2020年全国高中数学联合竞赛一试试题(A卷)

一.填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_9=13,a_{13}=1$，则$\log_{a_1}13$的值为____________.

2.在椭圆Γ中，A为长轴的一个端点，B为短轴的一个端点，F_1,F_2为两个焦点.若$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，则$\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}$的值为____________.

3.设$a>0$，函数$f(x)=x+\dfrac{100}{x}$在区间$(0,a]$上的最小值为m_1，在区间$[a,+\infty)$上的最小值为m_2，若$m_1\ m_2=2020$，则a的值为____________.

4.设z为复数，若$\dfrac{z-2}{z-i}$为实数(i为虚数单位)，则$|z+3|$的最小值为____________.

5.在$\triangle ABC$中，$AB=6,BC=4$，边AC上的中线长为$\sqrt{10}$，则$\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$的值为__________.

6.正三棱锥$P-ABC$的所有棱长都为1，L,M,N分别为棱PA,PB,PC的中点，则该三棱锥的外接球被平面LMN所截的截面面积为____________.

7.设$a,b>0$，满足：关于x的方程$\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$恰有三个不同的实数解$x_1,x_2,x_3$，且$x_1<x_2<x_3=b$，则$a+b$的值为____________.

8.现有10张卡片，每张卡片上写有$1,2,3,4,5$中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同.将这10张卡片放入标号为$1,2,3,4,5$的五个盒子中，规定写有i,j的卡片只能放在i号或j号盒子中.一种放法称为“好的”，如果1号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数.则“好的”放法公共有____________种.

二.解答题：本大题共3小题，满分56分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）在ΔABC中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求$\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围.

10.（本题满分20分）对正整数n及实数$x(0\le x<n)$，定义$f(n,x)=(1-\{x\})C_n^{[x]}+\{x\}\cdot C_n^{[x]+1}$其中$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数，$\{x\}=x-[x]$.若整数$m,n\ge 2$满足

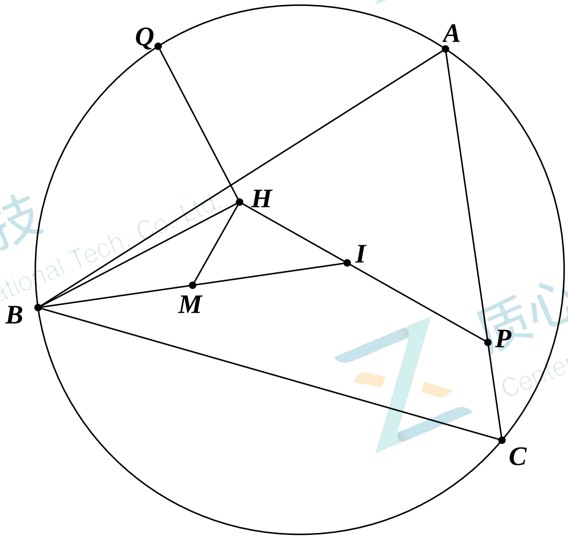
$$f(m,\frac{1}{n})+f(m,\frac{2}{n})+\cdots+f(m,\frac{mn-1}{n})=123,$$

求$f(n,\dfrac{1}{m})+f(n,\dfrac{2}{m})+\cdots+f(n,\dfrac{mn-1}{m})$的值.

11.（本题满分20分）在平面直角坐标系中，点A,B,C在双曲线$xy=1$上，满足ΔABC为等腰直角三角形，求ΔABC的面积的最小值.

2020 全国高中数学联赛二试

一、如图，在等腰三角形 ABC 中，AB=BC，I 为内心，M 为 BI 的中点，P 为边 AC 上的一点，满足 AP=3PC，PI 延长线上一点 H 满足 MH⊥PH，Q 为△ABC 的外接圆上劣弧 AB 的中点，证明：BH⊥QH



二、给定整数 n⩾3，设 $a_1,a_2,a_3...,a_{2n},b_1,b_2,...,b_{2n}$ 是 4n 个非负实数，满足

$$a_1+a_2+...a_{2n}=b_1+b_2+...+b_{2n}>0,$$

且对任意 $i=1,2,...,2n$，有 $a_ia_{i+2}\geq b_i+b_{i+1}$，（这里 $a_{2n+1}=a_1,a_{2n+2}=a_2,b_{2n+1}=b_1$），

求 $a_1+a_2+...+a_{2n}$ 的最小值。

三、设 $a_1=1,a_2=2,a_n=2a_{n-1}+a_{n-2},n=3,4,...$ 证明：对整数 $n\geq 5,a_n$ 必有一个模 4 余 1 的素因子

四、给定凸 20 边形 P，用 P 的 17 条在内部不相交的对角线将 P 分割成 18 个三角形，所得图形成为 P 的一个三角形剖分图。对 P 的任意一个三角剖分图 T，P 的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为 T 的边，T 的任意 10 条两两无公共端点的边的集合称为 T 的一个完美匹配。当 T 取遍 P 的所有三角剖分图时，求 T 的完美匹配个数的最大值。

2020 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_9=13, a_{13}=1$，则 $\log_{a_1}13$ 的值为________．

答案： $\frac{1}{3}$．

解： 由等比数列的性质知 $\frac{a_1}{a_9}=\left(\frac{a_9}{a_{13}}\right)^2$，故 $a_1=\frac{a_9^3}{a_{13}^2}=13^3$．所以 $\log_{a_1}13=\frac{1}{3}$．

2. 在椭圆 Γ 中，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点，F_1, F_2 为两个焦点．若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，则 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为________．

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

解： 不妨设 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$A(a,0), B(0,b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．由条件知

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+(-c^2+b^2)=a^2+b^2-2c^2=0.$$

所以 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2c^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

3. 设 $a>0$，函数 $f(x)=x+\frac{100}{x}$ 在区间 $(0,a]$ 上的最小值为 m_1，在区间 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_2．若 $m_1m_2=2020$，则 a 的值为________．

答案： 1 或 100．

解： 注意到 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上单调减，在 $[10,+\infty)$ 上单调增．当 $a\in(0,10]$ 时，$m_1=f(a), m_2=f(10)$；当 $a\in[10,+\infty)$ 时，$m_1=f(10), m_2=f(a)$．因此总有

$$f(a)f(10)=m_1m_2=2020,$$

即 $a+\frac{100}{a}=\frac{2020}{20}=101$，解得 $a=1$ 或 $a=100$．

4. 设 z 为复数．若 $\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}$ 为实数（i 为虚数单位），则 $|z+3|$ 的最小值为________．

答案：$\sqrt{5}$.

解法 1：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，由条件知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right)=\frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2}=0,$$

故 $a+2b=2$．从而

$$\sqrt{5}|z+3|=\sqrt{(1^2+2^2)((a+3)^2+b^2)}\geq|(a+3)+2b|=5,$$

即 $|z+3|\geq\sqrt{5}$．当 $a=-2,\ b=2$ 时，$|z+3|$ 取到最小值 $\sqrt{5}$．

解法 2：由 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$ 及复数除法的几何意义，可知复平面中 z 所对应的点在 2 与 i 所对应的点的连线上（i 所对应的点除外），故 $|z+3|$ 的最小值即为平面直角坐标系 xOy 中的点 $(-3,0)$ 到直线 $x+2y-2=0$ 的距离，即 $\dfrac{|-3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6,\ BC=4$，边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$，则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为________.

答案：$\dfrac{211}{256}$.

解：记 M 为 AC 的中点，由中线长公式得

$$4BM^2+AC^2=2(AB^2+BC^2),$$

可得 $AC=\sqrt{2(6^2+4^2)-4\cdot 10}=8$.

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}=\dfrac{8^2+6^2-4^2}{2\cdot 8\cdot 6}=\dfrac{7}{8}$，所以

$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 A\\&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 A=\frac{211}{256}.\end{aligned}$$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为1，L,M,N 分别为棱 PA,PB,PC 的中点，则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为________.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$.

解：由条件知平面 LMN 与平面 ABC 平行，且点 P 到平面 LMN,ABC 的距离之比为$1:2$．设 H 为正三棱锥 $P-ABC$ 的面 ABC 的中心，PH 与平面 LMN 交于点 K，则 $PH\perp$ 平面 ABC，$PK\perp$ 平面 LMN，故 $PK=\dfrac{1}{2}PH$.

正三棱锥 $P-ABC$ 可视为正四面体，设 O 为其中心（即外接球球心），则 O 在 PH 上，且由正四面体的性质知 $OH=\dfrac{1}{4}PH$．结合 $PK=\dfrac{1}{2}PH$ 可知 $OK=OH$，

即点 O 到平面 LMN, ABC 等距. 这表明正三棱锥的外接球被平面 LMN, ABC 所截得的截面圆大小相等.

从而所求截面的面积等于 ΔABC 的外接圆面积，即 $\pi\cdot\left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{3}$.

7. 设 $a,b>0$，满足：关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3=b$，则 $a+b$ 的值为________.

答案：144.

解：令 $t=x+\frac{a}{2}$，则关于 t 的方程 $\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$ 恰有三个不同的实数解 $t_i=x_i+\frac{a}{2}\ (i=1,2,3)$.

由于 $f(t)=\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}$ 为偶函数，故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于数轴原点对称分布，从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$. 以下求方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解.

当 $|t|\le\frac{a}{2}$ 时，$f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\le 2a$，等号成立当且仅当 $t=0$；当 $t>\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调增，且当 $t=\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$；当 $t<-\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调减，且当 $t=-\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$.

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解 $t_1=-\frac{5}{8}a,\ t_2=0,\ t_3=\frac{5}{8}a$.

由条件知 $b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$，结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$.

于是 $a+b=\frac{9a}{8}=144$.

8. 现有 10 张卡片，每张卡片上写有 $1,2,3,4,5$ 中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这 10 张卡片放入标号为 $1,2,3,4,5$ 的五个盒子中，规定写有 i,j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中. 一种放法称为“好的”，如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则“好的”放法共有_______种.

答案：120.

解：用 $\{i,j\}$ 表示写有 i,j 的卡片. 易知这 10 张卡片恰为 $\{i,j\}\ (1\le i<j\le 5)$.

考虑“好的”卡片放法. 五个盒子一共放有 10 张卡片，故 1 号盒至少有 3 张卡片. 能放入 1 号盒的卡片仅有 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}$.

情况一：这 4 张卡片都在 1 号盒中，此时其余每个盒中已经不可能达到 4 张卡片，故剩下 6 张卡片无论怎样放都符合要求，有 $2^6=64$ 种好的放法.

情况二：这 4 张卡片恰有 3 张在 1 号盒中，且其余每盒最多仅有 2 张卡片. 考虑 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$ 在 1 号盒，且 $\{1,5\}$ 在 5 号盒的放法数 N.

卡片 $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ 的放法有 8 种可能，其中 6 种是在 $2,3,4$ 号的某个盒中放两张，其余 2 种则是在 $2,3,4$ 号盒中各放一张.

若 $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ 有两张在一个盒中，不妨设 $\{2,3\},\{2,4\}$ 在 2 号盒，则

$\{2,5\}$只能在 5 号盒，这样 5 号盒已有$\{1,5\},\{2,5\}$，故$\{3,5\},\{4,5\}$分别在 3 号与 4 号盒，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$的放法唯一；

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$在$2,3,4$号盒中各一张，则$2,3,4$号盒均至多有 2 张卡片，仅需再使 5 号盒中不超过 2 张卡片，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$有 0 张或 1 张在 5 号盒中，对应$C_3^0+C_3^1=4$种放法.

因此$N=6\times1+2\times4=14$．由对称性，在情况二下有$4N=56$种好的放法.

综上，好的放法共有$64+56=120$种.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 在ΔABC中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．求$\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围.

解： 记$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$.

由条件知$A=\dfrac{\pi}{4}$或$A=\dfrac{3\pi}{4}$. ……………………4 分

当$A=\dfrac{\pi}{4}$时，$B=\dfrac{3\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{3\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C=\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)\in(0,1].$$

……………………8 分

当$A=\dfrac{3\pi}{4}$时，$B=\dfrac{\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C=\sqrt{5}\sin(C+\varphi),$$

其中$\varphi=\arctan 3$. ……………………12 分

注意到$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，函数$g(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right]$上单调增，在$\left[\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调减，又$g(0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sqrt{5}$，故$f\in(2,\sqrt{5}]$.

综上所述，$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围是$(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.

……………………16 分

10.（本题满分 20 分） 对正整数n及实数$x\ (0\le x<n)$，定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot C_n^{[x]}+\{x\}\cdot C_n^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数，$\{x\}=x-[x]$．若整数$m,n\ge 2$满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求$f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$的值.

解： 对$k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)=\mathrm{C}_m^k \cdot \sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\mathrm{C}_m^{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}=\frac{n-1}{2} \cdot \mathrm{C}_m^k+\mathrm{C}_m^{k+1} .$$

…………………5 分

所以

$$f\left(m, \frac{1}{n}\right)+f\left(m, \frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m, \frac{mn-1}{n}\right)=\sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{C}_m^j+\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k+\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^{k+1}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot 2^m-1+2^m-1=(2^m-1)n-1 .$$

……………10 分

同理得 $f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=(2^n-1)m-1$.

由条件知 $(2^m-1)n-1=123$，即 $(2^m-1)n=124$，故 $(2^m-1)\mid 124$．又 $m \geq 2$，所以 $2^m-1 \in\{3,7,15,31,63,127, \cdots\}$，仅当 $m=5$ 时，$2^m-1=31$ 为124的约数，进而有 $n=\frac{124}{31}=4$．进而

$$f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=(2^4-1) \cdot 5-1=74 .$$

……………………20 分

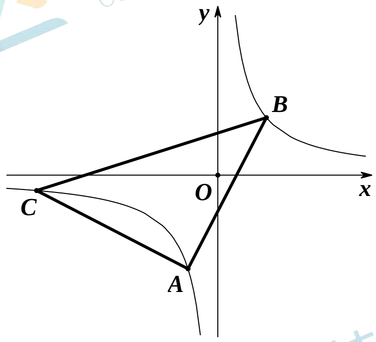
11．（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，点 A, B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 ΔABC 为等腰直角三角形．求 ΔABC 的面积的最小值．

解：不妨设等腰直角 ΔABC 的顶点 A, B, C 逆时针排列， A 为直角顶点．

设 $\overrightarrow{AB}=(s, t)$，则 $\overrightarrow{AC}=(-t, s)$，且 ΔABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{s^2+t^2}{2} .$$

…………………5 分



注意到 A 在双曲线 $xy=1$ 上，设 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$，

则 $B\left(a+s, \frac{1}{a}+t\right)$, $C\left(a-t, \frac{1}{a}+s\right)$.

由 B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，可知

$$(a+s)\left(\frac{1}{a}+t\right)=(a-t)\left(\frac{1}{a}+s\right)=1,$$

这等价于

$$\frac{s}{a}+at=-st, \qquad ①$$

$$-\frac{t}{a}+as=st . \qquad ②$$

由①、②相加，得 $\frac{s-t}{a}+a(t+s)=0$，即

$$a^2=\frac{t-s}{t+s}. \qquad ③$$

由①、②相乘，并利用③，得

$$-s^2t^2=\left(\frac{s}{a}+at\right)\left(-\frac{t}{a}+as\right)=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)st+s^2-t^2$$

$$=\left(\frac{t-s}{t+s}-\frac{t+s}{t-s}\right)\cdot st+s^2-t^2=\frac{4st}{s^2-t^2}\cdot st+s^2-t^2$$

$$=\frac{(s^2+t^2)^2}{s^2-t^2}.$$ ……………………10 分

所以由基本不等式得

$$(s^2+t^2)^4=\left(-s^2t^2(s^2-t^2)\right)^2=\frac{1}{4}\cdot 2s^2t^2\cdot 2s^2t^2\cdot(s^2-t^2)^2$$

$$\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2s^2t^2+2s^2t^2+(s^2-t^2)^2}{3}\right)^3=\frac{(s^2+t^2)^6}{108}, \qquad ④$$

故 $s^2+t^2\ge\sqrt{108}=6\sqrt{3}$. ……………………15 分

以下取一组满足条件的实数 (s,t,a)，使得 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$（进而由 s,t,a 可确定一个满足条件的 ΔABC，使得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{s^2+t^2}{2}=3\sqrt{3}$）.

考虑④的取等条件，有 $2s^2t^2=(s^2-t^2)^2$，即 $\dfrac{s^2}{t^2}=2\pm\sqrt{3}$.

不妨要求 $0<s<t$，结合 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$，得 $s=\sqrt{3(\sqrt{3}-1)},\ t=\sqrt{3(\sqrt{3}+1)}$.

由①知 $a<0$，故由③得 $a=-\sqrt{\dfrac{t-s}{t+s}}$，其中 $t=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}s=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s$，从而有

$$a=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}}.$$

综上，ΔABC 的面积的最小值为 $3\sqrt{3}$. ……………………20 分

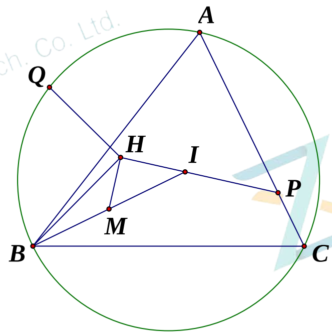
2020年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．**（本题满分40分）**如图，在等腰ΔABC中，$AB=BC$，I为内心，M为BI的中点，P为边AC上一点，满足$AP=3PC$，PI延长线上一点H满足$MH\perp PH$，Q为ΔABC的外接圆上劣弧AB的中点．证明：$BH\perp QH$．

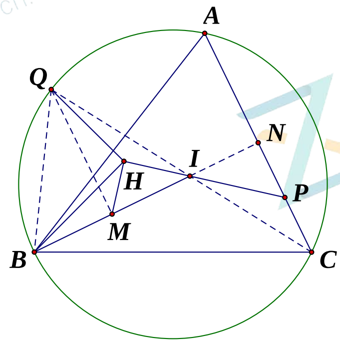


证明：取AC的中点N．由$AP=3PC$，可知P为NC的中点．易知B,I,N共线，$\angle INC=90°$．

由I为ΔABC的内心，可知CI经过点Q，且

$$\angle QIB=\angle IBC+\angle ICB=\angle ABI+\angle ACQ=\angle ABI+\angle ABQ=\angle QBI,$$

又M为BI的中点，所以$QM\perp BI$．进而$QM\parallel CN$． ……………10分



考虑ΔHMQ与ΔHIB．由于$MH\perp PH$，故$\angle HMQ=90°-\angle HMI=\angle HIB$．

又$\angle IHM=\angle INP=90°$，故$\dfrac{HM}{HI}=\dfrac{NP}{NI}$，于是

$$\frac{HM}{HI}=\frac{NP}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{NC}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{MQ}{MI}=\frac{MQ}{IB}.$$

所以$\Delta HMQ\backsim\Delta HIB$，得$\angle HQM=\angle HBI$． ……………30分

从而H,M,B,Q四点共圆．于是有$\angle BHQ=\angle BMQ=90°$，即$BH\perp QH$．

……………40分

二．**（本题满分 40 分）**给定整数$n\geq 3$．设$a_1,a_2,\cdots,a_{2n},b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$是$4n$个非负实数，满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}>0,$$

且对任意$i=1,2,\cdots,2n$，有$a_ia_{i+2}\geq b_i+b_{i+1}$（这里$a_{2n+1}=a_1,a_{2n+2}=a_2,b_{2n+1}=b_1$）.

求$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$的最小值．

解：记$S=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}$.

不失一般性，设$T=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\leq\dfrac{S}{2}$.

当$n=3$时，因为

$$T^2-3\cdot\sum_{k=1}^{3}a_{2k-1}a_{2k+1}=\frac{1}{2}\left[(a_1-a_3)^2+(a_3-a_5)^2+(a_5-a_1)^2\right]\geq 0,$$

故结合条件可知

$$\frac{S^2}{4}\geq T^2\geq 3\cdot\sum_{k=1}^{3}a_{2k-1}a_{2k+1}\geq 3\cdot\sum_{k=1}^{3}(b_{2k-1}+b_{2k})=3S.$$

又$S>0$，所以$S\geq 12$.

当$a_i=b_i=2\,(1\leq i\leq 6)$时，$S$取到最小值 12. ……………10 分

当$n\geq 4$时，一方面有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\geq\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+b_{2k})=S.$$

另一方面，若n为偶数，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-3})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-1})\leq\frac{T^2}{4},$$

其中第一个不等式是因为$(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-3})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-1})$展开后每一项均非负，且包含$a_{2k-1}a_{2k+1}(1\leq k\leq n)$这些项，第二个不等式利用了基本不等式.

……………20 分

若n为奇数，不妨设$a_1\leq a_3$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}a_{2k+1}\right)+a_{2n-1}a_3$$

$$\leq(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-1})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-3})\leq\frac{T^2}{4}.$$

从而总有$S\leq\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq\dfrac{T^2}{4}\leq\dfrac{S^2}{16}$．又$S>0$，所以$S\geq 16$.

……………30 分

当$a_1=a_2=a_3=a_4=4,a_i=0(5\leq i\leq 2n),b_1=0,b_2=16,b_i=0(3\leq i\leq 2n)$时，$S$取到最小值 16.

综上，当$n=3$时，S的最小值为 12；当$n\geq 4$时，S的最小值为 16.

……………40 分

三．（**本题满分 50 分**）设 $a_1=1, a_2=2, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}, n=3,4,\cdots$．证明：对整数 $n\geq 5$，a_n 必有一个模 4 余 1 的素因子．

证明： 记 $\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=1-\sqrt{2}$，则易求得 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$．

记 $b_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$，则数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=2b_{n-1}+b_{n-2}\,(n\geq 3)\,. \qquad ①$$

因 $b_1=1, b_2=3$ 均为整数，故由①及数学归纳法，可知 $\{b_n\}$ 每项均为整数．

……………10 分

由 $\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2=(\alpha\beta)^n$，可知

$$b_n^2-2a_n^2=(-1)^n\ (n\geq 1)\,. \qquad ②$$

……………20 分

当 $n>1$ 为奇数时，由于 a_1 为奇数，故由 $\{a_n\}$ 的递推式及数学归纳法，可知 a_n 为大于 1 的奇数，所以 a_n 有奇素因子 p．由②得 $b_n^2\equiv -1\pmod p$，故

$$b_n^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\pmod p\,.$$

又上式表明 $(p,b_n)=1$，故由费马小定理得 $b_n^{p-1}\equiv 1\pmod p$，从而

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\pmod p\,.$$

因 $p>2$，故必须 $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$，因此 $p\equiv 1\pmod 4$．……………30 分

另一方面，对正整数 m,n，若 $m\mid n$，设 $n=km$，则

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\cdot(\alpha^{(k-1)m}+\alpha^{(k-2)m}\beta^m+\cdots+\alpha^m\beta^{(k-2)m}+\beta^{(k-1)m})$$

$$=\begin{cases} a_m\cdot\displaystyle\sum_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}(\alpha^{(2l-1-2i)m}+\beta^{(2l-1-2i)m}), & k=2l,\\ a_m\cdot\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}(\alpha^{(2l-2i)m}+\beta^{(2l-2i)m})+(\alpha\beta)^{lm}\right), & k=2l+1.\end{cases}$$

因 $\alpha^s+\beta^s=2b_s$ 为整数（对正整数 s），$\alpha\beta=-1$ 为整数，故由上式知 a_n 等于 a_m 与一个整数的乘积，从而 $a_m\mid a_n$．

因此，若 n 有大于 1 的奇因子 m，则由前面已证得的结论知 a_m 有素因子 $p\equiv 1\pmod 4$，而 $a_m\mid a_n$，故 $p\mid a_n$，即 a_n 也有模 4 余 1 的素因子．

……………40 分

最后，若 n 没有大于 1 的奇因子，则 n 是 2 的方幂．设 $n=2^l\ (l\geq 3)$，因 $a_8=408=24\times 17$ 有模 4 余 1 的素因子 17，对于 $l\geq 4$，由 $8\mid 2^l$ 知 $a_8\mid a_{2^l}$，从而 a_{2^l} 也有素因子 17．证毕．……………50 分

四．（本题满分 50 分）给定凸 20 边形 P．用 P 的 17 条在内部不相交的对角线将 P 分割成 18 个三角形，所得图形称为 P 的一个三角剖分图．对 P 的任意一个三角剖分图 T，P 的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为 T 的边．T 的任意 10 条两两无公共端点的边的集合称为 T 的一个完美匹配．当 T 取遍 P 的所有三角剖分图时，求 T 的完美匹配个数的最大值．

解：将 20 边形换成 $2n$ 边形，考虑一般的问题．

对凸 $2n$ 边形 P 的一条对角线，若其两侧各有奇数个 P 的顶点，称其为奇弦，否则称为偶弦．首先注意下述基本事实：

对 P 的任意三角剖分图 T，T 的完美匹配不含奇弦．（*）

如果完美匹配中有一条奇弦 e_1，因为 T 的一个完美匹配给出了 P 的顶点集的一个配对划分，而 e_1 两侧各有奇数个顶点，故该完美匹配中必有 T 的另一条边 e_2，端点分别在 e_1 的两侧，又 P 是凸多边形，故 e_1 与 e_2 在 P 的内部相交，这与 T 是三角剖分图矛盾．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………10 分

记 $f(T)$ 为 T 的完美匹配的个数．设 $F_1=1$，$F_2=2$，对 $k\geq 2$，$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$，是 Fibonacci 数列．

下面对 n 归纳证明：若 T 是凸 $2n$ 边形的任意一个三角剖分图，则 $f(T)\leq F_n$．

设 $P=A_1A_2\cdots A_{2n}$ 是凸 $2n$ 边形．从 P 的 $2n$ 条边中选 n 条边构成完美匹配，恰有两种方法，$A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2n-1}A_{2n}$ 或 $A_2A_3,A_4A_5,\cdots,A_{2n-2}A_{2n-1},A_{2n}A_1$．

当 $n=2$ 时，凸四边形 P 的三角剖分图 T 没有偶弦，因此 T 的完美匹配只能用 P 的边，故 $f(T)=2=F_2$．

当 $n=3$ 时，凸六边形 P 的三角剖分图 T 至多有一条偶弦．若 T 没有偶弦，同上可知 $f(T)=2$．若 T 含有偶弦，不妨设是 A_1A_4，选用 A_1A_4 的完美匹配是唯一的，另两条边只能是 A_2A_3,A_5A_6，此时 $f(T)=3$．总之 $f(T)\leq 3=F_3$．

结论在 $n=2,3$ 时成立．假设 $n\geq 4$，且结论在小于 n 时均成立．考虑凸 $2n$ 边形 $P=A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的一个三角剖分图 T．若 T 没有偶弦，则同上可知 $f(T)=2$．

对于偶弦 e，记 e 两侧中 P 的顶点个数的较小值为 $w(e)$．若 T 含有偶弦，取其中一条偶弦 e 使 $w(e)$ 达到最小．设 $w(e)=2k$，不妨设 e 为 $A_{2n}A_{2k+1}$，则每个 $A_i\ (i=1,2,\cdots,2k)$ 不能引出偶弦．

事实上，假设 A_iA_j 是偶弦，若 $j\in\{2k+2,2k+3,\cdots,2n-1\}$，则 A_iA_j 与 e 在 P 的内部相交，矛盾．若 $j\in\{1,2,\cdots,2k+1,2n\}$，则 $w(A_iA_j)<2k$，与 $w(e)$ 的最小性矛盾．

又由（*）知完美匹配中没有奇弦，故 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k}$ 只能与其相邻顶点配对，特别地，A_1 只能与 A_2 或 A_{2n} 配对．下面分两种情况．

情形 1：选用边 A_1A_2．则必须选用边 $A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$．注意到 $A_{2n}A_{2k+1}$ 的两侧分别有 $2k,2n-2k-2$ 个顶点，$2n-2k-2\geq w(A_{2n}A_{2k+1})=2k$，而 $n\geq 4$，因此

$2n-2k\geq 6$. 在凸 $2n-2k$ 边形 $P_1=A_{2k+1}A_{2k+2}\cdots A_{2n}$ 上，T 的边给出了 P_1 的三角剖分图 T_1，在 T 中再选取 $n-k$ 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$，与 $A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$ 一起构成 T 的完美匹配，当且仅当 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$ 是 T_1 的完美匹配．故情形 1 中的 T 的完美匹配个数等于 $f(T_1)$.

……………20 分

情形 2：选用边 A_1A_{2n}．则必须选用边 $A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$．在凸 $2n-2k-2$ 边形 $P_2=A_{2k+2}A_{2k+3}\cdots A_{2n-1}$ 中构造如下的三角剖分图 T_2：对 $2k+2\leq i<j\leq 2n-1$，若线段 A_iA_j 是 T 的边，则也将其作为 T_2 的边，由于这些边在内部互不相交，因此可再适当地添加一些 P_2 的对角线，得到一个 P_2 的三角剖分图 T_2，它包含了 T 的所有在顶点 $A_{2k+2},A_{2k+3},\cdots,A_{2n-1}$ 之间的边．因此每个包含边 $A_{2n}A_1,A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$ 的 T 的完美匹配，其余的边必定是 T_2 的完美匹配．故情形 2 中的 T 的完美匹配个数不超过 $f(T_2)$.

由归纳假设得 $f(T_1)\leq F_{n-k}$，$f(T_2)\leq F_{n-k-1}$，结合上面两种情形以及 $k\geq 1$，有

$$f(T)\leq f(T_1)+f(T_2)\leq F_{n-k}+F_{n-k-1}=F_{n-k+1}\leq F_n.$$

……………40 分

下面说明等号可以成立．考虑凸 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的三角剖分图 Δ_n：添加对角线 $A_2A_{2n},A_{2n}A_3,A_3A_{2n-1},A_{2n-1}A_4,A_4A_{2n-2},\cdots,A_{n+3}A_n,A_nA_{n+2}$．重复前面的论证过程，$f(\Delta_2)=2$，$f(\Delta_3)=3$．对 Δ_n，$n\geq 4$，考虑偶弦 A_nA_3．情形 1，用 A_1A_2，由于在凸 $2n-2$ 边形 $A_3A_4\cdots A_{2n}$ 中的三角剖分图恰是 Δ_{n-1}，此时有 $f(\Delta_{n-1})$ 个 T 的完美匹配．情形 2，用 A_1A_{2n}，由于在凸 $2n-4$ 边形 $A_4A_5\cdots A_{2n-1}$ 中 T 的边恰构成三角剖分图 Δ_{n-2}，不用添加任何对角线，故这一情形下 T 的完美匹配个数恰为 $f(\Delta_{n-2})$．从而对 $n\geq 4$，有

$$f(\Delta_n)=f(\Delta_{n-1})+f(\Delta_{n-2}).$$

由数学归纳法即得 $f(\Delta_n)=F_n$．结论得证．

因此，对凸 20 边形 P，$f(T)$ 的最大值等于 $F_{10}=89$.

……………50 分