2010 年全国高中数学联赛

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分，）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是______.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是______.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是______.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$，且存在常数 α, β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ ______.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0, a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 _____ .

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 ________.

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=$ _____ .

8. 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解（x, y, z）的个数是_______.

二、解答题（本题满分 56 分）

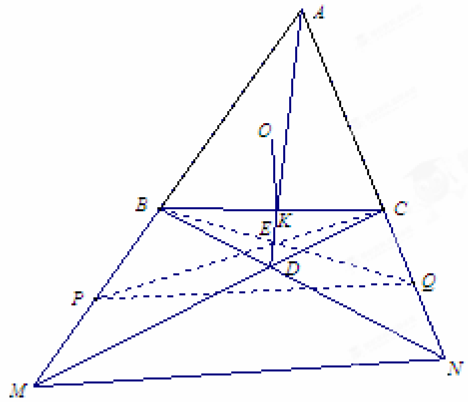
9. （16 分）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，当 $0\le x\le 1$ 时，$|f'(x)|\le 1$，试求 a 的最大值.

10. （20 分）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

11. （20 分）证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\dfrac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

加　试

1. （40分）如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M．求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆．



2. （40分）设 k 是给定的正整数，$r=k+\frac{1}{2}$．记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)),\ l\geq 2$．证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数．这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil \frac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$．

3. （50分）给定整数 $n>2$，设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\leq 1,\ k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},\ k=1,2,\cdots,n.$$

求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}$.

4. （50分）一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值0和1两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

2010 年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准（A 卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是 $\underline{[-3,\sqrt{3}]}$.

解：易知 $f(x)$ 的定义域是 $[5,8]$，且 $f(x)$ 在 $[5,8]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是 $\underline{-\frac{3}{2}\le a\le 12}$.

解：令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$，即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $-at^3+(a-3)t\ge -3$，

$$-at(t^2-1)-3(t-1)\ge 0,$$

$(t-1)(-at(t+1)-3)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知

$$-at(t+1)-3\le 0 \text{ 即 } a(t^2+t)\ge -3. \qquad (1)$$

当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；

对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$.

从而可知 $-\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是 $\underline{1790}$.

解：由对称性知，只要先考虑 x 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,9)$ 与双曲线右半支于 A_k，交直

线 $x=100$ 于 B_k，则线段 A_kB_k 内部的整点的个数为 $99-k$，从而在 x 轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{9}(99-k)=99\times 9-45=846.$$

又 x 轴上有 98 个整点，所以所求整点的个数为

$$2\times 846+98=1790.$$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$，且存在常数 α,β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ $\underline{\sqrt[3]{3}+3}$.

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$\{b_n\}$ 的公比为 q，则

$$3+d=q, \qquad (1)$$

$$3(3+4d)=q^2, \qquad (2)$$

（1）代入（2）得

$$9+12d=d^2+6d+9，求得 d=6, q=9.$$

从而有 $3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$ 对一切正整数 n 都成立，

即 $6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数 n 都成立.

从而 $\log_\alpha 9=6, -3=-\log_\alpha 9+\beta$，

求得 $\alpha=\sqrt[3]{3}, \beta=3$， $\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0, a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 $\underline{-\frac{1}{4}}$.

解：令 $a^x=y$, 则原函数化为 $g(y)=y^2+3y-2$, $g(y)$ 在 $(-\frac{3}{2},+\infty)$ 上是递增的.

当 $0<a<1$ 时，$y\in[a, a^{-1}]$,

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以 $g(y)_{\min}=(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4}$;

当 $a>1$ 时，$y\in[a^{-1}, a]$,

$g(y)_{\max} = a^2 + 3a - 2 = 8 \Rightarrow a = 2$，

所以 $g(y)_{\min} = 2^{-2} + 3\times 2^{-1} - 2 = -\dfrac{1}{4}$.

综上 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最小值为 $-\dfrac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 $\underline{\dfrac{84}{119}}$.

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

$$\frac{7}{12} + (\frac{5}{12})^2 \times \frac{7}{12} + (\frac{5}{12})^4 \times \frac{7}{12} + \cdots$$
$$= \frac{7}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{84}{119}.$$

7. 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B - A_1P - B_1 = \alpha$，则 $\sin\alpha = \underline{\dfrac{\sqrt{10}}{4}}$.

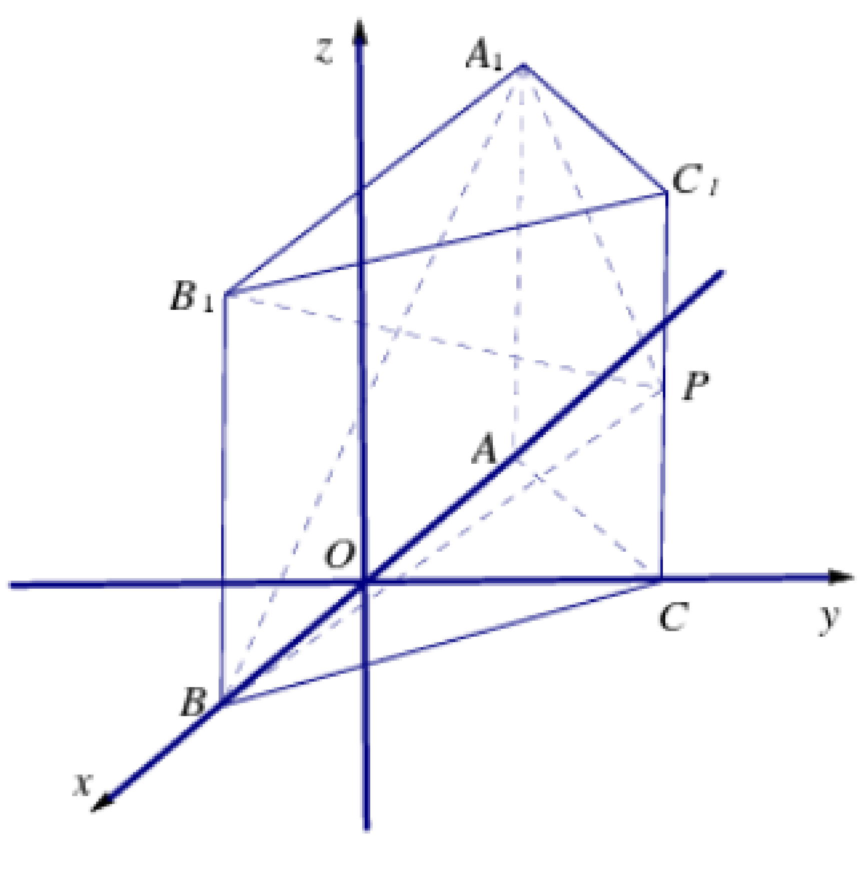
解一：如图，以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0), B_1(1,0,2), A_1(-1,0,2), P(0,\sqrt{3},1)$，从而，

$$\overrightarrow{BA_1} = (-2,0,2), \overrightarrow{BP} = (-1,\sqrt{3},1), \overrightarrow{B_1A_1} = (-2,0,0), \overrightarrow{B_1P} = (-1,\sqrt{3},-1).$$

设分别与平面 BA_1P 、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 、$\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1} = -2x_1 + 2z_1 = 0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP} = -x_1 + \sqrt{3}y_1 + z_1 = 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1} = -2x_2 = 0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P} = -x_2 + \sqrt{3}y_2 - z_2 = 0,\end{cases}$$

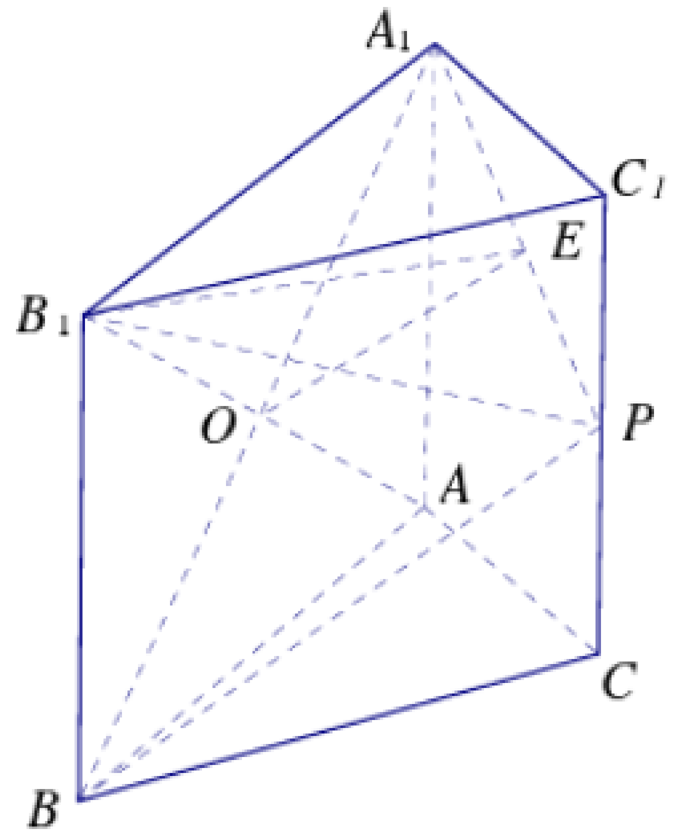


由此可设 $\vec{m} = (1,0,1), \vec{n} = (0,1,\sqrt{3})$，

所以 $|\vec{m}\cdot\vec{n}| = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}||\cos\alpha|$，

即 $\sqrt{3} = \sqrt{2}\cdot 2|\cos\alpha| \Rightarrow |\cos\alpha| = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$.



解二：如图，$PC=PC_1, PA_1=PB$.

设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，则

$OA_1=OB, OA=OB_1, A_1B\perp AB_1$.

因为 $PA=PB_1$,所以 $PO\perp AB_1$,

从而 $AB_1\perp$ 平面 PA_1B .

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE\perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B-A_1P-B_1$ 的平面角.

设 $AA_1=2$，则易求得

$PB=PA_1=\sqrt{5}, A_1O=B_1O=\sqrt{2}, PO=\sqrt{3}$.

在直角 ΔPA_1O 中，$A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，

即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE, \therefore OE=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}, \therefore B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\frac{6}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\frac{B_1O}{B_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

8. 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解（x, y, z）的个数是_336675_.

解：首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times1004$.

把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解分为三类：

（1）x, y, z 均相等的正整数解的个数显然为 1；

（2）x, y, z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数，易知为 1003；

(3) 设 x, y, z 两两均不相等的正整数解为 k.

易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$，

$$6k = 2009 \times 1004 - 3 \times 1003 - 1$$
$$= 2006 \times 1005 - 2009 + 3 \times 2 - 1 = 2006 \times 1005 - 2004,$$
$$k = 1003 \times 335 - 334 = 335671.$$

从而满足 $x \le y \le z$ 的正整数解的个数为

$$1 + 1003 + 335671 = 336675.$$

二、解答题（本题满分 56 分）

9. （本小题满分 16 分）已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \ne 0)$，当 $0 \le x \le 1$ 时，$|f'(x)| \le 1$，试求 a 的最大值.

解一： $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$

由 $\begin{cases} f'(0) = c, \\ f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a + b + c, \\ f'(1) = 3a + 2b + c \end{cases}$ 得 （4 分）

$$3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2}).$$ （8 分）

所以 $3|a| = \left|2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2})\right|$

$$\le 2|f'(0)| + 2|f'(1)| + 4\left|f'(\frac{1}{2})\right|$$

$$\le 8,$$

$$a \le \frac{8}{3}.$$ （12 分）

又易知当 $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.（16 分）

解二：$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

设 $g(x) = f'(x) + 1$，则当 $0 \le x \le 1$ 时，$0 \le g(x) \le 2$.

设 $z = 2x - 1$，则 $x = \frac{z+1}{2}, -1 \le z \le 1$.

$$h(z) = g(\frac{z+1}{2}) = \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a+2b}{2}z + \frac{3a}{4} + b + c + 1.$$ （4 分）

容易知道当 $-1 \le z \le 1$ 时，$0 \le h(z) \le 2, 0 \le h(-z) \le 2$. （8 分）

从而当 $-1 \le z \le 1$ 时，$0 \le \frac{h(z) + h(-z)}{2} \le 2$ ，

即 $0 \le \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a}{4} + b + c + 1 \le 2$，

从而 $\frac{3a}{4}+b+c+1\geq 0$，$\frac{3a}{4}z^2\leq 2$，

由 $0\leq z^2\leq 1$ 知 $a\leq\frac{8}{3}$. （12 分）

又易知当 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.（16 分）

10.（本小题满分 20 分） 已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

解一：设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}.$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2). \quad (1)$$

易知 $x=5,y=0$ 是（1）的一个解，所以线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$. （5 分）

由（1）知直线 AB 的方程为

$$y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)，即\ x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2. \quad (2)$$

（2）代入 $y^2=6x$ 得

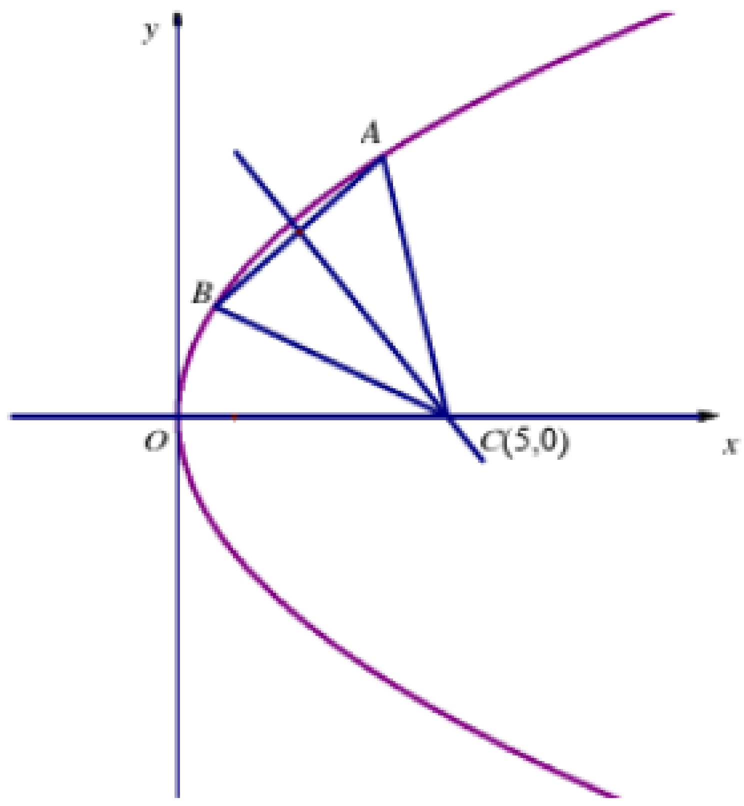
$$y^2=2y_0(y-y_0)+12，即\ y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0. \quad (3)$$

依题意，y_1,y_2 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\neq y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

$$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}.$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



$$=\sqrt{(1+(\frac{y_0}{3})^2)(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})(4y_0^2-4(2y_0^2-12))}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点$C(5,0)$到线段AB的距离

$$h=\left|CM\right|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}\ .$$ （10分）

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|AB\right|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3})^3}$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$ （15分）

当且仅当$9+y_0^2=24-2y_0^2$，即$y_0=\pm\sqrt{5}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$时等号成立.

所以ΔABC面积的最大值为$\frac{14}{3}\sqrt{7}$. （20分）

解二：同解一，线段AB的垂直平分线与x轴的交点C为定点，且点C坐标为$(5,0)$.

（5分）

设$x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$$的绝对值, （10分）

$$S_{\Delta ABC}^2=(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2))^2$$

$$=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$
$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)$$
$$\le\frac{3}{2}(\frac{14}{3})^3,$$

$S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$, （15 分）

当且仅当 $(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$ 且 $t_1^2+t_2^2=4$，

即 $t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立.

所以 ΔABC 面积的最大值是 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$. （20 分）

11.（本小题满分 20 分） 证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

证明： 令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严格递增的. 又 $f(0)=-2<0,f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in(0,\frac{1}{2})$. （5 分）

所以 $2r^3+5r-2=0$，

$$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}$$
$$=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots.$$

故数列 $a_n=3n-2(n=1,2,\cdots)$ 是满足题设要求的数列. （10 分）

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项，有

$$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots,$$

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots,t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 s_i 与 t_j 都是不同的. （15 分）

不妨设 $s_1<t_1$，则

$$r^{s_1} < r^{s_1} + r^{s_2} + \cdots = r^{t_1} + r^{t_2} + \cdots,$$

$$1 < r^{t_1 - s_1} + r^{t_2 - s_1} + \cdots \le r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} - 1 < \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} - 1 = 1，矛盾.$$

故满足题设的数列是唯一的. （20 分）

2010年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准（A卷）

说明：

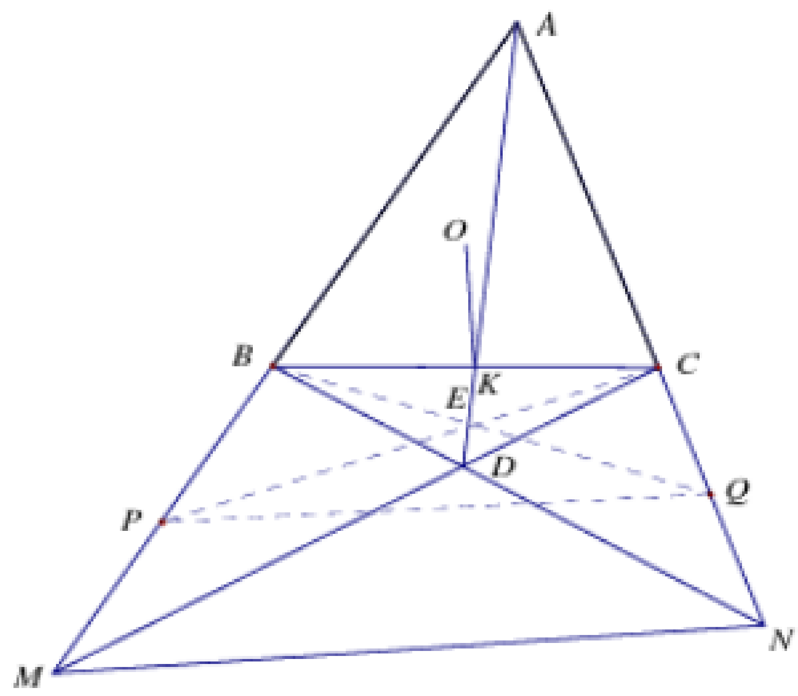
1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、（本题满分40分）

如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M. 求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆.

证明：用反证法．若 A，B，D，C 不四点共圆，设三角形 ABC 的外接圆与 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接 CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ.



因为 $PK^2=P$ 的幂（关于$\odot O$）$+K$ 的幂（关于$\odot O$）

$$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

同理 $$QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

所以 $$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故 $$OK\perp PQ.$$ （10分）

由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ /\!/ MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \qquad ①$$

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \qquad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \qquad ③$$

由①，②，③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$ （30分）

所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$，故$\triangle DMN\backsim\triangle DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC /\!/ MN$，故 $OK\perp BC$，即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A,B,D,C 四点共圆. （40分）

注 1："$PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）"的证明：延长 PK 至点 F，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \qquad ④$$

则 P，E，F，A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

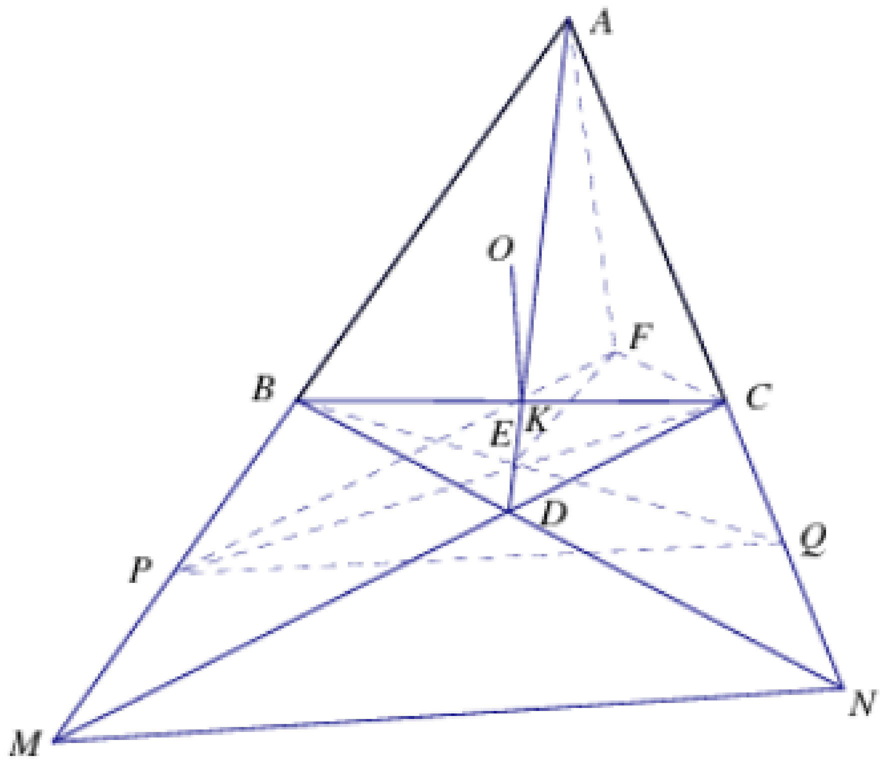
从而 E，C，F，K 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC, \qquad ⑤$$

⑤-④，得 $\qquad PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE$

$=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）.

注 2：若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.



二、（本题满分 40 分）

设 k 是给定的正整数，$r=k+\dfrac{1}{2}$．记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)),\ l\geq 2$．证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数．这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil \dfrac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$.

证明：记 $v_2(n)$ 表示正整数 n 所含的 2 的幂次．则当 $m=v_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数.

下面我们对 $v_2(k)=v$ 用数学归纳法.

当 $v=0$ 时，k 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时 $f(r)=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left\lceil k+\dfrac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)(k+1)$ 为整数. （10 分）

假设命题对 $v-1(v\geq 1)$ 成立.

对于 $v\geq 1$，设 k 的二进制表示具有形式

$$k=2^{v}+\alpha_{v+1}\cdot 2^{v+1}+\alpha_{v+2}\cdot 2^{v+2}+\cdots,$$

这里，$\alpha_i = 0$或者 1，$i = v+1,\ v+2, \cdots$.　　　　（20 分）

于是　　$$f(r) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil = \left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + k^2 + k$$

$$= \frac{1}{2} + 2^{v-1} + (\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v + (\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1} + \cdots + 2^{2v} + \cdots$$

$$= k' + \frac{1}{2}, \qquad ①$$

这里$k' = 2^{v-1} + (\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v + (\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1} + \cdots + 2^{2v} + \cdots$. 显然$k'$中所含的 2 的幂次为$v-1$. 故由归纳假设知，$r' = k' + \frac{1}{2}$经过$f$的 v 次迭代得到整数，由①知，$f^{(v+1)}(r)$是一个整数，这就完成了归纳证明.　　　　（40 分）

三、（本题满分 50 分）

给定整数$n > 2$，设正实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足$a_k \le 1,\ k = 1, 2, \cdots, n$，记

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k},\ k = 1, 2, \cdots, n .$$

求证：　　$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} A_k\right| < \frac{n-1}{2}.$$

证明：由$0 < a_k \le 1$知，对$1 \le k \le n-1$，有

$$0 < \sum_{i=1}^{k} a_i \le k, \qquad 0 < \sum_{i=k+1}^{n} a_i \le n-k .$$　　　　（10 分）

注意到当$x, y > 0$时，有$|x-y| < \max\{x, y\}$，于是对$1 \le k \le n-1$，有

$$\left|A_n - A_k\right| = \left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i - \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$$

$$< \max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i,\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}$$

$$=1-\frac{k}{n},\qquad\text{（30 分）}$$

故
$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(A_n-A_k\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left|A_n-A_k\right|$$

$$<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}.\qquad\text{（50 分）}$$

四、（本题满分 50 分）

一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

解：对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上 a，如果颜色不同，则标上 b，如果数字和颜色都相同，则标上 c．于是对于给定的点 A_1 上的设置（共有 4 种），按照边上的字母可以依次确定点 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 上的设置．为了使得最终回到 A_1 时的设置与初始时相同，标有 a 和 b 的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记 a，b，c，使得标有 a 和 b 的边都是偶数条的方法数的 4 倍．（20 分）

设标有 a 的边有 $2i$ 条，$0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$，标有 b 的边有 $2j$ 条，$0\le j\le\left[\frac{n-2i}{2}\right]$．选取 $2i$ 条边标记 a 的有 C_n^{2i} 种方法，在余下的边中取出 $2j$ 条边标记 b 的有 C_{n-2i}^{2j} 种方法，其余的边标记 c．由乘法原理，此时共有 $C_n^{2i}\ C_{n-2i}^{2j}$ 种标记方法．对 i，j 求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right).\qquad ①$$

这里我们约定 $C_0^0=1$．（30 分）

当 n 为奇数时，$n-2i>0$，此时

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j} = 2^{n-2i-1}. \qquad ②$$

代入①式中，得

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j} \right) = 4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} 2^{n-2i-1} \right) = 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} 2^{n-2i} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} (-1)^k = (2+1)^n + (2-1)^n$$

$$= 3^n + 1.$$ （40 分）

当 n 为偶数时，若 $i < \frac{n}{2}$，则②式仍然成立；若 $i = \frac{n}{2}$，则正 n 边形的所有边都标记 a，此时只有一种标记方法．于是，当 n 为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j} \right) = 4 \times \left(1 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \left(C_n^{2i} 2^{n-2i-1} \right) \right)$$

$$= 2 + 4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{2i} 2^{n-2i-1} \right) = 3^n + 3.$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当 n 为奇数时有 $3^n + 1$ 种；当 n 为偶数时有 $3^n + 3$ 种． （50 分）