1985年全国高中数学联赛试题

第一试

1．选择题(本题满分 36 分，每小题答对得 6 分答错得 0 分，不答得 1 分)

⑴ 假定有两个命题：

甲：a是大于 0 的实数；乙：$a>b$且$a^{-1}>b^{-1}$．那么(　　)

A. 甲是乙的充分而不必要条件　　　*B.* 甲是乙的必要而不充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件　　　*D.* 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

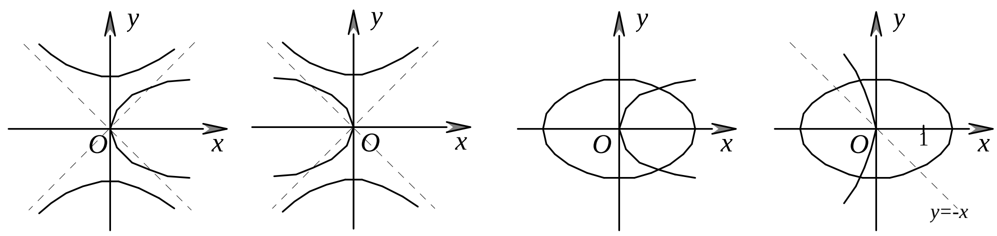
⑵PQ为经过抛物线$y^2=2px$焦点的任一弦，MN为PQ在准线l上的射影，PQ绕l一周所得的旋转面面积为S_1，以MN为直径的球面积为S_2，则下面结论中，正确的是(　　)

A. $S_1>S_2$　　*B.* $S_1<S_2$　　*C.* $S_1\geqslant S_2$　　*D.* 有时$S_1>S_2$，有时$S_1=S_2$，有时$S_1<S_2$

⑶ 已知方程$\arccos\frac{4}{5}-\arccos(-\frac{4}{5})=\arcsin x$，则(　　)

A. $x=\frac{24}{25}$　　*B.* $x=-\frac{24}{25}$　　*C.* $x=0$　　*D.* 这样的x不存在．

⑷ 在下面四个图形中，已知有一个是方程$mx+ny^2=0$与$mx^2+ny^2=1(m\neq0，n\neq0)$在同一坐标系中的示意图，它应是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

⑸ 设Z、W、λ为复数，$|\lambda|\neq1$，关于Z的方程$\overline{Z}-\lambda Z=W$有下面四个结论：

Ⅰ．$Z=\frac{\overline{\lambda}W+\overline{W}}{1-|\lambda|^2}$是这个方程的解；　　Ⅱ．这个方程只有一解；

Ⅲ．这个方程有两解；　　Ⅳ．这个方程有无穷多解．则(　　)

A. 只有Ⅰ、Ⅱ正确　*B.* 只有Ⅰ、Ⅲ正确　*C.* 只有Ⅰ、Ⅳ正确　*D.* 以上*A*、*B*、*C*都不正确

⑹ 设$0<a<1$，若$x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，…，$x_n=a^{x_{n-1}}$，……，则数列$\{x_n\}$(　　)

A. 是递增的　*B.* 是递减的　*C.* 奇数项递增，偶数项递减　*D.* 偶数项递增，奇数项递减

二．填空题(本题满分 24 分，每小题 6 分)

⑴ 在△ABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若角A、B、C的大小成等比数列，且$b^2-a^2=ac$，则角B的弧度为等于__________．

⑵ 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有_____________组.

⑶ 在已知数列 1，4，8，10，16，19，21，25，30，43 中，相邻若干个数之和能被 11 整除的数组共有_____________.

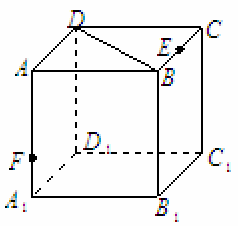
⑷ 对任意实数 x，y，定义运算 $x*y$ 为 $x*y=ax+by+cxy$，其中 a、b、c 为常数，等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算．现已知 $1*2=3$，$2*3=4$，并且有一个非零实数 d，使得对于任意实数都有 $x*d=x$，则 $d=$________________.

第二试

（本试共有 4 题，每题满分 15 分）

1．在直角坐标系 xoy 中，点 $A(x_1，y_1)$ 和点 $B(x_2，y_2)$ 的坐标均为一位的正整数．OA 与 x 轴正方向的夹角大于 45°，OB 与 x 轴正方向的夹角小于 45°，B 在 x 轴上的射影为 B'，A 在 y 轴上的射影为 A'，△OBB' 的面积比△OAA' 的面积大 33.5，由 x_1，y_1，x_2，y_2 组成的四位数 $\overline{x_1x_2y_2y_1}=x_1\cdot 10^3+x_2\cdot 10^2+y_2\cdot 10+y_1$．试求出所有这样的四位数，并写出求解过程．

2．如图，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 中点，F 在 AA_1 上，且 A_1F∶FA=1∶2．求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角．



3．某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队，根据比赛规则，比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同．问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论．

4．平面上任给 5 个点，以 λ 表示这些点间最大的距离与最小的距离之比，证明：$\lambda \geqslant 2\sin 54°$.

1985 年全国高中数学联赛试题

第一试

1．选择题(本题满分 36 分，每小题答对得 6 分答错得 0 分，不答得 1 分)

(1) 假定有两个命题：

甲：a 是大于 0 的实数；乙：$a>b$ 且 $a^{-1}>b^{-1}$．那么(　　)

A. 甲是乙的充分而不必要条件　　*B.* 甲是乙的必要而不充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件　　*D.* 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】B

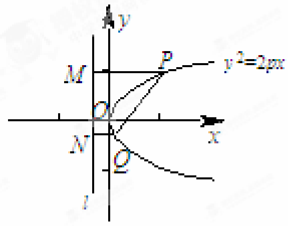
【解析】由于 $a>b$ 且 $a^{-1}>b^{-1}$ 成立时，必有 $a>0$，$b<0$．故由乙可得甲，故选 *B*

(2) PQ 为经过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的任一弦，MN 为 PQ 在准线 l 上的射影，PQ 绕 l 一周所得的旋转面面积为 S_1，以 MN 为直径的球面积为 S_2，则下面结论中，正确的是(　　)

A. $S_1>S_2$　　*B.* $S_1<S_2$　　*C.* $S_1\geq S_2$　　*D.* 有时 $S_1>S_2$，有时 $S_1=S_2$，有时 $S_1<S_2$

【答案】C

【解析】设 PQ 与 x 轴夹角$=\theta$，$|PF|=\rho_1$，$|QF|=\rho_2$，则 $|PM|=\rho_1$，$|QN|=\rho_2$．



则　$S_1=\pi(PM+QN)\cdot PQ=\pi(\rho_1+\rho_2)^2$，$S_2=\pi|MN|^2=\pi(\rho_1+\rho_2)^2\sin^2\theta$．

∴ $S_1\geq S_2$，当且仅当 $\theta=90°$ 时等号成立．选 *C*．

(3) 已知方程 $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin x$，则(　　)

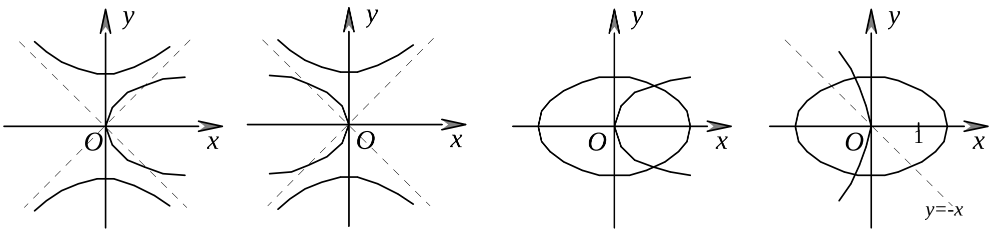
A. $x=\frac{24}{25}$　　*B.* $x=-\frac{24}{25}$　　*C.* $x=0$　　*D.* 这样的 x 不存在．

【答案】D

【解析】即 $\arcsin x=2\arccos\frac{4}{5}-\pi$．设 $\arccos\frac{4}{5}=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$．

∴ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$．即 2θ 为锐角．．∴$2\theta-\pi<-\frac{\pi}{2}$．故选 *D*．

(4) 在下面四个图形中，已知有一个是方程与 ($m\neq0$，$n\neq0$)在同一坐标系中的示意图，它应是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】A

【解析】由 $y^2=-\frac{m}{n}x$，若 m、n 均为正数，则此抛物线开口向左，且 $mx^2+ny^2=1$ 表示椭圆，$m<n$，$|\frac{m}{n}|<1$.

此时抛物线与直线 $y=-x$ 的交点横坐标应>−1．故否定 B、D.

若 m、n 符号相反，则抛物线开口向右．且 $mx+ny^2=0$ 图形是双曲线，$m<0$，$n>0$，$m=-n$. 故选 A.

(5) 设 Z、W、λ 为复数，$|\lambda|\neq 1$，关于 Z 的方程 $\overline{Z}-\lambda Z=W$ 有下面四个结论：

Ⅰ．$Z=\dfrac{\overline{\lambda}W+\overline{W}}{1-|\lambda|^2}$ 是这个方程的解；　　Ⅱ．这个方程只有一解；

Ⅲ．这个方程有两解；　　　　　　　Ⅳ．这个方程有无穷多解．则(　　)

$A.$ 只有Ⅰ、Ⅱ正确　　$B.$ 只有Ⅰ、Ⅲ正确　　$C.$ 只有Ⅰ、Ⅳ正确　　$D.$ 以上 A、B、C 都不正确

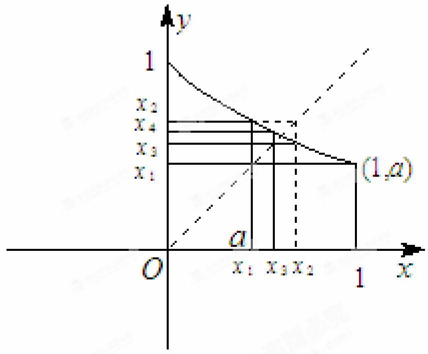
【答案】A

【解析】原式两端取共轭：$Z-\overline{\lambda Z}=\overline{W}$，乘以 λ 再取共轭：$\overline{\lambda}Z-|\lambda|^2Z=\overline{\lambda}W$，相加，由 $|\lambda|\neq 1$，得方程有唯一解 $Z=\dfrac{\overline{\lambda}W+\overline{W}}{1-|\lambda|^2}$．选 A.

(6) 设 $0<a<1$，若 $x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，…，$x_n=a^{x_{n-1}}$，……，则数列 $\{x_n\}$ (　　)

$A.$ 是递增的　　$B.$ 是递减的　　$C.$ 奇数项递增，偶数项递减　　$D.$ 偶数项递增，奇数项递减

【答案】C



【解析】作 $y=a^x$ 的图象，在图象上取点 x_1，x_2，x_3，x_4，由 $0<a<1$，知 $x_1<x_3<x_2$，即 A、B 错，C 正确．选 C.

二．填空题(本题满分 24 分，每小题 6 分)

(1) 在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若角 A、B、C 的大小成等比数列，且 $b^2-a^2=ac$，则角 B 的弧度为等于__________.

【答案】$\frac{2}{7}\pi$

【解析】由余弦定理，$b^2-a^2=c^2-2ac\cos B$．故 $ac=c^2-2ac\cos B$．即 $a=c-2a\cos B$．$\Rightarrow\sin A=\sin(A+B)-2\sin A\cos B=\sin(B-A)$.

∴ 由 $b>a$，得 $B>A$．$\Rightarrow A=B-A$，$\Rightarrow B=2A$，$C=4A$.

或 $A+B-A=\pi$ (不可能)

∴ $B=\frac{2}{7}\pi$.

(2) 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有____________组.

【答案】174

【解析】$x_1=1$ 时，$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=1$，共有 9 解；

$x_1=0$ 时，$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$，共有 $9+A_9^2+C_9^3=9+72+84=165$ 解.

∴ 共有 174 解.

(3) 在已知数列 1，4，8，10，16，19，21，25，30，43 中，相邻若干个数之和能被 11 整除的数组共有____________.

【答案】7 组

【解析】把这些数 mod 11 得 1，4，－3，－1，5，－3，－1，3，－3，－1.

依次累加，得：1，5，2，1，6，3，2，5，2，1. 其中相等的和有 7 对(3 对 1，3 对 2，1 对 5)，这表示原数列中共有 7 组相邻数之和能被 11 整除.

(4) 对任意实数 x，y，定义运算 $x*y$ 为 $x*y=ax+by+cxy$，其中 a、b、c 为常数，等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算．现已知 $1*2=3$，$2*3=4$，并且有一个非零实数 d，使得对于任意实数都有 $x*d=x$，则 $d=$______________.

【答案】4

【解析】$ax+bd+cxd=x$．取 $x=0$，代入得，$bd=0$，但 $d\neq0$，故 $b=0$

$a+2b+2c=3$，$2a+3b+6c=4$．$\Rightarrow a=5$，$c=-1$．取 $x=1$ 代入，得 $d=4$.

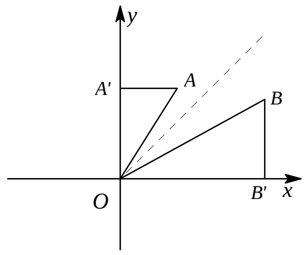
经验算：$x*y=5x-xy$，对于一切 x，有 $x*4=5x-4x=x$ 成立．故 $d=4$.

第二试

（本试共有 4 题，每题满分 15 分）

1．在直角坐标系 xoy 中，点 $A(x_1，y_1)$ 和点 $B(x_2，y_2)$ 的坐标均为一位的正整数．OA 与 x 轴正方向的夹角大于 45°，OB 与 x 轴正方向的夹角小于 45°，B 在 x 轴上的射影为 B'，A 在 y 轴上的射影为 A'，△OBB' 的面积比△OAA' 的面积大 33.5，由 x_1，y_1，x_2，y_2 组成的四位数

$\overline{x_1x_2y_2y_1}=x_1\cdot10^3+x_2\cdot10^2+y_2\cdot10+y_1$．试求出所有这样的四位数，并写出求解过程．

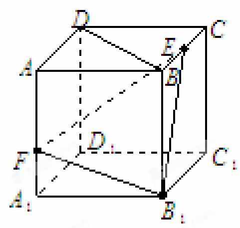


【解析】$x_2y_2-x_1y_1=67$．$x_1<y_1$，$x_2>y_2$．且 x_1，y_1，x_2，y_2 都是不超过 10 的正整数．

∴ $x_2y_2>67$，⇒ $x_2y_2=72$ 或 81．但 $x_2>y_2$，故 $x_2y_2=91$ 舍去．∴ $x_2y_2=72$．$x_2=9$，$y_2=8$．

∴ $x_1y_1=72-67=5$．⇒$x_1=1$，$y_1=5$，∴ $\overline{x_1x_2y_2y_1}=1985$．

2．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 中点，F 在 AA_1 上，且 $A_1F∶FA=1∶2$．求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角．

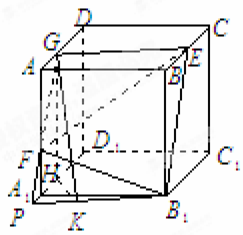


【解析】设 $AB=1$，则 $BE=\frac{1}{2}$，$A_1F=\frac{1}{3}$，故 $B_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$B_1F=\frac{\sqrt{10}}{3}$，$EF=\frac{\sqrt{61}}{6}$．

∴ $S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}-\frac{1}{4}(\frac{5}{4}+\frac{10}{9}-\frac{61}{36})}=\frac{1}{12}\sqrt{46}$．

而△B_1EF 在平面 A_1C_1 上的射影面积$=\frac{1}{4}$．

∴ $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{46}}$，即所求角$=\arccos\frac{3}{\sqrt{46}}$．



又解：设平面 B_1EF 与平面 AD_1 交于 FG，（G 在 AD 上），则由平面 AD_1∥平面 BC_1，得 $FG∥B_1E$．于是，延长 GF、D_1A_1 交于 P，则 P 为截面与平面 A_1C_1 的公共点，故 PB_1 为所求二面角的棱．$AG=A_1H=\frac{1}{3}$，$A_1P=\frac{1}{6}$，$PB_1=\frac{\sqrt{37}}{6}$．

作 $GH\perp A_1D_1$ 于 H，则 $GH\perp$平面 A_1C_1．作 $HK\perp PB_1$，连 GK，则∠GKH 为所求二面角的平面角．

∵ $HK\cdot PB_1=A_1B_1\cdot HP$．∴ $HK=\frac{3}{\sqrt{37}}$，$\tan\angle GKH=\frac{\sqrt{37}}{3}$．即所求角$=\arctan\frac{\sqrt{37}}{3}$．

3．某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队，根据比赛规则，比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同．问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论．

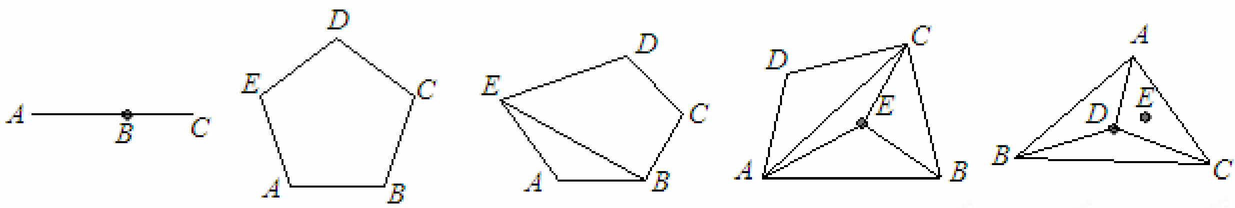
【解析】证明：用 32 个点表示这 32 个队，如果某两队比赛了一场，则在表示这两个队的点间连一条线．否则就不连线．

由于，这些队比赛场次最多 30 场，最少 0 场，共有 31 种情况，现除 A 城甲队外还有 31 个队，这 31 个队比赛场次互不相同，故这 31 个队比赛的场次恰好从 0 到 30 都有．就在表示每个队的点旁注上这队的比赛场次．

考虑比赛场次为 30 的队，这个队除自己与同城的队外，与不同城有队都进行了比赛，于是，它只可能与比赛 0 场的队同城；再考虑比赛 29 场的队，这个队除与同城队及比赛 0 场、1 场(只赛 1 场的队已经与比赛 30 场的队赛过 1 场，故不再与其它队比赛)的队不比赛外，与其余各队都比赛，故它与比赛 1 场的队同城；依次类推，知比赛 k 场的队与比赛 $30-k$ 场的队同城，这样，把各城都配对后，只有比赛 15 场的队没有与其余的队同城，故比赛 15 场的队就是 A 城乙队．即 A 城乙队比赛了 15 场．

4．平面上任给 5 个点，以 λ 表示这些点间最大的距离与最小的距离之比，证明：$\lambda \geqslant 2\sin 54°$．

【解析】证明 (1) 若此五点中有三点共线，例如 A、B、C 三点共线，不妨设 B 在 A、C 之间，则 AB 与 BC 必有一较大者．不妨设 $AB \geqslant BC$．则 $\dfrac{AC}{BC} \geqslant 2 > 2\sin 54°$．



(2) 设此五点中无三点共线的情况．

① 若此五点的凸包为正五边形．则其五个内角都$=108°$．五点的连线只有两种长度：正五边形的边长与对角线，而此对角线与边长之比为 $2\sin 54°$．

② 若此五点的凸包为凸五边形．则其五个内角中至少有一个内角$\geqslant 108°$．设 $\angle EAB \geqslant 108°$，且 $EA \geqslant AB$，则 $\angle AEB \leqslant 36°$，

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{\sin(B+E)}{\sin E} \geqslant \frac{\sin 2E}{\sin E} = 2\cos E \geqslant 2\cos 36° = 2\sin 54°.$$

③ 若此五点的凸包为凸四边形 $ABCD$，点 E 在其内部，连 AC，设点 E 在$\triangle ABC$ 内部，则 $\angle AEB$、$\angle BEC$、$\angle CEA$ 中至少有一个角$\geqslant 120° > 108°$，由上证可知，结论成立．

④ 若此五点的凸包为三角形 ABC，则形内有两点 D、E，则 $\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle CDA$ 中必有一个角$\geqslant 120°$，结论成立．

综上可知，结论成立．