2000 年全国高中数学联赛试题

第一试

（10 月 15 日上午 8:00-9:40）

1. 选择题

本题共有 6 小题，每题均给出（A）、（B）、（C）、（D）四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内，每小题选对得 6 分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得 0 分。

一、　设全集是实数，若 $A=\{x|\sqrt{\quad}\leqslant 0\}$，$B=\{x|10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ 是　　（　）

(A)　$\{2\}$　　(B)　$\{-1\}$　　(C)　$\{x|x\leqslant 2\}$　　(D)　$\varnothing$

2. 设 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，且 $\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的取值范围是　　（　）

(A)　$(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{3})$，$k\in Z$　　(B)　$(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3})$，$k\in Z$

(C) $(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi)$，$k\in Z$

(D) $(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3})\cup(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi)$，$k\in Z$

3. 已知点 A 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左顶点，点 B 和点 C 在双曲线的右分支上，$\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\triangle ABC$ 的面积是　　（　）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　(C) $3\sqrt{3}$　　(D) $6\sqrt{3}$

一、　给定正数 p, q, a, b, c，其中 $p\neq q$，若 p, a, q 是等比数列，p, b, c, q 是等差数列，则一元二次方程 $bx^2-2ax+c=0$　（　）

(A)无实根　　(B)有两个相等实根　　(C)有两个同号相异实根　　(D)有两个异号实根

一、　平面上整点（纵、横坐标都是整数的点）到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是

(A)　$\frac{\sqrt{34}}{170}$　　(B)　$\frac{\sqrt{34}}{85}$　　(C)　$\frac{1}{20}$　　(D)　$\frac{1}{30}$　（　）

一、　设 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$，则以 $\omega, \omega^3, \omega^7, \omega^9$ 为根的方程是　　（　）

(A)　$x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　(B)　$x^4-x^3+x^2-x+1=0$

(C)　$x^4-x^3-x^2+x+1=0$　　(D)　$x^4+x^3+x^2-x-1=0$

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上。

6、　arcsin(sin2000°)=__________.

7、 设 a_n 是 $(3-\sqrt{x})^n$ 的展开式中 x 项的系数（n=2, 3, 4, …），则

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n})=$________.

8、 等比数列 $a+\log_2 3, a+\log_4 3, a+\log_8 3$ 的公比是____________.

一、 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 中，记左焦点为 F，右顶点为 A，短轴上方的端点为 B. 若该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{\ }-1}{2}$，则 $\angle ABF$=_________.

9. 一个球与正四面体的六条棱都相切，若正四面体的棱长为 a，则这个球的体积是________.

10. 如果：(1) a, b, c, d 都属于 {1, 2, 3, 4}；(2) $a\neq b, b\neq c, c\neq d, d\neq a$；(3) a 是 a, b, c, d 中的最小值， 那么，可以组成的不同的四位数 $\overline{abcd}$ 的个数是________.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

11. 设 S_n=1+2+3+…+n, $n\in N$, 求 $f(n)=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值.

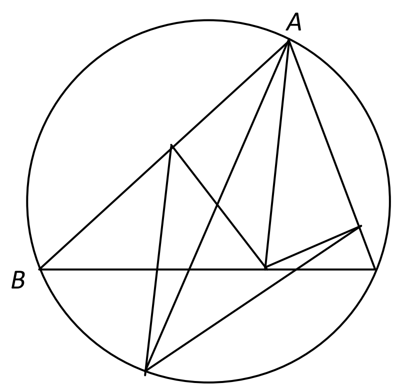
12. 若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 [a, b] 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 [a, b].

13. 已知 $C_0: x^2+y^2=1$ 和 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$。试问：当且仅当 a, b 满足什么条件时，对 C_1 上任意一点 P，均存在以 P 为顶点,与 C_0 外切,与 C_1 内接的平行四边形？并证明你的结论。

【加试】（10 月 15 日上午 10：00-12：00）

一.（本题满分 50 分）

如图，在锐角三角形 ABC 的 BC 边上有两点 E、F，满足 $\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$，$FN\perp AC$（M、N 是垂足），延长 AE 交三角形 ABC 的外接圆于 D. 证明：四边形 $AMDN$ 与三角形 ABC 的面积相等.



二.（本题满分 50 分）

设数列{a_n}和{b_n}满足，且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4 \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

证明 a_n（n=0，1，2，…）是完全平方数.

三.（本题满分 50 分）

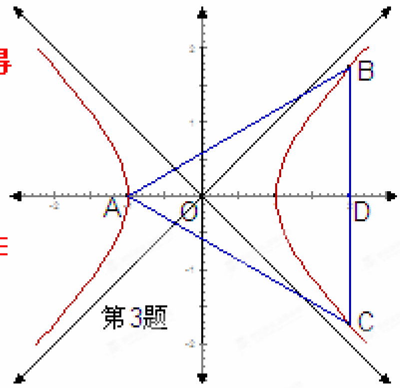
有 n 个人，已知他们中的任意两人至多通电话一次，他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的次数相等，都是 3^k 次，其中 k 是自然数，求 n 的所有可能值.

2000 年全国高中数学联合竞赛试题答案

1.【答案】D

【解析】由 $\sqrt{x-2}\le 2$ 得 x=2，故 A={2}；由 $10^{x^2-2}=10^x$ 得 $x^2-x-2=0$，故 B={-1，2}.所以 $A\cap\overline{B}=\phi$.

2.【答案】D



【解析】由 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$ 得 $\alpha\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),k\in Z$

从而有 $\frac{\alpha}{3}\in\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right),k\in Z$ ----------------①

又因为 $\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$，所以又有 $\frac{\alpha}{3}\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right),k\in Z$ ----------②

如上图所示，是①、②同时成立的公共部分为

$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi\right),k\in Z$.

3.【答案】C

【解析】如图所示，设 BD=t，则 OD=$\sqrt{3}$t-1，从而 B（$\sqrt{3}$t-1，t）满足方程 $x^2-y^2=1$，可以得到 t=$\sqrt{3}$,所以等边三角形，ΔABC 的面积是 $3\sqrt{3}$.

4.【答案】 A

【解析】由题意知 pq=a²，2b=p+c,2c=q+b $\Rightarrow b=\frac{2p+q}{3}$，$c=\frac{p+2q}{3}\Rightarrow$ bc=$\frac{2p+q}{3}\cdot\frac{p+2q}{3}\geqslant\sqrt[3]{p^2q}\cdot\sqrt[3]{pq^2}$=pq=a².因为 p≠q，故 bc> a²，方程的判别式 Δ= 4a² -4bc<0，因此，方程无实数根.

5.【答案】B

【解析】设整点坐标(m,n)，则它到直线 25x-15y+12=0 的距离为

$$d=\frac{|25m-15n+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|5(5m-3n)+12|}{5\sqrt{34}}$$

由于 m,n∈Z，故 5(5m-3n)是 5 的倍数，只有当 m=n=-1，时 5(5m-3n)=-10 与 12 的和的绝对值最小，其值为 2，从而所求的最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{85}$.

6.【答案】B

【解析】由 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{10}+i\sin\frac{2\pi}{10}$ 知，

ω，ω^2，ω^3，ω^4，ω^5，ω^6，ω^7，ω^8，ω^9，ω^{10}(=1)是 1 的 10 个 10 次方根.

从而有

$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)(x-\omega^7)(x-\omega^8)(x-\omega^9)(x-\omega^{10})=x^{10}-1$………①

由因 ω^2，ω^4，ω^6，ω^8，ω^{10} 是 1 的 5 个 5 次方根，

从而有

$(x-\omega^2)(x-\omega^4)(x-\omega^6)(x-\omega^8)(x-\omega^{10})=x^5-1$ ………②

①÷②得 $(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^5+1$ ………③

③的两边同除以 $(x-\omega^5)=x+1$，得

$(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^4-x^3+x^2-x+1$.

所以 ω，ω^3，ω^7，ω^9 为根的方程是 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

二、填空题（满分 54 分，每小题 9 分）

7.【答案】-20°

【解析】sin2000° =sin(5×360° +200°)=sin200° =-sin20°

故 arcsin(sin2000°)= arcsin(-sin20°)= -arcsin(sin20°)= -20°

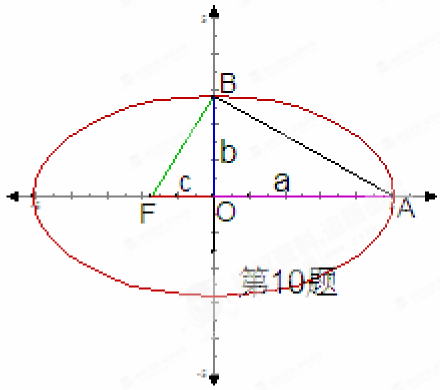
8.【答案】18

【解析】由二项式定理知，$a_n=C_n^2\cdot 3^{n-2}$，因此 $\frac{3^n}{a_n}=\frac{3^2\cdot 2}{n(n-1)}=18\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}18\left(1-\frac{1}{n}\right)=18.$$

9.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}=\frac{1}{3}$



第10题

10.【答案】90°

【解析】如图所示，由

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow$ **c²+ac−a²=0,**

$\cos\angle ABF=\frac{(a^2+b^2)+a^2-(c+a)^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$**=0**

⇒则∠ABF=90°．

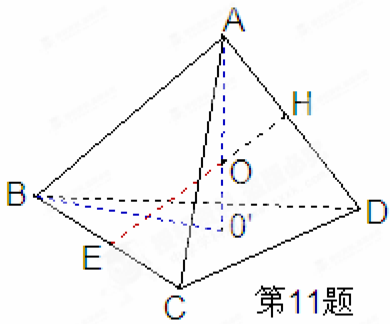
11.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$

【解析】如图，设球心为O，半径为r,体积为V，面BCD的中心为O₁，棱BC的中心点为E，

则 $AO_1=\sqrt{a^2-O_1B^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

由 $OB^2=O_1O^2+O_1B^2=(O_1B-OB)^2+O_1B^2$ **得**

$\frac{2}{3}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a\,OB+\frac{1}{3}a^2=0$，**故** $OB=\frac{3}{2\sqrt{6}}a\frac{\sqrt{6}}{4}a$,



第11题

于是 $r=OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}a$.

$V=\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{16\sqrt{2}}a^2=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

12.【答案】28

【解析】$\overline{abcd}$ 中恰有2个不中数字时，能组成 $C_4^2=6$ 个不中数字

$\overline{abcd}$ 中恰有3个不中数字时，能组成 $C_3^1C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1$=12+4=16 个不中数字

$\overline{abcd}$ 中恰有 4 个不中数字时，能组成 P_3^3=6 个不中数字

所以，符合要求的数字共有 6+16+6=28 个

13.【答案】 $\frac{1}{50}$

【解析】由已知，对任何 n∈N, 有 f（n)= $\frac{S_n}{(n+32)S_{N+1}}=\frac{S_n}{(n+32)(n+2)}$

$=\frac{n}{n^2+34n+64}=\frac{1}{n+34+\frac{64}{n}}$ **又因 n+**$\frac{64}{n}$**+34**$\geq 2\sqrt{n\cdot\frac{64}{n}}$**+34=50,**

故对任何 n∈N, 有 f（n)=$\frac{1}{n+34+\frac{64}{n}}\leq\frac{1}{50}$ **由于 f(8)=**$\frac{1}{50}$**,故 f(n)的最大值为**$\frac{1}{50}$

14. .【答案】所求区间为[1,3]或[-2-$\sqrt{17}$ $\frac{13}{4}$].

【解析】 化三种情况讨论区间[a,b].

7. 若 0≤a<b, 则 f (x)在[a, b] 上单调递减，故 f(a) =2b, f(b)=2a 于是有

$\begin{cases}2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}\\2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}\end{cases}$，解之得[a, b] = [1, 3],

(2)若 a <0 <b, f .(x)在[a, b] 上单调递增，在[0,b] 上单调递减，,

因此 f (x)在 x=0 处取最大值 2b 在 x=a 或 x=b 处取最小值

2a.故 2b=$\frac{13}{2}$,b=$\frac{13}{4}$.由于 a<0,

又 f(b)=-$\frac{1}{2}(\frac{13}{4})^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$

故 f(x)在 x=a 处取最小值 2a,即 2a=$\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$,

解得 a=-2-$\sqrt{17}$;于是得 [a,b]=[-2-$\sqrt{17}$,$\frac{13}{4}$].

8. 当 a<b≤0 时，f(x)在[a,b] 上单调递增，故 f(a)=2a, f(b)=2b,

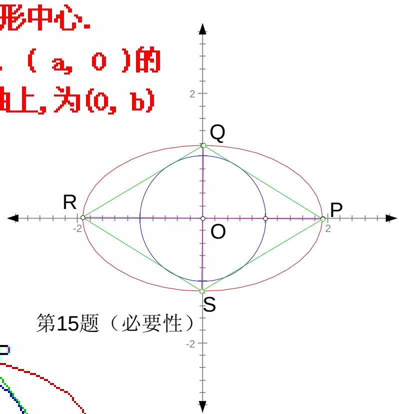
即 2a=-$\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$,2b=-$\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$.

由于方程$\frac{1}{2}x^2$+2x-$\frac{13}{2}$=0 的两根异号，故满足 a≺b≺0 的区间不存在.

综上所述，所求区间为[1,3]或[-2-$\sqrt{17}$ $\frac{13}{4}$].

15.【答案】所求条件为$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$=1.

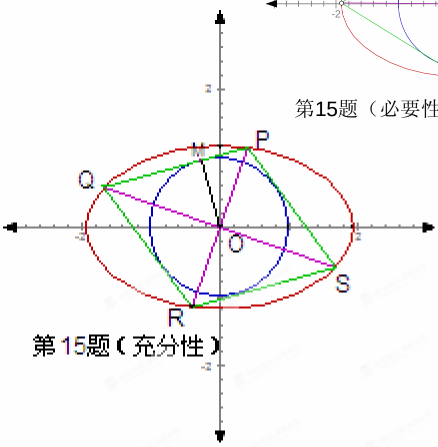
【解析】证明：必要性：易知，圆外切平行四边形一定是菱形，圆心即菱形中心.



第15题（必要性）

假设论成立,则对点(a, 0)，有(a, 0)为项点的菱形与 C_1内接,与 C_0外切. (a, 0)的相对顶点为(− a, 0),由于菱形的对角线互相垂直平分,另外两个顶点必在 y 轴上,为(0, b)和 (0, -b) .菱形一条边的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$=1,即 bx+ay=ab. 由于菱形与 C_0外切,

故必有 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b_2}}$=1,整理得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$=1. 必要性得证.



第15题（充分性）

充分性:设$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$=1,P 是 C_1上任意一点,过 P、O 作 C_1的弦 PR，再过 O 作与 PR 垂直的弦 QS，则 PQRS 为与 C_1内接菱形. 设 OP = r_1, OQ =r_2，则点O的坐标为($r_1\cos\theta$，$r_1\sin\theta$),点 Q 的坐标为($r_2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$,$r_2\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$),代入椭圆方程,得

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1,\quad \frac{[r^2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})]^2}{a^2}+\frac{[r^2\sin(\theta+\frac{\pi}{2})]^2}{b^2}=1,$$

于是, $$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})+[\frac{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}{a^2}+\frac{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}{b^2}]$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$$

又在 Rt△POQ 中，设点 O 到 PQ 的距离为 h，则$\frac{1}{h}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$=1,故得 h=1

同理，点 O 到 QR，RS，SP 的距离也为 1，故菱形 PQRS 与 C_0外切.充分性得证.

[注]对于给出$a^2+b^2=a^2b^2$ ，$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$=1 等条件者，应同样给分.

2000年全国高中数学联合竞赛试卷答案

加试

一、【解析】证明：连结MN、BD，

∵FM⊥AB，FN⊥AC，∴A，M，F，N四点共圆.

∴∠AMN=∠AFN，

∴∠AMN+∠BAE=∠AFN+∠CAF=90°，即MN⊥AD.

∴$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot MN$

∵∠CAF=∠DAB，∠ACF=∠ADB，

∴△AFC∽△ABC$\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow AB\cdot AC=AD\cdot AF$.

又AF是过A、M、F、N四点的圆的直经，

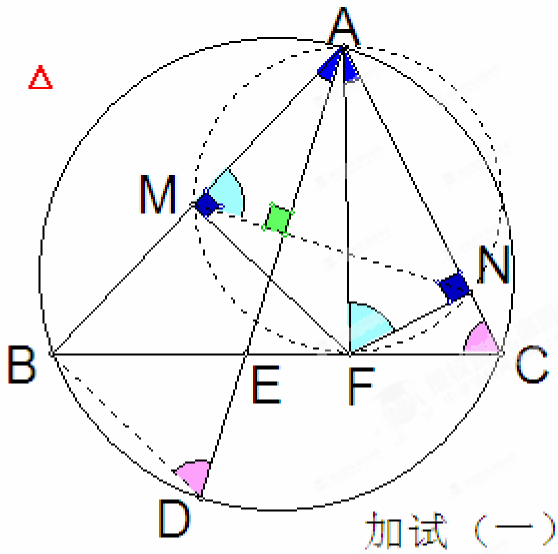
∴$\frac{MN}{\sin\angle BAC}=AF\Rightarrow AF\sin\angle BAC=MN$.

∴$S_{\triangle abc}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$

$=\frac{1}{2}AD\cdot AF\cdot\sin\angle BAC$

$=\frac{1}{2}AD\cdot MN$

$=S_{AMDN}$



加试（一）

二.【解析】

[证法一]：由假设得 $a_1=4$，$b_1=4$ 且当 $n\geq 1$ 时（$2a_{n+1}-1$）$+\sqrt{3}b_{n+1}=(14a_n+12b_n-7)+\sqrt{3}(8a_n+7b_n-4)$

$=[(2a_n-1)+\sqrt{3b_n}](7+4\sqrt{3})$

依次类推可得（$2a_n-1$）$+\sqrt{3}b_n=(7+4\sqrt{3})^{n-1}(2a_1-1+\sqrt{3b_1})=(7+4\sqrt{3})^n$

同理（$2a_n-1+$）$-\sqrt{3b_n}=(7+4\sqrt{3})^n$ 从而 $a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$.

由于 $7\pm4\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^2$，所以 $a_n=[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n]^2$

由二项式展开得 $c_n=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n=\sum_{0\leq 2k\leq n}C_n^{2k}\ 3^k\ 2^{n-2k}$，

显然 C_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

[证法二]：由已知得 $a_{n+1}=7a_n+6b_n-3=7a_n+6(8a_{n-1}+7b_{n-1}-4)-3=7a_n+48a_{n-1}+42b_{n-1}-27$，

由 $a_n=7a_{n-1}+6b_{n-1}-3$，得 $42b_{n-1}=7a_n-49a_{n-1}+21$，

从而 $a_{n+1}=7a_n+48a_{n-1}+7a_n-49a_{n-1}+21-27=14a_n-a_{n-1}-6$.
也就是 $a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}-6$.
设 $(a_{n+1}-ka_n+t)=p(a_n-ka_{n-1}+t)$ ……①②③④

则有 $\begin{cases} p+k=14 \\ pk=1 \\ t(1-p)=6 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2 \\ p=7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2 \\ t=3+2\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2 \\ p=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2 \\ t=3-2\sqrt{3} \end{cases}$

分别代入①，根据数列{ $a_{n+1}-ka_n+t$ }是以 a_2-ka_1+t 为首项、p 为公比的等比数列，整理得

$$a_{n+1}-(7+4\sqrt{3})a_n+(3+2\sqrt{3})=-2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})^n=-2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{2n} \quad \cdots②$$

$$a_{n+1}-(7-4\sqrt{3})a_n+(3-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})^n=2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^{2n} \quad \cdots③$$

③-②，整理得 $a_n=\left[\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]^2$

由二项式展开得 $c_n=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n=\sum_{0\le 2k\le n}C_n^{2k}\ 3^k\ 2^{n-2k}$ ，

显然 C_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

三.【解析】显然 $n\ge5$. 记 n 个人为 A_1，A_2， A_N ，
设 A_1 通话的次数为 m_1， A_i 与 A_j 之间通话的数为 y_{ij}， $1\le i,j\le n$. 则

$$m_i+m_j-y_{i,j}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s-3^k=c\ . \qquad (*)$$

其中 c 是常数 ， $1\le i,j\le n$.

根据（*）知， $|m_i-m_j|=|(m_i+m_s)-(m_j+m_s)|=|y_{i.s}-y_{j.s}|\le1$ ， $1\le i,j\le n$.

$\Rightarrow |m_i-m_j|\le1$， $1\le i,j\le n$

设 $m_i=\max\{m_s, 1\le s\le n.\}$ ，$m_j=\min\{m_s, 1\le s\le n.\}$ ，
则 $m_i+m_j\le1$.
若 $m_i+m_j=1$ ，则对于任意 $s\ne i,j$， $1\le s\le n$ ，
都有 $(m_i+m_s-y_{I,s})-(m_j+m_s-y_{I,s})=1-(y_{I,s}-y_{j,s})=0$ ， 即 $y_{I,s}-y_{j,s}=1$
故 $y_{I,s}=1$ ， $y_{j,s}=0$. $s\ne i,j$， $1\le s\le n$ ，
因此 $m_i\ge n-2$ ， $m_j\ge1$. 于是 ，$m_i+m_j\ge n-3\ge2$ ..

出现矛盾 ，故 $m_i+m_j=0$ ，即 $m_s(1\le s\le n)$恒为常数 。
根据 （*）知，$y_{I,j}=0$ 或 $y_{I,j}=1$ 。
若 $y_{I,j}=0$ ，则 $m_s=0$ ，$1\le s\le n$ 。与已知条件矛盾 。
因此 ，$y_{I,s}=1 \Rightarrow m_s=n-1$ ，$1\le s\le n$ ．所以

$$\frac{1}{2}n(n-1)-(2n-3)=3^k, \quad 即 \quad (n-2)(n-3)=2\times 3^k .$$

设 $n-2=2\times 3^{k_1}$，$n-3=3^{k_2}$，$k_1\ge k_2$，则 $2\times 3^{k_1}-3^{k_2}=1$，于是

$3^{k_2}(2\times 3^{k_1-k_2}-1)=1$，得 $3^{k_2}=1$，$2\times 3^{k_1-k_2}-1=1$，因此 $k_2=0$，$k_1=0$．

这与 $k\ge 1$ 矛盾．

设 $n-2=3^{k_1}$，$n-3=2\times 3^{k_2}$，，$k_1\ge k_2+1$，则 $3^{k_1}-2\times 3^{k_2}=1$，于是

$3^{k_2}(3^{k_1-k_2}-2)=1$，得 $3^{k_2}=1$，$3^{k_1-k_2}-2=1$，因此 $k_2=0$，$k_1=1$，$n=5$．

此时，若5人中每两人之间都通话一次，则其中任意3个人之间通话的总次数为3^1次

综上所述，n=5为n的所有可能值．