1994年全国高中数学联赛试题

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1、设 a，b，c 是实数，那么对任何实数 x， 不等式 $a\sin x+b\cos x+c>0$ 都成立的充要条件是

(A) a，b 同时为0，且 $c>0$　　(B) $\sqrt{a^2+b^2}=c$

(C) $\sqrt{a^2+b^2}<c$　　(D) $\sqrt{a^2+b^2}>c$

2、给出下列两个命题：(1) 设 a，b，c 都是复数，如果 $a^2+b^2>c^2$，则 $a^2+b^2-c^2>0$；(2)设 a，b，c 都是复数，如果 $a^2+b^2-c^2>0$，则 $a^2+b^2>c^2$．那么下述说法正确的是

(A) 命题(1)正确，命题(2)也正确　　(B) 命题(1)正确，命题(2)错误

(C) 命题(1)错误，命题(2)也错误　　(D) 命题(1)错误，命题(2)正确

3、已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=4(n\geq1)$，且 $a_1=9$，其前 n 项之和为 S_n，则满足不等式 $|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$ 的最小整数 n 是

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

4、已知 $0<b<1$，$0<a<\frac{\pi}{4}$，则下列三数：$x=(\sin a)^{\log_b \sin a}$，$y=(\cos a)^{\log_b \cos a}$，$z=(\sin a)^{\log_b \cos a}$

(A) $x<z<y$　　(B) $y<z<x$　　(C) $z<x<y$　　(D) $x<y<z$

5、在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是

(A) $(\frac{n-2}{n}\pi,\ \pi)$　　(B) $(\frac{n-1}{n}\pi,\ \pi)$　　(C) $(0,\ \frac{\pi}{2})$　　(D) $(\frac{n-2}{n}\pi,\ \frac{n-1}{n}\pi)$

6、在平面直角坐标系中，方程 $\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$ （a，b 是不相等的两个正数)所代表的曲线是

(A) 三角形　　(B) 正方形

(C) 非正方形的长方形　　　　　(D) 非正方形的菱形

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1. 已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为(−1，1)和(2，2)，若直线 l：$x+my+m=0$ 与 PQ 的延长线相交，则 m 的取值范围是____________.

2. 已知 $x,y\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，$a\in R$ 且 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\4y^3+\sin y\cos y+a=0\end{cases}$ 则 $\cos(x+2y)=$____________.

3. 已知点集 $A=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant(\frac{5}{2})^2\}$，$B=\{(x,y)\mid(x-4)^2+(y-5)^2>(\frac{5}{2})^2\}$，则点集 $A\cap B$ 中的整点(即横、纵坐标均为整数的点)的个数为____________.

4. 设 $0<\theta<\pi$，，则 $\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 的最大值是____________.

5. 已知一平面与一正方体的 12 条棱的夹角都等于 α，则 $\sin\alpha=$__________.

6. 已知 95 个数 a_1，a_2，a_3，…，a_{95}，每个都只能取+1 或−1 两个值之一，那么它们的两两之积的和 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{94}a_{95}$ 的最小正值是____________.

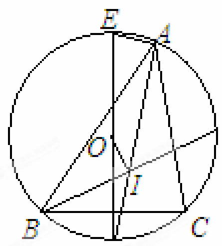
第二试

一、(本题满分 25 分) x的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中，z_1，z_2，m均是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20i$，设这个方程的两个根 α、β，满足$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求$|m|$的最大值和最小值.

二、(本题满分 25 分) 将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列，试求出这个数列的第 1000 项。

三、(本题满分 35 分) 如图，设三角形的外接圆 O的半径为 R，内心为 I，$\angle B=60°$，$\angle A<\angle C$，$\angle A$的外角平分线交圆 O于 E.

证明：(1) $IO=AE$； (2) $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.



四、(本题满分 35 分) 给定平面上的点集 $P=\{P_1, P_2, \cdots, P_{1994}\}$，$P$中任三点均不共线，将 P中的所有的点任意分成 83 组，使得每组至少有 3 个点，且每点恰好属于一组，然后将在同一组的任两点用一条线段相连，不在同一组的两点不连线段，这样得到一个图案 G，不同的分组方式得到不同的图案，将图案 G中所含的以 P中的点为顶点的三角形个数记为 $m(G)$.

(1) 求 $m(G)$ 的最小值 m_0.

(2) 设 G^*是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图案，若 G^*中的线段(指以 P的点为端点的线段)用 4 种颜色染色，每条线段恰好染一种颜色. 证明存在一个染色方案，使 G^*染色后不含以 P的点为顶点的三边颜色相同的三角形.

1994年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1、设a，b，c是实数，那么对任何实数x， 不等式$a\sin x+b\cos x+c>0$都成立的充要条件是

(A) a，b同时为0，且$c>0$　　(B) $\sqrt{a^2+b^2}=c$

(C) $\sqrt{a^2+b^2}<c$　　(D) $\sqrt{a^2+b^2}>c$

【答案】C

【解析】$a\sin x+b\cos x+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)+c\in[-\sqrt{a^2+b^2}+c,\ \sqrt{a^2+b^2}+c]$．故选$C$.

2、给出下列两个命题：(1)设a，b，c都是复数，如果$a^2+b^2>c^2$，则$a^2+b^2-c^2>0$．(2)设a，b，c都是复数，如果$a^2+b^2-c^2>0$，则$a^2+b^2>c^2$．那么下述说法正确的是

(A)命题(1)正确，命题(2)也正确　　(B)命题(1)正确，命题(2)错误

(C)命题(1)错误，命题(2)也错误　　(D)命题(1)错误，命题(2)正确

【答案】B

【解析】(1)正确，(2)错误；理由：(1)$a^2+b^2>c^2$，成立时，a^2+b^2与c^2都是实数，故此时$a^2+b^2-c^2>0$成立；

(2) 当$a^2+b^2-c^2>0$成立时$a^2+b^2-c^2$是实数，但不能保证a^2+b^2与c^2都是实数，故$a^2+b^2>c^2$不一定成立．故选B.

3、已知数列$\{a_n\}$满足$3a_{n+1}+a_n=4(n\geqslant1)$，且$a_1=9$，其前$n$项之和为$S_n$，则满足不等式$|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$的最小整数$n$是

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

【答案】C

【解析】$(a_{n+1}-1)=-\frac{1}{3}(a_n-1)$，即$\{a_n-1\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，

∴ $a_n=8(-\frac{1}{3})^{n-1}+1$．∴ $S_n=8\cdot\dfrac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1+\frac{1}{3}}+n=6+n-6(-\frac{1}{3})^n$，$\Rightarrow 6\cdot\frac{1}{3^n}<\frac{1}{125}$，$\Rightarrow n\geqslant 7$．选 C.

4、已知 $0<b<1$，$0<a<\frac{\pi}{4}$，则下列三数：$x=(\sin a)^{\log_b \sin a}$，$y=(\cos a)^{\log_b \cos a}$，$z=(\sin a)^{\log_b \cos a}$的大小关系是

(A) $x<z<y$　　(B) $y<z<x$　　(C) $z<x<y$　　(D) $x<y<z$

【答案】A

【解析】$0<\sin a<\cos a<1$．$\log_b \sin a>\log_b \cos a>0$.

∴ $(\sin a)^{\log_b \sin a}<(\sin a)^{\log_b \cos a}<(\cos a)^{\log_b \cos a}$即 $x<z<y$．选 A.

5、在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是

(A) $(\frac{n-2}{n}\pi,\ \pi)$　　(B) $(\frac{n-1}{n}\pi,\ \pi)$　　(C) $(0,\ \frac{\pi}{2})$　　(D) $(\frac{n-2}{n}\pi,\ \frac{n-1}{n}\pi)$

【答案】A

【解析】设相邻两侧面所成的二面角为 θ，易得 θ 大于正 n 边形的一个内角$\frac{n-2}{n}\pi$，当棱锥的高趋于 0 时，θ 趋于 π，故选 A.

6、在平面直角坐标系中，方程$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$（$a$，$b$ 是不相等的两个正数）所代表的曲线是

(A) 三角形　　(B) 正方形

(C) 非正方形的长方形　　(D) 非正方形的菱形

【答案】D

【解析】$x+y\geqslant 0$，$x-y\geqslant 0$ 时，（一、四象限角平分线之间）：$(a+b)x+(b-a)y=2ab$;

$x+y\geqslant 0$，$x-y<0$ 时，（一、二象限角平分线之间）：$(b-a)x+(a+b)y=2ab$;

$x+y<0$，$x-y\geqslant 0$ 时，(三、四象限角平分线之间)：$(a-b)x-(a+b)y=2ab$；

$x+y<0$，$x-y<0$ 时，(二、三象限角平分线之间)：$-(a+b)x+(a-b)y=2ab$.

四条直线在 $a\neq b$ 时围成一个菱形(非正方形)．选 D.

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1. 已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为(−1，1)和(2，2)，若直线 l：$x+my+m=0$ 与 PQ 的延长线相交，则 m 的取值范围是______________.

【答案】 $-3<m<-\frac{2}{3}$.

【解析】 即 $x+my+m=0$ 与 $y=\frac{1}{3}(x+1)+1$ 的交点的横坐标>2.

∴ $x+m(\frac{1}{3}x+\frac{4}{3})+m=0$，$(3+m)x=-7m$. $x=-\frac{7m}{m+3}>2$. $\Rightarrow -3<m<-\frac{2}{3}$.

2. 已知 x，$y\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，$a\in R$ 且 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\4y^3+\sin y\cos y+a=0\end{cases}$ 则 $\cos(x+2y)=$______________.

【答案】 1

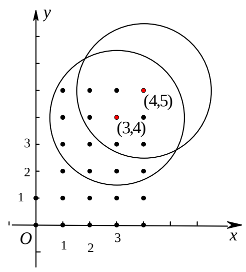
【解析】 $2a=x^3+\sin x=(-2y)^3-\sin(-2y)$，

令 $f(t)=t^3+\sin t$，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$f'(t)=3t^2+\cos t>0$，即 $f(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增．∴

$x=-2y$.

∴ $\cos(x+2y)=1$.

3．已知点集 $A=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant(\frac{5}{2})^2\}$，$B=\{(x,y)\mid(x-4)^2+(y-5)^2>(\frac{5}{2})^2\}$，则点集 $A\cap B$ 中的整点(即横、纵坐标均为整数的点)的个数为______________.



【答案】7

【解析】如图可知，共有 7 个点，即(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，2)，(2，3)，(3，2)，(4，2)共 7 点．

4．设 $0<\theta<\pi$,，则 $\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$的最大值是__________．

【答案】$\frac{4\sqrt{3}}{9}$

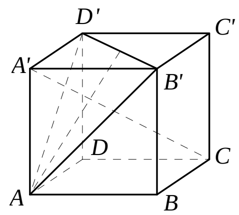
【解析】令 $y=\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)>0$，

则 $y^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}=2\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\leqslant2(\frac{2}{3})^3$．

∴ $y\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$．当 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立．

5．已知一平面与一正方体的 12 条棱的夹角都等于 α，则 $\sin\alpha=$____________．

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$



【解析】12 条棱只有三个方向，故只要取如图中 AA'与平面 $AB'D'$所成角即可．设 $AA'=1$，则 $A'C=\sqrt{3}$，$A'C\perp$平面 $AB'D'$，$A'C$被平面 $AB'D'$、BDC'三等分．于是 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

6．已知 95 个数 a_1，a_2，a_3，…，a_{95}， 每个都只能取+1 或—1 两个值之一，那么它们的两两之积的和 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{94}a_{95}$的最小正值是_____________．

【答案】13

【解析】设有 m个+1，$(95-m)$个—1．则 $a_1+a_2+\cdots+a_{95}=m-(95-m)=2m-95$

∴ $2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{94}a_{95})=(a_1+a_2+\cdots+a_{95})^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{95}^2)=(2m-95)^2-95>0$．

取 $2m-95=\pm11$．得 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{94}a_{95}=13$．为所求最小正值．

第二试

一、(本题满分 25 分)　x的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中，z_1,z_2,m均是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20i$，设这个方程的两个根 α、β，满足$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求$|m|$的最大值和最小值．

【解析】设 $m=a+bi(a,\ b\in R)$．则$\triangle=z_1^2-4z_2-4m=16+20i-4a-4bi=4[(4-a)+(5-b)i]$．设△的平方根为 $u+vi$．$(u,\ v\in R)$

即 $(u+vi)^2=4[(4-a)+(5-b)i]$.

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，$\Leftrightarrow|\alpha-\beta|^2=28$，$\Leftrightarrow|(4-a)+(5-b)i|=7$，$\Leftrightarrow(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$，

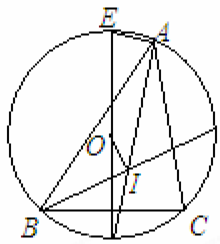
即表示复数 a 的点在圆 $(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$ 上，该点与原点距离的最大值为 $7+\sqrt{41}$，最小值为 $7-\sqrt{41}$.

二、(本题满分 25 分) 将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列，试求出这个数列的第 1000 项。

【解析】由 $105=3\times5\times7$；故不超过 105 而与 105 互质的正整数有 $105\times(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})=48$ 个。$1000=48\times20+48-8$，$105\times20=2100$. 而在不超过 105 的与 105 互质的数中第 40 个数是 86.

∴ 所求数为 2186。

三、(本题满分 35 分) 如图，设三角形的外接圆 O 的半径为 R，内心为 I，$\angle B=60°$，$\angle A<\angle C$，$\angle A$ 的外角平分线交圆 O 于 E.



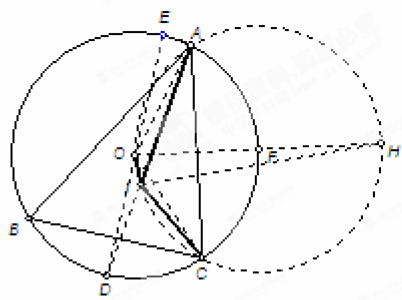
证明：(1) $IO=AE$；　(2) $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

【解析】证明：∵ $\angle B=60°$，∴ $\angle AOC=\angle AIC=120°$.

∴ A，O，I，C 四点共圆. 圆心为弧 AC 的中点 F，半径为 R.

∴ O 为⊙F 的弧 AC 中点，设 OF 延长线交⊙F 于 H，AI 延长线交弧 BC 于 D.

由 $\angle EAD=90°$ (内外角平分线)知 DE 为⊙O 的直径. $\angle OAD=\angle ODA$.



但 $\angle OAI=\angle OHI$，故 $\angle OHI=\angle ADE$，于是 $Rt\triangle DAE\cong Rt\triangle HIO$

∴ $AE=IO$.

由 $\triangle ACH$ 为正三角形，易证 $IC+IA=IH$.

由 $OH=2R$. ∴$IO+IA+IC=IO+IH>OH=2R$.

设$\angle OHI=\alpha$，则$0<\alpha<30°$.

∴$IO+IA+IC=IO+IH=2R(\sin\alpha+\cos\alpha)=2R\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)$

又 $\alpha+45°<75°$，故 $IO+IA+IC<2\sqrt{2}R(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4=R(1+\sqrt{3})$

四、（本题满分 35 分）给定平面上的点集 $P=\{P_1，P_2，\cdots，P_{1994}\}$，$P$中任三点均不共线，将 P 中的所有的点任意分成 83 组，使得每组至少有 3 个点，且每点恰好属于一组，然后将在同一组的任两点用一条线段相连,不在同一组的两点不连线段,这样得到一个图案 G,不同的分组方式得到不同的图案,将图案 G 中所含的以 P 中的点为顶点的三角形个数记为 $m(G)$.

(1)求 $m(G)$ 的最小值 m_0.

(2)设 G^*是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图案，若 G^*中的线段(指以 P 的点为端点的线段)用 4 种颜色染色,每条线段恰好染一种颜色．证明存在一个染色方案,使 G^*染色后不含以 P 的点为顶点的三边颜色相同的三角形.

【解析】设 G 中分成的 83 个子集的元素个数分别为 $n_i(1\leqslant i\leqslant83)$，$\sum\limits_{i=1}^{83}n_i=1994$．且 $3\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_{83}$.

则 $m(G)=\sum\limits_{i=1}^{83}C_{n_i}^3$．即求此式的最小值.

设 $n_{i+1}>n_i+1$．即 $n_{i+1}-1\geqslant n_i+1$．则 $C_{n_i+1}^3+C_{n_{i+1}-1}^3-(C_{n_i}^3+C_{n_{i+1}}^3)=C_{n_i}^2-C_{n_{i+1}-1}^2<0$．这就是说，当 n_{i+1} 与 n_i 的差大于 1 时，可用 $n_{i+1}-1$ 及 n_i+1 代替 n_{i+1} 及 n_i，而其余的数不变．此时，$m(G)$的值变小.

于是可知，只有当各 n_i 的值相差不超过 1 时，$m(G)$才能取得最小值.

$1994=83\times24+2$．故当 81 组中有 24 个点，2 组中有 25 个点时，$m(G)$达到最小值.

$m_0=81C_{24}^3+2C_{25}^3=81\times2024+2\times2300=168544$.

⑵ 取 5 个点为一小组，按图 1 染成 a、b 二色．这样的五个小组，如图 2，每个小圆表示一个五点小组．同组间染色如图 1，不同组的点间的连线按图 2 染成 c、d 两色．这 25 个点为一组，共得 83 组．染色法相同．其中 81 组去掉 1 个点及与此点相连的所有线．即得一种满足要求的染色．

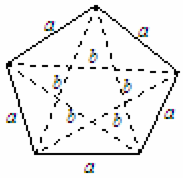


图1

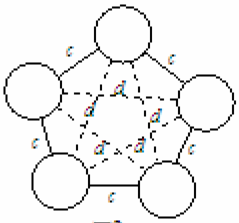


图2