2018 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1．设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,99\}$，$B=\{2x\,|\,x\in A\}$，$C=\{x\,|\,2x\in A\}$，则 $B\cap C$ 的元素个数为____________.

答案：24.

解：由条件知，$B\cap C=\{2,4,6,\cdots,198\}\cap\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots,\frac{99}{2}\right\}=\{2,4,6,\cdots,48\}$，故 $B\cap C$ 的元素个数为 24.

2．设点 P 到平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$，点 Q 在平面 α 上，使得直线 PQ 与 α 所成角不小于 30° 且不大于 60°，则这样的点 Q 所构成的区域的面积为____________.

答案：8π.

解：设点 P 在平面 α 上的射影为 O．由条件知，$\frac{OP}{OQ}=\tan\angle OQP\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，即 $OQ\in[1,3]$，故所求的区域面积为 $\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 1^2=8\pi$.

3．将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行，记为 a,b,c,d,e,f，则 $abc+def$ 是偶数的概率为____________.

答案：$\frac{9}{10}$.

解：先考虑 $abc+def$ 为奇数的情况，此时 abc,def 一奇一偶，若 abc 为奇数，则 a,b,c 为 $1,3,5$ 的排列，进而 d,e,f 为 $2,4,6$ 的排列，这样有 $3!\times3!=36$ 种情况，由对称性可知，使 $abc+def$ 为奇数的情况数为 $36\times2=72$ 种．从而 $abc+def$ 为偶数的概率为 $1-\frac{72}{6!}=1-\frac{72}{720}=\frac{9}{10}$.

4．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，椭圆 C 的弦 ST 与 UV 分别平行于 x 轴与 y 轴，且相交于点 P．已知线段 PU,PS,PV,PT 的长分别为 $1,2,3,6$，则 ΔPF_1F_2 的面积为____________.

答案：$\sqrt{15}$.

解：由对称性，不妨设 $P(x_P,y_P)$ 在第一象限，则由条件知

$$x_P=\frac{1}{2}\left(|PT|-|PS|\right)=2,\ y_P=\frac{1}{2}\left(|PV|-|PU|\right)=1，$$

即 $P(2,1)$. 进而由 $x_P=|PU|=1, |PS|=2$ 得 $U(2,2), S(4,1)$，代入椭圆 C 的方程知 $4\cdot\frac{1}{a^2}+4\cdot\frac{1}{b^2}=16\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $a^2=20, b^2=5$.

从而 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_P|=\sqrt{a^2-b^2}\cdot y_P=\sqrt{15}$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[0,1]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1,\ f(2\pi)=2$，则不等式组 $\begin{cases}1\le x\le 2,\\ 1\le f(x)\le 2\end{cases}$ 的解集为__________.

答案：$[\pi-2,\ 8-2\pi]$.

解：由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[0,1]$ 上严格递减知， $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上严格递增，再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知，$[1,2]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间.

注意到

$$f(\pi-2)=f(\pi)=1,\ f(8-2\pi)=f(-2\pi)=f(2\pi)=2,$$

所以

$$1\le f(x)\le 2\Leftrightarrow f(\pi-2)\le f(x)\le f(8-2\pi),$$

而 $1<\pi-2<8-2\pi<2$，故原不等式组成立当且仅当 $x\in[\pi-2,\ 8-2\pi]$.

6. 设复数 z 满足 $|z|=1$，使得关于 x 的方程 $zx^2+2\bar{z}x+2=0$ 有实根，则这样的复数 z 的和为__________.

答案：$-\frac{3}{2}$.

解：设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R}, a^2+b^2=1)$.

将原方程改为 $(a+b\mathrm{i})x^2+2(a-b\mathrm{i})x+2=0$，分离实部与虚部后等价于

$$ax^2+2ax+2=0, \qquad ①$$

$$bx^2-2bx=0. \qquad ②$$

若 $b=0$，则 $a^2=1$，但当 $a=1$ 时，①无实数解，从而 $a=-1$，此时存在实数 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 满足①、②，故 $z=-1$ 满足条件.

若 $b\ne 0$，则由②知 $x\in\{0,2\}$，但显然 $x=0$ 不满足①，故只能是 $x=2$，代入①解得 $a=-\frac{1}{4}$，进而 $b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，相应有 $z=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}$.

综上，满足条件的所有复数 z 之和为 $-1+\frac{-1+\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}+\frac{-1-\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}=-\frac{3}{2}$.

7. 设 O 为 ΔABC 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，则 $\sin\angle BAC$ 的值为________.

答案：$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

解：不失一般性，设 ΔABC 的外接圆半径 $R=2$. 由条件知，

$$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}, \qquad ①$$

故 $AC=\frac{1}{2}BO=1$.

取 AC 的中点 M，则 $OM \perp AC$，结合①知 $OM \perp BO$，且 B 与 A 位于直线 OM 的同侧．于是 $\cos\angle BOC=\cos(90^\circ+\angle MOC)=-\sin\angle MOC=-\dfrac{MC}{OC}=-\dfrac{1}{4}$．

在 ΔBOC 中，由余弦定理得

$$BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC}=\sqrt{10},$$

进而在 ΔABC 中，由正弦定理得 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{2R}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$．

8．设整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 满足 $a_{10}=3a_1,a_2+a_8=2a_5$，且

$$a_{i+1}\in\{1+a_i,2+a_i\},\ i=1,2,\cdots,9,$$

则这样的数列的个数为____________．

答案： 80．

解： 设 $b_i=a_{i+1}-a_i\in\{1,2\}(i=1,2,\cdots,9)$，则有

$$2a_1=a_{10}-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_9, \qquad ①$$

$$b_2+b_3+b_4=a_5-a_2=a_8-a_5=b_5+b_6+b_7. \qquad ②$$

用 t 表示 b_2,b_3,b_4 中值为 2 的项数．由②知，t 也是 b_5,b_6,b_7 中值为 2 的项数，其中 $t\in\{0,1,2,3\}$．因此 $b_2,b_3,\cdots,b_7$ 的取法数为 $(C_3^0)^2+(C_3^1)^2+(C_3^2)^2+(C_3^3)^2=20$．

取定 $b_2,b_3,\cdots,b_7$ 后，任意指定 b_8,b_9 的值，有 $2^2=4$ 种方式．

最后由①知，应取 $b_1\in\{1,2\}$ 使得 $b_1+b_2+\cdots+b_9$ 为偶数，这样的 b_1 的取法是唯一的，并且确定了整数 a_1 的值，进而数列 $b_1,b_2,\cdots,b_9$ 唯一对应一个满足条件的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$．

综上可知，满足条件的数列的个数为 $20\times4=80$．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（**本题满分 16 分**）已知定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|, & 0<x\le 9,\\ 4-\sqrt{x}, & x>9.\end{cases}$$

设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 abc 的取值范围．

解： 不妨假设 $a<b<c$．由于 $f(x)$ 在 $(0,3]$ 上严格递减，在 $[3,9]$ 上严格递增，在 $[9,+\infty)$ 上严格递减，且 $f(3)=0,\ f(9)=1$，故结合图像可知

$$a\in(0,3),\quad b\in(3,9),\quad c\in(9,+\infty),$$

并且 $f(a)=f(b)=f(c)\in(0,1)$．　…………………4 分

由 $f(a)=f(b)$ 得

$$1-\log_3 a=\log_3 b-1,$$

即 $\log_3 a+\log_3 b=2$，因此 $ab=3^2=9$．于是 $abc=9c$．　…………………8 分

又

$$0<f(c)=4-\sqrt{c}<1,$$ ……………………12 分

故 $c\in(9,16)$．进而 $abc=9c\in(81,144)$．

所以，abc 的取值范围是 $(81,\ 144)$．……………………16 分

注：对任意的 $r\in(81,\ 144)$，取 $c_0=\dfrac{r}{9}$，则 $c_0\in(9,16)$，从而 $f(c_0)\in(0,1)$．过点 $(c_0,\ f(c_0))$ 作平行于 x 轴的直线 l，则 l 与 $f(x)$ 的图像另有两个交点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$（其中 $a\in(0,\ 3),\ b\in(3,9)$），满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，并且 $ab=9$，从而 $abc=r$．

10．**（本题满分 20 分）**已知实数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ 满足：对任意正整数 n，有 $a_n(2S_n-a_n)=1$，其中 S_n 表示数列的前 n 项和．证明：

(1) 对任意正整数 n，有 $a_n<2\sqrt{n}$；

(2) 对任意正整数 n，有 $a_na_{n+1}<1$．

证明：(1) 约定 $S_0=0$．由条件知，对任意正整数 n，有

$$1=a_n(2S_n-a_n)=(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=S_n^2-S_{n-1}^2,$$

从而 $S_n^2=n+S_0^2=n$，即 $S_n=\pm\sqrt{n}$（当 $n=0$ 时亦成立）．……………………5 分

显然，$a_n=S_n-S_{n-1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$．……………………10 分

(2) 仅需考虑 a_n,a_{n+1} 同号的情况．不失一般性，可设 a_n,a_{n+1} 均为正（否则将数列各项同时变为相反数，仍满足条件），则 $S_{n+1}>S_n>S_{n-1}>-\sqrt{n}$，故必有

$$S_n=\sqrt{n},\ S_{n+1}=\sqrt{n+1},$$

此时

$$a_n=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1},a_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

从而

$$a_na_{n+1}<(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1.$$

……………………20 分

11．**（本题满分 20 分）**在平面直角坐标系 xOy 中，设 AB 是抛物线 $y^2=4x$ 的过点 $F(1,0)$ 的弦，ΔAOB 的外接圆交抛物线于点 P（不同于点 $O,\ A,\ B$）．若 PF 平分 $\angle APB$，求 $|PF|$ 的所有可能值．

解：设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right),P\left(\dfrac{y_3^2}{4},y_3\right)$，由条件知 y_1,y_2,y_3 两两不等且非零．

设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，与抛物线方程联立可得 $y^2-4ty-4=0$，故

$$y_1y_2=-4. \qquad ①$$

注意到 ΔAOB 的外接圆过点 O，可设该圆的方程为 $x^2+y^2+dx+ey=0$，与 $x=\dfrac{y^2}{4}$ 联立得，$\dfrac{y^4}{16}+\left(1+\dfrac{d}{4}\right)y^2+ey=0$．该四次方程有 $y=y_1,y_2,y_3,0$ 这四个不

同的实根，故由韦达定理得 $y_1+y_2+y_3+0=0$，从而

$$y_3=-(y_1+y_2).\qquad ②$$

……………………5 分

因 PF 平分 $\angle APB$，由角平分线定理知，$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|FA|}{|FB|}=\dfrac{|y_1|}{|y_2|}$，结合①、②，有

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{|PA|^2}{|PB|^2}=\frac{\left(\dfrac{y_3^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{4}\right)^2+(y_3-y_1)^2}{\left(\dfrac{y_3^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}\right)^2+(y_3-y_2)^2}=\frac{\left((y_1+y_2)^2-y_1^2\right)^2+16(2y_1+y_2)^2}{\left((y_1+y_2)^2-y_2^2\right)^2+16(2y_2+y_1)^2}$$

$$=\frac{(y_2^2-8)^2+16(4y_1^2+y_2^2-16)}{(y_1^2-8)^2+16(4y_2^2+y_1^2-16)}=\frac{y_2^4+64y_1^2-192}{y_1^4+64y_2^2-192},$$

……………………10 分

即 $y_1^6+64y_1^2y_2^2-192y_1^2=y_2^6+64y_2^2y_1^2-192y_2^2$，故

$$(y_1^2-y_2^2)(y_1^4+y_1^2y_2^2+y_2^4-192)=0.$$

当 $y_1^2=y_2^2$ 时，$y_2=-y_1$，故 $y_3=0$，此时 P 与 O 重合，与条件不符.

当 $y_1^4+y_1^2y_2^2+y_2^4-192=0$ 时，注意到①，有

$$(y_1^2+y_2^2)^2=192+(y_1y_2)^2=208.$$

……………………15 分

因 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}>8=|2y_1y_2|$，故满足①以及 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}$ 的实数 y_1, y_2 存在，对应可得满足条件的点 A, B．此时，结合①、②知

$$|PF|=\frac{y_3^2}{4}+1=\frac{(y_1+y_2)^2+4}{4}=\frac{y_1^2+y_2^2-4}{4}=\frac{\sqrt{208}-4}{4}=\sqrt{13}-1.$$

……………………20 分

2018 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、（本题满分 40 分） 设 n 是正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, A, B$ 均为正实数，满足 $a_i \le b_i,\ a_i \le A,\ i = 1, 2, \cdots, n$，且 $\dfrac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \dfrac{B}{A}$．

证明：$\dfrac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} \le \dfrac{B+1}{A+1}$．

证明：由条件知，$k_i = \dfrac{b_i}{a_i} \ge 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$．记 $\dfrac{B}{A} = K$，则 $\dfrac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \dfrac{B}{A}$ 化为 $k_1 k_2 \cdots k_n \le K$．要证明

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i + 1}{a_i + 1} \le \frac{KA+1}{A+1}. \qquad ①$$

对 $i = 1, 2, \cdots, n$，由于 $k_i \ge 1$ 及 $0 < a_i \le A$ 知，

$$\frac{k_i a_i + 1}{a_i + 1} = k_i - \frac{k_i - 1}{a_i + 1} \le k_i - \frac{k_i - 1}{A+1} = \frac{k_i A + 1}{A+1}.$$

结合 $K \ge k_1 k_2 \cdots k_n$ 知，为证明①，仅需证明当 $A > 0,\ k_i \ge 1\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，有

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{k_i A + 1}{A+1} \le \frac{k_1 k_2 \cdots k_n A + 1}{A+1}. \qquad ②$$

…………………20 分

对 n 进行归纳．当 $n = 1$ 时，结论显然成立．

当 $n = 2$ 时，由 $A > 0, k_1, k_2 \ge 1$ 可知

$$\frac{k_1 A + 1}{A+1} \cdot \frac{k_2 A + 1}{A+1} - \frac{k_1 k_2 A + 1}{A+1} = -\frac{A(k_1 - 1)(k_2 - 1)}{(A+1)^2} \le 0, \qquad ③$$

因此 $n = 2$ 时结论成立．…………………30 分

设 $n = m$ 时结论成立，则当 $n = m+1$ 时，利用归纳假设知，

$$\prod_{i=1}^{m+1} \frac{k_i A + 1}{A+1} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{k_i A + 1}{A+1} \right) \cdot \frac{k_{m+1} A + 1}{A+1} \le \frac{k_1 k_2 \cdots k_m A + 1}{A+1} \cdot \frac{k_{m+1} A + 1}{A+1}$$

$$\le \frac{k_1 k_2 \cdots k_{m+1} A + 1}{A+1},$$

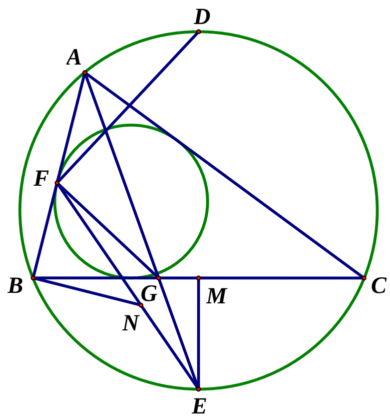
最后一步是在③中用 $k_1 k_2 \cdots k_m, k_{m+1}$（注意 $k_1 k_2 \cdots k_m \ge 1,\ k_{m+1} \ge 1$）分别代替 k_1, k_2．从而 $n = m+1$ 时结论成立．

由数学归纳法可知，②对所有正整数 n 成立，故命题得证．

…………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图，ΔABC 为锐角三角形，$AB<AC$，M 为 BC 边的中点，点 D 和 E 分别为 ΔABC 的外接圆 $\overset{\frown}{BAC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，F 为 ΔABC 的内切圆在 AB 边上的切点，G 为 AE 与 BC 的交点，N 在线段 EF 上，满足 $NB\perp AB$.

证明：若 $BN=EM$，则 $DF\perp FG$.**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：由条件知，DE 为 ΔABC 外接圆的直径，$DE\perp BC$ 于 M，$AE\perp AD$.

记 I 为 ΔABC 的内心，则 I 在 AE 上，$IF\perp AB$.

由 $NB\perp AB$ 可知

$$\angle NBE=\angle ABE-\angle ABN=(180^\circ-\angle ADE)-90^\circ$$
$$=90^\circ-\angle ADE=\angle MEI. \qquad ①$$

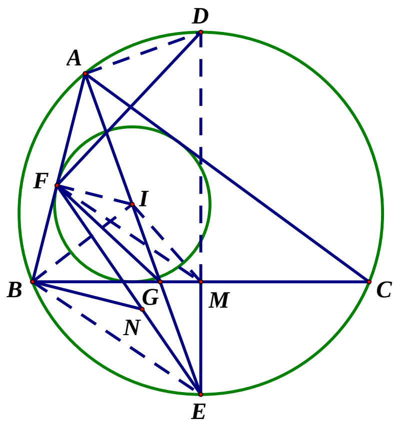
…………………10 分

又根据内心的性质，有

$$\angle EBI=\angle EBC+\angle CBI=\angle EAC+\angle ABI=\angle EAB+\angle ABI=\angle EIB,$$

从而 $BE=EI$.

结合 $BN=EM$ 及①知，$\Delta NBE\cong\Delta MEI$. …………………20 分



于是 $\angle EMI=\angle BNE=90^\circ+\angle BFE=180^\circ-\angle EFI$，故 E,F,I,M 四点共圆.

进而可知 $\angle AFM=90^\circ+\angle IFM=90^\circ+\angle IEM=\angle AGM$，从而 A,F,G,M 四点共圆. …………………30 分

再由 $\angle DAG=\angle DMG=90^\circ$ 知，A,G,M,D 四点共圆，所以 A,F,G,M,D 五点共圆．从而 $\angle DFG=\angle DAG=90^\circ$，即 $DF\perp FG$. …………………40 分

三、（本题满分 50 分）设 n, k, m 是正整数，满足 $k \geq 2$，且 $n \leq m < \frac{2k-1}{k} n$．设 A 是 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的 n 元子集．证明：区间 $\left(0, \frac{n}{k-1}\right)$ 中的每个整数均可表示为 $a-a'$，其中 $a, a' \in A$．

证明：用反证法．假设存在整数 $x \in \left(0, \frac{n}{k-1}\right)$ 不可表示为 $a-a'$，$a, a' \in A$．作带余除法 $m = xq + r$，其中 $0 \leq r < x$．将 $1, 2, \cdots, m$ 按模 x 的同余类划分成 x 个公差为 x 的等差数列，其中 r 个等差数列有 $q+1$ 项，$x-r$ 个等差数列有 q 项．由于 A 中没有两数之差为 x，故 A 不能包含以 x 为公差的等差数列的相邻两项．从而

$$n = |A| \leq r\left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil + (x-r)\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil = \begin{cases} x \cdot \frac{q+1}{2}, & 2 \nmid q, \\ x \cdot \frac{q}{2} + r, & 2 \mid q, \end{cases} \quad ①$$

这里 $\lceil \alpha \rceil$ 表示不小于 α 的最小整数．　　　　　　…………………20 分

由条件，我们有

$$n > \frac{k}{2k-1} m = \frac{k}{2k-1}(xq+r). \quad ②$$

又 $x \in \left(0, \frac{n}{k-1}\right)$，故

$$n > (k-1)x. \quad ③$$

情形一：q 是奇数．则由①知，

$$n \leq x \cdot \frac{q+1}{2}. \quad ④$$

结合②，④可知，$x \cdot \frac{q+1}{2} \geq n > \frac{k}{2k-1}(xq+r) \geq \frac{k}{2k-1} xq$，从而 $q < 2k-1$．再由 q 是奇数可知，$q \leq 2k-3$，于是

$$n \leq x \cdot \frac{q+1}{2} \leq (k-1)x,$$

与③矛盾．

情形二：q 是偶数．则由①知，

$$n \leq x \cdot \frac{q}{2} + r. \quad ⑤$$

结合②，⑤可知，$x \cdot \frac{q}{2} + r \geq n > \frac{k}{2k-1}(xq+r)$，从而 $\frac{xq}{2(2k-1)} < \frac{k-1}{2k-1} r < \frac{(k-1)x}{2k-1}$，故 $q < 2(k-1)$．再由 q 是偶数可知，$q \leq 2k-4$，于是

$$n \leq x \cdot \frac{q}{2} + r \leq (k-2)x + r < (k-1)x,$$

与③矛盾．

综上可知，反证法假设不成立，结论获证．　　　　　　…………………50 分

四、（本题满分 50 分） 数列$\{a_n\}$定义如下：a_1是任意正整数，对整数$n\ge1$，a_{n+1}是与$\sum_{i=1}^{n}a_i$互素，且不等于$a_1,\cdots,a_n$的最小正整数．证明：每个正整数均在数列$\{a_n\}$中出现．

证明：显然$a_1=1$或$a_2=1$．下面考虑整数$m>1$，设m有k个不同素因子，我们对k归纳证明m在$\{a_n\}$中出现．记$S_n=a_1+\cdots+a_n$，$n\ge1$．

$k=1$时，m是素数方幂，设$m=p^{\alpha}$，其中$\alpha>0$，p是素数．假设m不在$\{a_n\}$中出现．由于$\{a_n\}$各项互不相同，因此存在正整数N，当$n\ge N$时，都有$a_n>p^{\alpha}$．若对某个$n\ge N$，$p\nmid S_n$，那么p^{α}与S_n互素，又$a_1,\cdots,a_n$中无一项是p^{α}，故由数列定义知$a_{n+1}\le p^{\alpha}$，但是$a_{n+1}>p^{\alpha}$，矛盾！

因此对每个$n\ge N$，都有$p\mid S_n$．但由$p\mid S_{n+1}$及$p\mid S_n$知$p\mid a_{n+1}$，从而a_{n+1}与S_n不互素，这与a_{n+1}的定义矛盾．　　　　　　　　　　　　…………………10 分

假设$k\ge2$，且结论对$k-1$成立．设m的标准分解为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$．假设$m$不在$\{a_n\}$中出现，于是存在正整数$N'$，当$n\ge N'$时，都有$a_n>m$．取充分大的正整数$\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$，使得

$$M=p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}>\max_{1\le n\le N'}a_n .$$

我们证明，对$n\ge N'$，有$a_{n+1}\ne M$．　　　　　　　　　　　　…………………20 分

对任意$n\ge N'$，若S_n与$p_1p_2\cdots p_k$互素，则m与S_n互素，又m在$a_1,\cdots,a_n$中均未出现，而$a_{n+1}>m$，这与数列的定义矛盾．因此我们推出：

$$\text{对任意 } n\ge N'，\ S_n \text{ 与 } p_1p_2\cdots p_k \text{ 不互素．} \qquad (*)$$

情形 1．若存在$i\,(1\le i\le k-1)$，使得$p_i\mid S_n$，因$(a_{n+1},S_n)=1$，故$p_i\nmid a_{n+1}$，从而$a_{n+1}\ne M$（因$p_i\mid M$）．　　　　　　　　　　　　…………………30 分

情形 2．若对每个$i\,(1\le i\le k-1)$，均有$p_i\nmid S_n$，则由$(*)$知必有$p_k\mid S_n$．于是$p_k\nmid a_{n+1}$，进而$p_k\nmid S_n+a_{n+1}$，即$p_k\nmid S_{n+1}$．故由$(*)$知，存在$i_0\,(1\le i_0\le k-1)$，使得$p_{i_0}\mid S_{n+1}$，再由$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$及前面的假设$p_i\nmid S_n(1\le i\le k-1)$，可知$p_{i_0}\nmid a_{n+1}$，故$a_{n+1}\ne M$．　　　　　　　　　　　　…………………40 分

因此对$n\ge N'+1$，均有$a_n\ne M$，而$M>\max_{1\le i\le N'}a_n$，故M不在$\{a_n\}$中出现，这与归纳假设矛盾．因此，若m有k个不同素因子，则m一定在$\{a_n\}$中出现．

由数学归纳法知，所有正整数均在$\{a_n\}$中出现．　　　　　　…………………50 分