2009 年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准，填空题只设 7 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中至少 4 分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空（共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

1． 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 且 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f\left[f\left[f\cdots f(x)\right]\right]}_{n}$，则 $f^{(99)}(1)=$______．

【答案】$\dfrac{1}{10}$

【解析】$f^{(1)}(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$f^{(2)}(x)=f\left[f(x)\right]=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

……

$f^{(99)}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+99x^2}}$．

故 $f^{(99)}(1)=\dfrac{1}{10}$．

2． 已知直线 $L:x+y-9=0$ 和圆 $M:2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$，点 A 在直线 L 上，B，C 为圆 M 上两点，在 ΔABC 中，$\angle BAC=45°$，AB 过圆心 M，则点 A 横坐标范围为__________．

【答案】$[3，6]$

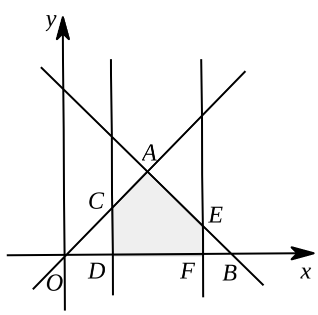
【解析】设 $A(a，9-a)$，则圆心 M 到直线 AC 的距离 $d=|AM|\sin 45°$，由直线 AC 与圆 M 相交，得 $d\leqslant\dfrac{\sqrt{34}}{2}$．解得 $3\leqslant a\leqslant 6$．

3． 在坐标平面上有两个区域 M 和 N，M 为 $\begin{cases} y\geqslant 0 \\ y\leqslant x \\ y\leqslant 2-x \end{cases}$，$N$ 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定，t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)=$________．

【答案】$-t^2+t+\dfrac{1}{2}$

【解析】由题意知

$$\begin{aligned} f(t)&=S_{\text{阴影部分面积}}\\ &=S_{\Delta AOB}-S_{\Delta OCD}-S_{\Delta BEF}\\ &=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2\\ &=-t^2+t+\frac{1}{2} \end{aligned}$$



4． 使不等式 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}<a-2007\dfrac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为_____．

【答案】2009

【解析】设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$. 显然 $f(n)$ 单调递减，则由 $f(n)$ 的最大值 $f(1)<a-2007\frac{1}{3}$，可得 $a=2009$.

5. **椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上任意两点 P，Q，若 $OP\perp OQ$，则乘积 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最小值为_____.**

【答案】$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

【解析】设 $P(|OP|\cos\theta,|OP|\sin\theta)$，

$Q\left(|OQ|\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right),|OQ|\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

由 P，Q 在椭圆上，有

$$\frac{1}{|OP|^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2} \qquad ①$$

$$\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2} \qquad ②$$

①+②得

$$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

于是当 $|OP|=|OQ|=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ 时，$|OP||OQ|$ 达到最小值 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6. **若方程 $\lg kx=2\lg(x+1)$ 仅有一个实根，那么 k 的取值范围是__________.**

【答案】$k<0$ 或 $k=4$

【解析】$\begin{cases}kx>0\\x+1>0\\kx=(x+1)^2\end{cases}$

当且仅当

$kx>0$ ①

$x+1>0$ ②

$x^2+(2-k)x+1=0$ ③

对③由求根公式得

x_1，$x_2=\frac{1}{2}\left[k-2\pm\sqrt{k^2-4k}\right]$ ④

$\Delta=k^2-4k\geqslant0\Rightarrow k\leqslant0$ 或 $k\geqslant4$.

(i)当 $k<0$ 时，由③得

$\begin{cases}x_1+x_2=k-2<0\\x_1x_2=1>0\end{cases}$

所以 x_1，x_2 同为负根.

又由④知 $\begin{cases}x_1+1>0\\x_2+1<0\end{cases}$

所以原方程有一个解 x_1.

(ii)当 $k=4$ 时，原方程有一个解 $x=\frac{k}{2}-1=1$.

(iii)当 $k>4$ 时，由③得 $\begin{cases}x_1+x_2=k-2>0\\x_1x_2=1>0\end{cases}$

所以 x_1，x_2 同为正根，且 $x_1\neq x_2$，不合题意，舍去.

综上可得 $k<0$ 或 $k=4$ 为所求.

7. 一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前100个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是_____（可以用指数表示）

【答案】 101×2^{98}

【解析】 易知：

(i)该数表共有 100 行；

(ii)每一行构成一个等差数列，且公差依次为

$d_1=1$，$d_2=2$，$d_3=2^2$，…，$d_{99}=2^{98}$

(iii) a_{100} 为所求．

设第 $n(n\geqslant 2)$ 行的第一个数为 a_n，则

$$\begin{aligned}a_n=a_{n-1}+\left(a_{n-1}+2^{n-2}\right)&=2a_{n-1}+2^{n-2}\\&=2\left[2a_{n-2}+2^{n-3}\right]+2^{n-2}\\&=2^2\left[2a_{n-3}+2^{n-4}\right]+2\times 2^{n-2}+2^{n-2}\\&=2^3a_{n-3}+3\times 2^{n-2}\\&\cdots\cdots\\&=2^{n-1}a_1+(n-1)\times 2^{n-2}\\&=(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

故 $a_{100}=101\times 2^{98}$．

8. 某车站每天8∶00～9∶00，9∶00～10∶00都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	8∶10 9∶10	8∶30 9∶30	8∶50 9∶50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客8∶20到车站，则它候车时间的数学期望为_________（精确到分）.

【答案】 27

【解析】 旅客候车的分布列为

候车时间（分）	10	30	50	70	90
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$

候车时间的数学期望为

$$10\times\frac{1}{2}+30\times\frac{1}{3}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{1}{12}+90\times\frac{1}{18}=27$$

二、解答题

1. （本小题满分 **14** 分）设直线 $l:y=kx+m$（其中 k，m 为整数）与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 A，B，与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 C，D，问是否存在直线 l，使得向量 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$，若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，请说明理由．

【解析】 由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-48=0$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$

$\Delta_1=(8km)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-48\right)>0$ ① ……………………………………………4 分

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$消去$y$化简整理得

$\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-12=0$

设$C\left(x_3,y_4\right)$，$D\left(x_4,y_4\right)$，则$x_3+x_4=\dfrac{2km}{3-k^2}$

$\Delta_2=\left(-2km\right)^2+4\left(3-k^2\right)\left(m^2+12\right)>0$　　② ……………………………………………8 分

因为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$，所以$\left(x_4-x_2\right)+\left(x_3-x_1\right)=0$，此时$\left(y_4-y_2\right)+\left(y_3-y_1\right)=0$．由$x_1+x_2=x_3+x_4$得$-\dfrac{8km}{3+4k^2}=\dfrac{2km}{3-k^2}$．

所以$2km=0$或$-\dfrac{4}{3+4k^2}=\dfrac{1}{3-k^2}$．由上式解得$k=0$或$m=0$．当$k=0$时，由①和②得$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$．因$m$是整数，所以$m$的值为$-3$，$-2$，$-1$，$0$，$1$，$2$，$3$．当$m=0$，由①和②得$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$．因$k$是整数，所以$k=-1$，$0$，$1$．于是满足条件的直线共有 9 条．………14 分

2. **（本小题 15 分）已知**p，$q\left(q\neq 0\right)$**是实数，方程**$x^2-px+q=0$**有两个实根**α，β，**数列**$\left\{a_n\right\}$**满足**$a_1=p$，$a_2=p^2-q$，$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}\left(n=3,4,\cdots\right)$

(I)求数列$\left\{a_n\right\}$**的通项公式（用**α，β**表示）；**

(II)若$p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$，**求**$\left\{a_n\right\}$**的前**n**项和.**

【解析】方法一:

(I)由韦达定理知$\alpha\cdot\beta=q\neq 0$，又$\alpha+\beta=p$，所以

$a_n-px_{n-1}-qx_{n-2}=\left(\alpha+\beta\right)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$，$\left(n=3,4,5,\cdots\right)$

整理得$a_n-\beta a_{n-1}=\alpha\left(a_{n-1}-\beta a_{n-2}\right)$

令$b_n=a_{n+1}-\beta a_n$，则$b_{n+1}=\alpha b_n\left(n=1,2,\cdots\right)$．所以$\left\{b_n\right\}$是公比为$\alpha$的等比数列.

数列$\left\{b_n\right\}$的首项为:

$b_1=a_2-\beta a_1=p^2-q-\beta p=\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha\beta-\beta\left(\alpha+\beta\right)=\alpha^2$．

所以$b_n=\alpha^2\cdot\alpha^{n-1}=\alpha^{n+1}$，即$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$．所以$a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$．

①当$\Delta=p^2-4q=0$时，$\alpha=\beta\neq 0$，$a_1=p=\alpha+\alpha=2\alpha$，$a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$变为$a_{n+1}=\alpha a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$．整理得，$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}=1$，$\left(n=1,2,\cdots\right)$．所以，数列$\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$成公差为1的等差数列，其首项为$\dfrac{a_1}{\alpha}=\dfrac{2\alpha}{\alpha}=2$．所以

$\dfrac{a_n}{\alpha^n}=2+1\left(n-1\right)=n+1$．

于是数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为

$a_n=\left(n+1\right)\alpha^n$；……………………………………………………………5 分

②当$\Delta=p^2-4q>0$时，$\alpha\neq\beta$，

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\beta a_n+\alpha^{n+1} \\ &=\beta a_n+\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1} \\ &=\beta a_n+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1}-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right). \end{aligned}$$

整理得

$$a_{n+1}+\frac{\alpha^{n+2}}{\beta-\alpha}=\beta\left(a_n+\frac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right),\ \left(n=1,2,\cdots\right).$$

所以，数列$\left\{a_n+\dfrac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right\}$成公比为$\beta$的等比数列，其首项为$a_1+\dfrac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta+\dfrac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha}$．所以$a_n+\dfrac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha}\beta^{n-1}$．

于是数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$．……………………………………………………10 分

(II)若$p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$，则$\Delta=p^2-4q=0$，此时$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$．由第(I)步的结果得，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n+1}{2^n}$，所以，$\{a_n\}$的前$n$项和为

$$s_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

以上两式相减，整理得$\dfrac{1}{2}s_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$

所以$s_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$．……………………………………………………………………15 分

方法二:

(I)由韦达定理知$\alpha\cdot\beta=q\neq0$，又$\alpha+\beta=p$，所以

$a_1=\alpha+\beta$，$a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$．

特征方程$\lambda^2-p\lambda+q=0$的两个根为α，β．

①当$\alpha=\beta\neq0$时，通项$a_n=(A_1+A_2n)\alpha^n\ (n=1,2,\cdots)$由$a_1=2\alpha$，$a_2=3\alpha^2$得

$$\begin{cases}(A_1+A_2)\alpha=2\alpha\\(A_1+2A_2)\alpha^2=3\alpha^2\end{cases}$$

解得$A_1=A_2=1$．故　$a_n=(1+n)\alpha^n$．……………………………………………………5 分

②当$\alpha\neq\beta$时，通项$a_n=A_1\alpha^n+A_2\beta^n\ (n=1,2,\cdots)$．由$a_1=\alpha+\beta$，$a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$得

$$\begin{cases}A_1\alpha+A_2\beta=\alpha+\beta\\A_1\alpha^2+A_2\beta^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\end{cases}$$

解得$A_1=\dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}$，$A_2=\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$．故

$a_n=\dfrac{-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}+\dfrac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$．……………………………………………………10 分

(II)同方法一.

3.　（本小题满分 15 分）求函数$y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$的最大和最小值.

【解析】函数的定义域为$[0,13]$.因为

$$\begin{aligned}y=\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\\&\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}\\&=3\sqrt{3}+\sqrt{13}\end{aligned}$$

当$x=0$时等号成立．故y的最小值为$3\sqrt{3}+\sqrt{13}$．……………………………………………5 分

又由柯西不等式得

$$\begin{aligned}y^2&=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}\right)^2\\&\leqslant\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)\left(2x+(x+27)+3(13-x)\right)=121\end{aligned}$$

所以$y\leqslant11$．　　……………………………………………………………………10 分

由柯西不等式等号成立的条件，得$4x=9(13-x)=x+27$，解得$x=9$．故当$x=9$时等号成立．因此y

的最大值为11．………………………………………………………………………………15 分

2009 年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准（A 卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

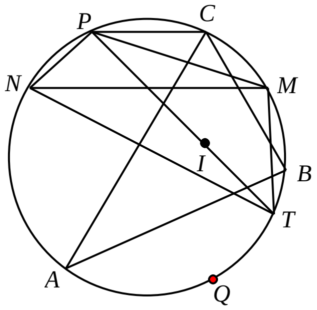
2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、解答题（共 4 小题，每小题 50 分，共 200 分）

9．　如图，M，N 分别为锐角三角形 ΔABC（$\angle A<\angle B$）的外接圆 Γ 上弧 BC、AC 的中点．过点 C 作 $PC\parallel MN$ 交圆 Γ 于 P 点，I 为 ΔABC 的内心，连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T．

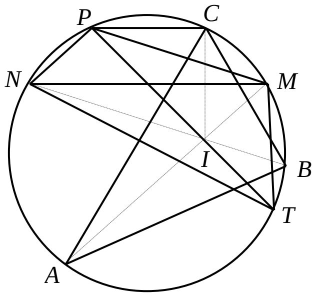
⑴求证：$MP\cdot MT=NP\cdot NT$；

⑵在弧 AB（不含点 C）上任取一点 Q（$Q\neq A$，T，B），记 ΔAQC，$\triangle QCB$ 的内心分别为 I_1，I_2，



求证：Q，I_1，I_2，T 四点共圆．

【解析】⑴连 NI，MI．由于 $PC\parallel MN$，P，C，M，N 共圆，故 $PCMN$ 是等腰梯形．因此 $NP=MC$，$PM=NC$．



连 AM，CI，则 AM 与 CI 交于 I，因为

$\angle MIC=\angle MAC+\angle ACI=\angle MCB+\angle BCI=\angle MCI$，

所以 $MC=MI$．同理

$NC=NI$．

于是

$NP=MI$，$PM=NI$．

故四边形 $MPNI$ 为平行四边形．因此 $S_{\triangle PMT}=S_{\triangle PNT}$（同底，等高）．

又 P，N，T，M 四点共圆，故 $\angle TNP+\angle PMT=180°$，由三角形面积公式

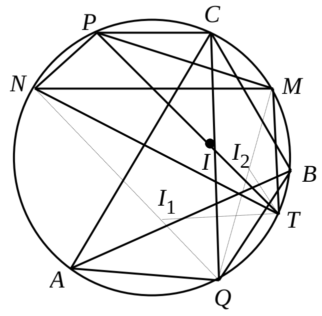
$$S_{\triangle PMT}=\frac{1}{2}PM\cdot MT\sin\angle PMT$$

$$=S_{\triangle PNT}=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PNT$$

$=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PMT$

于是 $PM\cdot MT=PN\cdot NT$．

⑵因为 $\angle NCI_1=\angle NCA+\angle ACI_1=\angle NQC+\angle QCI_1=\angle CI_1N$，



所以 $NC=NI_1$，同理 $MC=MI_2$．由 $MP\cdot MT=NP\cdot NT$ 得 $\frac{NT}{MP}=\frac{MT}{NP}$．

由⑴所证 $MP=NC$，$NP=MC$，故

$\frac{NT}{NI_1}=\frac{MT}{MI_2}$．

又因

$\angle I_1NT=\angle QNT=\angle QMT=\angle I_2MT$，

有

$\Delta I_1NT\backsim\Delta I_2MT$．

故 $\angle NTI_1=\angle MTI_2$，从而

$\angle I_1QI_2=\angle NQM=\angle NTM=\angle I_1TI_2$．

因此 Q，I_1，I_2，T 四点共圆．

10．　求证不等式：

$$-1<\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\right)-\ln n\leqslant\frac{1}{2}，\quad n=1，2，\ldots$$

【解析】 证明：首先证明一个不等式：

⑴ $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，$x>0$．

事实上，令

$h(x)=x-\ln(1+x)$，$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$．

则对 $x>0$，

$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$．

于是

$h(x)>h(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$．

在⑴中取 $x=\frac{1}{n}$ 得

⑵ $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$．

令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$，则 $x_1=\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}&=\frac{n}{n^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\\&<\frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n}\\&=-\frac{1}{(n^2+1)n}<0\end{aligned}$$

因此 $x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$.

又因为

$$\ln n=(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n-1)-\ln(n-2))+\cdots+(\ln 2-\ln 1)+\ln 1=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

从而

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)+\frac{n}{n^2+1}>\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}\right)\\&=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k^2+1)k}\geqslant-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)k}\\&=-1+\frac{1}{n}>-1.\end{aligned}$$

11. **设 k，l 是给定的两个正整数．证明：有无穷多个正整数 $m\geqslant k$，使得 C_m^k 与 l 互素．**

【解析】 证法一：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)$．我们证明 $\left(C_m^k,l\right)=1$.

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明：$p\nmid C_m^k$.

若 $p\nmid k!$，则由

$$\begin{aligned}k!C_m^k&=\prod_{i=1}^{k}(m-k+i)\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)]\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}i\\&\equiv k!\left(\bmod p^{\alpha+1}\right).\end{aligned}$$

及 $p^{\alpha}\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^{\alpha}\mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid k!C_m^k$．从而 $p\nmid C_m^k$.

证法二：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)^2$，我们证明 $\left(C_m^k,l\right)=1$.

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明：$p\nmid C_m^k$.

若 $p\nmid k!$，则由

$$\begin{aligned}k!C_m^k&=\prod_{i=1}^{k}(m-k+i)\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2]\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}i\\&\equiv k!\left(\bmod p\right).\end{aligned}$$

即 p 不整除上式，故 $p\nmid C_m^k$.

若 $p\mid k!$，设 $\alpha\geqslant 1$ 使 $p^{\alpha}\mid k!$，但 $p^{\alpha+1}\nmid k!$． $p^{\alpha+1}\mid(k!)^2$．故由

$$\begin{aligned}k!C_m^k&=\prod_{i=1}^{k-1}(m-k+i)\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2]\\&\equiv\prod_{i=1}^{k}i\\&\equiv k!\left(\bmod p^{\alpha+1}\right)\end{aligned}$$

及 $p^{\alpha}\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^{\alpha}\mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid k!C_m^k$．从而 $p\nmid C_m^k$.

12. **在非负数构成的 3×9 数表**

$$P=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \end{pmatrix}$$

中每行的数互不相同，前 6 列中每列的三数之和为 1，$x_{17}=x_{28}=x_{39}=0$，x_{27}，x_{37}，x_{18}，x_{38}，x_{19}，x_{29} 均大于．如果 P 的前三列构成的数表

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

满足下面的性质 (O)：对于数表 P 中的任意一列 $\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$（$k=1$，2，…，9）均存在某个 $i\in\{1，2，3\}$ 使得

⑶ $x_{ik}\leqslant u_i=\min\{x_{i1}，x_{i2}，x_{i3}\}$．

求证：

（ⅰ）最小值 $u_i=\min\{x_{i1}，x_{i2}，x_{i3}\}$，$i=1$，2，3 一定自数表 S 的不同列．

（ⅱ）存在数表 P 中唯一的一列 $\begin{pmatrix} x_{1k^*} \\ x_{2k^*} \\ x_{3k^*} \end{pmatrix}$，$k^*\neq 1$，2，3 使得 3×3 数表

$$S'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

仍然具有性质 (O)．

【解析】（i）假设最小值 $u_i=\min\{x_{i1}，x_{i2}，x_{i3}\}$，$i=1$，2，3 不是取自数表 S 的不同列．则存在一列不含任何 u_i．不妨设 $u_i\neq x_{i2}$，$i=1$，2，3．由于数表 P 中同一行中的任何两个元素都不等，于是 $u_i<x_{i2}$，$i=1$，2，3．另一方面，由于数表 S 具有性质 (O)，在⑶中取 $k=2$，则存在某个 $i_0\in\{1，2，3\}$ 使得 $x_{i_0 2}\leqslant u_{i_0}$．矛盾．

（ii）由抽屉原理知

$\min\{x_{11}，x_{12}\}$，$\min\{x_{21}，x_{22}\}$，$\min\{x_{31}，x_{32}\}$

中至少有两个值取在同一列．不妨设

$\min\{x_{21}，x_{22}\}=x_{22}$，$\min\{x_{31}，x_{32}\}=x_{32}$．

由前面的结论知数表 S 的第一列一定含有某个 u_i，所以只能是 $x_{11}=u_1$．同样，第二列中也必含某个 u_i，$i=1$，2．不妨设 $x_{22}=u_2$．于是 $u_3=x_{33}$，即 u_i 是数表 S 中的对角线上数字．

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

记 $M=\{1，2，\cdots，9\}$，令集合

$I=\{k\in M\mid x_{ik}>\min\{x_{i1}，x_{i2}\}，i=1，3\}$．

显然 $I=\{k\in M\mid x_{1k}>x_{11}，x_{3k}>x_{32}\}$ 且 1，$23\notin I$．因为 x_{18}，$x_{38}>1\geqslant x_{11}$，x_{32}，所以 $8\in I$．

故 $I\neq\varnothing$．于是存在 $k^*\in I$ 使得 $x_{2k^*}=\max\{x_{2k}\mid k\in I\}$．显然，$k^*\neq 1$，2，3．

下面证明 3×3 数表

$$S'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O)．

从上面的选法可知 $u_i':=\min\{x_{i1}，x_{i2}，x_{ik^*}\}=\min\{x_{i1}，x_{i2}\}$，$(i=1，3)$．这说明

$x_{1k^*} > \min\{x_{11}, x_{12}\} \geqslant u_1$， $x_{3k^*} > \min\{x_{31}, x_{32}\} \geqslant u_3$．

又由S满足性质(O)．在⑶中取$k=k^*$，推得$x_{2k^*} \leqslant u_2$，于是$u_2' = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k^*}\} = x_{2k^*}$．下证对任意的$k \in M$，存在某个$i=1$，2，3使得$u_i' \geqslant x_{ik}$．假若不然，则$x_{ik} > \min\{x_{i1}, x_{i2}\}$，$i=1$，3且$x_{2k} > x_{2k^*}$．这与$x_{2k^*}$的最大性矛盾．因此，数表$S'$满足性质$(O)$．

下证唯一性．设有$k \in M$使得数表

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k} \end{pmatrix}$$

具有性质(O)，不失一般性，我们假定

$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{13}\} = x_{11}$

⑷ $u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{23}\} = x_{22}$

$u_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{33}\} = x_{33}$

$x_{32} < x_{31}$．

由于$x_{32} < x_{31}$，$x_{22} < x_{21}$及（i），有$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}$．又由（i）知：或者$(a)$ $u_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k}$，或者$(b) u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{2k}$．

如果(a)成立，由数表S具有性质(O)，则

$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}$，

⑸ $u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{22}$，

$u_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k}$．

由数表S满足性质(O)，则对于$3 \in M$至少存在一个$i \in \{1, 2, 3\}$使得$u_i \geqslant x_{ik^*}$．由$k^* \in I$及⑷和⑹式知，$x_{1k^*} > x_{11} = u_1$，$x_{3k^*} > x_{32} = u_3$．于是只能有$x_{2k^*} \leqslant u_2 = x_{2k}$．类似地，由$S'$满足性质$(O)$及$k \in M$可推得$x_{2k} \leqslant u_2' = x_{2k^*}$．从而$k^* = k$．