2011 年全国高中数学联合竞赛一试

试题参考答案（B 卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；解答题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题第 9 题 4 分为一个档次，第 10,11 题 5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分．把答案填在横线上.

1．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{2010}-S_1=1$，则$S_{2011}=$__________.

解　因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$S_{2010}-S_1=S_{2010}-a_1=2009(\frac{a_2+a_{2010}}{2})=2009a_{1006}=1$，

于是$a_{1006}=\frac{1}{2009}$，所以 $S_{2011}=2011(\frac{a_1+a_{2011}}{2})=2011a_{1006}=\frac{2011}{2009}$.

2．已知复数z的模为 1， 若$z=z_1$和$z=z_2$时$|z+1+\mathrm{i}|$分别取得最大值和最小值，则$z_1-z_2=$__________.

解　易知$|1+\mathrm{i}|-|z|\leqslant|z+1+\mathrm{i}|\leqslant|1+\mathrm{i}|+|z|$，即$\sqrt{2}-1\leqslant|z+1+\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{2}+1$.

当$|z+1+\mathrm{i}|$取得最大值（最小值）时，z与 1+i 共线且方向相同（相反）.

又 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$，所以$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$， $z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$，

所以 $z_1-z_2=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}-[\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}]=\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$.

3．若正实数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$， $(a-b)^2=4(ab)^3$，则$\log_a b=$_______.

解 由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，得$a+b\le 2\sqrt{2}ab$.

又 $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\ge 4\cdot 2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2$，

即 $a+b\ge 2\sqrt{2}ab$.　　　　①

于是 $a+b=2\sqrt{2}ab$.　　　　②

再由不等式①中等号成立的条件，得$ab=1$．与②联立解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\ b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\ b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$

故$\log_a b=-1$.

4．把扑克牌中的$A,2,\cdots,J,Q,K$分别看作数字 1, 2, ⋯，11, 12, 13．现将一幅扑克牌中的

黑桃、红桃各 13 张放在一起，从中随机取出 2 张牌，其花色相同且两个数的积是完全平方数的概率为______________________.

解　从 26 张牌中任意取出 2 张，共有 $C_{26}^{2}=325$ 种取法．牌的花色相同且积是完全平方数的有 $4=1\times4,\ 9=1\times9,\ 16=2\times8,\ 36=3\times12=4\times9$，共有 10 对．因此，所求概率为 $\frac{10}{325}=\frac{2}{65}$．

5．若△ABC 的角 A,C 满足 $5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)=0$，则 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=$______．

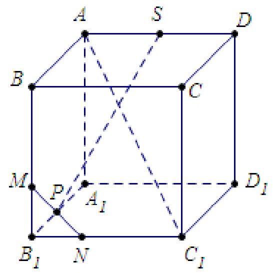
解　因为 $\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$，$\cos C=\dfrac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$，代入已知等式并化简整理，得

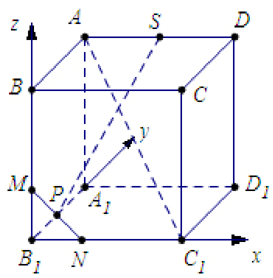
$\tan^2\frac{A}{2}\cdot\tan^2\frac{C}{2}=9$．又因为 $\frac{A}{2},\frac{C}{2}$ 均为锐角，所以 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}>0$，故 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=3$．

6．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6，M,N 分别是 BB_1,B_1C_1 上的点，$B_1M=B_1N=2$，S,P 分别是线段 AD,MN 的中点，则异面直线 SP 与 AC_1 的距离为______．

解　建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(0,6,6),C_1(6,0,0),S(3,6,6),P(1,0,1)$．





可求得：$\overrightarrow{AC_1}=(6,-6,-6),\ \overrightarrow{PS}=(2,6,5)$．

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 满足 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PS}=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x-y-z=0,\\ 2x+6y+5z=0,\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(1,-7,8)$．

而 $\overrightarrow{AS}=(3,0,0)$，则异面直线 SP 与 AC_1 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AS}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(3,0,0)\cdot(1,-7,8)|}{\sqrt{1^2+(-7)^2+8^2}}=\frac{3}{\sqrt{114}}=\frac{\sqrt{114}}{38}.$$

7．在△ABC 中，E,F 分别是 AC,AB 的中点，$AB=\frac{2}{3}AC$．若 $\frac{BE}{CF}<t$ 恒成立，则 t 的最小值为__________．

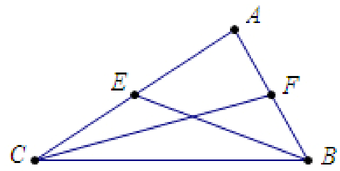
解　由余弦定理得

$$BE^2=AE^2+AB^2-2AE\cdot AB\cdot\cos A=\frac{1}{4}AC^2+\frac{4}{9}AC^2-\frac{2}{3}AC^2\cdot\cos A=\left(\frac{25}{36}-\frac{2}{3}\cos A\right)AC^2,$$

$$CF^2=AF^2+AC^2-2AF\cdot AC\cdot\cos A=\frac{1}{9}AC^2+AC^2-\frac{2}{3}AC^2\cdot\cos A=\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos A\right)AC^2,$$

所以 $$\frac{BE^2}{CF^2}=\frac{\frac{25}{36}-\frac{2}{3}\cos A}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos A}=\frac{25-24\cos A}{40-24\cos A}=1-\frac{15}{40-24\cos A}<1-\frac{15}{40+24}=\frac{49}{64},$$

故 $\frac{BE}{CF}<\frac{7}{8}$，从而 $t\ge\frac{7}{8}$，即 t 的最小值为 $\frac{7}{8}$．



8．抛物线 $y^2=2p(x-\frac{p}{2})$ $(p>0)$ 上动点 A 到点 $B(3,0)$ 的距离的最小值记为 $d(p)$，满足 $d(p)=2$ 的所有实数 p 的和为____________．

解　设 $A(x,y)$，则

$$AB^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+2p(x-\frac{p}{2})=x^2+2(p-3)x+(9-p^2) \qquad ①$$

$$=(x+p-3)^2-2p^2+6p,(x\ge\frac{p}{2}) \qquad ②$$

（1）若 $3-p\ge\frac{p}{2}$，即 $0<p\le 2$，则当 $x=3-p$ 时，AB^2 取得最小值，$[d(p)]^2=-2p^2+6p$．又 $d(p)=2$，所以 $-2p^2+6p=4$，解得：$p_1=1,p_2=2$．

（2）若 $3-p<\frac{p}{2}$，即 $p>2$，则当 $x=\frac{p}{2}$ 时 AB^2 取得最小值，$[d(p)]^2=\frac{(p-6)^2}{4}$．

又 $d(p)=2$，所以 $\frac{(p-6)^2}{4}=4$，解得 $p_3=10$．

因此，满足 $d(p)=2$ 的所有实数 p 的和为：$p_1+p_2+p_3=1+2+10=13$．

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本小题满分 16 分）已知实数 x,y,z 满足：$x\ge y\ge z$，$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=3$．求实数 x 的取值范围．

解　令 $x=1+t$．由 $x+y+z=1$ 得 $z=-t-y$，代入 $x^2+y^2+z^2=3$，得

$$y^2+ty+t^2+t-1=0, \qquad ①$$

方程①有实数根，所以 $\Delta=t^2-4(t^2+t-1)\ge 0$，解得 $-2\le t\le\frac{2}{3}$．

由①及 $y>z$ 可得　$y=\frac{-t+\sqrt{4-4t-3t^2}}{2},z=\frac{-t-\sqrt{4-4t-3t^2}}{2}$．

又 $x\ge y$，所以 $1+t\ge\frac{-t+\sqrt{4-4t-3t^2}}{2}$，即 $2+3t\ge\sqrt{4-4t-3t^2}$，解得 $t\ge 0$．

综合可知，$0\le t\le\frac{2}{3}$，从而 $1\le x\le\frac{5}{3}$．

因此，所求实数 x 的取值范围是 $\left[1,\ \frac{5}{3}\right]$．

10．（本小题满分 20 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-2$ $(t\in R$ 且 $t\ne\pm 1)$，$a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)a_n}{a_n+2t^n-2}$ $(n\in N^*)$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $t>0$，试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小．

解　（1）由原式变形得，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}-1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2(t^n-1)}=\dfrac{\dfrac{2a_n}{t^n-1}}{\dfrac{a_n}{t^n-1}+2}$．

记 $\dfrac{a_n}{t^n-1}=b_n$，则 $b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{b_n+2}$，$b_1=\dfrac{a_1}{t-1}=\dfrac{2t-2}{t-1}=2$．

又 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{2}$，从而有 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$，

故 $\dfrac{a_n}{t^n-1}=\dfrac{2}{n}$，于是有 $a_n=\dfrac{2(t^n-1)}{n}$．

（2）$a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\dfrac{2(t^n-1)}{n}$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+(t^n-t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}\right],$$

显然在 $t>0$ 时恒有 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$．

11．（本小题满分 20 分）已知 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上不同的三点，△ $A_1A_2A_3$ 有两边所在的直线与抛物线 $x^2=2qy(q>0)$ 相切，证明：对不同的 $i,j\in\{1,2,3\}$，$y_iy_j(y_i+y_j)$ 为定值．

证　依题意有 $y_i^2=2px_i,i=1,2,3$．　y_1,y_2,y_3 互不相等．

不妨设 A_1A_2,A_2A_3 所在的直线与抛物线 $x^2=2qy$ 相切．因为抛物线 $x^2=2qy$ 的过原点 O 的切线与抛物线 $y^2=2px$ 只有一个公共点，所以原点 O 不能是所设内接三角形的顶点，即 $(x_i,y_i)\neq(0,0),\ i=1,2,3$．

因为 A_1A_2 所在的直线与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，所以 A_1A_2 不能与 y 轴平行，即 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq -y_2$．

直线 A_1A_2 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，把 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p},x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$ 代入，整理得

$$y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}.$$

直线 A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 的交点的横坐标满足

$$x^2-\frac{4pq}{y_1+y_2}x-\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}=0\text{ .}\qquad ①$$

由于 A_1A_2 所在的直线与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，所以方程①的判别式

$$\Delta=\left(-\frac{4pq}{y_1+y_2}\right)^2+4\left(\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}\right)=0\text{ ,}$$

化简整理得

$$y_1y_2(y_1+y_2)=-2p^2q\text{ .}\qquad ②$$

由于 A_2A_3 所在的直线也与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，同理可得

$$y_2y_3(y_2+y_3)=-2p^2q\text{ .}\qquad ③$$

②–③得 $\quad y_2(y_1-y_3)(y_1+y_2+y_3)=0$.

又 $y_2\neq0, y_1\neq y_3$，所以 $y_1+y_2+y_3=0$，从而 $y_2=-y_1-y_3$.

把 $y_2=-y_1-y_3$ 代入②式，整理得 $\quad y_1y_3(y_1+y_3)=-2p^2q$.

因此，对不同的 $i, j\in\{1, 2, 3\}, i\neq j$， $y_iy_j(y_i+y_j)$ 为定值 $-2p^2q$.

2011年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案（B卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、（本题满分40分）

求所有三元整数组 (x,y,z)，使其满足

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz=2011, \\ x\ge 15, \\ y\ge 15. \end{cases}$$

解　由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=2011$，得

$$(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=4022\ . \qquad ①$$

因　$4022=2011\times 2$ 且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\equiv 0 \pmod 2$，

所以①等价于 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4022. \end{cases}$　②

或　$\begin{cases} x+y+z=2011, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2. \end{cases}$　③

对于方程组②，消去 z 得 $(x-y)^2+(x+2y-1)^2+(2x+y-1)^2=4022$，

即　$x^2+y^2+xy-x-y=670$.　④

（1）若 $x=15, y=15$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=645<670$，与④矛盾.

（2）若 $x\ge 16, y\ge 15$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=x^2+(y-1)(x+y)\ge 256+434=690>670$，与④矛盾.

（3）若 $x\ge 15, y\ge 16$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=(x-1)(x+y)+y^2\ge 434+256=690>670$，与④矛盾.

综上，方程组②无解.

对于方程组③，因为 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$，所以 $|x-y|, |y-z|, |z-x|$ 中有两个为1，一个为0.

（1）若 $|x-y|=|y-z|=1, |z-x|=0$，则 $y+1=x=z$ 或 $y-1=x=z$.

当 $y+1=x=z$ 时，代入③的第一个方程，无解.

当 $y-1=x=z$ 时，代入③的第一个方程，得 $3y=2013$，解得 $y=671, x=z=670$．

（2）若 $|x-y|=|z-x|=1, |y-z|=0$，同理可得 $x=671, y=z=670$．

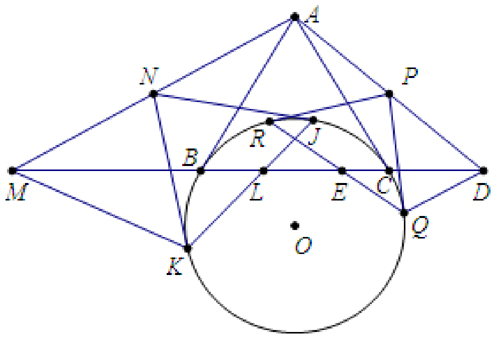
（3）若 $|z-x|=|y-z|=1, |x-y|=0$，同理可得 $z=671, x=y=670$．

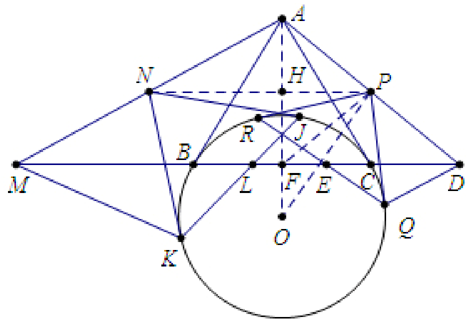
综上，满足条件的三元整数组为 $(671,670,670), (670,671,670), (670,670,671)$．

二、（本题满分 40 分）

如图，过⊙O 外一点 A 作⊙O 的两条切线，切点分别为 B,C．点 D 在线段 BC 的延长线上，$CD=\frac{1}{2}BC$．P 为 AD 的中点，过点 P 作⊙O 的两条切线，切点分别为 Q,R，QR 与 BC 交于点 E．点 M 在线段 CB 的延长线上，$BM=BC$．N 为 AM 的中点，过点 N 作⊙O 的两条切线，切点分别为 J,K，JK 与 BC 交于点 L．

证明：（1）A,R,Q,D 四点共圆；（2）$\frac{MC}{CL}=\frac{BE}{CE}$．





证明：（1）连接 OA 交 BC 于点 F，过点 P 作 $PH\perp OA$ 于点 H，则由题意有 $BC\perp OA$，$BF=CF, AH=FH$．

因为 P 是 $Rt\triangle AFD$ 的斜边 AD 的中点，所以 $PA=PD=PF$．

由 PQ,PR 为⊙O 的切线得 $PQ=PR$．

设⊙O 的半径为 r，则

$$PQ^2=OP^2-r^2=OH^2+PH^2-r^2=OH^2+PF^2-HF^2-r^2$$

$$=PF^2+(OH+HF)(OH-HF)-r^2=PF^2+OA\cdot OF-r^2=PF^2,$$

可得 $PQ=PF$，于是可得五点 A,R,F,Q,D 共圆.

（2）由相交弦定理有 $DE\cdot FE=RE\cdot QE=BE\cdot CE$．

又由 $DF\cdot EF=DE\cdot EF+EF^2=BE\cdot CE+EF^2=(CF+EF)(CF-EF)+EF^2=CF^2$ 及 $BC=2CF$ 可得 $BC^2=4DF\cdot EF$．

故有 $\frac{2DF}{BC}=\frac{BC}{2EF}$，即 $\frac{DB+DC}{DB-DC}=\frac{BE+CE}{BE-CE}$，故 $\frac{BE}{CE}=\frac{DB}{DC}=3$，所以 $BE=3CE$．

同理可得 $\frac{BL}{CL}=\frac{BM}{CM}=\frac{1}{2}$，故 $BL=\frac{1}{2}CL$，从而 $MC=3CL$．

因此，$\frac{MC}{CL}=\frac{BE}{CE}$．

三、（本题满分 50 分）

设实数 $a,b,c\ge 1$，且满足 $abc+2a^2+2b^2+2c^2+ca-cb-4a+4b-c=28$，求 $a+b+c$ 的最大值.

证明　由已知等式可得，$(a-1)^2+(b+1)^2+c^2+\frac{1}{2}(a-1)(b+1)c=16$.　　①

令 $a'=a-1, b'=b+1$，则 $a=a'+1, b=b'-1$，则①式等价于

$$a'^2+b'^2+c^2+\frac{1}{2}a'b'c=16 . \qquad ②$$

易知 $\min\{a',b',c\}<4$.

令 $l=a'+b'+c$，则 $a+b+c=(a-1)+(b+1)+c=a'+b'+c=l$.

设 $f(x)=(x-a')(x-b')(x-c)=x^3-lx^2+(a'b'+b'c+ca')x-a'b'c$，则

$$f(4)=4^3-l\cdot 4^2+\frac{l^2-(a'^2+b'^2+c^2)}{2}\times 4-a'b'c=64-16l+2l^2-2(a'^2+b'^2+c^2+\frac{1}{2}a'b'c)$$

$$=64-16l+2l^2-32=2l^2-16l+32 .$$

当 $x>\min\{a',b',c\}$ 时，由平均值不等式得

$$(x-a')(x-b')(x-c)\le\frac{1}{27}(3x-l)^3 , \qquad ③$$

所以　$f(4)=(4-a')(4-b')(4-c)\le\frac{1}{27}(12-l)^3$.

从而　$2l^2-16l+32\le\frac{1}{27}(12-l)^3$，

整理得　$l^3+18l^2-27\times 32\le 0$，即　$(l-6)(l^2+24l+6\times 24)\le 0$，所以　$l\le 6$.

③式中等号成立的条件是 $x-a'=x-b'=x-c$，即 $a'=b'=c$，代入②得 $a'=b'=c=2$.

因此，当 $a'=b'=c=2$ 时，$l_{\max}=6$.

所以 当 $a=3,b=1,c=2$ 时，$(a+b+c)_{\max}=6$.

四、（本题满分 50 分）

给定 n 个不同实数，其所有全排列组成的集合为 A_n，对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，若恰有两个不同的整数 $i,j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_i>a_{i+1}, a_j>a_{j+1}$ 成立，则称该排列为“好排列”. 求 A_n 中“好排列”的个数.

解 首先定义：

对于 A 中的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，如果满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则称该排列为自然排列.

对于 A 中的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若有整数 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $a_i>a_{i+1}$，则称 a_i 和 a_{i+1} 构成一个“相邻逆序”.

对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$，如果它恰有一个“相邻逆序”，则称该排列为“一阶好排列”，A 中所有“一阶好排列”的个数记为 $f_1(n)$；如果它恰有两个“相邻逆序”，则称该排列为“二阶好排列”，A 中所有“二阶好排列”的个数记为 $f_2(n)$. 依题意知，$f_2(n)$ 恰好是要求的 A 中“好排列”的个数.

由题意知：$f_1(1)=0, f_1(2)=1, f_2(1)=f_2(2)=0, f_2(3)=1$.

以下为了叙述简便，我们把由给定的 k 个不同实数的所有全排列构成的集合记为 $A_k\ (k=1,2,\cdots,n)$.

其次求 $f_1(n)$.

我们先来考查 $f_1(k+1)$ 与 $f_1(k)$ 之间的递推关系.

对于 A_{k+1} 中的每一个"一阶好排列"（记为 a），我们考虑从中取出最大的数 a_{k+1} 后剩下的 k 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 按原来顺序构成的排列（记为 b）.

如果排列 b 是 A_k 中的"一阶好排列"，且"相邻逆序"为 $a_i>a_{i+1}$，那么，在排列 a 中，a_{k+1} 的位置只能在 a_i,a_{i+1} 之间或最后；

如果排列 b 不是 A_k 中的"一阶好排列"，则排列 b 中"相邻逆序"的个数不为 1，显然排列 b 中"相邻逆序"的个数不能大于 1（否则排列 a 不是"一阶好排列"，理由是：因为 a_{k+1} 是 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 中最大的数，所以排列 a 中"相邻逆序"的个数一定不少于排列 b 中"相邻逆序"的个数），从而排列 b 中"相邻逆序"的个数为 0，此时排列 b 是一个自然排列，而排列 a 是"一阶好排列"，所以 a_{k+1} 的位置不能在最后（有 k 种可能的位置）.

综合上面的分析可知：$f_1(k+1)=2f_1(k)+k \quad (k\in N^*)$.

则 $f_1(k+1)+(k+1)+1=2[f_1(k)+k+1]$，

所以数列 $\{f_1(k)+k++1\}$ 构成以 $f_1(2)+2+1=4$ 为首项、2 为公比的等比数列，所以

$f_1(n)+n+1=4\cdot 2^{n-2}$，即 $f_1(n)=2^n-n-1$.

最后求 $f_2(n)$.

我们先来考查 $f_2(k+1)$ 与 $f_2(k)$ 之间的关系.

对于 A_{k+1} 中的每一个"二阶好排列"（记为 c），我们考虑从中取出最大的数 a_{k+1} 后剩下的 k 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 按原来顺序构成的排列（记为 d）.

如果排列 d 是 A_k 中的"二阶好排列"，且"相邻逆序"为 $a_i>a_{i+1},a_j>a_{j+1}$，那么，在排列 c 中，a_{k+1} 的位置只能在 a_i 和 a_{i+1} 之间，或者在 a_j 和 a_{j+1} 之间，或者排在最后；

如果排列 d 不是 A_k 中的二阶"好排列"，则它一定是 A_k 中的"一阶好排列"，设"相邻逆序"为 $a_i>a_{i+1}$，因为排列 c 是"二阶好排列"，所以 a_{k+1} 的位置不能在 a_i 和 a_{i+1} 之间，也不能在最后，其余位置都可以，有 $k-1$ 种可能.

综合上面的分析可知：$f_2(k+1)=3f_2(k)+(k-1)f_1(k) \quad (k\in N^*)$.

又 $f_1(n)=2^n-n-1$，所以 $f_2(k+1)=3f_2(k)+(k-1)(2^k-k-1)$，变形可得

$$f_2(k+1)+(k+2)\cdot 2^{k+1}=3[f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k]-k^2+1,$$

$$f_2(k+1)+(k+2)\cdot 2^{k+1}-\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=3[f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k-\frac{1}{2}k(k+1)],$$

所以数列 $\{f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k-\frac{1}{2}k(k+1)\}$ 构成以 $f_2(3)+(3+1)\cdot 2^3-\frac{1}{2}\times 3\times(3+1)=27$ 为首项、3 为公比的等比数列，所以

$$f_2(n)+(n+1)\cdot 2^n-\frac{1}{2}n(n+1)=27\cdot 3^{n-3},$$

即 $f_2(n)=3^n-(n+1)\cdot 2^n+\frac{1}{2}n(n+1)$.

因此，A 中"好排列"的个数为 $3^n-(n+1)\cdot 2^n+\frac{1}{2}n(n+1)$ 个.