2016年全国高中数学联赛（B卷）一试

一、选择题：（每小题 8 分，共 64 分）

1.等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1a_3+a_2a_6+2a_3^{\ 2}=36,$则$a_2+a_4$的值为_______.

2.设$A=\{a\mid -1\le a\le 2\}$，则平面点集$B=\{(x,y)\mid x,y\in A,x+y\ge 0\}$的面积为______.

3.已知复数z满足$z^2+2z=\overline{z}\ne z$（$\overline{z}$表示z的共轭复数），则z的所有可能值的积为____.

4.已知$f(x),g(x)$均为定义在R上的函数，$f(x)$的图像关于直线$x=1$对称，$g(x)$的图像关于点$(1,-2)$中心对称，且$f(x)+g(x)=9^x+x^3+1$，则$f(2)g(2)$的值为_______.

5.将红、黄、蓝 3 个球随机放入 5 个不同的盒子A,B,C,D,E中，恰有两个球放在同一盒子的概率为________.

6.在平面直角坐标系xOy中，圆$C_1:x^2+y^2-a=0$关于直线l对称的圆为$C_2:x^2+y^2+2x-2ay+3=0,$则直线l的方程为______________________________.

7.已知正四棱锥$V\text{-}ABCD$的高等于AB长度的一半，M是侧棱VB的中点，N是侧棱VD上点，满足$DN=2VN$，则异面直线AM,BN所成角的余弦值为_______.

8.设正整数n满足$n\le 2016$，且$\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{4}\right\}+\left\{\frac{n}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{12}\right\}=3$．这样的$n$的个数为________．这里$\{x\}=x-[x]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

二、解答题：（共 3 小题，共 56 分）

9.（16 分）已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且a_{50},a_{51}是方程$100\lg^2 x=\lg(100x)$的两个不同的解，求$a_1a_2\cdots a_{100}$的值.

10.（20 分）在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}.$

（1）将BC,CA,AB的长分别记为a,b,c，证明：$a^2+2b^2=3c^2$；

（2）求$\cos C$的最小值.

11.（20 分）在平面直角坐标系xOy中，双曲线C的方程为$x^2-y^2=1$．求符合以下要求的所有大于1的实数a：过点$(a,0)$任意作两条互相垂直的直线l_1与l_2，若l_1与双曲线C交于P,Q两点，l_2与C交于R,S两点，则总有$|PQ|=|RS|$成立.

加试

一、（40 分）非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2016}$ 和实数 $y_1,y_2,\cdots,y_{2016}$ 满足：

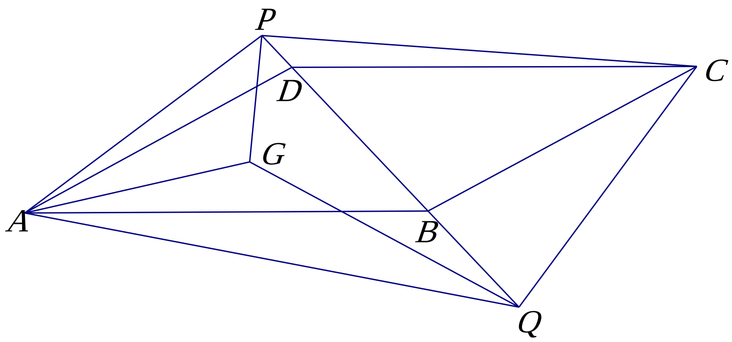
（1） ${x_k}^2+{y_k}^2=1,k=1,2,\cdots,2016$；

（2） $y_1+y_2+\cdots+y_{2016}$ 是奇数.

求 $x_1+x_2+\cdots+x_{2016}$ 的最小值.

二、（40 分）设 n,k 是正整数，且 n 是奇数. 已知 $2n$ 的不超过 k 的正约数的个数为奇数，证明： $2n$ 有一个约数 d ，满足 $k<d\le 2k$.

三、（50 分）如图所示， $ABCD$ 是平行四边形，G 是 $\triangle ABD$ 的重心，点 P,Q 在直线 BD 上，使得 $GP\perp PC,GQ\perp QC$. 证明： AG 平分 $\angle PAQ$.



四、（50 分）设 A 是任意一个 11 元实数集合．令集合 $B=\{uv\mid u,v\in A,u\ne v\}$. 求 B 的元素个数的最小值.

2016年全国高中数学联赛（B卷）试题及答案

一试

一、选择题：（每小题8分，共64分）

1.等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1a_3+a_2a_6+2a_3^2=36,$则a_2+a_4的值为_______.

答案：6.

解:由于$36=a_1a_3+a_2a_6+2a_3^2=a_2^2+a_4^2+2a_2a_4=\left(a_2+a_4\right)^2$,且$a_2+a_4>0,$故$a_2+a_4=6.$

另解：设等比数列的公比为q，则$a_2+a_6=a_1q+a_1q^5.$又因

$$36=a_1a_3+a_2a_6+2a_3^2=a_1\cdot a_1q^2+a_1q\cdot a_1q^5+2\left(a_1q^2\right)^2$$

$$=\left(a_1q\right)^2+2\cdot a_1q\cdot a_1q^3+\left(a_1q^3\right)^2=\left(a_1q+a_1q^3\right)^2=\left(a_2+a_4\right)^2,$$

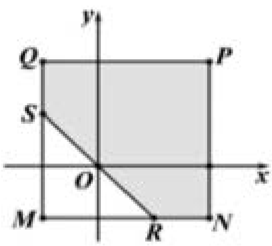
而$a_2+a_4>0$，从而$a_2+a_4=6.$

2.设$A=\{a\mid -1\le a\le 2\}$，则平面点集$B=\{(x,y)\mid x,y\in A,x+y\ge 0\}$的面积为______.

答案：7.

解：点集B如图中阴影部分所示，其面积为

$$S_{\text{正方形}MNPQ}-S_{\triangle MRS}=3\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 2=7.$$



3.已知复数z满足$z^2+2z=\overline{z}\ne z$（$\overline{z}$表示z的共轭复数），则z的所有可能值的积为____.

答案：3.

解：设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in R\right).$由$z^2+2z=\overline{z}$知，

$$a^2-b^2+2ab\mathrm{i}+2a+2b\mathrm{i}=a-b\mathrm{i},$$

比较虚、实部得$a^2-b^2+a=0,2ab+3b=0.$又由$\overline{z}\ne z$知$b\ne 0$，从而有

$2a+3=0,$即$a=-\dfrac{3}{2}$，进而$b=\pm\sqrt{a^2+a}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

于是，满足条件的复数z的积为$\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=3.$

4.已知$f(x),g(x)$均为定义在R上的函数，$f(x)$的图像关于直线$x=1$对称，$g(x)$的图

像关于点 $(1,-2)$ 中心对称，且 $f(x)+g(x)=9^x+x^3+1$，则 $f(2)g(2)$ 的值为________.

答案：2016.

解：由条件知

$$f(0)+g(0)=2, \qquad ①$$

$$f(2)+g(2)=81+8+1=90. \qquad ②$$

由 $f(x), g(x)$ 图像的对称性，可得 $f(0)=f(2), g(0)+g(2)=-4,$ 结合①知，

$$f(2)-g(2)-4=f(0)+g(0)=2. \qquad ③$$

由②、③解得 $f(2)=48, g(2)=42,$ 从而 $f(2)g(2)=48\times 42=2016.$

另解：因为

$$f(x)+g(x)=9^x+x^3+1, \qquad ①$$

所以

$$f(2)+g(2)=90. \qquad ②$$

因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，所以

$$f(x)=f(2-x). \qquad ③$$

又因为 $g(x)$ 的图像关于点 $(1,-2)$ 中心对称，所以函数 $h(x)=g(x+1)+2$ 是奇函数，

$h(-x)=-h(x)$，$g(-x+1)+2=-\left[g(x+1)+2\right]$，从而

$$g(x)=-g(2-x)-4. \qquad ④$$

将③、④代入①，再移项，得

$$f(2-x)-g(2-x)=9^x+x^3+5. \qquad ⑤$$

在⑤式中令 $x=0$，得

$$f(2)-g(2)=6. \qquad ⑥$$

由②、⑥解得 $f(2)=48, g(2)=46.$ 于是 $f(2)g(2)=2016.$

5.将红、黄、蓝 3 个球随机放入 5 个不同的盒子 A,B,C,D,E 中，恰有两个球放在同一盒子的概率为________.

解：样本空间中有 $5^3=125$ 个元素．而满足恰有两个球放在同一盒子的元素个数为 $C_3^2\times P_5^2=60.$ 过所求的概率为 $p=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}.$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C_1: x^2+y^2-a=0$ 关于直线 l 对称的圆为

$C_2: x^2+y^2+2x-2ay+3=0,$ 则直线 l 的方程为________________________.

答案：$2x-4y+5=0.$

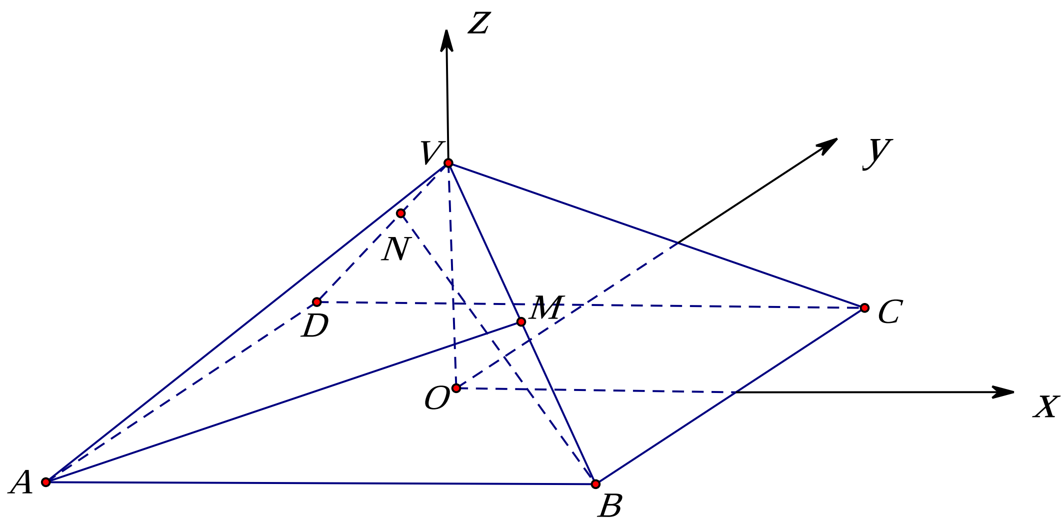
解：C_1, C_2 的标准方程分别为

$C_1: x^2+y^2=1, C_2: (x+1)^2+(y-a)^2=a^2-2.$

由于两圆关于直线 l 对称，所以它们的半径相等．因此 $a=a^2-2>0,$ 解得 $a=2.$ 故 C_1, C_2 的圆心分别是 $O_1(0,0), O_2(-1,2).$ 直线 l 就是线段 O_1O_2 的垂直平分线，它通过 O_1O_2 的中点 $M\left(-\frac{1}{2},1\right)$，由此可得直线 l 的方程是 $2x-4y+5=0.$

7.已知正四棱锥 V - $ABCD$ 的高等于 AB 长度的一半，M 是侧棱 VB 的中点，N 是侧棱 VD 上点，满足 $DN=2VN$，则异面直线 AM, BN 所成角的余弦值为________.

解：如图，以底面 $ABCD$ 的中心 O 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OV}$ 的方向为 x, y, z 轴的正向，



建立空间直角坐标系．不妨设 $AB=2,$ 此时高 $VO=1,$ 从而

$A(-1,-1,0), B(1,-1,0), D(-1,1,0), V(0,0,1).$

由条件知 $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), N\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，因此

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BN}=\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right).$

设异面直线 AM, BN 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BN}\right|}=\frac{|-1|}{\frac{\sqrt{11}}{2}\times 2}=\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

8. 设正整数 n 满足 $n \le 2016$，且 $\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{4}\right\}+\left\{\frac{n}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{12}\right\}=3$．这样的 n 的个数为________．这里 $\{x\}=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

解：由于对任意整数 n，有

$$\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{4}\right\}+\left\{\frac{n}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{12}\right\} \le \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{11}{12}=3,$$

等号成立的充分必要条件是 $n \equiv -1 \pmod{12}$，结合 $1 \le n \le 2016$ 知，满足条件的所有正整数为 $n=12k-1(k=1,2,\cdots,168)$, 共有168个．

另解：首先注意到，若 m 为正整数，则对任意整数 x,y，若 $x \equiv y \pmod m$，则 $\left\{\frac{x}{m}\right\}=\left\{\frac{y}{m}\right\}$.

这是因为，当 $x \equiv y \pmod m$ 时，$x=y+mt$，这里 t 是一个整数，故

$$\left\{\frac{x}{m}\right\}=\frac{x}{m}-\left[\frac{x}{m}\right]=\frac{y+mt}{m}-\left[\frac{y+mt}{m}\right]=\frac{y}{m}+t-\left[t+\frac{y}{m}\right]=\frac{y}{m}-\left[\frac{y}{m}\right]=\left\{\frac{y}{m}\right\}.$$

因此，当整数 n_1,n_2 满足 $n_1 \equiv n_2 \pmod{12}$ 时，

$$\left\{\frac{n_1}{2}\right\}+\left\{\frac{n_1}{4}\right\}+\left\{\frac{n_1}{6}\right\}+\left\{\frac{n_1}{12}\right\}=\left\{\frac{n_2}{2}\right\}+\left\{\frac{n_2}{4}\right\}+\left\{\frac{n_2}{6}\right\}+\left\{\frac{n_2}{12}\right\}.$$

容易验证，当正整数满足 $1 \le n \le 12$ 时，只有当 $n=11$ 时，等式 $\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{4}\right\}+\left\{\frac{n}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{12}\right\}=3$ 才成立．而 $2016=12\times168$，故当 $1 \le n \le 2016$ 时，满足 $\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{4}\right\}+\left\{\frac{n}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{12}\right\}=3$ 正整数 n 的个数为168.

二、解答题：（共 3 小题，共 56 分）

9.（16 分）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 a_{50},a_{51} 是方程

$$100\lg^2 x=\lg(100x)$$

的两个不同的解，求 $a_1a_2\cdots a_{100}$ 的值．

解 对 $k=50,51$，有 $100\lg^2 a_k=\lg(100a_k)=2+\lg a_k$, 即

$$100(\lg a_k)^2-\lg a_k-2=0.$$

因此，$\lg a_{50},\lg a_{51}$ 是一元二次方程 $100t^2-t-2=0$ 的两个不同实根，从而

$$\lg(a_{50}a_{51})=\lg a_{50}+\lg a_{51}=\frac{1}{100}, \text{即 } a_{50}a_{51}=10^{\frac{1}{100}}.$$

由等比数列的性质知，$a_1a_2\cdots a_{100}=(a_{50}a_{51})^{50}=\left(10^{\frac{1}{100}}\right)^{50}=\sqrt{10}.$

10.（20 分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}.$

（1）将 BC,CA,AB 的长分别记为 a,b,c，证明：$a^2+2b^2=3c^2$；

（2）求 $\cos C$ 的最小值.

解 （1）由数量积的定义及余弦定理知，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

同理得，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2},\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$. 故已知条件化为

$$b^2+c^2-a^2+2\left(a^2+c^2-b^2\right)=3\left(a^2+b^2-c^2\right),$$

即 $a^2+2b^2=3c^2$.

（2）由余弦定理及基本不等式，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{3}\left(a^2+2b^2\right)}{2ab}$$
$$=\frac{a}{3b}+\frac{b}{6a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{3b}\cdot\frac{b}{6a}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

等号成立当且仅当 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$. 因此 $\cos C$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

11.（20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=1$．求符合以下要求的所有大于 1 的实数 a：过点 $(a,0)$ 任意作两条互相垂直的直线 l_1 与 l_2，若 l_1 与双曲线 C 交于 P,Q 两点，l_2 与 C 交于 R,S 两点，则总有 $|PQ|=|RS|$ 成立.

解 过点 $(a,0)$ 作两条互相垂直的直线 $l_1:x=a$ 与 $l_2:y=0$.

易知，l_1 与 C 交于点 $P_0\left(a,\sqrt{a^2-1}\right),Q_0\left(a,-\sqrt{a^2-1}\right)$（注意这里 $a>1$），l_2 与 C 交于点 $R_0(1,0),S_0(-1,0)$, 由条件知 $2\sqrt{a^2-1}=|P_0Q_0|=|R_0S_0|=2$，解得 $a=\sqrt{2}$.

这意味着符合条件的 a 只可能为 $\sqrt{2}$.

下面验证 $a=\sqrt{2}$ 符合条件.

事实上，当 l_1,l_2 中有某条直线斜率不存在时，则可设 $l_1:x=a,l_2:y=0$，就是前面所讨论的 l_1,l_2 的情况，这时有 $|PQ|=|RS|$. 若 l_1,l_2 的斜率都存在，不妨设

$$l_1:y=k\left(x-\sqrt{2}\right),l_2:y=-\frac{1}{k}\left(x-\sqrt{2}\right)(k\neq 0),$$

注意这里 $k\neq\pm1$（否则 l_1 将与 C 的渐近线平行，从而 l_1 与 C 只有一个交点）.

联立 l_1 与 C 的方程知，$x^2-k^2\left(x-\sqrt{2}\right)^2-1=0$, 即

$$\left(1-k^2\right)x^2-2\sqrt{2}k^2x-2k^2-1=0,$$

这是一个二次方程式，其判别式为 $\Delta=4k^2+4>0$．故 l_1 与 C 有两个不同的交点 P,Q．同样，

l_2 与 C 也有两个不同的交点 R,S. 由弦长公式知，

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{4k^2+4}}{|1-k^2|}=2\cdot\left|\frac{1+k^2}{1-k^2}\right|.$$

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k，同理可得 $|RS|=2\cdot\left|\frac{1+(-k)^{-2}}{1-(-k)^{-2}}\right|=2\left|\frac{k^2+1}{k^2-1}\right|$. 于是 $|PQ|=|RS|$.

综上所述，$a=\sqrt{2}$ 为符合条件的值.

加试

一、（40 分）非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2016}$ 和实数 $y_1,y_2,\cdots,y_{2016}$ 满足：

（1）$x_k^{\ 2}+y_k^{\ 2}=1,k=1,2,\cdots,2016$；

（2）$y_1+y_2+\cdots+y_{2016}$ 是奇数.

求 $x_1+x_2+\cdots+x_{2016}$ 的最小值.

解：由已知条件（1）可得：$|x_k|\le 1,|y_k|\le 1,k=1,2,\cdots,2016,$ 于是（注意 $x_i\ge 0$）

$$\sum_{k=1}^{2016}x_k\ge\sum_{k=1}^{2016}x_k^{\ 2}=\sum_{k=1}^{2016}\left(1-y_k^{\ 2}\right)=2016-\sum_{k=1}^{2016}y_k^{\ 2}\ge 2016-\sum_{k=1}^{2016}|y_k|. \qquad ①$$

不妨设 $y_1,\cdots,y_m>0,y_{m+1},\cdots,y_{2016}\le 0,0\le m\le 2016,$ 则

$$\sum_{k=1}^{m}y_k\le m,-\sum_{k=m+1}^{2016}y_k\le 2016-m.$$

若 $\sum_{k=1}^{m}y_k>m-1$，并且 $-\sum_{k=m+1}^{2016}y_k>2015-m,$ 令

$$\sum_{k=1}^{m}y_k=m-1+a,-\sum_{k=m+1}^{2016}y_k=2015-m+b,$$

则 $0<a,b<1,$ 于是

$$\sum_{k=1}^{2016}y_k=\sum_{k=1}^{m}y_k+\sum_{k=m+1}^{2016}y_k=m-1+a-(2015-m+b)$$
$$=2m-2016+a-b,$$

由条件（2）知，$\sum_{k=1}^{2016}y_k$ 是奇数，所以 $a-b$ 是奇数，这与 $0<a,b<1$ 矛盾.

因此必有 $\sum_{k=1}^{m}y_k\le m-1$，或者 $-\sum_{k=m+1}^{2016}y_k\le 2015-m,$ 则

$$\sum_{k=1}^{2016}|y_k|=\sum_{k=1}^{m}y_k-\sum_{k=m+1}^{2016}y_k\le 2015.$$

于是结合①得 $\sum_{k=1}^{2016}x_k\ge 1.$

又当 $x_1=x_2=\cdots=x_{2015}=0,x_{2016}=1,y_1=y_2=\cdots=y_{2015}=1,y_{2016}=0$ 时满足题设条件，且使得不等式等号成立，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{2016}$ 的最小值为 1.

二、（40 分）设 n,k 是正整数，且 n 是奇数. 已知 $2n$ 的不超过 k 的正约数的个数为奇数，证明：$2n$ 有一个约数 d，满足 $k<d\le 2k$.

证明：记 $A=\{d\mid d\mid 2n,0<d\le k,d\text{是奇数}\}$， $B=\{d\mid d\mid 2n,0<d\le k,d\text{是偶数}\}$，则 $A\cap B=\varnothing,2n$ 的不超过 k 的正约数的集合是 $A\cup B.$

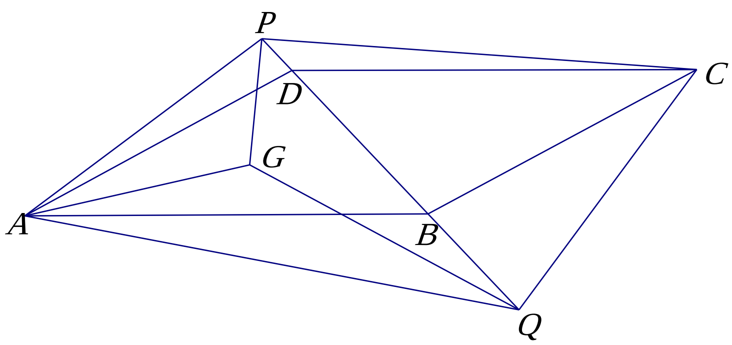
若结论不成立，我们证明 $|A|=|B|.$

对 $d\in A$，因为 d 是奇数，故 $2d\mid 2n$，又 $2d\le 2k$，而 $2n$ 没有在区间 $(k,2k]$ 中的约数，故 $2d\le k$，即 $2d\in B$，故 $|A|\le|B|.$

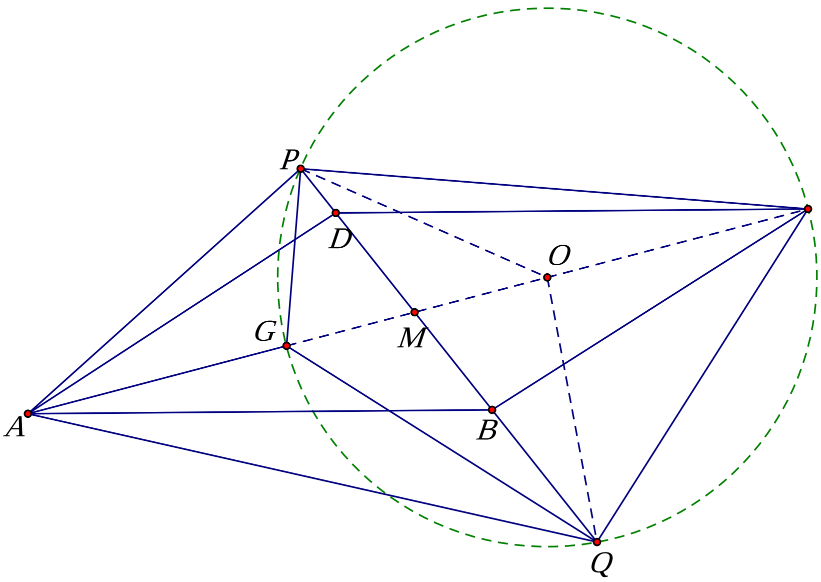
反过来，对 $d\in B$，设 $d=2d'$，则 $d'\mid n$，d' 是奇数，又 $d'\le\frac{k}{2}<k$，故 $d'\in A$, 从而 $|B|\le|A|.$

所以 $|A|=|B|.$ 故 $2n$ 的不超过 k 的正约数的个数为偶数，与已知矛盾．从而结论成立．

三、(50 分) 如图所示，$ABCD$ 是平行四边形，G 是 $\triangle ABD$ 的重心，点 P,Q 在直线 BD 上，使得 $GP\perp PC,GQ\perp QC.$ 证明：AG 平分 $\angle PAQ.$



解：连接 AC，与 BD 交于点 $M.$ 由平行四边形的性质，点 M 是 AC,BD 的中点．因此，



点 G 在线段 AC 上．

由于 $\angle GPC=\angle GQC=90^\circ$，所以 P,G,Q,C 四点共圆，并且其外接圆是以 GC 为直径的圆．由相交弦定理知

$PM \cdot MQ = GM \cdot MC.$ ①

取 GC 的中点 $O.$ 注意到 $AG:GM:MC = 2:1:3,$ 故有

$$OC = \frac{1}{2}GC = AG,$$

因此 G,O 关于点 M 对称．于是

$GM \cdot MC = AM \cdot MO.$ ②

结合①、②，有 $PM \cdot MQ = AM \cdot MO$，因此 A,P,O,Q 四点共圆．

又 $OP = OQ = \frac{1}{2}GC,$ 所以 $\angle PAO = \angle QAO$，即 AG 平分 $\angle PAQ.$

四、(50 分）设 A 是任意一个 11 元实数集合．令集合 $B = \{uv \mid u,v \in A, u \neq v\}.$ 求 B 的元素个数的最小值．

解：先证明 $|B| \geq 17.$ 考虑到将 A 中的所有元素均变为原来的相反数时，集合 B 不变，故不妨设 A 中正数个数不少于负数个数．下面分类讨论：

情况一：A 中没有负数．

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$ 是 A 中的全部元素，这里 $a_1 \geq 0, a_2 > 0,$ 于是

$$a_1a_2 < a_2a_3 < a_2a_4 < \cdots < a_2a_{11} < a_3a_{11} < \cdots < a_{10}a_{11},$$

上式从小到大共有 $1+9+8=18$ 个数，它们均是 B 的元素，这表明 $|B| \geq 18.$

情况二：A 中至少有一个负数．

设 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 是 A 中的全部非负元素，$c_1, c_2, \cdots, c_l$ 是 A 中的全部负元素．不妨设

$$c_l < \cdots < c_1 < 0 \leq b_1 < \cdots < b_k,$$

其中 k,l 为正整数，$k+l=11$，而 $k \geq l$，故 $k \geq 6.$ 于是有

$$c_1b_1 > c_1b_2 > \cdots > c_1b_k > c_2b_k > \cdots > c_lb_k,$$

它们是 B 中的 $k+l-1=10$ 个元素，且非正数；又有

$$b_2b_3 < b_2b_4 < b_2b_5 < b_2b_6 < b_3b_6 < b_4b_6 < b_5b_6,$$

它们是 B 中的 7 个元素，且为正数．故 $|B| \geq 10+7=17.$

由此可知，$|B| \geq 17.$

另一方面，令 $A = \{0, \pm1, \pm2, \pm2^2, \pm2^3, \pm2^4\},$ 则

$$B = \{0, -1, \pm2, \pm2^2, \pm2^3, \cdots, \pm2^6, \pm2^7, -2^8\}$$

是个 17 元集合．

综上所述，B 的元素个数的最小值为17.