u= x^2-2x-3，故选 A

2、若实数 x，y 满足 $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，则 x^2+y^2 的最小值为

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】直接利用数形结合分析即得，x^2+y^2 表示曲线上的点到原点的距离的平方。

3、函数 f(x)= $\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$

(A) 是偶函数但不是奇函数　　(B) 是奇函数但不是偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数　　(D) 既不是奇函数又不是偶函数

【答案】A

【解析】直接根据奇偶函数的定义解答。

4、直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于 A，B 两点，该圆上点 P，使得⊿PAB 面积等于 3，这样的点 P 共有

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

【答案】B

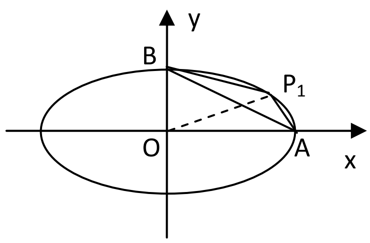
【解析】设 $P_1(4\cos\alpha, 3\sin\alpha)$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，即点 P_1 在第一象限的椭圆上，如图，考虑四边形 P_1AOB 的面积 S。

S= $S_{\Delta OAP_1}+S_{\Delta OBP_1}=\frac{1}{2}\times4\times3\sin\alpha+\frac{1}{2}\times3\times4\cos\alpha=6(\sin\alpha+\cos\alpha)=6\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$

∴ $S_{max}=6\sqrt{2}$

∵ $S_{\Delta OAB}=6$

∴ $(S_{\Delta P_1AB})_{max}=6\sqrt{2}-6$



∵ $6\sqrt{2}-6<3$

∴点 P 不可能在直线 AB 的上方，显然在直线 AB 的下方有两个点 P，故选 B

5、已知两个实数集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中的每一个元素都有原象，且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射共有

(A) C_{100}^{50}　　(B) C_{90}^{50}　　(C) C_{100}^{49}　　(D) C_{99}^{49}

【答案】D

【解析】不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_{50}$，将 A 中元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 按顺序分为非空的 50 组，定义映射 $f: A\to B$，使得第 i 组的元素在 f 之下的象都是 b_i $(i=1,2,\cdots,50)$，易知这样的 f 满足题设要求，每个这样的分组都一一对应满足条件的映射，于是满足题设要求的映射 f 的个数与 A 按足码顺序分为 50 组的分法数相等，而 A 的分法数为 C_{99}^{49}，则这样的映射共有 C_{99}^{49}，故选 D。

6、由曲线 $x^2=4y$，$x^2=\quad 4y$，$x=4$，$x=\quad 4$ 围成图形绕 y 轴旋转一周所得为旋转体的体积为 V_1，满足 $x^2+y^2\leqslant 16$，$x^2+(y-2)^2\geqslant 4$，$x^2+(y+2)^2\geqslant 4$ 的点 (x,y) 组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2，则

(A) $V_1=\dfrac{1}{2}V_2$　　(B) $V_1=\dfrac{2}{3}V_2$　　(C) $V_1=V_2$　　(D) $V_1=2V_2$

【答案】C

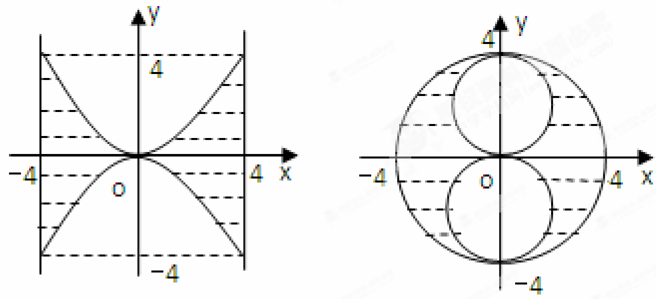
【解析】如图，两图形绕 y 轴旋转所得的旋转体夹在两相距为 8 的平行平面之间，用任意一个与 y 轴垂直的平面截这两个旋转体，设截面与原点距离为 $|y|$，则所得截面面积

$\because S_1=\quad(4^2\quad 4|y|)$，

$S_2=\quad(4^2\quad y^2)\qquad[4\quad(2\quad|y|)^2]=\quad(4^2\quad 4|y|)$

$\therefore S_1=S_2$

由祖暅原理知，两个几何体体积相等。故远 C。



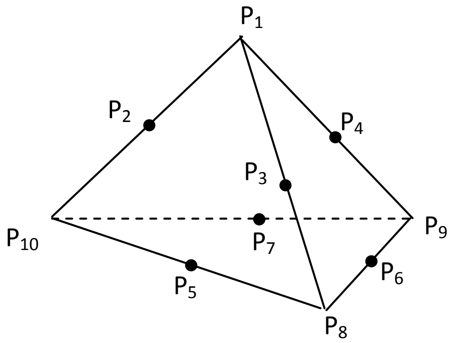
四、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7、已知复数 Z_1, Z_2 满足 $|Z_1|=2$，$|Z_2|=3$，若它们所对应向量的夹角为 60°，则 $\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=$________。

【答案】$\dfrac{\sqrt{133}}{7}$

【解析】由余弦定理得 $|Z_1+Z_2|=\sqrt{19}$，$|Z_1\quad Z_2|=\sqrt{7}$，$\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{133}}{7}$

8、将二项式 $(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ 的展开式按 x 的降幂排列，若前三项系数成等差数列，则该展开式中 x 的指数是整数的项共有___________个。



【答案】3

【解析】不难求出前三项的系数分别是 $1,\frac{1}{2}n,\frac{1}{8}n(n-1)$，

$\because 2\cdot\frac{1}{2}n=1+\frac{1}{8}n(n-1)$

∴当 n=8 时，$T_{r+1}=C_n^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{16-3r}{4}}$　(r=0, 1, 2, …, 8)

∴r=0, 4, 8, 即有 3 个

9、如图，点 $P_1,P_2,\cdots,P_{10}$ 分别是四面体点或棱的中点，那么在同一平面上的四点组(P_1, P_i, P_j, P_k)($1<i<j<k\leq 10$)有______个。

【答案】33

【解析】首先，在每个侧面上除 P_1 点外尚有五个点，其中任意三点组添加点 P_1 后组成的四点组都在同一个平面，这样三点组有 C_5^3 个，三个侧面共有 $3C_5^3$ 个。

其次，含 P_1 的每条棱上三点组添加底面与它异面的那条棱上的中点组成的四点组也在一个平面上，这样的四点组有 3 个

∴共有 $3C_5^3+3=33$ 个

10、已知 f(x)是定义在 R 上的函数，f(1)=1 且对任意 x∈R 都有

f(x+5)≥f(x)+5　　　　f(x+1)≤f(x)+1

若 g(x)=f(x)+1　x，则 g(2002)=_________ 。

【答案】1

【解析】由 g(x)=f(x)+1　x 得 f(x)=g(x)+x　1

∴g(x+5)+(x+5)　1≥g(x)+(x　1)+5

g(x+1)+(x+1)　1≤g(x)+(x　1)+5

∴g(x+5)≥g(x), g(x+1)≤g(x)

∴g(x)≤g(x+5)≤g(x+4)≤g(x+3)≤g(x+2)≤g(x+1)≤g(x)

∴g(x+1)=g(x)

∴T=1

∵g(1)=1

∴g(2002)=1

11、若 $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，则|x|　|y|的最小值是_________。

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\begin{cases} x+2y>0 \\ x-2y>0 \\ (x+2y)(x-2y)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2|y|\geq 0 \\ x^2-4y^2=4 \end{cases}$

由对称性只考虑 y≥0，因为 x>0，所以只须求 x y 的最小值。

令 x y=u 代入 x^2 $4y^2=4$ 中有 $3y^2$ 2uy+(4 u^2)=0

∵y∈R

∴⊿≥0⇒$u\geq\sqrt{3}$

∴当 $x=\frac{4}{3}\sqrt{3}, y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，u=$\sqrt{3}$，故|x| |y|的最小值是 $\sqrt{3}$

12、使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geq 1+\cos x$ 对一切 x∈R 恒成立的负数 a 的取值范围是__________。

【答案】(-∞, -2]

【解析】∵$\sin^2x+a\cos x+a^2\geq 1+\cos x$

∴ $(\cos x-\frac{a-1}{2})^2\leq a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$

∵ a<0，

∴当 cosx=1 时，函数 $y=(\cos x-\frac{a-1}{2})^2$ 有最大值 $(1-\frac{a-1}{2})^2$

∴ $(1-\frac{a-1}{2})^2\leq a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$ ⇒ $a^2+a-2\geq 0$ ⇒ a≤-2 或 a≥1

∵ a<0

∴负数 a 的取值范围是(-∞, -2]

四、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13、已知 点 A(0,2)和抛物线 $y=x^2+4$ 上两点 B、C 使得 AB⊥BC，求点 C 的纵坐标的取值范围。

【解析】设 B 点坐标为 B(y_1^2 4, y_1)，C 点坐标为 C(y^2 4, y)

显然 y_1^2 4≠0，故 $k_{AB}=\frac{y_1-2}{y_1^2-4}=\frac{1}{y_1+2}$

∵AB⊥BC

∴K_{BC}= (y_1+2)

∴ $\begin{cases} y-y_1=-(y_1+2)[x-(y_1^2-4)] \\ y^2=x+4 \end{cases}$

⇒ (2+y_1)(y+y_1)+1=0

$\Rightarrow y_1^2+(2+y)y_1+(2y+1)=0$

$\because y_1\in R$

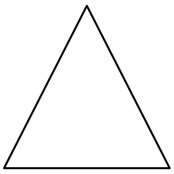
$\therefore \Delta\geqslant 0\Rightarrow y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 4$

∴当 y=0 时，点 B 的坐标为(-3，-1)；当 y=4 时，点 B 的坐标为(5，　3)，均满足题意。

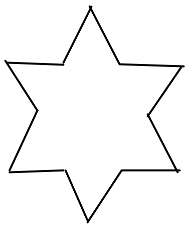
故点 C 的纵坐标的取值范围为$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

14、如图，有一列曲线 P_0，P_1，P_2，……，已知 P_0所围成的图形是面积为 1 的等边三角形，P_{k+1}是对 P_k进行如下操作得到的：将 P_k的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉(k=0,1,2,3,…)，记 S_n为曲线 P_k所围成图形面积。

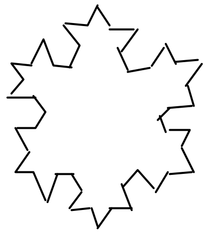
①求数列$\{S_n\}$的通项公式；②求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。



P_0



P_1



P_2

【解析】①对 P_0进行操作，容易看出 P_0的每条边变成 P_1的 4 条边，故 P_1的边数为 3×4；同样，对 P_1进行操作，P_1的每条边变成 P_2的 4 条边，故 P_2的边数为 3×4^2，从而不难得到 P_n的边数为 3×4^n ············5 分

已知 P_0的面积为 $S_0=1$，比较 P_1与 P_0，容易看出 P_1在 P_0的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为$\frac{1}{3^2}$，而 P_0有 3 条边，故 $S_1=S_0+3\times\frac{1}{3^2}=1+\frac{1}{3}$

再比较 P_2与 P_1，容易看出 P_2在 P_1的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为$\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{3^2}$，而 P_1有 3×4 条边，故 $S_2=S_1+3\times4\times\frac{1}{3^4}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}$

类似地有：$S_3=S_2+3\times4^2\times\frac{1}{3^6}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}$

$\therefore S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}=1+\frac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4}{9})^k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{9})^n$　　　　(※)

下面用数学归纳法证明(※)式

当 n=1 时，由上面已知(※)式成立，

假设当 n=k 时，有 $S_k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{9})^k$

当 n=k+1 时，易知第 k+1 次操作后，比较 P_{k+1} 与 P_k，P_{k+1} 在 P_k 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^{2(k+1)}}$，而 P_k 有 3×4^k 条边。故

$$S_{k+1}=S_k+3\times4^k\times\frac{1}{3^{2(k+1)}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{9})^{k+1}$$

综上所述，对任何 n∈N，(※)式成立。

② $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{9})^n]=\frac{8}{5}$

15、设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c∈R, a≠0)满足条件：

①当 x∈R 时，f(x-4)=f(2-x)，且 f(x)≥x;

②当 x∈(0, 2)时，$f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$

③f(x)在 R 上的最小值为 0。

求最大值 m(m>1)，使得存在 t∈R，只要 x∈[1, m]，就有 f(x+t)≤x

【解析】∵f(x-4)=f(2-x)

∴函数的图象关于 x= -1 对称

∴ $-\frac{b}{2a}=-1$ b=2a

由③知当 x= 1 时，y=0，即 a b+c=0

由①得 f(1)≥1，由②得 f(1)≤1

∴f(1)=1，即工+了+以=1，又 a b+c=0

∴ a=$\frac{1}{4}$ b=$\frac{1}{2}$ c=$\frac{1}{4}$

∴f(x)=$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

假设存在 t∈R，只要 x∈[1, m]，就有 f(x+t)≤x

取 x=1 时，有 f(t+1)≤1⇒ $\frac{1}{4}$ $(t+1)^2$+$\frac{1}{2}$ (t+1)+$\frac{1}{4}$ ≤1⇒ 4≤t≤0

对固定的 t∈[-4, 0]，取 x=m，有

f(t m)≤m

⇒ $\frac{1}{4}$ $(t+m)^2$+$\frac{1}{2}$ (t+m)+$\frac{1}{4}$ ≤m

⇒m^2 (1 t)m+(t^2+2t+1)≤0

$\Rightarrow 1-t-\sqrt{-4t}$ ≤m≤ $1-t+\sqrt{-4t}$

∴m≤$1-t\sqrt{-4t}$ ≤$1-(-4)+\sqrt{-4\cdot(-4)}$=9

当 t= -4 时，对任意的 x∈[1, 9]，恒有

f(x 4) x=$\frac{1}{4}$(x^2 10x+9)=$\frac{1}{4}$(x 1)(x 9)≤0

∴m 的最大值为 9。

另解：∵f(x-4)=f(2-x)

∴函数的图象关于 x= -1 对称

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-1$　　b=2a

由③知当 x=　1 时，y=0，即 a　b+c=0

由①得 f(1)≥1，由②得 f(1)≤1

∴f(1)=1，即工+了+以=1，又 a　b+c=0

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$　$b=\dfrac{1}{2}$　$c=\dfrac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$

由 $f(x+t)=\dfrac{1}{4}(x+t+1)^2\leqslant x$ 在 $x\in[1,m]$ 上恒成立

$\therefore 4[f(x+t)-x]=x^2+2(t-1)x+(t+1)^2\leqslant 0$ 当 $x\in[1,m]$ 时，恒成立

令 x=1 有 $t^2+4t\leqslant 0\Rightarrow$　$4\leqslant t\leqslant 0$

令 x=m 有 $t^2+2(m+1)t+(m-1)^2\leqslant 0$ 当 $t\in[-4,0]$ 时，恒有解

令 t=　4 得，m^2　$10m+9\leqslant 0\Rightarrow 1\leqslant m\leqslant 9$

即当 t=　4 时，任取 $x\in[1,9]$ 恒有

$f(x-4)-x=\dfrac{1}{4}(x^2$　$10x+9)=\dfrac{1}{4}(x$　$1)(x$　$9)\leqslant 0$

$\therefore m_{max}=9$

二〇〇二年全国高中数学联合竞赛加试试题

参考答案及评分标准

说明：

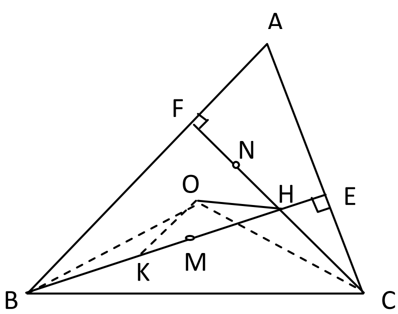
a) 评阅试卷时，请严格按照本评分标准规定的评分档次给分；

b) 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，可以 10 分为一个档次，不要再增加其它中间档次。

一、（本题满分 50 分）

如图，在⊿ABC 中，∠A=60°，AB>AC，点 O 是外心，两条高 BE、CF 交于 H 点，点 M、N 分别在线段 BH、HF 上，且满足 BM=CN，求 $\dfrac{MH+NH}{OH}$ 的值。

【解析】在 BE 上取 BK=CH，连接 OB、OC、OK，



由三角形外心的性质知

∠BOC=2∠A=120°

由三角形垂心的性质知

∠BHC=180°－∠A=120°

∴∠BOC=∠BHC

∴B、C、HO 四点共圆

∴∠OBH=∠OCH　OB=OC　BK=CH

∴⊿BOK≌⊿COH

∵BOK=∠BOC=120°，∠OKH=∠OHK=30°

观察⊿OKH

$$\frac{KH}{\sin 120°}=\frac{OH}{\sin 30°}\Rightarrow KH=\sqrt{3}\,OH$$

又∵BM=CN，BK=CH，

∴KM=NH

∴MH+NH=MH+KM=KH= $\sqrt{3}$ OH

∴ $\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$

二、（本题满分 50 分）

实数 a, b, c 和正数 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1, x_2, x_3，且满足

① x_2 x_1= ，

② $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】∵ f(x)=f(x) f(x_3)=(x x_3)[x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b]

∴ x_1, x_2是方程 x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b 的两个根

∵ x_2 x_1=

∴ $(a+x)^2$ 4(x_3^2+ax_3+b)=

⇒3x_3^2+2ax_3+ ^{2}+4b a^2=0

∵$x_3>\frac{1}{2}$(x_1+x_2)

∴ $x_3=\frac{1}{3}[-a+\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}]$ **(Ⅰ)**

且 4a^2 12b−3 ^{2}≥0 (Ⅱ)

∵ f(x)=x^3+ax^2+bx+c

$$=(x+\frac{a}{3})^3-(\frac{a^2}{3}-b)(x+\frac{a}{3})+\frac{2}{27}a^3+c-\frac{1}{3}ab$$

∵ f(x_3)=0

∴ $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c-=(x_3+\frac{a}{3})^3-(\frac{a^2}{3}-b)(x_3+\frac{a}{3})$ **(III)**

由(Ⅰ)得 $x_3+\frac{a}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}-b-\frac{\lambda^2}{4}}$

记 p= $\frac{a^2}{3}-b$ ，由（Ⅱ）和（Ⅲ）可知 p ≥ $\frac{\lambda^2}{4}$ 且

$$\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c-=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}(p-\lambda^2)$$

令 $y=\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}$，则 $y\geqslant 0$ 且 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c-=\frac{2\sqrt{3}}{9}y(y^2-\frac{3}{4}\lambda^2)$ ∵

$$y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y+\frac{\lambda^2}{4}=y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y-(\frac{\lambda}{2})^3+\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$=(y-\frac{\lambda}{2})^2(y+\lambda)$$

$\geqslant 0$

$$\therefore \frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c\geq-\frac{\sqrt{3}}{18}\lambda^3\Rightarrow\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

∴取 $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $c=0$, $=2$，则 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有根 $-\sqrt{3}-1$，$-\sqrt{3}+1$，0

显然假设条件成立，且

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{1}{8}(48\sqrt{3}-36\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

综上所述 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、（本题满分 50 分）

在世界杯足球赛前，F 国教练为了考察 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 这七名，准备让他们在三场训练比赛(每场 90 分钟)都上场，假设在比赛的任何时刻，这些中有且仅有一人在场上，并且 A_1,A_2,A_3,A_4 每人上场的总时间(以分钟为单位)均被 13 整除，如果每场换人次数不限，那么按每名队员上场的总时间计算，共有多少种不同的情况。

【解析】设第 i 名队员上场的时间为 x_i 分钟($i=1,2,3,\cdots,7$)，问题即求不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_7=270 \qquad ①$$

在条件 $7|x_i$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 且 $13|x_j$ $(5\leqslant j\leqslant 7)$ 下的正整数解的级数。

若$(x_1,x_2,\cdots,x_7)$是满足条件①的一组正整数解，则应有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i=7m \qquad \sum_{j=5}^{7}x_j=13n \qquad m,n\in N$$

∴m, n 是不定方程

$$7m+13n=270 \qquad ②$$

在条件 $m\geqslant 4$ 且 $n\geqslant 3$ 下的一组正整数解。

∵ $7(m-4)+13(n-3)=203$

令 $m'=m\quad 4\quad n'=n\quad 3$ 有

$$7m'+13n'=270 \qquad ③$$

∴ 求②满足条件 $m\geqslant 4$ 且 $n\geqslant 3$ 的正整数解等价于求③的非负整数解。

∵易观察到 $7\cdot 2+13\cdot(-1)=1$

∴ $7\cdot 406+13\cdot(-203)=203$

即 $m_0=406\quad n_0=\quad 203$ 是③的整数解

∴ ③的整数通解为

$m'=406\quad 13k \qquad n'=\quad 203+7k$. $k\in Z$

令 $m'\geqslant 0$　$n'\geqslant 0$，解得　$29\leqslant k\leqslant 31$

取 k=29, 30, 31 得到③满足条件的三组非负整数解：

$$\begin{cases}m'=29\\ n'=0\end{cases}\qquad \begin{cases}m'=16\\ n'=7\end{cases}\qquad \begin{cases}m'=3\\ n'=14\end{cases}$$

从而得到②满足条件的三组正整数解：

$$\begin{cases}m=33\\ n=3\end{cases}\qquad \begin{cases}m=20\\ n=10\end{cases}\qquad \begin{cases}m=7\\ n=17\end{cases}$$

1) 在 $m=33, n=3$ 时，显然 $x_5=x_6=x_7=13$ 仅有一种可能，

又设 $x_i=7y_i$ (i=1, 2, 3, 4)，于是由不定方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=33$ 有 $C_{33-1}^{4-1}=C_{32}^{3}=4960$ 组正整数解。

∴此时①有满足条件的 C_{32}^{3}=4960 组正整数解。

2) 在 $m=20, n=10$ 时，设 $x_i=7y_i$　(i=1, 2, 3, 4)，$x_j=13y_j$　(j=5, 6, 7)

由 $y_1+y_2+y_3+y_4=20$，有 C_{19}^{3} 组正整数解；以及 $y_5+y_6+y_7=10$，有 C_{9}^{2} 组正整数解。

∴此时①有满足条件的 $C_{19}^{3}\cdot C_{9}^{2}$=34884 组正整数解。

3) 在 $m=7, n=17$ 时，设 $x_i=7y_i$　(i=1, 2, 3, 4)，$x_j=13y_j$　(j=5, 6, 7)

由 $y_1+y_2+y_3+y_4=7$，有 C_{6}^{3} 组正整数解；以及 $y_5+y_6+y_7=17$，有 C_{16}^{2} 组正整数解。

综上所述，①满足条件的正整数解的组数为 $C_{32}^{3}+C_{19}^{3}\cdot C_{9}^{3}+C_{6}^{3}\cdot C_{16}^{2}$=4960+34884+2400=42244