2013 年全国高中数学联合竞赛（B 卷）

一试

考试时间： 2013 年 10 月 13 日上午 8:00 至 9:20

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）

1. 已知锐角三角形的三条边长都是整数，其中两条边长分别为 3 和 4，则第三条边的边长为 ____.

2. 设 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位，则 $i+2i^2+3i^3+\cdots+2013i^{2013}=$____.

3. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A, 2-x^2\notin A\}$，则集合 B 中所有元素的和为 ____.

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径是 ____.

5. 在区间 $[0,\pi]$ 中，方程 $\sin 12x=x$ 的解的个数为 ____.

6. 定义在实数上的函数 $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{1+x+x^2}}(x\in R)$ 的最小值是 ____.

7. 设 a,b 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 1$，则 ab 的最大值为 ____.

8. 将正九边形的每个顶点等概率地涂上红、蓝两种颜色之一，则存在三个同色的顶点构成锐角三角形的概率为 ____.

二、解答题（本大题共 3 小题，共 56 分）

9. （16 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_n=2(n+a_{n-1})$，$n=2,3,\cdots$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

10. （20 分）假设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$，证明

$$a+b+c\le a^2+b^2+c^2.$$

11. （20 分）在平面直角坐标系 xOy 内，点 F 的坐标为 $(1,0)$，点 A,B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$|\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FB}|=4\sqrt{3}$，求 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的值.

2013 年全国高中数学联合竞赛（B 卷）

加试

考试时间： 2013 年 10 月 13 日上午 9:40 至 12:10

一、（40 分）对任意的正整数 n，证明不存在三个奇数 x, y, z 满足如下的方程：

$$(x+y)^n+(y+z)^n=(x+z)^n.$$

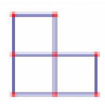
二、（40 分）a）设 A, B, C 依次是直线 l 上的三个不同的点，证明存在 l 外一点 P，使得 $\angle APB=\angle BPC$.

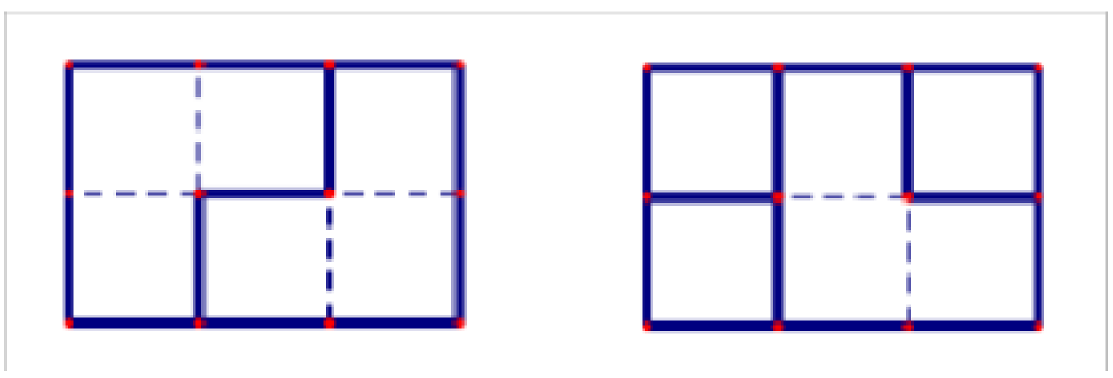
b）对于直线 l 上依次排列的任意四点 A, B, C, D，是否总存在 l 外一点 P，使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$？如果点 P 总存在，试写出证明；如果点 P 不一定存在，请举出反例.

三、（50 分）非负实数 x, y, z 满足 $x^2+y^2+z^2=10$，求

$$u=\sqrt{6-x^2}+\sqrt{6-y^2}+\sqrt{6-z^2}$$

的最大值和最小值.

四、（50 分）用若干单位小正方形和由三个单位小方格组成的  形“砖”铺满一个 $2\times n$ 的方格棋盘的所有不同可能铺法的数目是 T_n. 下面的图是 $n=3$ 时的两种不同的铺法：



a）求 T_{10}；并且 b）求 T_{2013} 的个位数.

2013 年全国高中数学联赛试题 (B 卷) 参考答案

说明：填空题只设 0 分和 8 分两档；我们仅对个别题提出了很粗的评分标准。其他各题的评分档次，请根据参考答案自行制定。特别要注意的是这仅仅是一个参考答案，如果学生实际的解答方法与这里的解答方法不同，只要思路合理、步骤正确，评阅时可根据实际情况制定评分档次标准。

第一试

填空题：

1. 已知锐角三角形的三条边长都是整数，其中两条边长分别为 3 和 4，则第三条边的边长为 $\underline{3 \text{ 或 } 4}$.

解答：设第三条边的的长度为 c。因为是锐角三角形，所以

$$c^2 > 4^3 - 3^3 > 2^2,\ \text{而且}\ c^2 < 4^2 + 3^2 = 5^2.$$

故 $3 \leqslant c \leqslant 4$。

当 $c = 3, 4$ 的时候，不难看出，所得到的三角形是锐角三角形。

2. 设 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，则 $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 2013i^{2013} = \underline{1006 + 1007i}$.

解答：显然

$$i + 2i^2 + \cdots + 2013i^{2013} = (\underbrace{-2 + 4 - 6 + 8 - \cdots - 2010 + 2012}_{1006\text{项}}) +$$

$$+ (1 \underbrace{-3 + 5 - 7 + \cdots - 2011 + 2013}_{1006\text{项}})i = 1006 + 1007i$$

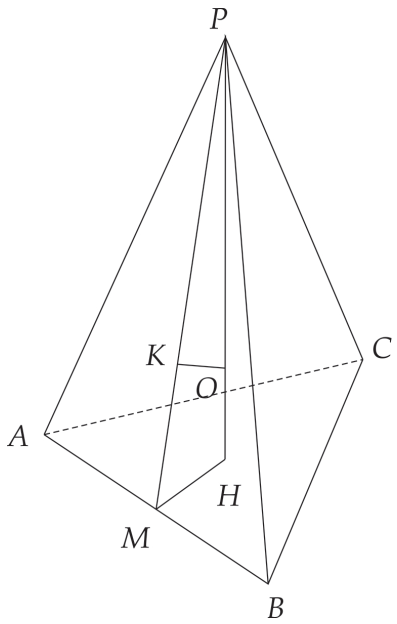
3. 设集合 $A = \{2, 0, 1, 3\}$，集合 $B = \{x | -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$，则集合 B 中所有元素的和为 $\underline{-5}$.

解答：首先 $B \subset \{-2, 0, -1, -3\}$。根据条件 $2 - x^2 \notin A$，我们看到 $B = \{-2, -3\}$，所以 B 中元素之和为 -5。

4. 已知正三棱锥 $P - ABC$ 的底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径是 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{6}}$.

解答：如图所示：球心 O 在底面 ABC 和侧面 ABP 上的射影分别为 H 和 K，AB 的中点为 M，内切球半径为 r，则 P, K, M 共线，$\angle PHM = \angle PKO = \frac{\pi}{2}$，且

$$OH = OK = r, PO = PH - OH = \sqrt{2} - r.$$



$MH = \frac{\sqrt{3}}{6}AB = \frac{\sqrt{3}}{6}, PM = \sqrt{MH^2 + PH^2} = \sqrt{\frac{1}{12} + 2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$。于是

$$\frac{r}{\sqrt{2} - r} = \frac{OK}{PO} =\sim \angle KPO = \frac{MH}{PM} = \frac{1}{5},$$

解得 $r = \sqrt{2}/6$。

5. 在区间 $[0, \pi)$ 中，方程 $\sin 12x = x$ 解的个数为 $\underline{4}$.

解答：注意到当 $x > 1$ 以后，我们有 $|\sin 12x| \leqslant 1 < x$，所以方程不再有解。

在区间 $[0, 1]$ 上，$3\pi < 12 < 4\pi$，正弦函数 $\sin 12x$ 完成了 $3/2$ 个周期，未满 2 个周期。通过作图立即可以看出这个方程有 4 个解。

6. 定义在实数上的函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{1+x+x^2}}$ 的最小值是 $\underline{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

解答：$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$，而 $|\sin \pi x| \leqslant 1$，所以

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin \pi x}{\sqrt{1 + x + x^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

在 $x = -\frac{1}{2}$ 的时候，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

所以，$f(x)$ 的最小值是 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

7. 设 a, b 为实数，函数 $f(x) = ax + b$ 满足：对任意 $x \in [0, 1]$，$|f(x)| \leqslant 1$，则 ab 的最大值为 $\underline{\frac{1}{4}}$.

解答：容易看出 $a = f(1) - f(0), b = f(0)$，则

$$ab = f(1)(f(1) - f(0)) = -\left(f(0) - \frac{1}{2}f(1)\right)^2 + \frac{1}{4}(f(1))^2 \leqslant \frac{1}{4}(f(1))^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

当 $2f(0)=f(1)=\pm 1$，即 $a=b=\pm\frac{1}{2}$ 时，$ab=\frac{1}{4}$。

8. 将正九边形的每个顶点等概率地涂上红、蓝两种颜色之一，则存在三个同色的顶点构成锐角三角形的概率为 $\frac{247}{256}$.

解答：若同一种颜色的顶点构成的凸多边形内部包含正九边形的外接圆圆心，那么存在这种颜色的三个顶点，其构成的三角形也包含圆心，从而这个三角形是锐角三角形。反之，如果某种颜色的顶点含有一个锐角三角形的顶点，那么他们所生成凸多边形就包含了正九边形外接圆圆心。这样一来，如果红蓝两色的顶点生成的凸多边形都不包括圆心的话，那么这两种颜色的顶点分别落在外接圆的半圆中。这种情况发生的仅有的可能是红点是连续的 4 个顶点，或者是连续的 5 个顶点，他们各有 9 种情况。所以我们要求的概率就是

$$P=1-\frac{18}{2^9}=\frac{247}{256}.$$

解答题：

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2, a_n=2(n+a_{n-1}), n=2,3,\ldots$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解答：$a_1=2, a_2=2(2+2)=8$。当 $n\geqslant 3$ 时，我们有

$$a_n-2a_{n-1}=2n, a_{n-1}-2a_{n-2}=2(n-1).$$

两式相减，得 $a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=2$，即

$$a_n-a_{n-1}+2=2(a_{n-1}-a_{n-2}+2).$$

令 $b_n=a_n-a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，则 $\{b_n\}_{n\geqslant 2}$ 是一个公比为 2 的等比数列，且 $b_2=8-2+2=8$，于是

$$b_n=2^{n-2}b_2=2^{n+1}.$$

即

$$a_n-a_{n-1}+2=2^{n+1}.$$

于是

$$a_{n-1}-a_{n-2}+2=2^n,$$

$$\cdots$$

$$a_2-a_1+2=2^3$$

将上面 $n-1$ 个等式相加，得

$$a_n=a_1+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-2(n-1)=2^{n+1}-2(n+1).$$

注意到 $n=1,2$ 的时候，这个公式仍然适用。所以这就是所求的通项公式。

10. 假设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$，证明

$$a+b+c \leqslant a^2+b^2+c^2.$$

解答一：根据柯西不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

再由几何平均大于等于算术平均，

$$a+b+c \geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}}=3.$$

所以

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geqslant a+b+c.$$

解答二：由于 $abc=1$，所以 $a=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$。根据几何平均大于等于算术平均，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{2a^2}{3}+\frac{b^2}{6}+\frac{c^2}{6} &= \frac{1}{6}(a^2+a^2+a^2+a^2+b^2+c^2)\\ &\geqslant (a^8b^2c^2)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=a.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{6}+\frac{2b^2}{3}+\frac{c^2}{6} \geqslant b\\ \frac{a^2}{6}+\frac{b^2}{6}+\frac{2c^2}{3} \geqslant c\end{aligned}$$

将上面三式相加，我们就得到

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant a+b+c.$$

11. 在平面直角坐标系 xOy 内，点 F 的坐标为 $(1,0)$，点 A,B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4, |\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FB}|=4\sqrt{3}$，求 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的值。

解答：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1=\frac{y_1^2}{4},x_2=\frac{y_2^2}{4}$，故

$$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2.$$

即 $\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故 $y_1y_2=-8$。所以

$$x_1x_2=\frac{(-8)^2}{16}=4.$$

注意到 $F(1,0)$ 是抛物线的焦点，所以

$$x_1-x_2=(x_1+1)-(x_2+1)=|\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FB}|=4\sqrt{3}.$$

显然 x_1, x_2 都是非负的，故

$$x_1 + x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4 \times 4} = 8.$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} &= (x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1 + x_2) + 1 = -4 - 8 + 1 = -11\end{aligned}$$

第二试

1. 对任意的正整数 n，证明不存在三个奇数 x, y, z 满足如下的方程：

$$(x + y)^n + (y + z)^n = (x + z)^n.$$

解答：假定对于某一个 n，存在 $x = 2j + 1, y = 2k + 1, z = 2l + 1$，满足

$$(2j + 2k + 2)^n + (2k + 2l + 2)^n = (2j + 2l + 2)^n.$$

那么，整数 i, j, k 就满足方程

$$(j + k + 1)^n + (k + l + 1)^n = (j + l + 1)^n.$$

由于 $m^n \equiv m \mod 2$。所以

$$j + k + 1 + k + l + 1 \equiv j + l + 1 \mod 2.$$

也就是说 $j + l \equiv j + l + 1 \mod 2$。这是一个矛盾，这个矛盾说明我们假定存在这样的 x, y, z 是错误的。从而证明了我们需要的结论。

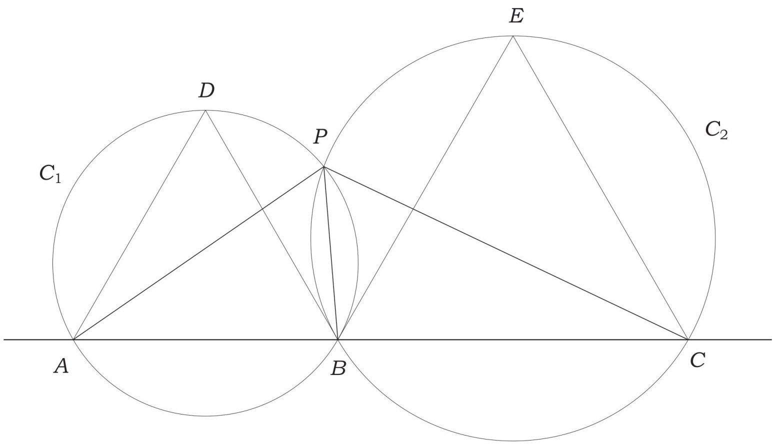
注：我们这里用的是 $\mod 2$ 的写法，实际上 $\mod 2$ 的说法就是讨论奇偶性。

2. a) 设 A, B, C 依次是直线 ℓ 上的三个不同的点，证明存在 ℓ 外一点 P，使得 $\angle APB = \angle BPC$。

b) 对于直线 ℓ 上依次排列的任意四点 A, B, C, D，是否总存在 ℓ 外一点 P，使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$？如果点 P 总存在，试写出证明；如果点 P 不一定存在，请举出反例。

评分标准：a), b) 两个部分各占 20 分。

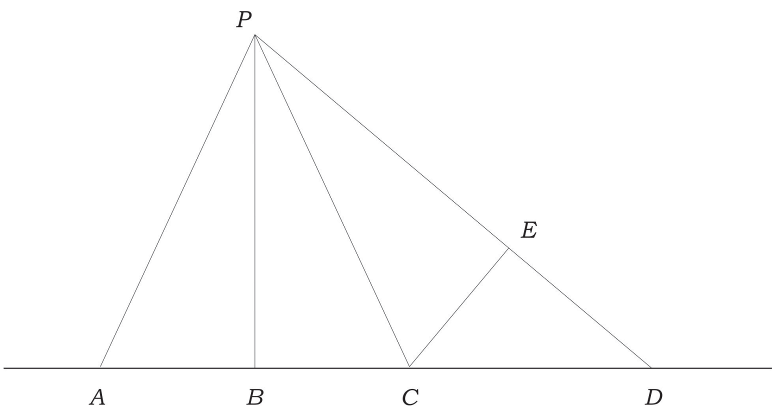
解答一：a) 如图，分别在线段 AB 和 BC 上作等边三角形 $\Delta ADB, \Delta BEC$，再作这两个等边三角形的外接圆 C_1, C_2，它们交两点 P, B，根据圆周角定理，我们就得到 $\angle APB = \frac{\pi}{3} = \angle BPC$。



b) 尽管有时候这样的依次四点 A, B, C, D 存在，但是在一般情况下，我们不能找到线外一点 P，使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$。接下来，我们来构造一个反例。

在直线 ℓ 上依次取四个不同的点 A, B, C, D，使得 $AB = BC \geqslant CD$。如果我们有线外一点 P，使得 $\angle APB = \angle BPC$ 的话，我们来证明 P 一定落在 ℓ 的过 B 点的垂线上。当然这一点有许多办法证明，我们考察 ΔAPC，PB 是顶角 P 的角平分线，所以 $AP/AB = PC/BC$。由于我们的做法 $AB = BC$，所以 $AP = PC$，这就证明了 P 在线段 AC 的垂直平分线上。

接下来证明 $\angle CPD \neq \angle BPC$。不然的话，假定它们相等，我们从 C 出发向直线 PD 作垂线，垂足为 E。容易看出 $\Delta BPC \equiv \Delta EPC$，从而 $BC = EC$。另一方面，我们在直角三角形 ΔCDE 中看，斜边 CD 大于直角边 EC。这样就有 $CD > BC$，这与我们一开始的作法 $BC < CD$ 矛盾，这个矛盾证明了我们的假设 $\angle CPD = \angle BPC$ 不可能发生，即 $\angle CPD \neq \angle BPC$。



解答二：a) 建立直角坐标系，使得 A, B, C 三点的坐标是 $(a, 0), (0, 0), (c, 0)$，其中 $a < 0 < c$。令 $P(x, y)$ 是线外一点，依次记直线 AP, BP, CP 的斜率为

$$k_A = \frac{y}{x-a}, k_B = \frac{y}{x}, k_C = \frac{y}{x-c}.$$

这样一来，我们就有

$$\tan\angle APB = \frac{k_B - k_A}{1 + k_A k_B} = \frac{-ay}{x^2+y^2-ax}, \tan\angle BPC = \frac{k_C - k_B}{1 + k_B k_C} = \frac{cy}{x^2+y^2-cx}.$$

等式 $\angle APB = \angle BPC$ 成立的充分必要条件是 $\tan\angle APB = \tan\angle BPC$，整理后得到一个二次方程 $(a+c)x^2 - 2acx + (a+c)y^2 = 0$。

当 $a+c=0$ 的时候，$x=0, y\neq 0$ (P 点不在 x–轴上) 就满足要求；如果 $a+c\neq 0$，那么圆周

$$\left(x - \frac{ac}{a+c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2$$

上除了与 x–轴的两个交点 $(0,0), (2ac/(a+c), 0)$ 外的其它点都满足要求。

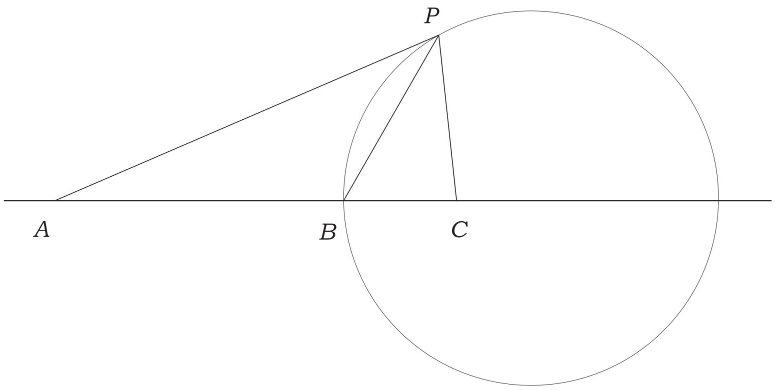
b) 在 x–轴依次取 A, B, C, D 为 $(-1,0), (0,0), (1,0), (2,0)$，根据上面的计算，所有使得 $\angle APB = \angle BPC$ 的点 P 落在 y–轴上；而所有使得 $\angle BP'C = \angle CP'D$ 的点 P' 则落在直线 $\ell = \{x = 1\}$ 上。直线 ℓ 与 y–轴没有交点，所以，对于这样选择的 A, B, C, D，不存在一个线外的 P，使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$。

解答三：我们利用阿波罗尼斯轨迹定理：到两定点的距离之比为定值的点的轨迹是一个圆，这个圆也叫做阿波罗尼斯圆。当这个比值为 1 的时候，阿波罗尼斯圆退化成连接两定点的线段的垂直平分线。解法二 a) 中给出的 P 点的轨迹，就是阿波罗尼斯圆。

a) 由阿波罗尼斯轨迹定理

$$\mathcal{C} = \left\{M; \frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BC}\right\}$$

是一个圆，任取 $\mathcal{C} - \ell$ 上的一个点 P，由于 $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{BC}$，所以 BP 是 $\angle APC$ 的角平分线，即 $\angle APB = \angle BPC$。



b) 我们来构造一个反例。在直线 ℓ 上依次取四个不同的点 A, B, C, D，使得 $AB < BC$ 而且 $BC > CD$。按照上面的做法，如果我们有线外一点 P，使得 $\angle APB = \angle BPC$，那么 BP 是 $\angle APC$ 的角平分线，所以 P 点落在阿波罗尼斯圆

$$\mathcal{C}_1 = \left\{M; \frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BC}\right\}$$

上。由于 $\frac{AB}{BC} \leqslant 1$，这个阿波罗尼斯圆在过 B 垂直于 ℓ 的垂线的 A 一侧。同样考虑线外一点 P'，满足 $\angle BP'C = \angle CP'D$，那么这个点 P' 一定落在另一个阿波罗尼斯圆

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ M; \frac{BM}{DM} = \frac{BC}{CD} \right\}$$

上，而这个圆在过 C 点垂直于 ℓ 的垂线的 D 一侧。注意到这两个阿波罗尼斯圆是没有交点的，所以这样的 A, B, C, D 就是一个反例。

3. 非负实数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$，求

$$u = \sqrt{6 - x^2} + \sqrt{6 - y^2} + \sqrt{6 - z^2}$$

的最大值和最小值。

解答：由柯西不等式

$$\left(\sqrt{6 - x^2} + \sqrt{6 - y^2} + \sqrt{6 - z^2} \right)^2 \leqslant 3 \left((6 - x^2) + (6 - y^2) + (6 - z^2) \right) = 24,$$

所以

$$\sqrt{6 - x^2} + \sqrt{6 - y^2} + \sqrt{6 - z^2} \leqslant 2\sqrt{6}.$$

等号成立当且仅当 $x = y = z = \frac{\sqrt{30}}{3}$。所以 u 的最大值是 $2\sqrt{6}$。

我们接下来考虑 u 的最小值。不妨假定 $x \leqslant y \leqslant z$，则 $x^2 \leqslant \frac{10}{3}$。对于非负实数 a, b，我们有不等式 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a + b}$，所以

$$u \geqslant \sqrt{6 - x^2} + \sqrt{(6 - y^2) + (6 - z^2)} = \sqrt{6 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}.$$

令 $t = \sqrt{6 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}$，$x^2 \in [0, 10/3]$，则 $t \geqslant 0$，于是

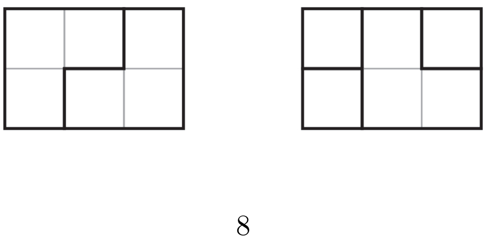
$$t^2 = 8 + 2\sqrt{(6 - x^2)(2 + x^2)} = 8 + 2\sqrt{-(x^2 - 2)^2 + 16}.$$

当 $x^2 = 0$ 的时候，t^2 取到最小值 $8 + 4\sqrt{3}$，从而

$$u \geqslant \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

在 $x = 0, y = 2, z = \sqrt{6}$ 的时候，等号成立。故 u 的最小值为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$。

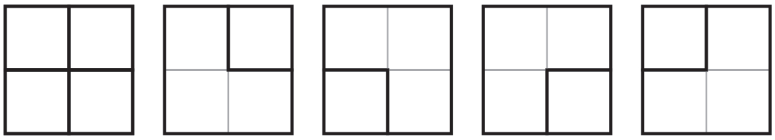
4. 用若干单位小方格和由三个单位小方格组成的  形“砖”铺满一个 $2 \times n$ 的方格棋盘的所有不同可能铺法的数目是 T_n。下面的图是 $n = 3$ 时的两种不同的铺法：



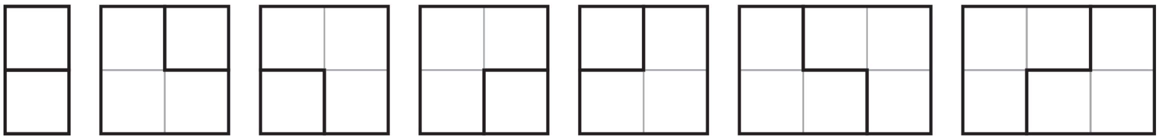
a) 求 T_{10}；并且 b) 求 T_{2013} 的个位数。

评分标准：找到 T_n 的递归关系是最关键的部分，可以得 30 分。

解答：显然 $T_1=1$，而且 $T_2=5$：



对于 $n\geqslant 3$ 的时候，注意到如果我们从左向右地铺 $2\times n$ 的方格棋盘，无论哪一种铺法，至多铺到 2×3，我们一定会完成一个 $2\times k,(k=1,2,3)$ 的矩形。这样一来，T_n 的计算就可以转化为 T_{n-1},T_{n-2},T_{n-3} 的计算。又由于下面的图：



这样一来，我们就得到一般的递归关系：

$$T_n=T_{n-1}+4T_{n-2}+2T_{n-3}.$$

a) 利用 $T_3=T_2+4T_1+2=11$ 和上面的递归关系，我们有 $T_4=33,T_5=87,T_6=241,T_7=655,T_8=1793,T_9=4895,T_{10}=13377$。

b) 注意到 T_n 与 T_{n-1} 有相同的奇偶性，所以每一个 T_n 都是奇数。我们可以 $\mod 5$ 计算 T_{2013}。在 $\mod 5$ 的情况下：

$$\begin{array}{cccccccccc}
T_1\equiv 1 & T_2\equiv 0 & T_3\equiv 1 & T_4\equiv 3 & T_5\equiv 2 & T_6\equiv 1 & T_7\equiv 0 & T_8\equiv 3 & T_9\equiv 0 & T_{10}\equiv 2\\
T_{11}\equiv 3 & T_{12}\equiv 1 & T_{13}\equiv 2 & T_{14}\equiv 2 & T_{15}\equiv 2 & T_{16}\equiv 4 & T_{17}\equiv 1 & T_{18}\equiv 1 & T_{19}\equiv 3 & T_{20}\equiv 4\\
T_{21}\equiv 3 & T_{22}\equiv 0 & T_{23}\equiv 0 & T_{24}\equiv 1 & T_{25}\equiv 1 & T_{26}\equiv 0 & T_{27}\equiv 1 & \dots & &
\end{array}$$

也就是说，T_n 个位数的周期是 24。而 $2013\equiv 21 \mod 24$，这说明 T_{2013} 的个位数是 3，因为 $\mod 5$ 等于 3 的奇数一定 $\mod 10$ 等于 3。