1982年二十八省、市、自治区中学生联合数学竞赛

1．选择题(本题 48 分，每一小题答对者得 6 分，答错者得 0 分，不答者得 1 分)：

⑴ 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant4)$的所有对角线都相等，那么

A． $F\in${四边形}　　**B．** $F\in${五边形}

C． $F\in${四边形}$\cup${五边形}　　**D．** $F\in${边相等的多边形}$\cup${内角相等的多边形}

⑵ 极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$所确定的曲线是

A． 圆　　**B．** 椭圆　　**C．** 双曲线　　**D．** 抛物线

⑶ 如果 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 x)]=0$，那么

A．$z<x<y$　　B．$x<y<z$　　C．$y<z<x$　　D．$z<y<x$

⑷ 由方程$|x-1|+|y-1|=1$确定的曲线所围成的图形的面积是

A．1　　B．2　　C．π　　D．4

⑸ 对任何 $\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$都有

A．$\sin\sin\varphi<\cos\varphi<\cos\cos\varphi$　　B．$\sin\sin\varphi>\cos\varphi>\cos\cos\varphi$

C．$\sin\cos\varphi>\cos\varphi>\cos\sin\varphi$　　D．$\sin\cos\varphi<\cos\varphi<\cos\sin\varphi$

⑹ 已知 x_1，x_2是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0\ (k\text{ 为实数})$$

的两个实数根，$x_1^2+x_2^2$的最大值是

A．19　　B．18　　C．$5\dfrac{5}{9}$　　D．不存在

⑺ 设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1,x>0\}$，$N=\{(x,y)\mid \arctan x+\operatorname{arccot} y=\pi\}$，那么

A． $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1\}$　　**B．** $M\cup N=M$

C． $M\cup N=N$　　**D．** $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1$，且 x，y 不同时为负数$\}$

⑻ 当 a，b 是两个不相等的正数时，下列三个代数式：

甲：$(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})$，　乙：$(\sqrt{ab}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}})^2$，　丙：$(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2}{a+b})^2$

中间，值最大的一个是

A． 必定是甲　　**B．** 必定是乙

C． 必定是丙　　**D．** 一般并不确定，而与 a、b 的取值有关

2．(本题 16 分)已知四面体 $SABC$ 中，

$$\angle ASB=\frac{\pi}{2},\ \angle ASC=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2}),\ \angle BSC=\beta(0<\beta<\frac{\pi}{2}).$$

以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ.

求证：$\theta=-\arccos(\cot\alpha\cdot\cot\beta)$.

3．(本题 16 分)已知：⑴ 半圆的直径 AB 长为 $2r$；⑵ 半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直，垂足为 T，$|AT|=2a(2a<\dfrac{r}{2})$；⑶ 半圆上有相异两点 M、N，它们与直线 l 的距离$|MP|$、

$|NQ|$满足条件

$$\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1.$$

求证：$|AM|+|AN|=|AB|$.

4．(本题20分)已知边长为4的正三角形ABC．D、E、F分别是BC、CA、AB上的点，且$|AE|=|BF|=|CD|=1$，连结AD、BE、CF，交成$\triangle RQS$．点P在$\triangle RQS$内及边上移动，点P到$\triangle ABC$三边的距离分别记作x、y、z．

(1) 求证当点P在$\triangle RQS$的顶点位置时乘积xyz有极小值；

(2) 求上述乘积xyz的极小值．

5．(本题20分)已知圆$x^2+y^2=r^2$(r为奇数)，交x轴于点$A(r，0)$、$B(-r，0)$，交y轴于$C(0，-r)$、$D(0，r)$．$P(u，v)$是圆周上的点，$u=p^m$，$v=q^n$(p、q都是质数，m、n都是正整数)，且$u>v$．点P在x轴和y轴上的射影分别为M、N．

求证：$|AM|$、$|BM|$、$|CN|$、$|DN|$分别为1、9、8、2．

1982年二十八省、市、自治区中学生联合数学竞赛解答

1．选择题(本题 **48** 分，每一小题答对者得 **6** 分，答错者得 **0** 分，不答者得 **1** 分)：

⑴ 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant 4)$的所有对角线都相等，那么

A． $F\in$\{四边形\}　　　　*B*． $F\in$\{五边形\}

C． $F\in$\{四边形\}$\cup$\{五边形\}　　　　*D*． $F\in$\{边相等的多边形\}$\cup$\{内角相等的多边形\}

【答案】C

【解析】由正方形及正五边形知 *A*、*B* 均错，由对角线相等的四边形形状不确定，知 *D* 错，选 *C*.

⑵ 极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$所确定的曲线是

A． 圆　　*B*． 椭圆　　*C*． 双曲线　　*D*． 抛物线

【答案】C

【解析】$\rho=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})}$，知 $e=\sqrt{2}$，选 *C*.

⑶ 如果 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 x)]=0$，那么

A． $z<x<y$　　*B*． $x<y<z$　　*C*． $y<z<x$　　*D*． $z<y<x$

【答案】A

【解析】$x=2^{\frac{1}{2}}$，$y=3^{\frac{1}{3}}$，$z=5^{\frac{1}{5}}$；$x=2^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{1}{6}}$，$y=3^{\frac{1}{3}}=9^{\frac{1}{6}}$，故 $x<y$，又 $x=32^{\frac{1}{10}}$，$z=25^{\frac{1}{10}}$，故 $z<x$. 故选 *A*.

⑷ 由方程$|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形的面积是

A． 1　　*B*． 2　　*C*． π　　*D*． 4

【答案】B

【解析】此曲线的图形是一个正方形，顶点为(0，1)，(1，0)，(2，1)，(1，2)；其面积为 2．选 *B*.

⑸ 对任何 $\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$都有

A． $\sin\sin\varphi<\cos\varphi<\cos\cos\varphi$　　　　*B*． $\sin\sin\varphi>\cos\varphi>\cos\cos\varphi$

C． $\sin\cos\varphi>\cos\varphi>\cos\sin\varphi$　　　　*D*． $\sin\cos\varphi<\cos\varphi<\cos\sin\varphi$

【答案】D

【解析】由 $0<\sin\varphi<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\Rightarrow\cos\sin\varphi>\sin\varphi$．由 $0<\cos\varphi<1$，得 $\sin\cos\varphi<\cos\varphi$．故选 *D*.

⑹ 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$(k 为实数)的两个实数根，$x_1^2+x_2^2$ 的最大

值是

A．19　　　　**B**．18　　　　**C**．$5\frac{5}{9}$　　　　**D**．不存在

【答案】B

【解析】$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)=-3k^2-16k-16\geqslant 0$，$-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$.

由韦达定理，得 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=-(k-5)^2+19$.

∴ 当 $k=-4$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 取得最大值 -18．故选 B.

⑺ 设 $M=\{(x,y)|\,|xy|=1, x>0\}$，$N=\{(x,y)|\arctan x+\text{arccot}\,y=\pi\}$，那么

A．$M\cup N=\{(x,y)|\,|xy|=1\}$　　　　**B**．$M\cup N=M$

C．$M\cup N=N$　　　　**D**．$M\cup N=\{(x,y)|\,|xy|=1$，且 x，y 不同时为负数$\}$

【答案】B

【解析】M 是双曲线 $xy=\pm1$ 在第一、四象限内的两支；

由 $\arctan x=\pi-\text{arccot}\,y$，$\Rightarrow x=-\frac{1}{y}$，$\Rightarrow xy=-1$，若 $x<0$，则 $\arctan x\in(-\frac{\pi}{2},0)$，而 $\text{arccot}\,y\in(0,\pi)$，$\pi-\text{arccot}\,y\in(0,\pi)$，故 $x>0$．即 N 是 $xy=-1$ 在第四象限的一支．故选 B.

⑻ 当 a，b 是两个不相等的正数时，下列三个代数式：

甲：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，　　乙：$(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}})^2$，　　丙：$(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2$

中间，值最大的一个是

A．必定是甲　　　　**B**．必定是乙

C．必定是丙　　　　**D**．一般并不确定，而与 a、b 的取值有关

【答案】D

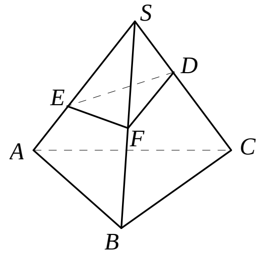
【解析】甲>乙，但甲、丙大小不确定．故选 **D**.

2．(本题 16 分)已知四面体 $SABC$ 中，$\angle ASB=\frac{\pi}{2}$，$\angle ASC=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$\angle BSC=\beta(0<\beta<\frac{\pi}{2})$.

以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ.

求证：$\theta=-\arccos(\cot\alpha\cdot\cot\beta)$.

【解析】证明：在 SC 上取点 D，使 $SD=1$，在面 SAC、SBC 内分别作 $DE\perp SC$，$DF\perp SC$，分别交 SA、SB 于 E、F，连 EF．则$\angle EDF$ 为二面角 $A—SC—B$ 的平面角．即$\angle EDF=\theta$.



由$\angle BSC=\beta$，知 $SF=\sec\beta$，$DF=\tan\beta$．由$\angle ASC=\alpha$，得 $SE=\sec\alpha$，$DE=\tan\alpha$.

由$\angle ASB=\frac{\pi}{2}$，得 $EF^2=SE^2+SF^2=DE^2+DF^2-2DE\cdot DF\cos\theta$.

∴ $\sec^2\alpha+\sec^2\beta=\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta$．$\Rightarrow\cos\theta=-\cot\alpha\cot\beta$.

∴ $\theta=-\text{arc}(\cot\alpha\cot\beta)$.

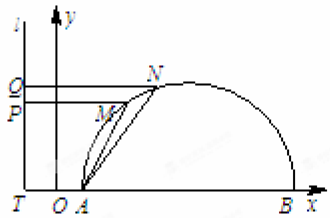
3．(本题 16 分)已知：⑴ 半圆的直径 AB 长为 $2r$；⑵ 半圆外的直线 l 与 BA 的延长线

垂直，垂足为 T，$|AT|=2a(2a<\frac{r}{2})$；⑶ 半圆上有相异两点 M、N，它们与直线 l 的距离 $|MP|$、$|NQ|$ 满足条件

$$\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1.$$

求证：$|AM|+|AN|=|AB|$.

【解析】证明：以 AT 中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，



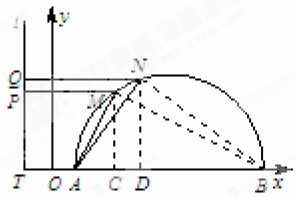
则由已知，M、N 是半圆 $(x-a-r)^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$ 与抛物线 $y^2=4ax$ 的交点.

消去 y 得：$x^2+2(a-r)x+2ra+a^2=0$.

条件 $2a<\frac{r}{2}$ 保证 $\Delta>0$，于是此方程有两个不等实根 x_1，x_2，即为 M、N 的横坐标.

由韦达定理，知 $x_1+x_2=-(2a-2r)$.

$\because$ $|AM|=|MP|=x_1+a$，$|AN|=|NQ|=x_2+a$. $\therefore$ $|AM|+|AN|=x_1+x_2+2a=2r$. 证毕.



又证：作 $MC\perp AB$，$ND\perp AB$，垂足为 C、D. 则 $AN^2=AD\cdot AB$，$AM^2=AC\cdot AB$，

$\therefore$ $AN^2-AM^2=(AD-AC)AB=CD\cdot AB$.

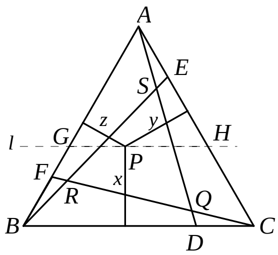
$\because$ $AN^2-AM^2=(AN+AM)(AN-AM)=(AN+AM)(NQ-MP)=(AN+AM)\cdot CD$.

比较得，$AN+AM=AB$.

4．(本题 20 分)已知边长为 4 的正三角形 ABC．D、E、F 分别是 BC、CA、AB 上的点，且 $|AE|=|BF|=|CD|=1$，连结 AD、BE、CF，交成△RQS．点 P 在△RQS 内及边上移动，点 P 到△ABC 三边的距离分别记作 x、y、z.

⑴ 求证当点 P 在△RQS 的顶点位置时乘积 xyz 有极小值；

⑵ 求上述乘积 xyz 的极小值.

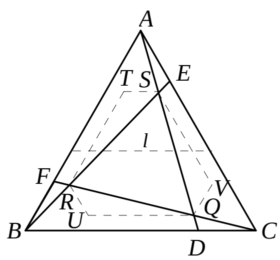


【解析】利用面积，易证：⑴ 当点 P 在△ABC 内部及边上移动时，$x+y+z$ 为定值 $h=2\sqrt{3}$；

⑵过 P 作 BC 的平行线 l，交△ABC 的两边于 G、H．当点 P 在线段 GH 上移动时，$y+z$ 为定值，从而 x 为定值.

⑶设 $y\in[\alpha,\beta]$，m 为定值．则函数 $u=y(m-y)$ 在点 $y=\alpha$ 或 $y=\beta$ 时取得极小值.

于是可知，过 R 作 AB、AC 的平行线，过 Q 作 AB、BC 的平行线，过 S 作 BC、AC 的平行线，这 6 条平行线交得六边形 $STRUQV$，由上证，易得只有当点 P 在此六点上时，xyz 取得极小值．由对称性易知，xyz 的值在此六点处相等.

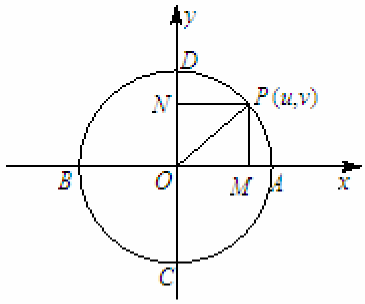


由 $\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BS}{SE}=1$，得 $\frac{BS}{BE}=\frac{12}{13}$，$x=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{4}h=\frac{9}{13}h$，$y=\frac{SE}{BE}h=\frac{1}{13}h$，$z=\frac{3}{13}h$.

$\therefore$ $xyz=(\frac{3}{13})^3h^3=\frac{648}{2197}\sqrt{3}$.

5．(本题 20 分)已知圆 $x^2+y^2=r^2$(r 为奇数)，交 x 轴于点 $A(r，0)$、$B(-r，0)$，交 y 轴于 $C(0，-r)$、$D(0，r)$．$P(u，v)$是圆周上的点，$u=p^m$，$v=q^n$(p、q 都是质数，m、n 都是正整数)，且 $u>v$．点 P 在 x 轴和 y 轴上的射影分别为 M、N．

求证：$|AM|$、$|BM|$、$|CN|$、$|DN|$分别为 1、9、8、2．



【解析】证明：$p^{2m}+q^{2n}=r^2$．

若 $p=q$，则由 $u>v$，得 $m>n$，于是 $p^{2n}(p^{2(m-n)}+1)=r^2$，这是不可能的．(因 $p^{2(m-n)}$与 $p^{2(m-n)}+1$ 都是完全平方数，它们相差 1，故必有 $p^{2(m-n)}=0$，矛盾)．

故 $p\neq q$，于是$(p，q)=1$．若 p、q 均为奇数，则 $p^2\equiv q^2\equiv 1(mod\ 4)$，与 $r^2\equiv 0$ 或 1 矛盾．故 p、q 必有一为偶数．即 p、q 必有一个$=2$．(或直接由 r 为奇数得 p、q 一奇一偶，其实 r 为奇数的条件多余)

设 $p=2$，则 $q^{2n}=r^2-2^{2m}=(r+2^m)(r-2^m)$．

即 $r+2^m$与 $r-2^m$都是 q^{2n}的约数．设 $r+2^m=q^k$，$r-2^m=q^h$，其中 $k>h\geqslant 1$，$k+h=2n$．

$\therefore\ r=\frac{1}{2}(q^k+q^h)=\frac{1}{2}q^h(q^{k-h}+1)$，$2^m=\frac{1}{2}(q^k-q^h)=\frac{1}{2}q^h(q^{k-h}-1)$，

但 q^h 是奇数，又是 2^{m+1} 的约数，故 $h=0$．$r=\frac{1}{2}(q^{2n}+1)$，$2^{m+1}=q^{2n}-1=(q^n+1)(q^n-1)$．

$\therefore\ q^n+1=2^\alpha$，$q^n-1=2^\beta$．$(\alpha+\beta=m+1，\alpha>\beta)$，而 $2=2^\alpha-2^\beta=2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)$，从而 $\beta=1$，$\alpha-\beta=1$，$\alpha=2$．

$\therefore\ m=2$，$u=4$，$q^n=3$，$q=3$，$n=1$，$v=3$．$|OP|=5$．

$\therefore\ |AM|=5-4=1$，$|BM|=5+4=9$，$|CN|=5+3=8$，$|DN|=5-3=2$．

若设 $q=2$，则同法可得 $u=3$，$v=4$，与 $u>v$ 矛盾，舍去．

又证：在得出 p、q 互质且其中必有一为偶数之后．

由于$(p^m，q^n)=1$，故必存在互质的正整数 a，$b(a>b)$，使 $a^2-b^2=q^n$，$2ab=p^m$，$a^2+b^2=r$．或 $a^2-b^2=p^m$，$2ab=q^n$，$a^2+b^2=r$．

若 $p^m=2ab$，得 $p=2$，$a|2^m$，$b|2^m$，故 $a=2^\lambda$，$b=2^\mu$，由 a，b 互质，得 $\mu=0$，$\therefore\ b=1$，$a=2^{m-1}$．

$q^n=2^{2m-2}-1=(2^{m-1}+1)(2^{m-1}-1)$．故 $2^{m-1}+1=q^\alpha$，$2^{m-1}-1=q^\beta$，$(\alpha+\beta=n$，且 $\alpha>\beta)$．

$\therefore\ 2=q^\alpha-q^\beta=q^\beta(q^{\alpha-\beta}-1)$．由 q 为奇数，得 $\beta=0$，$2=q^n-1$，$q^n=3$，从而 $q=3$，$n=1$，$a^2=4$．$a=2$，$m=2$．仍得上解．