2015 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设 a, b 为不相等的实数，若二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(a)=f(b)$，则 $f(2)$ 的值为____________.

答案：4.

解：由已知条件及二次函数图像的轴对称性，可得 $\frac{a+b}{2}=-\frac{a}{2}$，即 $2a+b=0$，所以

$$f(2)=4+2a+b=4.$$

2. 若实数 α 满足 $\cos\alpha=\tan\alpha$，则 $\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$ 的值为____________.

答案：2.

解：由条件知，$\cos^2\alpha=\sin\alpha$，反复利用此结论，并注意到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，得

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha$$

$$=(1+\sin\alpha)+(1-\cos^2\alpha)=2+\sin\alpha-\cos^2\alpha=2.$$

3. 已知复数数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1=1,\ z_{n+1}=\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}\ (n=1,\ 2,\cdots)$，其中 i 为虚数单位，$\overline{z_n}$ 表示 z_n 的共轭复数，则 z_{2015} 的值为____________.

答案：$2015+1007\mathrm{i}$.

解：由已知得，对一切正整数 n，有

$$z_{n+2}=\overline{z_{n+1}}+1+(n+1)\mathrm{i}=\overline{\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}}+1+(n+1)\mathrm{i}=z_n+2+\mathrm{i},$$

于是 $z_{2015}=z_1+1007\times(2+\mathrm{i})=2015+1007\mathrm{i}$.

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,\ AD=1$，边 DC 上（包含点 D、C）的动点 P 与 CB 延长线上（包含点 B）的动点 Q 满足 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$，则向量 $\overrightarrow{PA}$ 与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值为____________.

答案：$\frac{3}{4}$.

解：不妨设 $A(0,0), B(2,0), D(0,1)$. 设 P 的坐标为 $(t,1)$（其中 $0\le t\le 2$），则由 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$ 得 Q 的坐标为 $(2,-t)$，故 $\overrightarrow{PA}=(-t,-1),\ \overrightarrow{PQ}=(2-t,-t-1)$，因此

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(-t)\cdot(2-t)+(-1)\cdot(-t-1)=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$\left(\overline{PA}\cdot\overline{PQ}\right)_{\min}=\dfrac{3}{4}$．

5. 在正方体中随机取 3 条棱，它们两两异面的概率为___________．

答案：$\dfrac{2}{55}$．

解：设正方体为 $ABCD-EFGH$，它共有 12 条棱，从中任意取出 3 条棱的方法共有 $C_{12}^{3}=220$ 种．

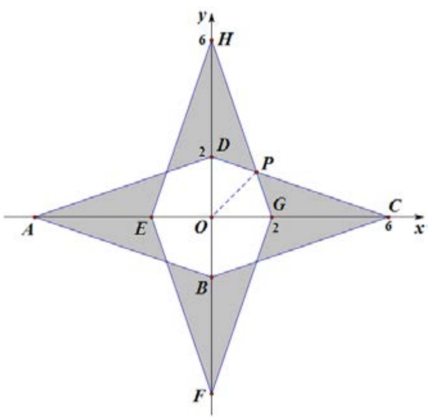
下面考虑使 3 条棱两两异面的取法数．由于正方体的棱共确定 3 个互不平行的方向（即 AB、AD、AE 的方向），具有相同方向的 4 条棱两两共面，因此取出的 3 条棱必属于 3 个不同的方向．可先取定 AB 方向的棱，这有 4 种取法．不妨设取的棱就是 AB，则 AD 方向只能取棱 EH 或棱 FG，共 2 种可能．当 AD 方向取棱是 EH 或 FG 时，AE 方向取棱分别只能是 CG 或 DH．

由上可知，3 条棱两两异面的取法数为 $4\times2=8$，故所求概率为 $\dfrac{8}{220}=\dfrac{2}{55}$．

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\left(|x|+|3y|-6\right)\left(|3x|+|y|-6\right)\le0\right\}$ 所对应的平面区域的面积为____________．

答案：24．

解：设 $K_1=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,|x|+|3y|-6\le0\right\}$．先考虑 K_1 在第一象限中的部分，此时有 $x+3y\le6$，故这些点对应于图中的 ΔOCD 及其内部．由对称性知，K_1 对应的区域是图中以原点 O 为中心的菱形 $ABCD$ 及其内部．



同理，设 $K_2=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,|3x|+|y|-6\le0\right\}$，则 K_2 对应的区域是图中以 O 为中心的菱形 $EFGH$ 及其内部．

由点集 K 的定义知，K 所对应的平面区域是被 K_1、K_2 中恰好一个所覆盖的部分，因此本题所要求的即为图中阴影区域的面积 S．

由于直线 CD 的方程为 $x+3y=6$，直线 GH 的方程为 $3x+y=6$，故它们的交点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$．由对称性知，

$$S=8S_{\Delta CPG}=8\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=24.$$

7. 设 ω 为正实数，若存在 $a,\ b\,(\pi\le a<b\le2\pi)$，使得 $\sin\omega a+\sin\omega b=2$，则 ω 的取值范围是____________．

答案：$\omega\in\left[\dfrac{9}{4},\ \dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{13}{4},\ +\infty\right)$．

解：由 $\sin\omega a+\sin\omega b=2$ 知，$\sin\omega a=\sin\omega b=1$，而 $[\omega a,\ \omega b]\subseteq[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$，故题目条件等价于：存在整数 $k,\ l\,(k<l)$，使得

$$\omega\pi \le 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2l\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\omega\pi . \qquad ①$$

当$\omega \ge 4$时，区间$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$的长度不小于4π，故必存在$k,\ l$满足①式.

当$0<\omega<4$时，注意到$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]\subseteq(0,\ 8\pi)$，故仅需考虑如下几种情况：

(i) $\omega\pi \le \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时$\omega \le \frac{1}{2}$且$\omega \ge \frac{5}{4}$，无解；

(ii) $\omega\pi \le \frac{5\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时有$\frac{9}{4} \le \omega \le \frac{5}{2}$；

(iii) $\omega\pi \le \frac{9\pi}{2} < \frac{13\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时有$\frac{13}{4} \le \omega \le \frac{9}{2}$，得$\frac{13}{4} \le \omega < 4$.

综合(i)、(ii)、(iii)，并注意到$\omega \ge 4$亦满足条件，可知$\omega \in \left[\frac{9}{4},\ \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4},\ +\infty\right)$.

8. 对四位数$\overline{abcd}\ (1\le a\le 9,\ 0\le b,c,d\le 9)$，若$a>b,\ b<c,\ c>d$，则称$\overline{abcd}$为$P$类数；若$a<b,\ b>c,\ c<d$，则称$\overline{abcd}$为$Q$类数．用$N(P)$与$N(Q)$分别表示$P$类数与$Q$类数的个数，则$N(P)-N(Q)$的值为____________.

答案：285.

解：分别记P类数、Q类数的全体为A、B，再将个位数为零的P类数全体记为A_0，个位数不等于零的P类数全体记为A_1.

对任一四位数$\overline{abcd}\in A_1$，将其对应到四位数$\overline{dcba}$，注意到$a>b,\ b<c,\ c>d\ge 1$，故$\overline{dcba}\in B$．反之，每个$\overline{dcba}\in B$唯一对应于A_1中的元素$\overline{abcd}$．这建立了A_1与B之间的一一对应，因此有

$$N(P)-N(Q)=|A|-|B|=|A_0|+|A_1|-|B|=|A_0|.$$

下面计算$|A_0|$：对任一四位数$\overline{abc0}\in A_0$，b可取$0,1,\cdots,9$，对其中每个b，由$b<a\le 9$及$b<c\le 9$知，a和c分别有$9-b$种取法，从而

$$|A_0|=\sum_{b=0}^{9}(9-b)^2=\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9\times10\times19}{6}=285 .$$

因此，$N(P)-N(Q)=285$.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）若实数$a,\ b,\ c$满足$2^a+4^b=2^c,\ 4^a+2^b=4^c$，求$c$的最小值.

解：将$2^a,\ 2^b,\ 2^c$分别记为$x,\ y,\ z$，则$x,\ y,\ z>0$.

由条件知，$x+y^2=z,\ x^2+y=z^2$，故

$$z^2-y=x^2=(z-y^2)^2=z^2-2y^2z+y^4 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{分}$$

因此，结合平均值不等式可得，

$$z=\frac{y^4+y}{2y^2}=\frac{1}{4}\left(2y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{2y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$

…………………12 分

当 $2y^2=\frac{1}{y}$，即 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，z 的最小值为 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$（此时相应的 x 值为 $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$，符合要求）.

由于 $c=\log_2 z$，故 c 的最小值为 $\log_2\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)=\log_2 3-\frac{5}{3}$.　　…………………16 分

10.（本题满分 20 分）设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数，使得

$$\left\{a_ia_j\,\middle|\,1\le i<j\le 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\},$$

求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

解: 由条件可知，$a_ia_j\ (1\le i<j\le 4)$ 是 6 个互不相同的数，且其中没有两个为相反数，由此知，a_1,a_2,a_3,a_4 的绝对值互不相等，不妨设 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$，则 $|a_i||a_j|\ (1\le i<j\le 4)$ 中最小的与次小的两个数分别是 $|a_1||a_2|$ 及 $|a_1||a_3|$，最大与次大的两个数分别是 $|a_3||a_4|$ 及 $|a_2||a_4|$，从而必须有

$$\begin{cases}a_1a_2=-\frac{1}{8},\\ a_1a_3=1,\\ a_2a_4=3,\\ a_3a_4=-24,\end{cases}$$

…………………10 分

于是 $a_2=-\frac{1}{8a_1},a_3=\frac{1}{a_1},a_4=\frac{3}{a_2}=-24a_1$.故

$$\{a_2a_3,a_1a_4\}=\left\{-\frac{1}{8a_1^2},-24a_1^2\right\}=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\},$$　　…………15 分

结合 $a_1\in\mathbb{Q}$，只可能 $a_1=\pm\frac{1}{4}$.

由此易知 $a_1=\frac{1}{4},\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=4,\ a_4=-6$ 或者 $a_1=-\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=-4,\ a_4=6$．经检验知这两组解均满足问题的条件.

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.　　…………………20 分

11.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，F_1、F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点．设不经过焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于两个不同的点 A、B，焦点 F_2 到直线 l 的距离为 d．如果直线 AF_1、l、BF_1 的斜率依次成等差数列，求 d 的取值范围.

解：由条件知，点 F_1、F_2 的坐标分别为 $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ 0)$.

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，则 $x_1,\ x_2$ 满足方程 $\dfrac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，即

$$(2k^2+1)x^2+4kmx+(2m^2-2)=0. \qquad ①$$

由于点 A、B 不重合，且直线 l 的斜率存在，故 $x_1,\ x_2$ 是方程①的两个不同实根，因此有①的判别式

$$\Delta=(4km)^2-4\cdot(2k^2+1)\cdot(2m^2-2)=8(2k^2+1-m^2)>0,$$

即
$$2k^2+1>m^2. \qquad ②$$

由直线 AF_1、l、BF_1 的斜率 $\dfrac{y_1}{x_1+1}$、k、$\dfrac{y_2}{x_2+1}$ 依次成等差数列知，$\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=2k$，又 $y_1=kx_1+m,\ y_2=kx_2+m$，所以

$$(kx_1+m)(x_2+1)+(kx_2+m)(x_1+1)=2k(x_1+1)(x_2+1).$$

化简并整理得，
$$(m-k)(x_1+x_2+2)=0.$$

假如 $m=k$，则直线 l 的方程为 $y=kx+k$，即 l 经过点 $F_1(-1,\ 0)$，不符合条件.

因此必有 $x_1+x_2+2=0$，故由方程①及韦达定理知，$\dfrac{4km}{2k^2+1}=-(x_1+x_2)=2$，即

$$m=k+\frac{1}{2k}. \qquad ③$$

由②、③知，$2k^2+1>m^2=\left(k+\dfrac{1}{2k}\right)^2$，化简得 $k^2>\dfrac{1}{4k^2}$，这等价于 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

反之，当 $m,\ k$ 满足③及 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，l 必不经过点 F_1（否则将导致 $m=k$，与③矛盾），而此时 $m,\ k$ 满足②，故 l 与椭圆有两个不同的交点 A、B，同时也保证了 AF_1、BF_1 的斜率存在（否则 $x_1,\ x_2$ 中的某一个为 -1，结合 $x_1+x_2+2=0$ 知 $x_1=x_2=-1$，与方程①有两个不同的实根矛盾）. ……………………10 分

点 $F_2(1,\ 0)$ 到直线 $l: y=kx+m$ 的距离为

$$d=\frac{|k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\left|2k+\frac{1}{2k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}}\cdot\left(2+\frac{1}{2k^2}\right). \qquad ………15 分$$

注意到 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，令 $t=\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}$，则 $t\in(1,\ \sqrt{3})$，上式可改写为

$$d=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{3}{t}\right). \qquad ④$$

考虑到函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(t+\dfrac{3}{t}\right)$ 在 $[1,\ \sqrt{3}]$ 上单调递减，故由④得，$f(\sqrt{3})<d<f(1)$，即

$$d\in(\sqrt{3},\ 2). \qquad ……………………20 分$$

2015年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 是实数，证明：可以选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\leq (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

证法一：我们证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2\leq (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right),\qquad ①$$

即对 $i=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$，取 $\varepsilon_i=1$；对 $i=\left[\frac{n}{2}\right]+1,\cdots,n$，取 $\varepsilon_i=-1$ 符合要求.（这里，$[x]$ 表示实数 x 的整数部分.） ……………………10分

事实上，①的左边为

$$\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i+\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i\right)^2+2\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$\leq 2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$ （柯西不等式） …………30分

$$=2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$ （利用 $n-\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]$）

$$\leq n\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+(n+1)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$ （利用 $[x]\leq x$）

$$\le (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

所以①得证，从而本题得证． ……………………40 分

证法二：首先，由于问题中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的对称性，可设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$．此外，若将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的负数均改变符号，则问题中的不等式左边的 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ 不减，而右边的 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 不变，并且这一手续不影响 $\varepsilon_i = \pm 1$ 的选取，因此我们可进一步设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$． ……………………10 分

引理：设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$，则 $0 \le \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \le a_1$．

事实上，由于 $a_i \ge a_{i+1}\ (i=1, 2, \cdots, n-1)$，故当 n 是偶数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \le a_1.$$

当 n 是奇数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-1} - a_n) \le a_1.$$

引理得证． ……………………30 分

回到原题，由柯西不等式及上面引理可知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i\right)^2 \le n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a_1^2$$

$$\le (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

这就证明了结论． ……………………40 分

二、（本题满分 40 分）设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合（$n\ge 2$），满足对任意 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\cup A_j\in S$．若 $k=\min\limits_{1\le i\le n}|A_i|\ge 2$．证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\dfrac{n}{k}$ 个集合（这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数）.

证明：不妨设 $|A_1|=k$．设在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中与 A_1 不相交的集合有 s 个，重新记为 $B_1,B_2,\cdots,B_s$，设包含 A_1 的集合有 t 个，重新记为 $C_1,C_2,\cdots,C_t$．由已知条件，$(B_i\cup A_1)\in S$，即 $(B_i\cup A_1)\in\{C_1,C_2,\cdots,C_t\}$，这样我们得到一个映射

$$f:\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}\to\{C_1,C_2,\cdots,C_t\},\quad f(B_i)=B_i\cup A_1.$$

显然 f 是单映射，于是 $s\le t$． ……………………10 分

设 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$．在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中除去 $B_1,B_2,\cdots,B_s,C_1,C_2,\cdots,C_t$ 后，在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，设包含 a_i 的集合有 x_i 个（$1\le i\le k$），由于剩下的 $n-s-t$ 个集合中每个集合与 A_1 的交非空，即包含某个 a_i，从而

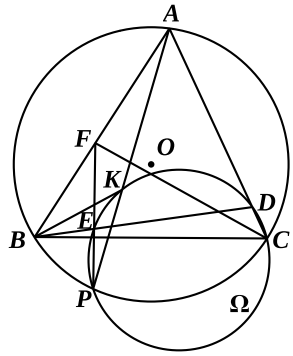
$$x_1+x_2+\cdots+x_k\ge n-s-t. \qquad \text{……………………20 分}$$

不妨设 $x_1=\max\limits_{1\le i\le k}x_i$，则由上式知 $x_1\ge\dfrac{n-s-t}{k}$，即在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，包含 a_1 的集合至少有 $\dfrac{n-s-t}{k}$ 个．又由于 $A_1\subseteq C_i$（$i=1,\cdots,t$），故 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 都包含 a_1，因此包含 a_1 的集合个数至少为

$$\frac{n-s-t}{k}+t=\frac{n-s+(k-1)t}{k}\ge\frac{n-s+t}{k}\ \text{（利用 } k\ge 2\text{）}$$

$$\ge\frac{n}{k}\ \text{（利用 } t\ge s\text{）}. \qquad \text{……………………40 分}$$

三、（本题满分 50 分）如图，ΔABC 内接于圆 O，P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分 $\angle ABC$．过 K、P、C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于点 D，连接 BD 交圆 Ω 于点 E，连接 PE 并延长与边 AB 交于点 F．证明：$\angle ABC=2\angle FCB$．



证法一：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C），连接 PB、PC、BL、KL.

注意此时 C、D、L、K、E、P 六点均在圆 Ω 上，结合 A、B、P、C 四点共圆，可知

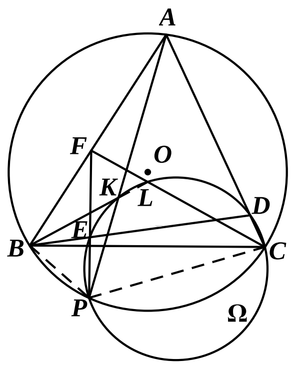
$$\angle FEB=\angle DEP=180^\circ-\angle DCP=\angle ABP=\angle FBP,$$

因此 $\Delta FBE\backsim\Delta FPB$，故 $FB^2=FE\cdot FP$. ……………………10 分

又由圆幂定理知，$FE\cdot FP=FL\cdot FC$，所以

$$FB^2=FL\cdot FC,$$

从而 $\Delta FBL\backsim\Delta FCB$. ……………………20 分



因此

$$\angle FLB=\angle FBC=\angle APC=\angle KPC=\angle FLK,$$

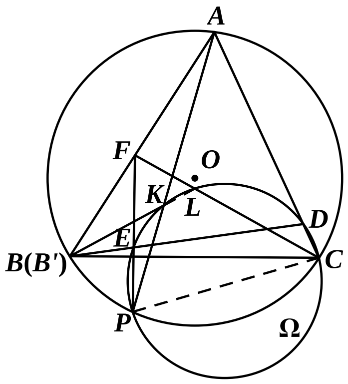
即 B、K、L 三点共线. ……………………30 分

再根据 $\Delta FBL\backsim\Delta FCB$ 得，

$$\angle FCB=\angle FBL=\angle FBE=\frac{1}{2}\angle ABC,$$

即 $\angle ABC=2\angle FCB$. ……………………50 分

证法二：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C）. 对圆内接广义六边形 $DCLKPE$ 应用帕斯卡定理可知，DC 与 KP 的交点 A、CL 与 PE 的交点 F、LK 与 ED 的交点 B' 共线，因此 B' 是 AF 与 ED 的交点，即 $B'=B$. 所以 B、K、L 共线. ……………………30 分



根据 A、B、P、C 四点共圆及 L、K、P、C 四点共圆，得

$$\angle ABC=\angle APC=\angle FLK=\angle FCB+\angle LBC,$$

又由 BK 平分 $\angle ABC$ 知，$\angle LBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，从而 $\angle ABC=2\angle FCB$.

……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 求具有下述性质的所有正整数 k：对任意正整数 n，$2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\dfrac{(kn)!}{n!}$.

解：对正整数 m，设 $\nu_2(m)$ 表示正整数 m 的标准分解中素因子 2 的方幂，则熟知

$$\nu_2(m!)=m-S(m)\text{，} \qquad ①$$

这里$S(m)$表示正整数m在二进制表示下的数码之和.

由于 $2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$ 等价于 $\nu_2\left(\frac{(kn)!}{n!}\right)\le(k-1)n$ ，即 $kn-\nu_2((kn)!)\ge n-\nu_2(n!)$， 进而由①知，本题等价于求所有正整数$k$，使得 $S(kn)\ge S(n)$对任意正整数n成立. …………………10 分

我们证明，所有符合条件的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$.

一方面，由于$S(2^a n)=S(n)$对任意正整数n成立，故$k=2^a$符合条件.

…………………20 分

另一方面，若k不是 2 的方幂，设$k=2^a\cdot q$， $a\ge 0$， q是大于 1 的奇数.

下面构造一个正整数n，使得$S(kn)<S(n)$. 因为$S(kn)=S(2^a qn)=S(qn)$，因此问题等价于我们选取q的一个倍数m，使得$S(m)<S\left(\frac{m}{q}\right)$.

由$(2,q)=1$，熟知存在正整数u，使得$2^u\equiv 1(\bmod q)$.（事实上，由欧拉定理知，u可以取$\varphi(q)$.）

设奇数q的二进制表示为$2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_t}, 0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_t,\ t\ge 2$.

取$m=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_{t-1}}+2^{\alpha_t+tu}$， 则$S(m)=t$，且

$$m=q+2^{\alpha_t}(2^{tu}-1)\equiv 0\,(\bmod q).$$

我们有

$$\frac{m}{q}=1+2^{\alpha_t}\cdot\frac{2^{tu}-1}{q}=1+2^{\alpha_t}\cdot\frac{2^u-1}{q}\left(1+2^u+\cdots+2^{(t-1)u}\right)$$

$$=1+\sum_{l=0}^{t-1}\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_t}\ . \qquad ②$$

由于$0<\frac{2^u-1}{q}<2^u$, 故正整数$\frac{2^u-1}{q}$的二进制表示中的最高次幂小于u，由此易知，对任意整数$i,j\,(0\le i<j\le t-1)$，数$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{iu+\alpha_t}$与$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{ju+\alpha_t}$的二进制表示

中没有相同的项.

又因为$\alpha_t > 0$，故$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_t}\left(l=0,1,\cdots,t-1\right)$的二进制表示中均不包含 1，故由②可知

$$S\left(\frac{m}{q}\right)=1+S\left(\frac{2^u-1}{q}\right)\cdot t > t = S(m),$$

因此上述选取的m满足要求.

综合上述的两个方面可知，所求的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$. ……………50 分