1992年全国高中数学联赛试卷

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

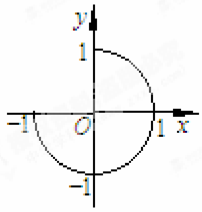
1．对于每个自然数 n，抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n，B_n 两点，以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离，则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{1992}B_{1992}|$ 的值是(　　)

(A) $\frac{1991}{1992}$　　(B) $\frac{1992}{1993}$　　(C) $\frac{1991}{1993}$　　(D) $\frac{1993}{1992}$

2. 已知如图的曲线是以原点为圆心，1为半径的圆的一部分，则这一曲线的方程是(　　)

(A) $(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$　(B) $(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(C) $(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$　(D) $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$



3. 设四面体四个面的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，它们的最大值为 S，记 $\lambda=(\sum_{i=1}^{4} S_i)/S$，则 λ 一定满足(　　)

(A) $2<\lambda\leqslant 4$　(B) $3<\lambda<4$　(C) $2.5<\lambda\leqslant 4.5$　(D) $3.5<\lambda<5.5$

4. 在△ABC中，角 A，B，C 的对边分别记为 a，b，c($b\neq 1$)，且 $\frac{C}{A}$，$\frac{\sin B}{\sin A}$ 都是方程 $\log_{\sqrt{b}} x=\log_b(4x-4)$ 的根，则△ABC(　　)

(A) 是等腰三角形，但不是直角三角形　　(B) 是直角三角形，但不是等腰三角形

(C) 是等腰直角三角形　　(D) 不是等腰三角形，也不是直角三角形

5．设复数 z_1，z_2 在复平面上对应的点分别为 A，B，且 $|z_1|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为(　　)

(A) $8\sqrt{3}$　　(B) $4\sqrt{3}$　　(C) $6\sqrt{3}$　　(D) $12\sqrt{3}$

6．设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，且满足下列关系 $f(10+x)=f(10-x)$，$f(20-x)=-f(20+x)$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数，又是周期函数　　(B) 偶函数，但不是周期函数

(C) 奇函数，又是周期函数　　(D) 奇函数，但不是周期函数

二、填空题(每小题5分共30分)

1．设 x，y，z 是实数，$3x$，$4y$，$5z$ 成等比数列，且 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 成等差数列，则 $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$ 的值是______.

2．在区间 $[0,\pi]$ 中，三角方程 $\cos 7x=\cos 5x$ 的解的个数是______.

3．从正方体的棱和各个面上的对角线中选出 k 条，使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线，则 k 的最大值是_____.

4．设 z_1，z_2 都是复数，且 $|z_1|=3$，$|z_2|=5$，$|z_1+z_2|=7$，则 $\arg(\frac{z_2}{z_1})^3$ 的值是______.

5．设数列 a_1，a_2，…，a_n，…满足 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，且对任何自然数 n，都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，又 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的值是____.

6．函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值是_____．

三、(20 分)求证：$16<\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

四、(20 分)设 l，m 是两条异面直线，在 l 上有 A，B，C 三点，且 $AB=BC$，过 A，B，C 分别作 m 的垂线 AD，BE，CF，垂足依次是 D，E，F，已知 $AD=\sqrt{15}$，$BE=\frac{7}{2}CF=\sqrt{10}$，求 l 与 m 的距离.

五、(20 分)设 n 是自然数，$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-x^{-n-1}}{x-x^{-1}}$ $(x\neq 0,\ \pm 1)$，令 $y=x+\dfrac{1}{x}$.

1. 求证：$f_{n+1}(x)=yf_n(x)-f_{n-1}(x)$，$(n>1)$

2. 用数学归纳法证明：

$f_n(x)=$

$$\begin{cases} y^n-C_{n-1}^{1}y^{n-2}+\cdots+(-1)^i C_{n-i}^{i}\,y^{n-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}, & (i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},\ n\text{为偶数}) \\ y^n-C_{n-1}^{1}y^{n-2}+\cdots+(-1)^i C_{n-i}^{i}+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\,y, & (i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2},\ n\text{为奇数}) \end{cases}$$

第二试

一、(35 分) 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为⊙O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心．求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置．

二、(35 分) 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$．若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和称为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为的奇(偶)子集．

1．求证 S_n 的奇子集与偶子集个数相等．

2．求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和．

3．当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和．

三、(35 分)在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点称为格点，任取 6 个格点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$ 满足 (1) $|x_i|\leqslant 2,|y_i|\leqslant 2,(i=1,2,3,4,5,6)$，(2) 任何三点不在同一条直线上．试证：在以 $P_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为顶点的所有三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于 2．

1992年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

1．对于每个自然数 n，抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n，B_n 两点，以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离，则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{1992}B_{1992}|$ 的值是(　　)

(A) $\dfrac{1991}{1992}$　　(B) $\dfrac{1992}{1993}$　　(C) $\dfrac{1991}{1993}$　　(D) $\dfrac{1993}{1992}$

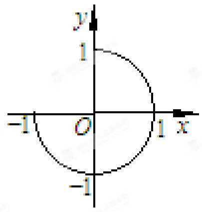
【答案】B

【解析】$y=((n+1)x-1)(nx-1)$，∴ $|A_nB_n|=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，于是 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{1992}B_{1992}|=\dfrac{1992}{1993}$，选 B.

2．已知如图的曲线是以原点为圆心，1为半径的圆的一部分，则这一曲线的方程是(　　)

(A) $(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$　(B) $(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(C) $(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$　(D) $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$



【答案】D

【解析】$(x-\sqrt{1-y^2})=0$ 表示 y 轴右边的半圆，$(y+\sqrt{1-x^2})=0$ 表示 x 轴下方的半圆，故选 D.

3．设四面体四个面的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，它们的最大值为 S，记 $\lambda=(\sum\limits_{i=1}^{4}S_i)/S$，则 λ 一定满足(　　)

(A) $2<\lambda\leqslant4$　(B) $3<\lambda<4$　(C) $2.5<\lambda\leqslant4.5$　(D) $3.5<\lambda<5.5$

【答案】A

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\leqslant4S$，故 $\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\leqslant4$，又当与最大面相对的顶点向此面无限接近时，$\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$ 接近 $2S$，故选 A.

4．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别记为 a，b，c($b\neq1$)，且 $\dfrac{C}{A}$，$\dfrac{\sin B}{\sin A}$ 都是方程 $\log_{\sqrt{b}}x=\log_b(4x-4)$ 的根，则△ABC(　　)

(A) 是等腰三角形，但不是直角三角形　　(B) 是直角三角形，但不是等腰三角形

(C) 是等腰直角三角形　　(D) 不是等腰三角形，也不是直角三角形

【答案】B

【解析】$x^2=4x-4$．根为 $x=2$．∴ $C=2A$，$\Rightarrow B=180°-3A$，$\sin B=2\sin A$．$\Rightarrow\sin3A=2\sin A$，$\Rightarrow3-4\sin^2A=2$．$A=30°$，$C=60°$，$B=90°$．选 B.

5．设复数 z_1，z_2 在复平面上对应的点分别为 A，B，且 $|z_1|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为(　　)

(A) $8\sqrt{3}$　　(B) $4\sqrt{3}$　　(C) $6\sqrt{3}$　　(D) $12\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】$\frac{2z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$．∴ $|z_2|=8$，z_1、z_2的夹角=60°．$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$．选 *A*．

6．设 $f(x)$是定义在实数集 R 上的函数，且满足下列关系 $f(10+x)=f(10-x)$，$f(20-x)=-f(20+x)$，则 $f(x)$是

(*A*)偶函数，又是周期函数　　　(*B*)偶函数，但不是周期函数

(*C*)奇函数，又是周期函数　　　(*D*)奇函数，但不是周期函数

【答案】C

【解析】$f(20-x)=f[10+(10-x)]=f[10-(10-x)]=f(x)=-f(20+x)$．

∴ $f(40+x)=f[20+(20+x)]=-f(20+x)=f(x)$．∴ 是周期函数；

∴ $f(-x)=f(40-x)=f(20+(20-x))=-f(20-(20-x))=-f(x)$．∴ 是奇函数．选 *C*．

二、填空题(每小题 5 分共 30 分)

1．设 x，y，z 是实数，$3x$，$4y$，$5z$ 成等比数列，且$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$成等差数列，则$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$的值是______．

【答案】$\frac{34}{15}$

【解析】$16y^2=15xz$，$y=\frac{2xz}{x+z}$，$\Rightarrow 16\cdot 4x^2z^2=15xz(x+z)^2$．由 $xz\neq 0$，得$\frac{(x+z)^2}{xz}=\frac{64}{15}$，$\Rightarrow\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=\frac{34}{15}$．

2．在区间$[0，\pi]$中，三角方程 $\cos 7x=\cos 5x$ 的解的个数是__________．

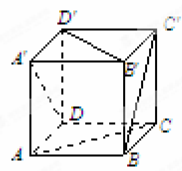
【答案】7

【解析】$7x=5x+2k\pi$，或 $7x=-5x+2k\pi$，$(k\in Z)\Rightarrow x=k\pi$，$x=\frac{1}{6}k\pi$ $(k\in Z)$，共有 7 解．

3．从正方体的棱和各个面上的对角线中选出 k 条，使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线，则 k 的最大值是____________．

【答案】4

【解析】正方体共有 8 个顶点，若选出的 k 条线两两异面，则不能共顶点，即至多可选出 4 条，又可以选出 4 条两两异面的线(如图)，故所求 k 的最大值=4．

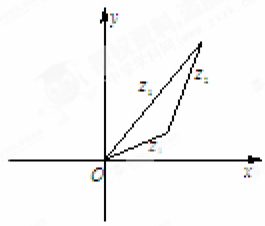


4．设 z_1，z_2都是复数，且$|z_1|=3$，$|z_2|=5$ $|z_1+z_2|=7$，则 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ 的值是______．

【答案】π

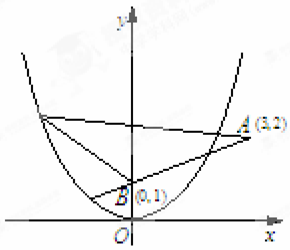
【解析】$\cos\angle OZ_1Z_3=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$．即$\angle OZ_1Z_3=120°$，

∴ $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}$．　∴ $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3=\pi$．



5、设数列 a_1，a_2，…，a_n，…满足 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，且对任何自然数 n， 都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq1$，又 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$的值是____.

【答案】200



【解析】$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}$，

相减，得 $a_na_{n+1}a_{n+2}(a_n-a_{n+4})=a_{n+4}-a_n$，由 $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq1$，得 $a_{n+4}=a_n$.

又，$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，得 $a_4=4$.

∴ $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=25(1+1+2+4)=200$.

6．函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值是_____.

【答案】$\sqrt{10}$

【解析】$f(x)=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2+x^2}$，表示点$(x，x^2)$与点 $A(3，2)$的距离及 $B(0，1)$距离差的最大值．由于此二点在抛物线两侧，故过此二点的直线必与抛物线交于两点．对于抛物线上任意一点，到此二点距离之差大于$|AB|=\sqrt{10}$．即所求最小值为$\sqrt{10}$.

三、(20 分)求证：$16<\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

【解析】证明：$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}=2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$，

同时$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.

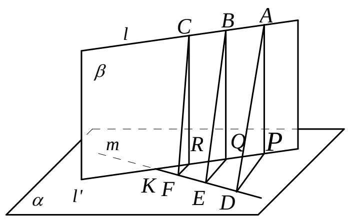
于是得 $2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

即 $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(\sqrt{80}-1)<1+2(9-1)=17$.

四、(20 分)设 l，m是两条异面直线，在 l上有 A，B，C三点，且 $AB=BC$，过 A，B，C分别作 m的垂线 AD，BE，CF，垂足依次是 D，E，F，已知 $AD=\sqrt{15}$，$BE=\frac{7}{2}$，$CF=\sqrt{10}$，求 l与 m的距离.

【解析】过 m作平面 $\alpha\parallel l$，作 $AP\perp\alpha$ 于 P，AP与 l确定平面 β，$\beta\cap\alpha=l'$，$l'\cap m=K$.

作 $BQ\perp\alpha$，$CR\perp\alpha$，垂足为 Q、R，则 Q、$R\in l'$，且 $AP=BQ=CR=l$与 m的距离 d.



连 PD、QE、RF，则由三垂线定理之逆，知 PD、QE、RF都$\perp m$.

$PD=\sqrt{15-d^2}$，$QE=\sqrt{\frac{49}{4}-d^2}$，$RF=\sqrt{10-d^2}$.

当 D、E、F在 K同侧时 $2QE=PD+RF$，

$\Rightarrow\sqrt{49-4d^2}=\sqrt{15-d^2}+\sqrt{10-d^2}$．解之得 $d=\sqrt{6}$

当 D、E、F不全在 K同侧时 $2QE=PD-RF$，$\Rightarrow\sqrt{49-4d^2}=\sqrt{15-d^2}-\sqrt{10-d^2}$．无实解.

∴ l 与 m 距离为$\sqrt{6}$.

五、(20分)设 n 是自然数，$f_n(x)=\frac{x^{n+1}-x^{-n-1}}{x-x^{-1}}$ $(x\neq 0，\pm 1)$，令 $y=x+\frac{1}{x}$.

1. 求证：$f_{n+1}(x)=yf_n(x)-f_{n-1}(x)$，$(n>1)$
2. 用数学归纳法证明：

$f_n(x)=$

$$\begin{cases} y^n-C_{n-1}^1y^{n-2}+\cdots+(-1)^iC_{n-i}^i\ y^{n-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}，\left(i=1，2，\cdots，\frac{n}{2}，n\text{为偶数}\right) \\ y^n-C_{n-1}^1y^{n-2}+\cdots+(-1)^iC_{n-i}^i+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}y，\left(i=1，2，\cdots，\frac{n-1}{2}，n\text{为奇数}\right) \end{cases}$$

【解析】证明： (1) 由 $yf_n(x)-f_{n-1}(x)=\frac{(x+\frac{1}{x})(x^{n+1}-x^{-n-1})-x^n+x^{-n}}{x-x^{-1}}=\frac{x^{n+2}-x^{-n-2}}{x-x^{-1}}$ $=f_{n+1}(x)$. 故证.

(2) $f_1(x)=x+\frac{1}{x}$，$f_2(x)=x^2+1+x^{-2}=(x+\frac{1}{x})^2-1=y^2-1$. 故命题对 $n=1$，2 成立.

设对于 $n\leqslant m(m\geqslant 2$，$m$ 为正整数)，命题成立，现证命题对于 $n=m+1$ 成立.

1. 若 m 为偶数，则 $m+1$ 为奇数. 由归纳假设知，对于 $n=m$ 及 $n=m-1$，有

$$f_m(x)=y^m-C_{m-1}^1y^{m-2}+C_{m-2}^2y^{m-4}+\cdots+(-1)^iC_{m-i}^iy^{m-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}y^{m-2\times\frac{m}{2}} \quad ①$$

$$f_{m-1}(x)=y^{m-1}-C_{m-2}^1y^{m-3}+\cdots+(-1)^{i-1}C_{m-i}^{i-1}y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m-2}{2}}y \quad ②$$

$$∴\ yf_m(x)-f_{m-1}(x)=y^{m+1}-\cdots+(-1)^i(C_{m-i}^i+C_{m-i}^{i-1})y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}(C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}+C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}-1})y$$

$$=y^{m+1}-C_{m+1-1}^1y^{m-1}+\cdots+(-1)^iC_{m+1-i}^iy^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot C_{\frac{m}{2}+1}^{\frac{m}{2}}y$$

即命题对 $n=m+1$ 成立.

2. 若 m 为奇数，则 $m+1$ 为偶数，由归纳假设知，对于 $n=m$ 及 $n=m-1$，有

$$f_m(x)=y^{m-1}-C_{m-2}^1y^{m-2}+\cdots+(-1)^i\cdot C_{m-i}^iy^{m-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot C_{\frac{m+1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}y$$

③

$$f_{m-1}(x)=y^{m-1}-C_{m-2}^1y^{m-3}+\cdots+(-1)^{i-1}C_{m-i}^{i-1}y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_{\frac{m+1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}$$

④

用 y 乘③减去④，同上合并，并注意最后一项常数项为

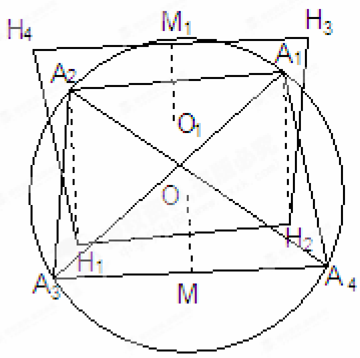
$$-(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_{\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}=-(-1)^{\frac{m-1}{2}}C_{\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}}=(-1)^{\frac{m+1}{2}}.$$

于是得到 $yf_m(x)-f_{m-1}(x)=y^{m+1}-C_m^1y^{m-1}+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}$，即仍有对于 $n=m+1$，命题成立
综上所述，知对于一切正整数 n，命题成立．

第二试

一、(35 分) 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为⊙O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心．求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置．

【解析】证明：连 A_2H_1，A_1H_2，取 A_3A_4 的中点 M，连 OM，由上证知 $A_2H_1\parallel OM$，$A_2H_1=2OM$，$A_1H_2\parallel OM$，$A_1H_2=2OM$，从而 $H_1H_2A_1A_2$ 是平行四边形，故 $H_1H_2\parallel A_1A_2$，$H_1H_2=A_1A_2$．



同理可知，$H_2H_3\parallel A_2A_3$，$H_2H_3=A_2A_3$；

$H_3H_4\parallel A_3A_4$，$H_3H_4=A_3A_4$；

$H_4H_1\parallel A_4A_1$，$H_4H_1=A_4A_1$．

故 四边形 $A_1A_2A_3A_4$≌四边形 $H_1H_2H_3H_4$．

由四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有外接圆知，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 也有外接圆．取 H_3H_4 的中点 M_1，作 $M_1O_1\perp H_3H_4$，且 $M_1O_1=MO$，则点 O_1 即为四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的外接圆圆心．

又证：以 O 为坐标原点，⊙O 的半径为长度单位建立直角坐标系，设 OA_1、OA_2、OA_3、OA_4 与 OX 正方向所成的角分别为 α、β、γ、δ，则点 A_1、A_2、A_3、A_4 的坐标依次是 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$(\cos\beta,\sin\beta)$、$(\cos\gamma,\sin\gamma)$、$(\cos\delta,\sin\delta)$．

显然，$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的外心都是点 O，而它们的重心依次是

$(\frac{1}{3}(\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta),\ \frac{1}{3}(\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta))$、$(\frac{1}{3}(\cos\gamma+\cos\delta+\cos\alpha),\ \frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\delta+\sin\gamma))$、

$(\frac{1}{3}(\cos\delta+\cos\alpha+\cos\beta),\ \frac{1}{3}(\sin\delta+\sin\alpha+\sin\beta))$、$(\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),\ \frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma))$．

从而，$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心依次是

$H_1(\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta,\ \sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)$、$H_2(\cos\gamma+\cos\delta+\cos\alpha,\ \sin\alpha+\sin\delta+\sin\gamma)$、

$H_3(\cos\delta+\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\delta+\sin\alpha+\sin\beta)$、$H_4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$．

而 H_1、H_2、H_3、H_4 点与点 $O_1(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta,\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)$ 的距离都等于 1，即 H_1、H_2、H_3、H_4 四点在以 O_1 为圆心，1 为半径的圆上．证毕．

二、(35 分) 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$．若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和称为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为的奇(偶)子集．

1．求证 S_n 的奇子集与偶子集个数相等．

2．求证：当 $n\geqslant3$ 时，S_n的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和．

3．当 $n\geqslant3$ 时，求 S_n的所有奇子集的容量之和．

【解析】证明：(1) 对于 S_n的每个奇子集 A，当 $1\in A$时，取 $B=A\setminus\{1\}$，当 $1\notin A$时，取 $B=A\cup\{1\}$，则 B为 S_n的偶子集．反之，若 B为 S_n的偶子集，当 $1\in B$时，取 $A=B\setminus\{1\}$，当 $1\notin B$时，取 $A=B\cup\{1\}$，于是在 S_n的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应，故 S_n的奇子集与偶子集的个数相等．

(2) 对于任一 $i\in S_n$，$i>1$，含 i 的 S_n的子集共有 2^{n-1}个，其中必有一半是奇子集，一半是偶子集，从而每个数 i，在奇子集的和与偶子集的和中，i所占的个数是一样的．

而对于元素 1，只要把 S_n的所有子集按是否含有 3 配对(即在上证中把 1 换成 3 来证)，于是也可知 1 的奇子集与偶子集中占的个数一样，于是可知每个元素都是在奇子集中与偶子集中占的个数一样．所以 S_n的所有奇子集的容量的和，与所有偶子集的容量的和相等．

(3) 由于每个元素在奇子集中都出现 2^{n-2} 次，故奇子集的容量和$=(1+2+3+\cdots+n)\times2^{n-2}=n(n+1)\times2^{n-3}$．

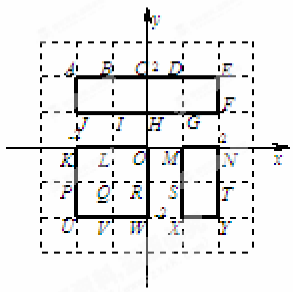
三、(35 分) 在平面直角坐标系中，任取 6 个格点 $Pi(x_i，y_i)(i=1，2，3，4，5，6)$满足：

(1) $|x_i|\leqslant2$，$|y_i|\leqslant2(i=1，2，3，4，5，6)$；

(2) 任何三点不在一条直线上．

试证明：在以 $P_i(i=1，2，3，4，5，6)$为顶点的所有三角形中，必有一个三角形的面积不大于 2．

【解析】证明 如图，满足条件的格点只能是图中 A、B、…、Y这 25 个格点中的 6 个．把这 25 个格点分成三个矩形：矩形 $AEFJ$、$KOWU$、$MNYX$．



若所取的 6 个点中有三个点在上述三个矩形中的某一个中，则此三点即满足要求．

若三个矩形中均无所取 6 点中的 3 点，则必是每个矩形中有所取的 2 个点．

(1) 若 E、F、D、G、O、R、W中有所取的点，则此点与矩形 $MNYX$中的两点满足要求；

(2) 若上述 7 点均未取，则 A、B、C、H、I、J中必有两点，此时若 L、K中有所取的点，则亦有三点满足要求；

(3) 若 L、K亦未取，则必在 P、Q、V、U中取了 2 点，矩形 $ACHJ$中取了 2 点：此时取 P、Q两点，或 Q、V两点，或 V、U两点，或 U、P两点，或 Q、U两点，则无论 $ACHJ$中取任一点，与之组成三角形面积均满足要求．

若取 P、V两点，则矩形 $ACHJ$中必有一点异于 C，取此点与 P、V满足要求．

综上可知，必有满足要求的 3 点存在．