2018 年全国高中数学联合竞赛一试试题（B 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1．设集合 $A=\{2,0,1,8\}$，$B=\{2a\mid a\in A\}$．则 $A\cup B$ 的所有元素之和是_________．

2．已知圆锥的顶点为 *P*，底面半径长为 2，高为 *l*，在圆锥底面上取一点 *Q*，使得直线 *PQ* 与底面所成角不大于 45°，则满足条件的点 *Q* 所构成的这域的面积为_________．

3．将 1，2，3，4，5，6 随机排成一行，记为 *a*，*b*，*c*，*d*，*e*，*f*，则 $abc+def$ 是奇数数的概率为_________．

4．在平面直角坐标系 *xOy* 中，直线 *l* 通过原点，$\vec{n}=(3,1)$ 是 *l* 的一个法向量，已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 *n*，点 (a_{n+1},a_n) 均在 l 上．若 $a_2=6$．则 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 的值为_________．

5．设 α，β 满足 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-3$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=5$ 则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为_________．

6．设抛物线 $C:y^2=2x$ 的准线与 *x* 轴交于点 *A*，过点 $B(-1.0)$ 作一直线 *l* 与抛物线 *C* 相切于点 *K*，过点 *A* 作 *l* 的平行线，与抛物线 *C* 交于点 *M*，*N*，则△*KMN* 的面积为

7．设 $f(x)$ 是定义在 *R* 上的以 2 为周期的偶函数，在区间[0,1]上严格递减，且满足 $f(\pi)=1$，$f(2\pi)=1$，则不等式组 $\begin{cases}1\le x\le 2\\1\le f(x)\le 2\end{cases}$ 的解集为_________．

8．已知复数 z_1，z_2，z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$|z_1+z_2+z_3|=1$．其中 *r* 是给定实数，则 $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$ 的实部是_________．（用含有 r 的式子表示）．

二、解答题：本大题共 3 小题．满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本题满分 16 分）已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=7$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2, n=1,2,3,\cdots$，2 求满足 $a_n>4^{2018}$ 的最小正整数 *n*．

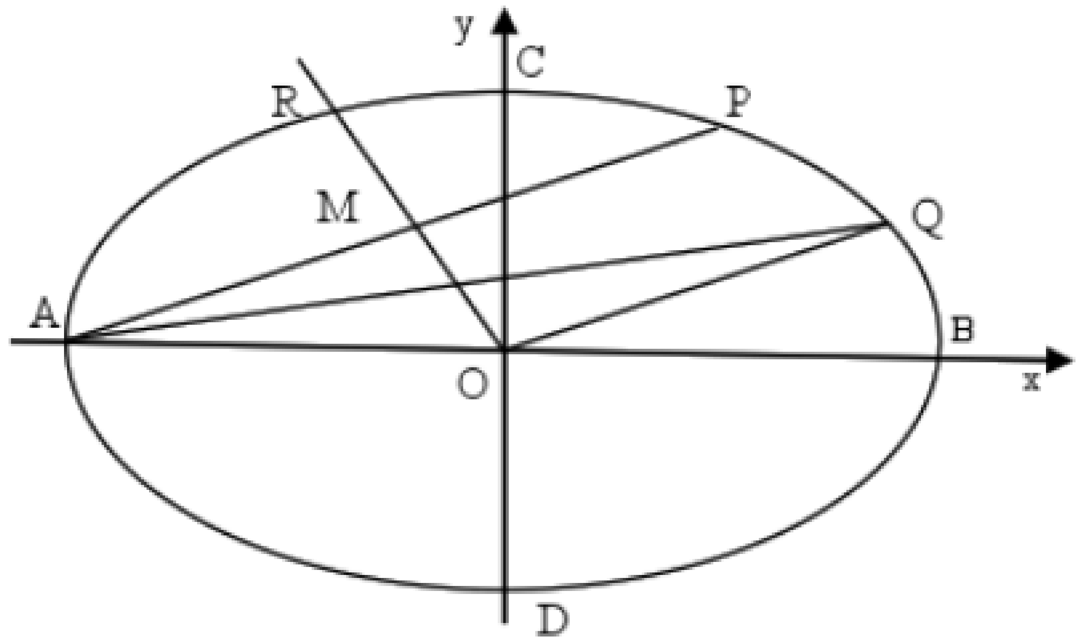
10．（本题满分 20 分）已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|,0<x<0\\4-\sqrt{x},x>9\end{cases}$$

设 *a*,*b*,*c* 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 *abc* 的取值范围．

11．（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 与 C、D 分别是椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点与上、下顶点，设 P，Q 是 Γ 上且位于第一象限的两点，满足 $OQ // AP$，M 是线段 AP 的中点，射线 OM 与椭圆交于点 R.

证明：线段 OQ，OR，BC 能构成一个直角三角形.



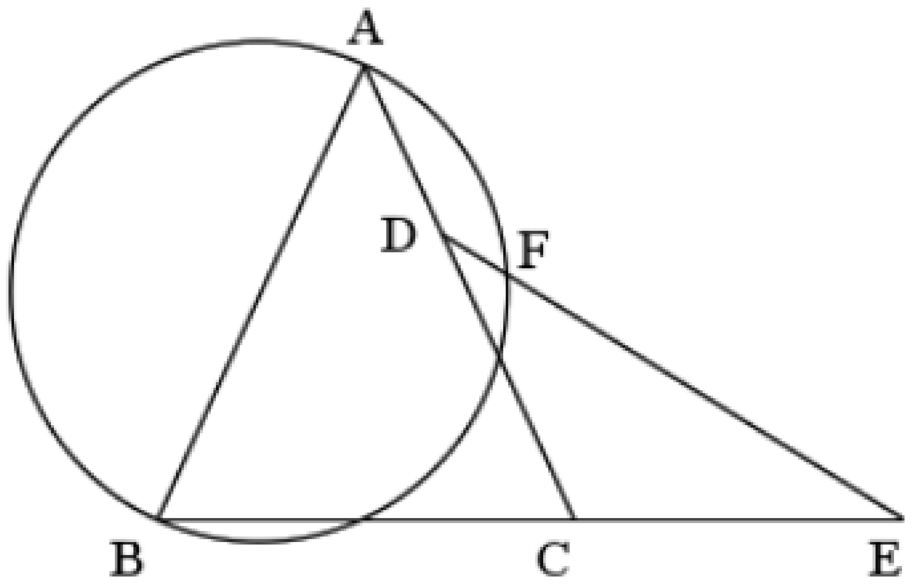
2018 年全国高中数学联合竞赛加试试题（B 卷）

一、（本题满分 40 分）设 a,b 是实数，函数 $f(x)=ax+b+\dfrac{9}{x}$.

证明：存在 $x_0\in[1,9]$，使得 $|f(x_0)|\ge 2$

二、（本题满分 40 分）如图所示，在等腰△ABC 中，AB=AC，边 AC 的上一点 D 及 BC 延长线上一点 E 分满足 $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BC}{2CE}$，以 AB 为直径的圆 ω 与线段 DE 交于一点 F.

证明：B，C，F，D 四点共圆（答题时请将图画在答卷纸上）



三、（本题满分 50 分）设集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，X，Y 均为 A 的非空设空子集（允许 $X=Y$）. X 中的最大元与 Y 中的最小元分别记为 $\max X$，$\min Y$ 求满足 $\max X>\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目.

四、（本题满分 50 分）给定整数 $a\ge 2$. 证明：对任意正整数 n，存在正整数 k，使得连续 n 个数 a^k+1，a^k+2，…，a^k+n 均是合数.

2018 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1．设集合 $A=\{2,0,1,8\}$，$B=\{2a\mid a\in A\}$，则 $A\cup B$ 的所有元素之和是______.

答案：31．

解：易知 $B=\{4,0,2,16\}$，故 $A\cup B=\{0,1,2,4,8,16\}$．$A\cup B$ 的所有元素之和是 $0+1+2+4+8+16=31$．

2．已知圆锥的顶点为 P，底面半径长为 2，高为 1．在圆锥底面上取一点 Q，使得直线 PQ 与底面所成角不大于 $45°$，则满足条件的点 Q 所构成的区域的面积为__________.

答案：3π．

解：圆锥顶点 P 在底面上的投影即为底面中心，记之为 O．由条件知，$\dfrac{OP}{OQ}=\tan\angle OQP\le 1$，即 $OQ\ge 1$，故所求的区域面积为 $\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$．

3．将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行，记为 a,b,c,d,e,f，则 $abc+def$ 是奇数的概率为___________.

答案：$\dfrac{1}{10}$．

解：当 $abc+def$ 为奇数时，abc,def 必为一奇一偶，若 abc 为奇数，则 a,b,c 为 $1,3,5$ 的排列，d,e,f 为 $2,4,6$ 的排列，这样有 $3!\times 3!=36$ 种情况．由对称性可知，满足条件的情况数为 $36\times 2=72$ 种．从而所求概率为 $\dfrac{72}{6!}=\dfrac{72}{720}=\dfrac{1}{10}$．

4．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 通过原点，$\vec{n}=(3,1)$ 是 l 的一个法向量．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 n，点 (a_{n+1},a_n) 均在 l 上．若 $a_2=6$，则 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 的值为___________.

答案：-32．

解：易知直线 l 的方程是 $3x+y=0$．因此对任意正整数 n，有 $3a_{n+1}+a_n=0$，即 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n$，故 $\{a_n\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列．于是 $a_3=-\dfrac{1}{3}a_2=-2$．由等比数列的性质可得，$a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=(-2)^5=-32$．

5．设 α,β 满足 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-3,\ \tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=5$，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为_______.

答案：$-\dfrac{7}{4}$.

解：由两角差的正切公式可知 $\tan\left(\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\dfrac{-3-5}{1+(-3)\times 5}=\dfrac{4}{7}$，即 $\tan\left(\alpha-\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{7}$，从而 $\tan(\alpha-\beta)=-\cot\left(\alpha-\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{7}{4}$.

6. 设抛物线 $C: y^2=2x$ 的准线与 x 轴交于点 A，过点 $B(-1,0)$ 作一直线 l 与抛物线 C 相切于点 K，过点 A 作 l 的平行线，与抛物线 C 交于点 M,N，则 ΔKMN 的面积为___________.

答案：$\dfrac{1}{2}$.

解：设直线 l 与 MN 的斜率为 k，则 $l: x=\dfrac{1}{k}y-1$，$MN: x=\dfrac{1}{k}y-\dfrac{1}{2}$.

将 l 与 C 联立，得方程 $y^2-\dfrac{2}{k}y+2=0$，由条件知其判别式为零，故 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

将 MN 与 C 联立，得方程 $y^2-\dfrac{2}{k}y+1=0$，于是

$$|y_M-y_N|=\sqrt{(y_M+y_N)^2-4y_My_N}=\sqrt{\frac{4}{k^2}-4}=2,$$

结合 l 与 MN 平行，可知

$$S_{\Delta KMN}=S_{\Delta BMN}=|S_{\Delta BAM}-S_{\Delta BAN}|=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_M-y_N|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}.$$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[1,2]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1,\ f(2\pi)=0$，则不等式组 $\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le f(x)\le 1\end{cases}$ 的解集为____________.

答案：$[2\pi-6,\ 4-\pi]$.

解：由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[1,2]$ 上严格递减知，$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上严格递增，再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知，$[0,1]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间.

注意到

$$f(4-\pi)=f(\pi-4)=f(\pi)=1,\ f(2\pi-6)=f(2\pi)=0,$$

所以

$$0\le f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(2\pi-6)\le f(x)\le f(4-\pi),$$

而 $0<2\pi-6<4-\pi<1$，故原不等式组成立当且仅当 $x\in[2\pi-6,\ 4-\pi]$.

8. 已知复数 z_1,z_2,z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$|z_1+z_2+z_3|=r$，其中 r 是给定实数，则 $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$ 的实部是__________（用含有 r 的式子表示）.

答案：$\dfrac{r^2-3}{2}$.

解：记 $w=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$. 由复数模的性质可知

$$\overline{z_1}=\frac{1}{z_1},\ \overline{z_2}=\frac{1}{z_2},\ \overline{z_3}=\frac{1}{z_3},$$

因此 $w=z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}$． 于是

$$r^2=(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+w+\overline{w}=3+2\operatorname{Re}w,$$

解得 $\operatorname{Re}w=\dfrac{r^2-3}{2}$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．**（本题满分 16 分）** 已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=7$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2,\ n=1,2,3,\cdots$．求满足 $a_n>4^{2018}$ 的最小正整数 n .

解：由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2$ 可知 $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$． 因此

$$a_n+1=(a_1+1)^{2^{n-1}}=8^{2^{n-1}}=2^{3\times2^{n-1}},$$

故 $a_n=2^{3\times2^{n-1}}-1$.　　…………………8 分

显然 $\{a_n\}$ 单调递增．由于

$$a_{11}=2^{3072}-1<2^{4036}=4^{2018},\ a_{12}=2^{6144}-1>2^{4036}=4^{2018},$$

故满足题目条件的 n 的最小值是 12 .　　…………………16 分

10．**（本题满分 20 分）** 已知定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|, & 0<x\le 9,\\ 4-\sqrt{x}, & x>9.\end{cases}$$

设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 abc 的取值范围．

解：不妨设 $a<b<c$．由于 $f(x)$ 在 $(0,3]$ 上严格递减，在 $[3,9]$ 上严格递增，在 $[9,+\infty)$ 上严格递减，且 $f(3)=0,\ f(9)=1$，故结合图像可知

$$a\in(0,3),\ b\in(3,9),\ c\in(9,+\infty),$$

并且 $f(a)=f(b)=f(c)\in(0,1)$.　　…………………5 分

由 $f(a)=f(b)$ 得

$$1-\log_3 a=\log_3 b-1,$$

即 $\log_3 a+\log_3 b=2$，因此 $ab=3^2=9$．于是 $abc=9c$.　　…………………10 分

又

$$0<f(c)=4-\sqrt{c}<1,$$　　…………………15 分

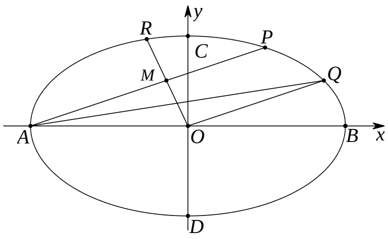
故 $c\in(9,16)$．进而 $abc=9c\in(81,144)$.

所以，abc 的取值范围是 $(81,144)$.　　…………………20 分

注：对任意的 $r\in(81,144)$，取 $c_0=\dfrac{r}{9}$，则 $c_0\in(9,16)$，从而 $f(c_0)\in(0,1)$．过

点 $(c_0, f(c_0))$ 作平行于 x 轴的直线 l，则 l 与 $f(x)$ 的图像另有两个交点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$（其中 $a\in(0,3), b\in(3,9)$），满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，并且 $ab=9$，从而 $abc=r$.

11.（本题满分 20 分） 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，A、B 与 C、D 分别是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点与上、下顶点．设 P, Q 是 Γ 上且位于第一象限的两点，满足 $OQ \parallel AP$，M 是线段 AP 的中点，射线 OM 与椭圆交于点 R.



证明：线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形.

证明：设点 P 坐标为 (x_0, y_0)．由于 $\overrightarrow{OQ}\parallel\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$；$\overrightarrow{OR}\parallel\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\right)$，故存在实数 λ, μ，使得

$$\overrightarrow{OQ}=\lambda(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}),\quad \overrightarrow{OR}=\mu(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}).$$ …………………5 分

此时点 Q, R 的坐标可分别表示是 $(\lambda(x_0+a), \lambda y_0), (\mu(x_0-a), \mu y_0)$．由于点 Q, R 都在椭圆上，所以

$$\lambda^2\left(\frac{(x_0+a)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\mu^2\left(\frac{(x_0-a)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=1.$$

结合 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ 知，上式可化为 $\lambda^2\left(2+\frac{2x_0}{a}\right)=\mu^2\left(2-\frac{2x_0}{a}\right)=1$，解得

$$\lambda^2=\frac{a}{2(a+x_0)},\quad \mu^2=\frac{a}{2(a-x_0)}.$$ …………………10 分

因此

$$\begin{aligned}|OQ|^2+|OR|^2&=\lambda^2\left((x_0+a)^2+y_0^2\right)+\mu^2\left((x_0-a)^2+y_0^2\right)\\&=\frac{a}{2(a+x_0)}\left((x_0+a)^2+y_0^2\right)+\frac{a}{2(a-x_0)}\left((x_0-a)^2+y_0^2\right)\\&=\frac{a(a+x_0)}{2}+\frac{ay_0^2}{2(a+x_0)}+\frac{a(a-x_0)}{2}+\frac{ay_0^2}{2(a-x_0)}\\&=a^2+\frac{ay_0^2}{2}\left(\frac{1}{a+x_0}+\frac{1}{a-x_0}\right)=a^2+\frac{ay_0^2}{2}\cdot\frac{2a}{a^2-x_0^2}\\&=a^2+\frac{a^2\cdot b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}{a^2-x_0^2}=a^2+b^2=|BC|^2.\end{aligned}$$

从而线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形. …………………20 分

2018 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、（本题满分 40 分）设 a, b 是实数，函数 $f(x)=ax+b+\frac{9}{x}$．

证明：存在 $x_0 \in [1, 9]$，使得 $|f(x_0)| \geq 2$．

证法 1：只需证明存在 $u, v \in [1, 9]$，满足 $|f(u)-f(v)| \geq 4$，进而由绝对值不等式得

$$|f(u)|+|f(v)| \geq |f(u)-f(v)| \geq 4,$$

故 $|f(u)| \geq 2$ 与 $|f(v)| \geq 2$ 中至少有一个成立． …………………10 分

当 $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 时，有

$$|f(1)-f(9)| = |(a+b+9)-(9a+b+1)| = 8|1-a| \geq 4．$$ ………………20 分

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ 时，有 $\frac{3}{\sqrt{a}} \in [1, 9]$．再分两种情况：若 $\frac{1}{2}<a \leq 1$，则

$$\left|f(1)-f\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right| = |(a+b+9)-(6\sqrt{a}+b)| = (3-\sqrt{a})^2 \geq 4．$$ ……………30 分

若 $1<a<\frac{3}{2}$，则

$$\left|f(9)-f\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right| = |(9a+b+1)-(6\sqrt{a}+b)| = (3\sqrt{a}-1)^2 \geq 4．$$

综上可知，存在 $u, v \in [1, 9]$，满足 $|f(u)-f(v)| \geq 4$，从而命题得证．

…………………40 分

证法 2：用反证法．假设对任意 $x \in [1, 9]$，均有 $|f(x)|<2$，则

$$|f(1)|<2, |f(3)|<2, |f(9)|<2．$$ …………………10 分

易知

$$f(1)=a+b+9, \quad ①$$
$$f(3)=3a+b+3, \quad ②$$
$$f(9)=9a+b+1． \quad ③$$

由①，②得，$2a-6=f(2)-f(1)$；又由②，③得，$6a-2=f(3)-f(2)$．

由上述两式消去 a，可知

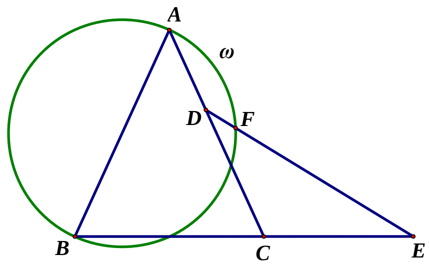
$$f(3)-4f(2)+3f(1)=(6a-2)-3\cdot(2a-6)=16．$$ ……………30 分

但 $f(3)-4f(2)+3f(1)<2+4\cdot 2+3\cdot 2=16$，矛盾！从而命题得证．

…………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图所示，在等腰ΔABC中，$AB=AC$，边AC上一点D及BC延长线上一点E满足$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BC}{2CE}$，以$AB$为直径的圆$\omega$与线段$DE$交于一点$F$.

证明：B, C, F, D四点共圆.**（答题时请将图画在答卷纸上）**

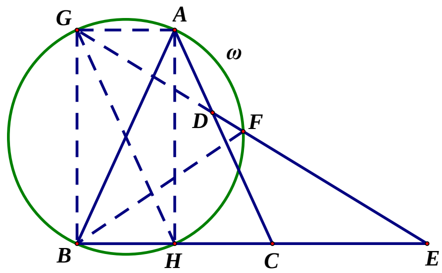


证明：取BC中点H，则由$AB=AC$知$AH\perp BC$，故H在圆ω上.

延长FD至G，使得$AG\parallel BC$，结合已知条件得，$\dfrac{AG}{CE}=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BC}{2CE}$，故

$$AG=\frac{1}{2}BC=BH=HC,$$

从而$AGBH$为矩形，$AGHC$为平行四边形. ……………………20 分



由$AGBH$为矩形知，G亦在圆ω上．故$\angle HGF=\angle HBF$.

又$AGHC$为平行四边形，由$AC\parallel GH$，得$\angle CDF=\angle HGF$.

所以$\angle CDF=\angle HBF=\angle CBF$，故$B, C, F, D$四点共圆. ………………40 分

三、（本题满分 50 分）设集合$A=\{1, 2, \cdots, n\}$，X, Y均为A的非空子集（允许$X=Y$）．X中的最大元与Y中的最小元分别记为$\max X, \min Y$．求满足$\max X>\min Y$的有序集合对(X, Y)的数目.

解：先计算满足$\max X\le \min Y$的有序集合对(X, Y)的数目．对给定的$m=\max X$，集合X是集合$\{1, 2, \cdots, m-1\}$的任意一个子集与$\{m\}$的并，故共有2^{m-1}种取法．又$\min Y\ge m$，故Y是$\{m, m+1, \cdots, n\}$的任意一个非空子集，共有$2^{n+1-m}-1$种取法. ……………………20 分

因此，满足 $\max X \le \min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目是

$$\sum_{m=1}^{n} 2^{m-1}(2^{n+1-m}-1)=\sum_{m=1}^{n}2^n-\sum_{m=1}^{n}2^{m-1}=n\cdot 2^n-2^n+1.$$

…………………40 分

由于有序集合对 (X,Y) 有 $(2^n-1)\cdot(2^n-1)=(2^n-1)^2$ 个，于是满足 $\max X>\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目是

$$(2^n-1)^2-n\cdot 2^n+2^n-1=2^{2n}-2^n(n+1).$$ ………………50 分

四、（本题满分 50 分）给定整数 $a\ge 2$．证明：对任意正整数 n，存在正整数 k，使得连续 n 个数 $a^k+1, a^k+2,\cdots,a^k+n$ 均是合数．

证明：设 $i_1<i_2<\cdots<i_r$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中与 a 互素的全体整数，则对 $1\le i\le n$，$i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，无论正整数 k 如何取值，a^k+i 均与 a 不互素且大于 a，故 a^k+i 为合数． …………………10 分

对任意 $j=1,2,\cdots,r$，因 $a+i_j>1$，故 $a+i_j$ 有素因子 p_j．

我们有 $(p_j,a)=1$（否则，因 p_j 是素数，故 $p_j\mid a$，但 $p_j\mid a+i_j$，从而 $p_j\mid i_j$，故 a,i_j 不互素，与 i_j 的取法矛盾）．因此，由费马小定理知，

$$a^{p_j-1}\equiv 1 \pmod{p_j}.$$

现取 $k=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)+1$． …………………30 分

对任意 $j=1,2,\cdots,r$，注意到 $k\equiv 1 \pmod{p_j-1}$，故有

$$a^k+i_j\equiv a+i_j\equiv 0 \pmod{p_j}.$$

又 $a^k+i_j>a+i_j\ge p_j$，故 a^k+i_j 为合数．

综上所述，当 $k=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)+1$ 时，$a^k+1,a^k+2,\cdots,a^k+n$ 均是合数． …………………50 分