2014年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 若正数 a, b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值为__________.

答案：108 .

解：设 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)=k$，则 $a=2^{k-2},\ b=3^{k-3},\ a+b=6^k$，从而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-3}}=2^2\times 3^3=108$.

2. 设集合 $\left\{\frac{3}{a}+b \,\middle|\, 1\le a\le b\le 2\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m，则 $M-m$ 的值为__________.

答案：$5-2\sqrt{3}$.

解：由 $1\le a\le b\le 2$ 知，$\frac{3}{a}+b\le\frac{3}{1}+2=5$，当 $a=1, b=2$ 时，得最大元素 $M=5$. 又

$\frac{3}{a}\quad b\quad \frac{3}{a}\quad a\quad 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot a}\quad 2\sqrt{3}$，当 $a=b=\sqrt{\ }$ 时，得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

因此，$M-m=5-2\sqrt{3}$.

3. 若函数 $f(x)=x^2+a|x-1|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____.

答案：$[-2, 0]$.

解：在 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=x^2+ax-a$ 单调递增，等价于 $-\frac{a}{2}\le 1$，即 $a\ge -2$. 在 $[0, 1]$ 上，$f(x)=x^2-ax+a$ 单调递增，等价于 $\frac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$.

因此实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\frac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$______.

答案：$\frac{2015}{2013}$.

解：由题设

$$a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}a_{n-2}=\cdots$$
$$=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1) .$$

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=2+2\times 3+2^2\times 4+\cdots+2^{n-1}(n+1)\ ,$$

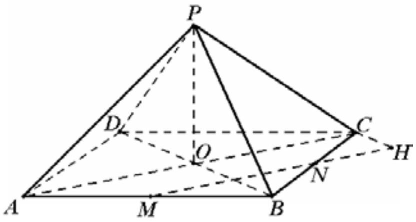
所以

$$2S_n=2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n(n+1) ,$$

将上面两式相减，得 $$S_n=2^n(n+1)-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2)$$
$$=2^n(n+1)-2^n=2^n n.$$

故 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=\dfrac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013}=\dfrac{2015}{2013}$.

5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面是边长为 1 的正三角形，M, N 分别是边 AB, BC 的中点，则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是__________.



答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解：设底面对角线 AC, BD 交于点 O，过点 C 作直线 MN 的垂线，交 MN 于点 H.

由于 PO 是底面的垂线，故 $PO\perp CH$，又 $AC\perp CH$，所以 CH 与平面 POC 垂直，故 $CH\perp PC$.

因此 CH 是直线 MN 与 PC 的公垂线段，又 $CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故异面直线 MN 与 PC 之间的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

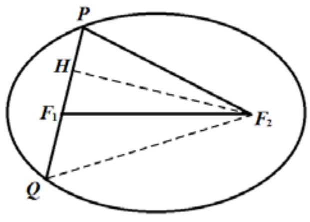
6. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1, F_2，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P, Q．若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 $3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为__________.

答案：$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

解：不妨设 $|PF_1|=4$, $|QF_1|=3$．记椭圆 Γ 的长轴，短轴的长度分别为 $2a$，$2b$，焦距为 $2c$，则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，且由椭圆的定义知，

$$2a=|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2c+4.$$

于是 $$|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|-|QF_1|=2c+1.$$

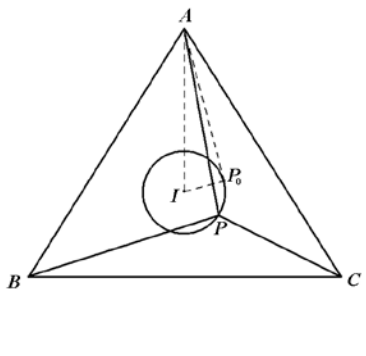


设 H 为线段 PF_1 的中点，则 $|F_1H|=2$, $|QH|=5$，且有 $F_2H\perp PF_1$．由勾股定理知，

$$|QF_2|^2-|QH|^2=|F_2H|^2=|F_1F_2|^2-|F_1H|^2,$$

即 $(2c+1)^2-5^2=(2c)^2-2^2$，解得 $c=5$，进而 $a=7$，$b=2\sqrt{6}$，因此椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I．若点 P 满足 $PI=1$，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为__________.



答案：$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

解：由 $PI=1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 K 上.

设$\angle BAP=\alpha$．在圆K上取一点P_0，使得α取到最大值α_0，此时P_0应落在$\angle IAC$内，且是AP_0与圆K的切点．由于$0<\alpha\le\alpha_0<\frac{\pi}{3}$，故

$$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AB\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\le\frac{\sin\alpha_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_0\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)},\qquad ①$$

其中，$\theta=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\angle IAP_0$．

由$\angle AP_0I=\frac{\pi}{2}$知，$\sin\theta=\frac{IP_0}{AI}=\frac{1}{2r}=\frac{1}{4}$，于是$\cot\theta=\sqrt{15}$，所以

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{\cot\theta+\sqrt{3}}{\cot\theta-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\qquad ②$$

根据①、②可知，当$P=P_0$时，$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}$的最大值为$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$．

8. 设A，B，C，D是空间四个不共面的点，以$\frac{1}{2}$的概率在每对点之间连一条边，任意两对点之间是否连边是相互独立的，则A，B可用（一条边或者若干条边组成的）空间折线连接的概率为__________．

答案：$\frac{3}{4}$．

解：每对点之间是否连边有2种可能，共有$2^6=64$种情况．考虑其中A，B可用折线连接的情况数．

(1) 有AB边：共$2^5=32$种情况．

(2) 无AB边，但有CD边：此时A，B可用折线连接当且仅当A与C，D中至少一点相连，且B与C，D中至少一点相连，这样的情况数为$(2^2-1)\times(2^2-1)=9$．

(3) 无AB边，也无CD边：此时AC，CB相连有2^2种情况，AD，DB相连也有2^2种情况，但其中AC，CB，AD，DB均相连的情况被重复计了一次，故A，B可用折线连接的情况数为$2^2+2^2-1=7$．

以上三类情况数的总和为$32+9+7=48$，故A，B可用折线连接的概率为$\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$．

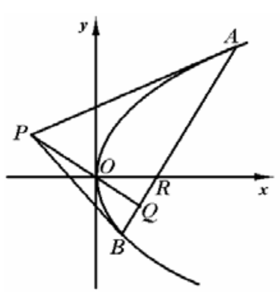
二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分）平面直角坐标系xOy中，P是不在x轴上的一个动点，满足条件：过P可作抛物线$y^2=4x$的两条切线，两切点连线l_P与PO垂直．

设直线l_P与直线PO，x轴的交点分别为Q，R．

(1) 证明R是一个定点；

(2) 求$\frac{|PQ|}{|QR|}$的最小值．



解： (1) 设 P 点的坐标为 $(a,b)\,(b\neq 0)$，易知 $a\neq 0$．记两切点 A，B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则 PA，PB 的方程分别为

$$yy_1=2(x+x_1)\,, \qquad ①$$

$$yy_2=2(x+x_2)\,, \qquad ②$$

而点 P 的坐标 (a,b) 同时满足①，②，故 A，B 的坐标 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 均满足方程

$$by=2(x+a)\,. \qquad ③$$

故③就是直线 AB 的方程.

直线 PO 与 AB 的斜率分别为 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{2}{b}$，由 $PO\perp AB$ 知，$\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{b}=-1$，故 $a=-2$．

…………………4 分

从而③即为 $y=\frac{2}{b}(x-2)$，故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点 $(2,0)$．　　…………8 分

(2) 因为 $a=-2$，故直线 PO 的斜率 $k_1=-\frac{b}{2}$，直线 PR 的斜率 $k_2=-\frac{b}{4}$．设 $\angle OPR=\alpha$，则 α 为锐角，且

$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{1}{\tan\alpha}=\left|\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}\right|=\left|\frac{1+\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2}+\frac{b}{4}}\right|=\frac{8+b^2}{2|b|}\geq\frac{2\sqrt{8\cdot b^2}}{2|b|}=2\sqrt{2}\,.$$

当 $b=\pm 2\sqrt{2}$ 时，$\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$．　　…………………16 分

10. （本题满分 20 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{\pi}{6}$，$a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)\,(n\in\mathbf{N}^*)$．求正整数 m，使得

$$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\frac{1}{100}\,.$$

解： 由已知条件可知，对任意正整数 n，$a_{n+1}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且

$$\tan a_{n+1}=\sec a_n\,. \qquad ①$$

由于 $\sec a_n>0$，故 $a_{n+1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$．由①得，$\tan^2 a_{n+1}=\sec^2 a_n=1+\tan^2 a_n$，故

$$\tan^2 a_n=n-1+\tan^2 a_1=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3}\,,$$

即 $\tan a_n=\sqrt{\frac{3n-2}{3}}$．　　…………………10 分

因此

$$\begin{aligned}\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m&=\frac{\tan a_1}{\sec a_1}\cdot\frac{\tan a_2}{\sec a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\sec a_m}\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}\quad（利用①）\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}}=\sqrt{\frac{1}{3m+1}}\,.\end{aligned}$$

由 $\sqrt{\frac{1}{3m+1}}=\frac{1}{100}$，得 $m=3333$．　　…………………20 分

11.（本题满分 20 分）确定所有的复数α，使得对任意复数$z_1,\ z_2\ (|z_1|,\ |z_2|<1,\ z_1\neq z_2)$，均有

$$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}.$$

解：记$f_\alpha(z)=(z+\alpha)^2+\alpha\overline{z}$．则

$$\begin{aligned}f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)&=(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}-(z_2+\alpha)^2-\alpha\overline{z_2}\\&=(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)+\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right).\end{aligned}\qquad ①$$

假如存在复数$z_1,\ z_2\ (|z_1|,\ |z_2|<1,\ z_1\neq z_2)$，使得$f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$，则由①知，

$$\left|\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\right|=\left|-(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)\right|,$$

利用$\left|\overline{z_1}-\overline{z_2}\right|=\left|\overline{z_1-z_2}\right|=|z_1-z_2|\neq0$知，$|\alpha|=|z_1+z_2+2\alpha|\geq2|\alpha|-|z_1|-|z_2|>2|\alpha|-2$，即$|\alpha|<2$．　　　　……………………10 分

另一方面，对任意满足$|\alpha|<2$的复数α，令$z_1=-\dfrac{\alpha}{2}+\beta\mathrm{i},\ z_2=-\dfrac{\alpha}{2}-\beta\mathrm{i}$，其中$0<\beta<1-\dfrac{|\alpha|}{2}$，则$z_1\neq z_2$，而$\left|-\dfrac{\alpha}{2}\pm\beta\mathrm{i}\right|\leq\left|-\dfrac{\alpha}{2}\right|+|\beta|<1$，故$|z_1|,\ |z_2|<1$．此时将

$$z_1+z_2=-\alpha,\quad z_1-z_2=2\beta\mathrm{i},\quad \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{2\beta\mathrm{i}}=-2\beta\mathrm{i}$$

代入①可得，$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=\alpha\cdot2\beta\mathrm{i}+\alpha\cdot(-2\beta\mathrm{i})=0$，即$f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$．

综上所述，符合要求的α的值为$\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha\in\mathbf{C},\ |\alpha|\geq2\right\}$．　　　　……………………20 分

2014 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$， $abc>0$. 求证：

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{}}{2}+\frac{1}{4}.$$

证明 1 若 $ab+bc+ca\le\frac{}{4}$，则命题已成立.

若 $ab+bc+ca>\frac{}{4}$，不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$，则由 $a+b+c=1$ 知 $a\ge\frac{}{3}$. 我们有

$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}\le\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\le\frac{a}{4}, \qquad ①$$

…………………10 分

以及
$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}=a(b+c)-\frac{1}{4}+bc$$

$$=a(1-a)-\frac{1}{4}+bc\le\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+bc=bc, \qquad ②$$

其中①式等号在 $a=\frac{}{3}$ 时成立，②式等号在 $a=\frac{}{2}$ 时成立，因此①，②中等号不能同时成立. …………………30 分

由于 $ab+bc+ca-\frac{1}{4}>0$，将①，②式相乘得

$$\left(ab+bc+ca-\frac{1}{4}\right)^2<\frac{abc}{4},$$

即
$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{}}{2},$$

从而 $$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}.$$ …………………40 分

证明 2 由于 $abc>0$，故 a,b,c 中或者一个正数，两个负数；或者三个都是正数. 对于前一种情形，不妨设 $a>0$，$b,c<0$，则

$$ab+bc+ca=b(a+c)+ca<b(a+c)=b(1-b)<0,$$

结论显然成立. …………………10 分

下面假设 $a,b,c>0$，不妨设 $a\ge b\ge c$，则 $a\ge\frac{1}{3}$，$0<c\le\frac{1}{3}$. 我们有

$$ab+bc+ca-\frac{\sqrt{abc}}{2}=c(a+b)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$=c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right).$$

由于 $\sqrt{ab}\ge\sqrt{\frac{b}{3}}\ge\sqrt{\frac{c}{3}}>\frac{\sqrt{c}}{2}$， 且 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1-c}{2}$， 因此

$$c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)\le c(1-c)+\frac{1-c}{2}\left(\frac{1-c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3c^2}{4}+\frac{c\sqrt{c}}{4}+\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{4}.$$ …………30 分

于是只需证明 $\frac{3c^2}{4}-\frac{c\sqrt{c}}{4}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{c}}{4}>0$，即

$$3c\sqrt{c}-c-2\sqrt{c}+1>0. \qquad ①$$

由于 $0<c\le\frac{1}{3}$，故

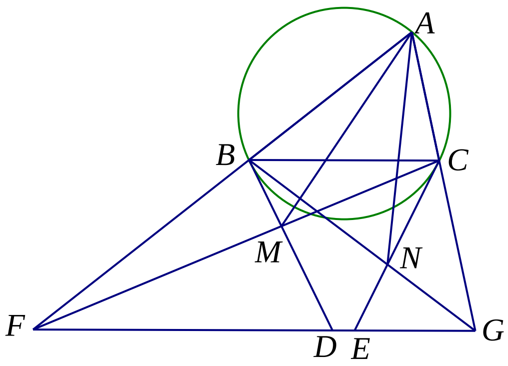
$$\frac{1}{3}-c\ge 0. \qquad ②$$

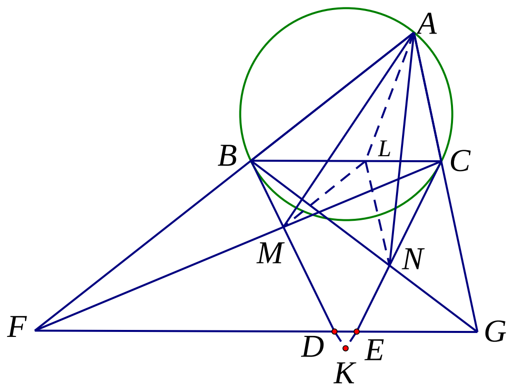
由平均不等式

$$3c\sqrt{c}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge 3\left(3c\sqrt{c}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}\sqrt{c}>2\sqrt{c}. \qquad ③$$

将②，③两式相加即得①式成立，因此原不等式成立. ………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图，在锐角三角形 ABC 中，$\angle BAC \neq 60°$，过点 B,C 分别作三角形 ABC 的外接圆的切线 BD,CE，且满足 $BD=CE=BC$．直线 DE 与 AB,AC 的延长线分别交于点 F,G．设 CF 与 BD 交于点 M，CE 与 BG 交于点 N．证明：$AM=AN$．





证明 1 如图，设两条切线 BD,CE 交于点 K，则 $BK=CK$．结合 $BD=CE$ 可知 $DE \parallel BC$．作 $\angle BAC$ 的平分线 AL 交 BC 于点 L，连接 LM,LN．

由 $DE \parallel BC$ 知，$\angle ABC=\angle DFB$，$\angle FDB=\angle DBC=\angle BAC$，故 ΔABC 与 ΔDFB 相似． ···················10 分

由此并结合 $DE \parallel BC$，$BD=BC$ 及内角平分线定理可得

$$\frac{MC}{MF}=\frac{BC}{FD}=\frac{BD}{FD}=\frac{AC}{AB}=\frac{LC}{LB},$$

因此 $LM \parallel BF$． ···················20 分

同理，$LN \parallel CG$．由此推出

$$\angle ALM=\angle ALB+\angle BLM=\angle ALB+\angle ABL=180^\circ-\angle BAL$$

$$=180^\circ-\angle CAL=\angle ALC+\angle ACL=\angle ALC+\angle CLN$$

$$=\angle ALN\ .$$ ···················30 分

再结合 $BC \parallel FG$ 以及内角平分线定理得到

$$\frac{LM}{LN}=\frac{LM}{BF}\cdot\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{LN}=\frac{CL}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BL}=\frac{CL}{BL}\cdot\frac{AB}{AC}=1,$$

即 $LM = LN$.

故由 $AL = AL$ ，$\angle ALM = \angle ALN$ ，$LM = LN$ 得到 ΔALM 与 ΔALN 全等，因而 $AM = AN$ ，证毕.　　　　………………40 分

证明 2 由于 BD 和 EC 都是 ω 的切线，故 $\angle DBC = \angle BAC = \angle ECB$. 再由 $BD = CE$ ，可得四边形 $BCED$ 是等腰梯形，从而 $DE \parallel BC$.

由于 $\angle BFD = \angle ABC = B$ ，$\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC = A$ ，故 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$.

………………10 分

设三角形 ABC 的三内角分别为 A, B, C ，三条边长分别为 $BC = a$ ，$CA = b$ ，$AB = c$. 由 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$ 有 $\dfrac{FD}{c} = \dfrac{BD}{b} = \dfrac{a}{b}$ ，可得 $FD = \dfrac{ac}{b}$.

由 $BC \parallel FD$ ，可得 $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BC}{FD} = \dfrac{b}{c}$ ，故由 $BD = a$ 可得

$$BM = \frac{ab}{b+c} . \qquad ①$$

在三角形 ABM 中，$\angle ABM = B + A$ ，由余弦定理得

$$AM^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2abc}{b+c}\cos(A+B)$$

$$= c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + \frac{2abc}{b+c} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(c^2(b+c)^2 + a^2b^2 + c(a^2+b^2-c^2)(b+c)\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2b^2 + a^2bc + a^2c^2 + b^3c + b^2c^2 - bc^3 - c^4\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(2b^2c^2 + bc^3 + b^3c + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2bc\right) . \qquad ②$$

………………30 分

用同样方法计算 CN 和 AN^2 时，只需在上述 BM 与 AM^2 的表达式①，②中将 b, c 交换．而由②可见 AM^2 的表达式关于 b, c 对称，因此 $AN^2 = AM^2$ ，即 $AM = AN$ ，结论获证.　　　　………………40 分

三、（本题满分 50 分） 设 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$. 求最大的整数 k，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

解 对有限非空实数集 A，用 $\min A$ 与 $\max A$ 分别表示 A 的最小元素与最大元素.考虑 S 的所有包含 1 且至少有两个元素的子集，一共 $2^{99}-1$ 个，它们显然满足要求，因为 $\min(A_i\cap A_j)=1<\max A_i$. 故 $k_{\max}\ge 2^{99}-1$. ……………………10 分

下面证明 $k\ge 2^{99}$ 时不存在满足要求的 k 个子集. 我们用数学归纳法证明：对整数 $n\ge 3$，在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意 $m(\ge 2^{n-1})$ 个不同非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中，存在两个子集 A_i,A_j，$i\ne j$，满足

$$A_i\cap A_j\ne\varnothing,\quad 且\min(A_i\cap A_j)=\max A_i. \qquad ①$$

显然只需对 $m=2^{n-1}$ 的情形证明上述结论.

当 $n=3$ 时，将 $\{1,2,3\}$ 的全部 7 个非空子集分成 3 组，第一组：$\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$；第二组：$\{2\}$，$\{1,2\}$；第三组：$\{1\}$，$\{1,2,3\}$. 由抽屉原理，任意 4 个非空子集必有两个在同一组中，取同组中的两个子集分别记为 A_i,A_j，排在前面的记为 A_i，则满足①. ……………………20 分

假设结论在 $n(\ge 3)$ 时成立，考虑 $n+1$ 的情形. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$ 中至少有 2^{n-1} 个子集不含 $n+1$，对其中的 2^{n-1} 个子集用归纳假设，可知存在两个子集满足①.

……………………30 分

若至多有 $2^{n-1}-1$ 个子集不含 $n+1$，则至少有 $2^{n-1}+1$ 个子集含 $n+1$，将其中 $2^{n-1}+1$ 子集都去掉 $n+1$，得到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $2^{n-1}+1$ 个子集.

由于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体子集可分成 2^{n-1} 组，每组两个子集互补，故由抽屉原理，在上述 $2^{n-1}+1$ 个子集中一定有两个属于同一组，即互为补集. 因此，相应地有两个子集 A_i,A_j，满足 $A_i\cap A_j=\{n+1\}$，这两个集合显然满足①. 故 $n+1$ 时结论成立.

综上所述，所求 $k_{\max}=2^{99}-1$. ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2014}$ 模 2014 互不同余， 整数 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 模 2014 也互不同余．证明：可将 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 重新排列为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2014}$， 使得

$$x_1+z_1,\ x_2+z_2,\ \cdots,\ x_{2014}+z_{2014}$$

模 4028 互不同余.

证明 记 $k=1007$．不妨设 $x_i \equiv y_i \equiv i \pmod{2k}$， $1 \le i \le 2k$．对每个整数 i，$1 \le i \le k$， 若 $x_i + y_i \not\equiv x_{i+k} + y_{i+k} \pmod{4k}$，则令 $z_i = y_i$， $z_{i+k} = y_{i+k}$；否则， 令 $z_i = y_{i+k}$，$z_{i+k} = y_i$. ……………………20 分

如果是前一种情形，则

$$x_i + z_i = x_i + y_i \not\equiv x_{i+k} + y_{i+k} = x_{i+k} + z_{i+k} \pmod{4k}.$$

如果是后一种情形， 则也有

$$x_i + z_i = x_i + y_{i+k} \not\equiv x_{i+k} + y_i = x_{i+k} + z_{i+k} \pmod{4k}.$$

若不然， 我们有 $x_i + y_i \equiv x_{i+k} + y_{i+k} \pmod{4k}$， $x_i + y_{i+k} \equiv x_{i+k} + y_i \pmod{4k}$，两式相加可得 $2x_i \equiv 2x_{i+k} \pmod{4k}$， 于是 $x_i \equiv x_{i+k} \pmod{2k}$， 但 $x_1, x_2, \cdots, x_{2014}$ 模 $2014(=2k)$ 互不同余，特别地， $x_i \not\equiv x_{i+k} \pmod{2k}$，矛盾. …………30 分

由上述构造方法知 $z_1, z_2, \cdots, z_{2k}$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_{2k}$ 的排列．记 $w_i = x_i + z_i$，$i = 1, 2, \cdots, 2k$．下面验证 $w_1, w_2, \cdots, w_{2k}$ 模 $4k$ 互不同余．这只需证明，对任意整数 i, j， $1 \le i < j \le k$，

$$w_i, w_j, w_{i+k}, w_{j+k} \text{ 模 } 4k \text{ 两两不同余.} \qquad (*)$$

注意，前面的构造方式已保证

$$w_i \not\equiv w_{i+k} \pmod{4k},\ w_j \not\equiv w_{j+k} \pmod{4k}. \qquad (**)$$

情形一： $z_i = y_i$， 且 $z_j = y_j$．则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j \pmod{2k}.$$

由于 $2i \not\equiv 2j \pmod{2k}$，故易知 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，从而模 $4k$ 更不同余，再结合（**）可见（*）得证.

情形二： $z_i = y_{i+k}$， 且 $z_j = y_{j+k}$．则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i+k \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

同样有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余， w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余.与情形一相同地可知（*）得证. ……………………40 分

情形三：$z_i = y_i$， 且 $z_j = y_{j+k}$（$z_i = y_{i+k}$，且 $z_j = y_j$ 的情形与此相同）. 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

由于 k 是奇数， 故 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2}$，更有 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2k}$， 因此仍然有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余， w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余. 从而（*）得证.

因此本题得证. ……………………50 分