一九九八年全国高中数学联合竞赛

一、选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1、若 $a>1$，$b>1$，且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$，则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值（　　）

（A）等于 $\lg2$　　（B）等于 1

（C）等于 0　　（D）不是与 a，b 无关的常数

2.若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是(　　)

（A）$\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　（B）$\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

（C）$\{a\mid a\leqslant 9\}$　　（D）$\emptyset$

3.各项均为实数的等比数列$\{a_n\}$前 n 项之和记为 S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，则 S_{40}等于(　　)

（A）150　　（B）-200

（C）150 或 -200　　（D）-50 或 400

4.设命题 P：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x^2+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同；

命题 Q：$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. 则命题 Q(　　)

（A）是命题 P 的充分必要条件

（B）是命题 P 的充分条件但不是必要条件

（C）是命题 P 的必要条件但不是充分条件

（D）既不是是命题 P 的充分条件也不是命题 P 的必要条件

5.设 E，F，G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB，BC，CD 的中点，则二面角 $C—FG—E$ 的大小是(　　)

（A）$\arcsin\frac{\sqrt6}{3}$　　（B）$\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt3}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt2$　　（D）$\pi-\operatorname{arccot}\frac{\sqrt2}{2}$

6.在正方体的 8 个顶点，12 条棱的中点，6 个面的中心及正方体的中心共 27 个点中，共线的三点组的个数是(　　)

（A）57　　（B）49　　（C）43　　（D）37

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）　各小题只要求直接填写结果.

1．若 $f(x)$ $(x\in R)$ 是以 2 为周期的偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{1000}}$，则 $f(\frac{98}{19})$，$f(\frac{101}{17})$，$f(\frac{104}{15})$ 由小到大排列是________________.

2．设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant180°)$，复数 z，$(1+i)z$，$2\bar{z}$ 在复平面上对应的三个点分别是 P，Q，R. 当 P，Q，R 不共线时，以线段 PQ，PR 为两边的平行四边形的第四个顶点为 S，点 S 到原点距离的最大值是____________.

3．从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数中取出 3 个数，使其和为不小于 10 的偶数，不同的取法有________种.

4．各项为实数的等差数列的公差为 4，其首项的平方与其余各项之和不超过 100，这样的数列至多有_______项.

5.若椭圆 $x^2+4(y-a)^2=4$ 与抛物线 $x^2=2y$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是___________.

6．ΔABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AC=2$，M 是 AB 的中点. 将ΔACM 沿 CM 折起，使 A，B 两点间的距离为 $2\sqrt2$，此时三棱锥 A-BCM 的体积等于___________.

三、（本题满分 20 分）

已知复数 $z=1-\sin\theta+i\cos\theta\ (\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$，求 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 的辐角主值.

四、(本题满分 20 分)

设函数 $f(x)=ax^2+8x+3\ (a<0)$．对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个 区间 $[0, l(a)]$上，不等式$|f(x)|\le 5$都成立.

问：a 为何值时 $l(a)$ 最大? 求出这个最大的 $l(a)$．证明你的结论.

五、(本题满分 20 分)

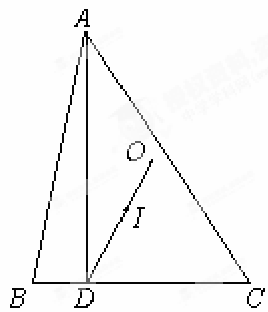
已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点 $A(a, b)$，$B(-a, 0)$，$(ab\neq 0, b^2\neq 2pa)$．M是抛物线上的点，设直线 AM, BM 与抛物线的另一交点分别为 M_1, M_2.

求证：当 M 点在抛物线上变动时(只要 M_1, M_2 存在且 $M_1\neq M_2$)，直线 M_1M_2 恒过一个定点.并求出这个定点的坐标.

第二试

一、(满分 50 分) 如图，O、I 分别为△ABC 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上。求证：△ABC 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径。

注：△ABC 的 BC 边上的旁切圆是与边 AB、AC 的延长线以及边 BC 都相切的圆。



二、(满分 50 分) 设 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，$b_n\in[1，2]$且 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$,

求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$．并问：等号成立的充要条件.

三、(满分 50 分) 对于正整数 a、n，定义 $F_n(a)=q+r$，其中 q、r 为非负整数，$a=qn+r$，且 $0\le r<n$．求最大的正整数 A，使得存在正整数 n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，对于任意的正整数 $a\le A$，都有

$F_{n_6}(F_{n_5}(F_{n_4}(F_{n_3}(F_{n_2}(F_{n_1}(a))))))=1$．证明你的结论.

一九九八年全国高中数学联赛解答

第一试

一．选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 若 $a>1$，$b>1$，且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$，则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值(　　)

(A) 等于 lg2　　　　(B) 等于 1

(C) 等于 0　　　　(D) 不是与 a，b 无关的常数

【答案】C

【解析】$a+b=ab$，$(a-1)(b-1)=1$，由 $a-1>0$，$b-1>0$，故 $\lg(a-1)(b-1)=0$，选 C.

2．若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是(　　)

(A) $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　　　(B) $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

(C) $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　　　(D) $\varnothing$

【答案】B

【解析】$A\subseteq B$，$A\neq\varnothing$．$\Rightarrow$ $3\leqslant 2a+1\leqslant 3a-5\leqslant 22$，$\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9$．故选 B.

3. 各项均为实数的等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和记为 S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，则 S_{40} 等于(　　)

(A) 150　　　　(B) -200

(C) 150 或 -200　　　　(D) -50 或 400

【答案】A

【解析】首先 $q\neq 1$，于是，$\dfrac{a_1}{q-1}(q^{10}-1)=10$，$\dfrac{a_1}{q-1}(q^{30}-1)=70$，∴ $q^{20}+q^{10}+1=7.\Rightarrow q^{10}=2.$ (-3 舍)

∴ $S_{40}=10(q^{40}-1)=150$．选 A.

4. 设命题 P：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x^2+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同；

命题 Q：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$．则命题 Q(　　)

(A) 是命题 P 的充分必要条件

(B) 是命题 P 的充分条件但不是必要条件

(C) 是命题 P 的必要条件但不是充分条件

(D) 既不是是命题 P 的充分条件也不是命题 P 的必要条件

【答案】D

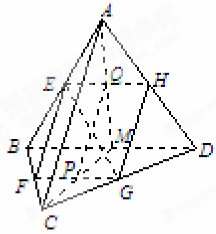
【解析】若两个不等式的解集都是 R，否定 A、C，若比值为-1，否定 A、B，选 D.

5. 设 E，F，G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB，BC，CD 的中点，则二面角 $C—FG—E$ 的大小是(　　)

(A) $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}$　　(D) $\pi-\operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】取 AD、BD 中点 E、M，则 EH// FG// BD，于是 EH 在平面 EFG 上．设 $CM\cap FG=P$，$AM\cap EH=Q$，则 P、Q 分别为 CM、AM 中点，PQ// AC．



∵ $AC\perp BD$，$\Rightarrow PQ\perp FG$，$CP\perp FG$，$\Rightarrow\angle CPQ$ 是二面角 $C—FG—E$ 的平面角．

设 $AC=2$，则 $MC=MA=\sqrt{3}$，$\cos\angle ACM=\dfrac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

∴ 选 D．

6. 在正方体的8个顶点，12条棱的中点，6个面的中心及正方体的中心共27个点中，共线的三点组的个数是(　　)

(A)　57　　　(B)　49　　　(C)　43　　　(D) 37

【答案】B

【解析】8 个顶点中无 3 点共线，故共线的三点组中至少有一个是棱中点或面中心或体中心．

(1) 体中心为中点：4 对顶点，6 对棱中点，3 对面中心；共 13 组；

(2) 面中心为中点：4×6=24 组；

(3) 棱中点为中点：12 个．共 49 个，选 B.

二、填空题（ 本题满分 54 分, 每小题 9 分） 各小题只要求直接填写结果.

1．若 $f(x)$ $(x\in R)$ 是以 2 为周期的偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{1000}}$，则 $f(\frac{98}{19})$，$f(\frac{101}{17})$，$f(\frac{104}{15})$ 由小到大排列是_______________.

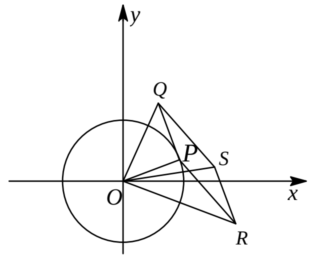
【答案】$f(\frac{101}{17})<f(\frac{98}{19})<f(\frac{104}{15})$

【解析】$f(\frac{98}{19})=f(6-\frac{16}{19})=f(\frac{16}{19})$．$f(\frac{101}{17})=f(6-\frac{1}{17})=f(\frac{1}{17})$，$f(\frac{104}{15})=f(6+\frac{14}{15})=f(\frac{14}{15})$．

现 $f(x)$ 是$[0,1]$上的增函数．而 $\frac{1}{17}<\frac{16}{19}<\frac{14}{15}$．故 $f(\frac{101}{17})<f(\frac{98}{19})<f(\frac{104}{15})$．

2．设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant180°)$，复数 z，$(1+i)z$，$2\overline{z}$ 在复平面上对应的三个点分别是 P，Q，R. 当 P，Q，R 不共线时, 以线段 PQ，PR 为两边的平行四边形的第四个顶点为 S，点 S 到原点距离的最大值是____________.

【答案】3



【解析】 $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=(1+i)z+2\overline{z}-z=iz+2\overline{z}$.

$=(2\cos\theta-\sin\theta)+i(\cos\theta-2\sin\theta)$.

∴ $|OS|^2=5-4\sin2\theta\leqslant9$．即 $|OS|\leqslant3$，当 $\sin2\theta=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，$|OS|=3$.

3．从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数中取出 3 个数，使其和为不小于 10 的偶数，不同的取法有________种．

【答案】51

【解析】从这 10 个数中取出 3 个偶数的方法有 C_5^3 种，取出 1 个偶数，2 个奇数的方法有 $C_5^1C_5^2$ 种，而取出 3 个数的和为小于 10 的偶数的方法有(0，2，4)，(0，2，6)，(0，1，3)，(0，1，5)，(0，1，7)，(0，3，5)，(2，1，3)，(2，1，5)，(4，1，3)，共有 9 种，故应答 10+50—9=51 种．

4．各项为实数的等差数列的公差为 4，其首项的平方与其余各项之和不超过 100，这样的数列至多有________项.

【答案】8

【解析】设其首项为 a，项数为 n．则得 $a^2+(n-1)a+2n^2-2n-100\leqslant0$．

$\triangle=(n-1)^2-4(2n^2-2n-100)=-7n^2+6n+401\geqslant0$． ∴ $n\leqslant8$．

取 $n=8$，则 $-4\leqslant a\leqslant-3$．即至多 8 项．

(也可直接配方：$(a+\dfrac{n-1}{2})^2+2n^2-2n-100-(\dfrac{n-1}{2})^2\leqslant0$．解 $2n^2-2n-100-(\dfrac{n-1}{2})^2\leqslant0$ 仍得 $n\leqslant8$．)

5．若椭圆 $x^2+4(y-a)^2=4$ 与抛物线 $x^2=2y$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是__________．

【答案】$-1\leqslant a\leqslant\dfrac{17}{8}$．

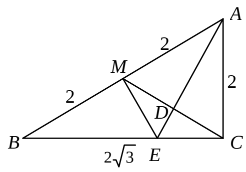
【解析】$2y=4-4(y-a)^2$，$\Rightarrow 2y^2-(4a-1)y+2a^2-2=0$．此方程至少有一个非负根．

∴ $\triangle=(4a-1)^2-16(a^2-1)=-8a+17\geqslant0$． $a\leqslant\dfrac{17}{8}$．

两根皆负时 $2a^2>2$，$4a-1<0$． $\Rightarrow -1<a<1$ 且 $a<\dfrac{1}{4}$．即 $a<-1$． ∴ $-1\leqslant a\leqslant\dfrac{17}{8}$．

6．ΔABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，$AC=2$，M 是 AB 的中点．将 ΔACM 沿 CM 折起，使 A,B 两点间的距离为 $2\sqrt{2}$，此时三棱锥 $A-BCM$ 的体积等于________________．

【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

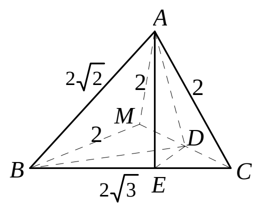


【解析】由已知，得 $AB=4$，$AM=MB=MC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，由△AMC 为等边三角形，取 CM 中点，则 $AD\perp CM$，AD 交 BC 于 E，则 $AD=\sqrt{3}$，$DE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$CE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

折起后，由 $BC^2=AC^2+AB^2$，知 $\angle BAC=90°$，$\cos\angle ECA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

∴ $AE^2=CA^2+CE^2-2CA\cdot CE\cos\angle ECA=\dfrac{8}{3}$，于是 $AC^2=AE^2+CE^2$． $\Rightarrow\angle AEC=90°$．

∵ $AD^2=AE^2+ED^2$，$\Rightarrow AE\perp$ 平面 BCM，即 AE 是三棱锥 $A-BCM$ 的高，$AE=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$．



$S_{\triangle BCM}=\sqrt{3}$，$V_{A-BCM}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

三、(本题满分 20 分)

已知复数 $z=1-\sin\theta+i\cos\theta\ (\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$，求 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的辐角主值.

【解析】$z=1+\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=2\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}+2i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}$

$=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\ (\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2})$.

当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$\bar{z}=-2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\ (-\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2})$

$=-2\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\ (\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))$.

∴ 辐角主值为 $\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$.

四、(本题满分 20 分)

设函数 $f(x)=ax^2+8x+3\ (a<0)$. 对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个 区间 $[0,\ l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\le 5$ 都成立.

问：a 为何值时 $l(a)$ 最大? 求出这个最大的 $l(a)$. 证明你的结论.

【解析】$f(x)=a(x+\frac{4}{a})^2+3-\frac{16}{a}$.

(1)当 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，

$l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=5$ 的较小根，故 $l(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}$.

(2)当 $3-\frac{16}{a}\leqslant 5$，即 $a\leqslant -8$ 时，

$l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=-5$ 的较大根，故 $l(a)=\frac{-8-\sqrt{64-32a}}{2a}$.

综合以上，$l(a)=\begin{cases}\frac{-8-\sqrt{64-32a}}{2a}, & (a\leqslant -8)\\ \frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a} & (-8<a<0)\end{cases}$

当 $a\leqslant -8$ 时，$l(a)=\frac{-8+\sqrt{64-32a}}{2a}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

当 $-8<a<0$ 时，$l(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}=\frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}<\frac{2}{4}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

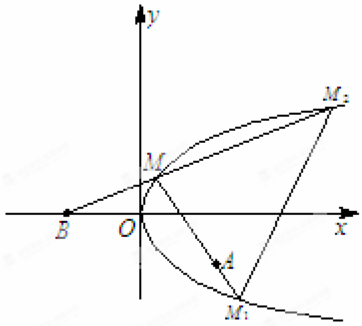
所以 $a=-8$ 时，$l(a)$ 取得最大值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

五、(本题满分 20 分).

已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点 $A(a,\ b)$，$B(-a,\ 0)$，$(ab\neq 0,\ b^2\neq 2pa)$. M 是抛物线上的点，设直线 AM，BM 与抛物线的另一交点分别为 M_1，M_2.

求证：当 M 点在抛物线上变动时（只要 M_1，M_2 存在且 $M_1\neq M_2$.）直线 M_1M_2 恒过一个定点．并求出这个定点的坐标．

【解析】 设 $M(\frac{y_0^2}{2p},\ y_0)$，$M_1(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1)$，$M_2(\frac{y_2^2}{2p},\ y_2)$，



则 A、M、M_1 共线，得 $\dfrac{b-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{a-\frac{y_0^2}{2p}}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}$，即 $b-y_0=\dfrac{2pa-y_0^2}{y_1+y_0}$.

∴ $y_1=\dfrac{2pa-by_0}{b-y_0}$，同法得 $y_2=\dfrac{2pa}{y_0}$；

∴ M_1M_2 所在直线方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{2px-y_1^2}{y_2^2-y_1^2}$$，即 $(y_1+y_2)y=2px+y_1y_2$. 消去 y_1，y_2，得

$$2paby-by_0^2y=2pby_0x-2py_0^2x+4p^2a^2-2paby_0.\quad(1)$$

分别令 $y_0=0$，1 代入，得 $x=a$，$y=\dfrac{2pa}{b}$，以 $x=a$，$y=\dfrac{2pa}{b}$ 代入方程(1)知此式恒成立．

即 M_1M_2 过定点 $(a,\ \dfrac{2pa}{b})$

第二试

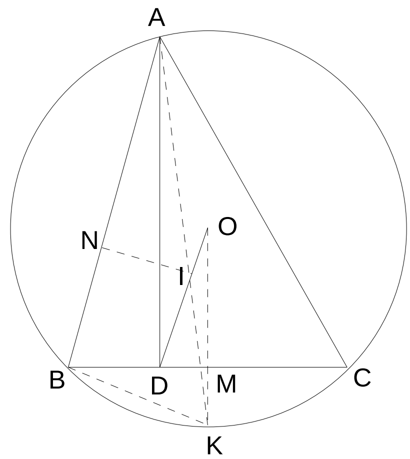
一、（满分 50 分）如图，O、I 分别为△ABC 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上。求证：△ABC 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径。

注：△ABC 的 BC 边上的旁切圆是与边 AB、AC 的延长线以及边 BC 都相切的圆。

【解析】 由旁切圆半径公式，有

$r_a=\dfrac{2S}{b+c-a}=\dfrac{ah_a}{b+c-a}$，故只须证明

$\dfrac{R}{h_a}=\dfrac{a}{b+c-a}$ 即可。连 AI 并延长交⊙O 于 K，连 OK 交 BC 于 M，则 K、M 分别为弧 BC 及弦 BC 的中点。且 $OK\perp BC$。于是 $OK/\!/AD$，又 $OK=R$，故



$\dfrac{R}{h_a}=\dfrac{OK}{AD}=\dfrac{IK}{IA}=\dfrac{KB}{IA}$，

故只须证 $\dfrac{KB}{IA}=\dfrac{ah_a}{b+c-a}=\dfrac{BM}{\frac{1}{2}(b+c-a)}$.

作 $IN\perp AB$，交 AB 于 N，则 $AN=\frac{1}{2}(b+c-a)$，

而由 $\triangle AIN\backsim\triangle BKM$，可证 $\frac{KB}{IA}=\frac{BM}{AN}$ 成立，故证。

二、(满分 50 分) 设 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，$b_n\in[1，2]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，

求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$．并问：等号成立的充要条件．

【解析】证明：由于 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，$b_n\in[1，2]$，故 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}}{\sqrt{a_ib_i}}\leqslant2$．

于是 $(\frac{1}{2}\sqrt{a_ib_i}-\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}})(2\sqrt{a_ib_i}-\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}})\leqslant0$)，即 $a_ib_i-\frac{5}{2}a_i^2+\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant0$．

求和得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，

又由 $(\frac{1}{2}b_i-a_i)(2b_i-a_i)\leqslant0$ 得 $b_i^2-\frac{5}{2}a_ib_i+a_i^2\leqslant0$，故 $a_ib_i\geqslant\frac{2}{5}(a_i^2+b_i^2)$．

由 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，得 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，

$\therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$．

当且仅当 n 为偶数且 a_1，a_2，…，a_n 中一半取 1，一半取 2，且 $b_i=\frac{2}{a_i}$ 时等号成立．

三、(满分 50 分) 对于正整数 a、n，定义 $F_n(a)=q+r$，其中 q、r 为非负整数，$a=qn+r$，且 $0\leqslant r<n$．求最大的正整数 A，使得存在正整数 n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，对于任意的正整数 $a\leqslant A$，都有 $F_{n_6}(F_{n_5}(F_{n_4}(F_{n_3}(F_{n_2}(F_{n_1}(a))))))=1$．证明你的结论．

【解析】将满足条件“存在正整数 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$, 对于任意的正整数 $a\leqslant B$，都有 F_{n_k}

$(F_{n_{k-1}}(\cdots(F_{n_1}(a)\cdots)=1$” 的最大正整数 B 记为 x_k 显然，本题所求的最大正整数 A 即为 x_6。

(1)先证 $x_1=2$．事实上，$F_2(1)=F_2(2)=1$，所以 $x_1\geqslant 2$，又当 $n_1\geqslant 3$ 时，$F_{n_1}(2)=2$，而 $F_2(3)=F_1(2)=2$，所以 $x_1<3$，$\therefore x_1=2$.

(2)设 x_k 已求出，且 x_k 为偶数，显然 $x_k\geqslant x_1=2$，易知 x_{k+1} 满足的必要条件是：存在 n_k，使得只要 $a\leqslant x_{k+1}$，就有 $F_{n_k}(a)\leqslant x_k$.

令 $x_{k+1}=qn_k+r$，由 $F_{n_k}(x_{k+1})=q+r\leqslant x_k$ 可得

$x_{k+1}=qn_k+r\leqslant qn_k+x_k-q=x_k+q(n_k-1)$.

若取 $n_k=2$，由 $\frac{x_k+2}{2}\leqslant x_k$ 可知 $x_{k+1}\geqslant x_k+2$，由此可得 $q>0$，$n_k>1$，

于是 $0<(q-1)n_k+n_k-1=qn_k-1<x_{k+1}$，因此

$F_{n_k}((q-1)n_k+n_k-1)=q+n_k-2\leqslant x_k$.

故有 $q(n_k-1)\leqslant[(\frac{q+n_k-1}{2})^2]\leqslant[(\frac{x_k+1}{2})^2]=[\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}+\frac{1}{4}]$.

由于 x_k 为偶数，从而 $q(n_k-1)\leqslant\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}$.

$\because x_k\geqslant 2,\therefore x_k+\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}\geqslant x_k+2$. 所以总有

$$x_{k+1}\leqslant x_k+\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}.$$

另一方面，若取 $n_1=\frac{x_k}{2}+2$，由于 $\frac{x_k(x_k+6)}{4}=\frac{x_k}{2}\cdot n_1+\frac{x_k}{2}$ 对于每个 $a\leqslant\frac{x_k(x_k+6)}{4}$，令 $a=qn_1+r$，那么

或者 $q=\frac{x_k}{2},r\leqslant\frac{x_k}{2}$；或者 $q\leqslant\frac{x_k}{2}-1,r\leqslant n_1-1=\frac{x_k}{2}+1$。

两种情况下均有 $q+r\leqslant x_k$, 因此 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}$。此外，因为 x_k 为偶数，若 $4|x_k$，由 $2|x_k+6$ 可得 $8|x_k(x_k+6)$，若 $x_k\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$，由 $x_k+6\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ 也可得 $8|x_k(x_k+6)$．因此 x_{k+1} 也是偶数。于是完成了归纳证明 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}$.

由 $x_1=2$ 逐次递推出 $x_2=4$, $x_3=10$，$x_4=40$，$x_5=460$，$x_6=53590$.

即所求最大整数 $A=53590$.