1991 年全国高中数学联赛一试题

一．选择题：

1．由一个正方体的三个顶点所能构成的正三角形的个数为(　　)

A．4　　　　B．8　　　　C．12　　　　D．24

2．设 a、b、c 均为非零复数，且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值为(　　)

A．1　　　　B．$\pm\omega$　　　　C．1，ω，ω^2　　　　D．1，$-\omega$，$-\omega^2$

3．设 a 是正整数，$a<100$，并且 a^3+23 能被 24 整除，那么，这样的 a 的个数为(　　)

A．4　　　　B．5　　　　C．9　　　　D．10

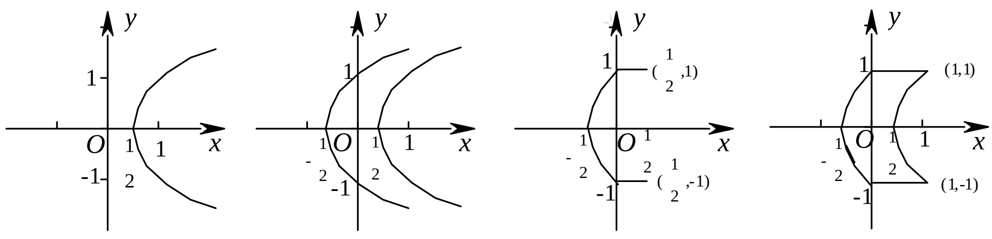
4．设函数 $y=f(x)$ 对于一切实数 x 满足 $f(3+x)=f(3-x)$．且方程 $f(x)=0$ 恰有 6 个不同的实数根，则这 6 个实根的和为(　　)

A．18　　　　B．12　　　　C．9　　　　D．0

5．设 $S=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=$奇数，$x,y\in R\}$，$T=\{(x,y)\,|\,\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)$，$x$，$y\in R\}$，则(　　)

A．$S\subsetneqq T$　　　　B．$T\subsetneqq S$　　　　C．$S=T$　　　　D．$S\cap T=\varnothing$

6．方程 $|x-y^2|=1-|x|$ 的图象为(　　)



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

二．填空题：

1．$\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°=$____________．

2．在△ABC 中，已知三个角 A、B、C 成等差数列，假设它们所对的边分别为 a，b，c，并且 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}=$______________．

3．将正奇数集合{1，3，5，…}由小到大按第 n 组有 $(2n-1)$ 个奇数进行分组：

{1}，　{3，5，7}，　{9，11，13，15，17}，……

(第一组)　(第二组)　　　(第三组)

则 1991 位于第___________组．

4．1991^{2000} 除以 10^6，余数是_____________．

5．设复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，则 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=$________________．

6．设集合 $M=\{1，2，…，1000\}$，现对 M 中的任一非空子集 X，令 α_X 表示 X 中最大数与最小数的和．那么，所有这样的 α_X 的算术平均值为_____________．

三．设正三棱锥 $P—ABC$ 的高为 PO，M 为 PO 的中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，试求此两部分的体积比．

四．设 O 为抛物线的顶点，F 为焦点，且 PQ 为过 F 的弦．已知 $|OF|=a$，$|PQ|=B$．求△OPQ 的面积．

五．已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证：

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}.$$

1991 年全国高中数学联赛二试题

一．设 $S=\{1，2，\cdots，n\}$，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后不能构成与 A 有相同公差的等差数列．求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列)．

二．设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1，求证：在它的边上(包括顶点)或内部可以找出四个点，使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积大于$\frac{1}{4}$.

三．设 a_n 是下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1、3 或 4．求证：a_{2n} 是完全平方数．这里，$n=1，2，\cdots$．

1991年全国高中数学联赛解答

第一试

一．选择题：

1．由一个正方体的三个顶点所能构成的正三角形的个数为(　　)

A．4　　B．8　　C．12　　D．24

【答案】B

【解析】每个正方形的顶点对应着一个正三角形．故选 *B*

2．设 a、b、c 均为非零复数，且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值为(　　)

A．1　　B．$\pm\omega$　　C．1，ω，ω^2　　D．1，$-\omega$，$-\omega^2$

【答案】C

【解析】令 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=t$，则 $a=at^3$．由 $a\neq0$ 得 $t=1$，ω，ω^2．且 $1+\omega+\omega^2=0$．故 $\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{1+t^2-t}{1-t^2+t}=\frac{1}{t}$．选 C．

3．设 a 是正整数，$a<100$，并且 a^3+23 能被24整除，那么，这样的 a 的个数为(　　)

A．4　　B．5　　C．9　　D．10

【答案】B

【解析】即 $24|a^3-1$，而 $a\equiv0$，±1，±2，±3，4，则 $a^3\equiv0$，±1，0，±3，0．故 $a-1\equiv0(mod\ 8)$．

若 $a\equiv0$，1，2$(mod 3)$，则 $a^3\equiv0$，1，$-1(mod 3)$，∴ $a-1\equiv0(mod 3)$．即 $a-1\equiv0(mod\ 24)$．选 B．

4．设函数 $y=f(x)$ 对于一切实数 x 满足

$$f(3+x)=f(3-x)$$

且方程 $f(x)=0$ 恰有6个不同的实数根，则这6个实根的和为(　　)A

A．18　　B．12　　C．9　　D．0

【答案】A

【解析】该函数图象关于 $x=3$ 对称．故6个根的和$=3\times2\times3=18$．选 A．

5．设 $S=\{(x,y)|x^2-y^2=$奇数，$x,y\in R\}$，$T=\{(x,y)|\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)$，$x$，$y\in R\}$，则(　　)

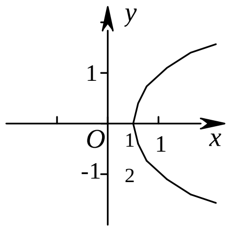
A．$S\subsetneqq T$　　B．$T\subsetneqq S$　　C．$S=T$　　D．$S\cap T=\emptyset$

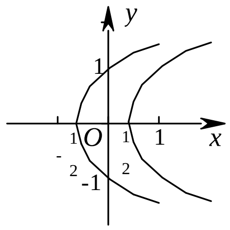
【答案】A

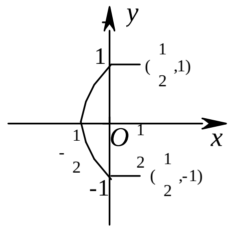
【解析】若 x^2-y^2 为奇数，则 $\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)$ 成立，即 $S\subseteq T$．

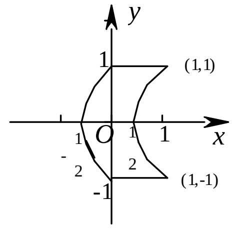
又若 $x=y$ 时，$\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)$ 也成立，即得 $S\subsetneqq T$，选 A．

6．方程$|x-y^2|=1-|x|$的图象为（　　）


A.


B.


C.



D.

【答案】D

【解析】∵ $|x-y^2|=\begin{cases}x-y^2 & (x\geqslant y^2),\\ y^2-x & (x<y^2).\end{cases}$ 故此方程等价于

$$\begin{cases}x-y^2=1-x，即 y^2=2x-1 & (x\geqslant y^2),\\ y^2-x=1-x，即 y^2=1 & (0\leqslant x<y^2),\\ y^2-x=1+x，即 y^2=2x+1 & (x<0).\end{cases}$$

故选 D.

二．填空题:

1．$\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°=$__________.

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】原式$=(\cos 10°-\cos 50°)^2+\cos 10°\cos 50°=\sin^2 20°+\cos 10°\cos 50°=\frac{1}{2}(1-\cos 40°+\cos 60°+\cos 40°)=\frac{3}{4}$.

2．在△ABC中，已知三个角A、B、C成等差数列，假设它们所对的边分别为a，b，c，并且$c-a$等于AC边上的高h，则$\sin\frac{C-A}{2}=$____________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】易知$h=c-a=\frac{h}{\sin A}-\frac{h}{\sin C}$，$\Rightarrow \sin A\sin C=\sin C-\sin A$，由已知，$A+C=120°$．

$\therefore \frac{1}{2}[\cos(C-A)-\cos 120°]=2\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{120°}{2}$，即$\sin^2\frac{C-A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}-\frac{3}{4}=0$

即$\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{3}{2}$（舍去），$\sin\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}$.

3．将正奇数集合{1，3，5，…}由小到大按第n组有$(2n-1)$个奇数进行分组：

{1}，{3，5，7}，{9，11，13，15，17}，……

（第一组）（第二组）（第三组）

则 1991 位于第__________组.

【答案】32

【解析】由于$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$，故第n组最后一数为$2n^2-1$，于是解$2(n-1)^2-1+2$

$\leqslant 1991 \leqslant 2n^2-1$，得 $n=32$．即在第 32 组．

4．1991^{2000}除以 10^5，余数是____________．

【答案】880001

【解析】$1991^{2000}=(1990+1)^{2000}=1990^{2000}+\cdots+C_{2000}^{1997}\times 1990^3+C_{2000}^{1998}\times 1990^2+C_{2000}^{1999}\times 1990+1$

$\equiv 1000\times 1999\times 1990^2+2000\times 1990+1\equiv 880001\ (mod\ 10^5)$．即余数为 880001．

5．设复数 z_1，z_2满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，则 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=$________________．

【答案】4000

【解析】由 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，得 $|z_2|=3$．由于 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=3$，故 $\arg z_1-\arg z_2=\pm 120°$．

$\therefore |(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=2\times 3^{4000}|\cos(120°\times 2000)|=3^{4000}$．故 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=4000$．

6．设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$，现对 M 中的任一非空子集 X，令 σ_X表示 X 中最大数与最小数的和．那么，所有这样的 σ_X的算术平均值为____________．

【答案】1001

【解析】对于任一整数 $n(0<n\leqslant 1000)$，以 n 为最大数的集合有 2^{n-1}个，以 n 为最小数的集合有 2^{1000-n}个，以 $1001-n$ 为最小数的集合则有 2^{n-1}个，以 $1001-n$ 为最大数的集合则有 2^{1000-n}个．故 n 与 $1001-n$ 都出现 $2^{n-1}+2^{1000-n}$次．

$\therefore$ 所有 σ_X的和$=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{1000}1001\cdot(2^{n-1}+2^{1000-n})=1001\times(2^{1000}-1)$．

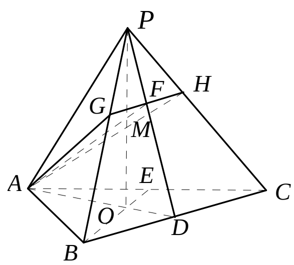
$\therefore$ 所求平均值$=1001$．

又解：对于任一组子集 $A=\{b_1,\cdots,b_k\}$，$b_1<b_2<\cdots<b_k(1\leqslant k<1000)$，取子集 $A'=\{1001-b_1,\cdots,1001-b_k\}$，若 $A\neq A'$，则此二子集最大数与最小数之和$=b_1+b_k+1001-b_1+1001-b_k=2002$，平均数为 1001．若 $A=A'$，则 A 本身的$=1001$．

由于每一子集均可配对．故所求算术平均数为 1001．

三．设正三棱锥 $P—ABC$ 的高为 PO，M 为 PO 的中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，试求此两部分的体积比．

【解析】



M 是 PO 中点，延长 AO 与 BC 交于点 D，则 D 为 BC 中点，连 PD，由于 AM 在平面 PAD 内，故延长 AM 与 PD 相交，设交点为 F．题中截面与面 PBC 交于过 F 的直线 GH，G、H 分别在 PB、PC 上．由于 BC∥截面 AGH，$\therefore GH$∥BC．

在面 PAD 中，△POD 被直线 AF 截，故$\frac{PM}{MO}\cdot\frac{OA}{AD}\cdot\frac{DF}{FP}=1$，但$\frac{PM}{MO}=1$，$\frac{OA}{AD}=\frac{2}{3}$，$\therefore\frac{DF}{FP}=\frac{3}{2}$．

$\therefore \frac{PF}{PD}=\frac{2}{5}$，$\therefore \frac{S_{\Delta PGH}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{4}{25} \Rightarrow \frac{S_{\Delta PGH}}{S_{HGBC}}=\frac{4}{21}$．而截面分此三棱锥所成两部分可看成是有顶点 A 的两个棱锥 A—PGH 及 A—$HGBC$．故二者体积比=4∶21．

四．设 O 为抛物线的顶点，F 为焦点，且 PQ 为过 F 的弦．已知 $|OF|=a$，$|PQ|=b$．求△OPQ 的面积．

【解析】(用极坐标)设抛物线方程为 $\rho=\frac{2a}{1-\cos\theta}$．设 PQ 与极径所成角为 α，则 $\frac{4a}{\sin^2\alpha}=b$．

所求面积 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|PQ|\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}}=a\sqrt{ab}$．

五．已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证：

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}.$$

【解析】由于 $0<a<1$，即证 $a^x+a^y\geqslant 2a^{\frac{1}{8}}$．由于 $a^x+a^y\geqslant 2a^{\frac{x+y}{2}}$．而 $x+y=x-x^2=x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$．于是 $a^{\frac{x+y}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{8}}$．$\therefore$ $a^x+a^y\geqslant 2a^{\frac{x+y}{2}}\geqslant 2a^{\frac{1}{8}}$．故证．

第二试

一．设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后不能构成与 A 有相同公差的等差数列．求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列)．

【解析】易知公差 $1\leqslant d\leqslant n-1$．

设 $n=2k$，$d=1$ 或 $d=n-1$ 时，这样的 A 只有 1 个，$d=2$ 或 $d=n-2$ 时，这样的数列只有 2 个，$d=3$ 或 $n-3$ 时这样的数列只有 3 个，……，$d=k-1$ 或 $k+1$ 时，这样的数列有 $k-1$ 个，$d=k$ 时，这样的数列有 k 个．

$\therefore$ 这样的数列共有 $(1+2+\cdots+k)\times 2-k=k^2=\frac{1}{4}n^2$ 个．

当 $n=2k+1$ 时，这样的数列有 $(1+2+\cdots+k)\times 2=k(k+1)=\frac{1}{4}(n^2-1)$ 个．

两种情况可以合并为：这样的 A 共有 $\frac{n^2}{4}-\frac{1+(-1)^{n-1}}{8}$ 个(或 $[\frac{1}{4}n^2]$ 个)．

解法二：对于 $k=[\frac{n}{2}]$，这样的数列 A 必有连续两项，一项在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，一在 $\{k+1.k+2,\cdots,n\}$ 中，反之，在此两集合中各取一数，可以其差为公差构成一个 A，于是共有这样的数列

当 $n=2k$ 时，这样的 A 的个数为 $k^2=\frac{1}{4}n^2$ 个；当 $n=2k+1$ 时，这样的 A 的个数为 $k(k+1)=\frac{1}{4}(n^2-1)$ 个．

$\therefore$ 这样的数列有 $[\frac{1}{4}n^2]$ 个．

解法一也可这样写：设 A 的公差为 d，则 $1\leqslant d\leqslant n-1$.

(1) 若 n 为偶数，则

当 $1\leqslant d\leqslant\frac{n}{2}$ 时，公差为 d 的等差数列 A 有 d 个；

当 $\frac{n}{2}<d\leqslant n-1$ 时，公差为 d 的等差数列 A 有 $n-d$ 个.

故当 n 为偶数时，这样的 A 共有

$$(1+2+\cdots+\frac{n}{2})+[1+2+\cdots+(n-\frac{n}{2}-1)]=\frac{1}{4}n^2\text{ 个}.$$

(2) 若 n 为奇数，则

当 $1\leqslant d\leqslant\frac{n-1}{2}$ 时，公差为 d 的等差数列 A 有 d 个；

当 $\frac{n+1}{2}\leqslant d\leqslant n-1$ 时，公差为 d 的等差数列 A 有 $n-d$ 个.

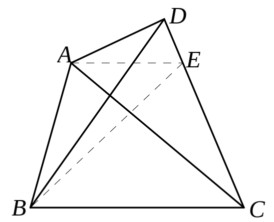
故当 n 为奇数时，这样的 A 共有

$$(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2})+(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2})=\frac{1}{4}(n^2-1)\text{ 个}.$$

两种情况可以合并为：这样的 A 共有 $\frac{n^2}{4}-\frac{1+(-1)^{n-1}}{8}$ 个（或 $[\frac{1}{4}n^2]$ 个）.

二．设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1，求证：在它的边上(包括顶点)或内部可以找出四个点，使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$.

【解析】证明：考虑四边形的四个顶点 A、B、C、D，若 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的面积，设其中面积最小的三角形为 $\triangle ABD$.



(1) 若 $S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$，则 A、B、C、D 即为所求.

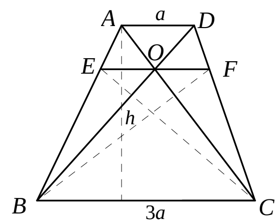
(2) 若 $S_{\triangle ABD}<\frac{1}{4}$，则 $S_{\triangle BCD}>\frac{3}{4}$，取 $\triangle BCD$ 的重心 G，则以 B、C、D、G 这 4 点中的任意 3 点为顶点的三角形面积 $>\frac{1}{4}$.

(3) 若 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$，其余三个三角形面积均 $>S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$.

由于 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=1$，而 $S_{\triangle ACD}>\frac{1}{4}$，故 $S_{\triangle ABC}<\frac{3}{4}=S_{\triangle BCD}$.

∴ 过 A 作 $AE/\!/BC$ 必与 CD 相交，设交点为 E.

则∵ $S_{\triangle ABC}>S_{\triangle ABD}$，从而 $S_{\triangle ABE}>S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$. $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABE}>\frac{1}{4}$，$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$. 即 A、B、C、E 四点即为所求.



(4) 若 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$，其余三个三角形中还有一个的面积 $=\frac{1}{4}$，这个三角形不可能是 $\triangle BCD$，(否则 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}$)，不妨设 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$. 则 $AD/\!/BC$，四边形

$ABCD$ 为梯形．

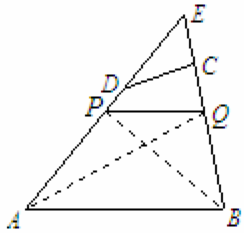
由于 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{3}{4}$，故若 $AD=a$，则 $BC=3a$，设梯形的高 $=h$，

则 $2ah=1$．设对角线交于 O，过 O 作 $EF// BC$ 分别交 AB、CD 于 E、F.

$\therefore$ $AE:EB=AO:OC=AD:BC=1:3$.

$\therefore$ $EF=\frac{a\cdot 3+3a\cdot 1}{1+3}=\frac{3}{2}$A. $S_{\triangle}=S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{3}{4}h=\frac{9}{16}ab=\frac{9}{32}>\frac{1}{4}$.

$S_{\triangle}=S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{4}h=\frac{9}{8}ab=\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$. 于是 B、C、F、E 四点为所求．综上可知所证成立．

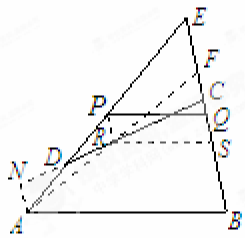


又证：当 $ABCD$ 为平行四边形时，A、B、C、D 四点即为所求．当 $ABCD$ 不是平行四边形，则至少有一组对边的延长线必相交，设延长 AD、BC 交于 E，且设 D 与 AB 的距离<C 与 AB 的距离，

(1) 若 $ED\leqslant\frac{1}{2}AE$，取 AE 中点 P，则 P 在线段 AD 上，作 $PQ// AB$ 交 BC 于 Q．若 $PQ=a$，P 与 AB 距离 $=h$，则 $AB=2a$，$S_{\triangle}=\frac{3}{4}S_{\triangle}>\frac{3}{4}S_{\triangle}=\frac{3}{4}$.

即 $\frac{1}{2}(a+2a)h>\frac{3}{4}$，$ab>\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $S_{\triangle}=S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab>\frac{1}{4}$．$S_{\triangle}=S_{\triangle}=ab>\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$．即 A、B、Q、P 为所求．



(2) 若 $ED>\frac{1}{2}AE$，取 AE 中点 P，则 P 在线段 DE 上，作 $PR// BC$ 交 CD 于 R，$AN// BC$，交 CD 于 N．由于 $\angle EAB+\angle EBA<\pi$，故 R 在线段 CD 上．N 在 DC 延长线上．作 $RS// AB$，交 BC 于 S，则 $RS=\frac{1}{2}AB$，延长 AR 交 BC 于 F，则 $S_{\triangle}=S_{\triangle}>S_{\triangle}=1$．问题化为上一种情况．

三．设 a_n 是下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1、3 或 4．求证：a_{2n} 是完全平方数．这里，$n=1$，2，….

【解析】证明：设 $N=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$，其中 x_1，x_2，…，$x_k\in\{1，3，4\}$．且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$．假定 $n>4$．删去 x_k 时，则当 x_k 依次取 1，3，4 时，$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}$ 分别等于 $n-1$，$n-3$，$n-4$．故当 $n>4$ 时，

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}. \quad ①$$

$$a_1=a_2=1，\ a_3=2，\ a_4=4，$$

利用①及初始值可以得到下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	……
a_n	1	1	2	4	6	9	15	25	40	64	104	169	273	441	……
规律	1	1^2	1×2	2^2	2×3	3^2	3×5	5^2	5×8	8^2	8×13	13^2	13×21	21^2	……

可找到规律：

(1) 取 $f_1=1$，$f_2=2$，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. 这是菲波拉契数列相应的项.

$$\begin{cases} a_{2n}=f_n^2, & ② \\ a_{2n+1}=f_nf_{n+1}. & ③ \end{cases} (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

可用数学归纳法证明②、③成立.

首先，$n=1$ 时，$a_2=1^2=f_1^2$，$a_3=1\times2=f_1f_2$.

$n=2$ 时，$a_4=2^2=f_2^2$，$a_5=2\times3=f_2f_3$. 即 $n=1$，2 时②、③成立.

设 $n=k-1$，k 时②、③成立. 则由①及归纳假设得

$a_{2(k+1)}=a_{2k+1}+a_{2k-1}+a_{2k-2}=f_kf_{k+1}+f_{k-1}f_k+f_{k-1}^2=f_kf_{k+1}+f_{k-1}(f_k+f_{k-1})$

$=f_kf_{k+1}+f_{k-1}f_{k+1}=f_{k+1}(f_{k-1}+f_k)=f_{k+1}f_{k+1}=f_{k+1}^2$

$a_{2(k+1)+1}=a_{2(k+1)}+a_{2k}+a_{2k-1}=f_{k+1}^2+f_k^2+f_{k-1}f_k=f_{k+1}^2+f_k(f_k+f_{k-1})=f_{k+1}^2+f_kf_{k+1}=f_{k+1}(f_{k+1}+f_k)=f_{k+2}f_{k+1}$.

故 $n=k+1$ 时②、③成立. 故对于一切正整数 n，②、③成立.

于是 $a_{2n}=f_n^2(n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$是完全平方数.

证明 2：(找规律)先用归纳法证明下式成立：

$$a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}. \qquad ④$$

因 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，故当 $n=1$ 时，④成立.

设 $n=k$ 时④成立，即 $a_{2k+1}=a_{2k}+a_{2k-1}$.

则由①，$a_{2k+3}=a_{2k+2}+a_{2k}+a_{2k-1}=a_{2(k+1)}+a_{2(k+1)-1}$. 故④式对 $k+1$ 成立，即④对一切 $n\in N^*$ 成立.

(2) 再用归纳法证明下式成立：

$$a_{2n}a_{2n+2}=a_{2n+1}^2 \qquad ⑤$$

因 $a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=4$，故当 $n=1$ 时⑤成立.

设 $n=k$ 时⑤成立，即 $a_{2k}a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$.

则由①、④，有 $a_{2k+2}a_{2k+4}=a_{2k+2}(a_{2k+3}+a_{2k+1}+a_{2k})=a_{2k}a_{2k+2}+a_{2k+1}a_{2k+2}+a_{2k+2}a_{2k+3}$

(由⑤)$=a_{2k+1}^2+a_{2k+1}a_{2k+2}+a_{2k+2}a_{2k+3}=a_{2k+1}(a_{2k+2}+a_{2k+1})+a_{2k+2}a_{2k+3}$

$=a_{2k+1}a_{2k+3}+a_{2k+2}a_{2k+3}$(由⑤)$=a_{2k+3}(a_{2k+1}+a_{2k+2})=a_{2k+3}^2$.

(本题由于与菲波拉契数列有关，故相关的规律有很多，都可以用于证明本题)

证明 2：(用特征方程)由上证得①式，且有 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=4$，

由此得差分方程：$\lambda^4-\lambda^3-\lambda-1=0$. $\Rightarrow(\lambda^2+1)(\lambda^2-\lambda-1)=0$. 此方程有根 $\lambda=\pm i$，$\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∴ 令 $a_n=\alpha i^n+\beta(-i)^n+\gamma\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\delta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

利用初值可以求出 $a_n=\dfrac{2-i}{10}\cdot i^n+\dfrac{2+i}{10}\cdot(-i)^n+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$.

$\therefore\ a_{2n}=\{\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]\}^2$.

用数学归纳法可以证明 $b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$为整数．(这是斐波拉契数列的通项公式)

$b_0=1$，$b_1=1$ 均为整数，设 $k\leqslant n$ 时 $b_k=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}]$都为整数，则

$$b_{k+1}-b_k=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+2}-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+2}]$$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}]=b_{k-1}$．即 $b_{k+1}=b_k+b_{k-1}$．由归纳假设 b_k与 b_{k-1}均为整数，故 b_{k+1}为整数．于是可知 b_n对于一切 $n\in N^*$，b_n为整数．于是 a_{2n}为整数之平方，即为完全平方数．

证明 4．(下标全部变为偶数再用特征方程)

由①得，$a_{2n+4}=a_{2n+3}+a_{2n+1}+a_{2n}=(a_{2n+2}+a_{2n}+a_{2n-1})+a_{2n+1}+a_{2n}=a_{2n+2}+2a_{2n}+a_{2n+2}-a_{2n-2}$(由 $a_{2n+2}=a_{2n+1}+a_{2n-1}+a_{2n-2}$)

令 $b_n=a_{2n}$，则得 $b_{n+2}-2b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}=0$．特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+1=0$．

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

故 $b_n=\alpha(-1)^n+\beta(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n+\gamma(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$．初始值 $b_1=a_2=1$，$b_2=a_4=4$，$b_3=a_6=9$．$b_0=-b_3+2b_2+2b_1=1$．

代入求得 $\alpha=\frac{2}{5}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{10}$，$\gamma=\frac{3-\sqrt{5}}{10}$．

得 $a_{2n}=b_n=\frac{1}{5}[2(-1)^n+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1}+(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]=\frac{1}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2(n+1)}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2(n+1)}-2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$

$=\{\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]\}^2$.

记 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$，其特征根为$\mu_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$．故其特征方程为$\mu^2-\mu-1=0$．于是其递推关系为 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$．

而 $f_0=1$，$f_1=1$，均为正整数，从而对于一切正整数 n，f_n为正整数．从而 a_{2n}为完全平方数．