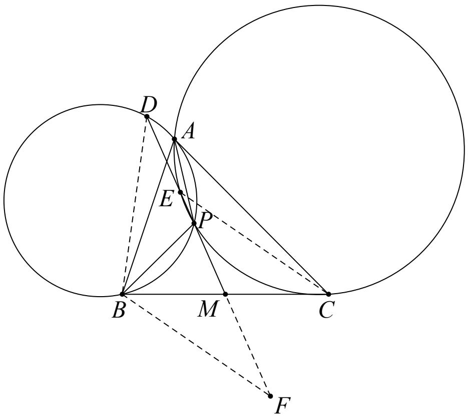
2019年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，**10** 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）如图，在锐角ΔABC中，M是BC边的中点．点P在ΔABC内，使得AP平分$\angle BAC$．直线MP与$\Delta ABP, \Delta ACP$的外接圆分别相交于不同于点P的两点D, E．证明：若$DE = MP$，则$BC = 2BP$．



证明：延长PM到点F，使得$MF = ME$．连接BF, BD, CE．

由条件可知$\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP = \angle CEM$． ………………10 分

因为$BM = CM$且$EM = FM$，所以$BF = CE$且$BF // CE$．

于是$\angle F = \angle CEM = \angle BDP$，进而$BD = BF$． ………………20 分

又$DE = MP$，故$DP = EM = FM$．

于是在等腰ΔBDF中，由对称性得$BP = BM$．从而$BC = 2BM = 2BP$．

………………40 分

二、（本题满分 40 分）设整数$a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$满足$1 = a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2019} = 99$．

记$f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + \cdots + a_{2017}a_{2019})$．

求f的最小值f_0．并确定使$f = f_0$成立的数组$(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$的个数.

解：由条件知

$$2f = a_1^2 + a_2^2 + a_{2018}^2 + a_{2019}^2 + \sum_{i=1}^{2017}(a_{i+2} - a_i)^2 . \quad ①$$

由于a_1, a_2及$a_{i+2} - a_i (i = 1, 2, \cdots, 2016)$均为非负整数，故有$a_1^2 \ge a_1, a_2^2 \ge a_2$，且$(a_{i+2} - a_i)^2 \ge a_{i+2} - a_i (i = 1, 2, \cdots, 2016)$．于是

$$a_1^2 + a_2^2 + \sum_{i=1}^{2016}(a_{i+2} - a_i)^2 \ge a_1 + a_2 + \sum_{i=1}^{2016}(a_{i+2} - a_i) = a_{2017} + a_{2018} . \quad ②$$

………………10 分

由①、②得

$$2f \geq a_{2017}+a_{2018}+(a_{2019}-a_{2017})^2+a_{2018}^2+a_{2019}^2,$$

结合 $a_{2019}=99$ 及 $a_{2018} \geq a_{2017}>0$，可知

$$\begin{aligned} f &\geq \frac{1}{2}\left(2a_{2017}+(99-a_{2017})^2+a_{2017}^2+99^2\right) \\ &=(a_{2017}-49)^2+7400 \geq 7400 . \end{aligned} \qquad ③$$

…………………20 分

另一方面，令

$a_1=a_2=\cdots=a_{1920}=1, a_{1920+2k-1}=a_{1920+2k}=k(k=1,2,\cdots,49), a_{2019}=99$，

此时验证知上述所有不等式均取到等号，从而 f 的最小值 $f_0=7400$.

…………………30 分

以下考虑③的取等条件．此时 $a_{2017}=a_{2018}=49$，且②中的不等式均取等，即 $a_1=a_2=1$，$a_{i+2}-a_i \in \{0,1\}(i=1,2,\cdots,2016)$.

因此 $1=a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2018}=49$，且对每个 $k(1 \leq k \leq 49)$，$a_1,a_2,\cdots,a_{2018}$ 中至少有两项等于 k．易验证知这也是③取等的充分条件.

对每个 $k(1 \leq k \leq 49)$，设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2018}$ 中等于 k 的项数为 $1+n_k$，则 n_k 为正整数，且 $(1+n_1)+(1+n_2)+\cdots+(1+n_{49})=2018$，即

$$n_1+n_2+\cdots+n_{49}=1969 .$$

该方程的正整数解 $(n_1,n_2,\cdots,n_{49})$ 的组数为 C_{1968}^{48}，且每组解唯一对应一个使④取等的数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2019})$，故使 $f=f_0$ 成立的数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2019})$ 有 C_{1968}^{48} 个.

…………………40 分

三、（本题满分 50 分） 设 m 为整数，$|m| \geq 2$．整数数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足：a_1,a_2 不全为零，且对任意正整数 n，均有 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$.

证明：若存在整数 $r,s\ (r>s \geq 2)$ 使得 $a_r=a_s=a_1$，则 $r-s \geq |m|$.

证明： 不妨设 a_1,a_2 互素（否则，若 $(a_1,a_2)=d>1$，则 $\frac{a_1}{d}$ 与 $\frac{a_2}{d}$ 互素，并且用 $\frac{a_1}{d},\frac{a_2}{d},\frac{a_3}{d},\cdots$ 代替 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，条件与结论均不改变）.

由数列递推关系知

$$a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv \cdots \pmod{|m|} . \qquad ①$$

以下证明：对任意整数 $n \geq 3$，有

$$a_n \equiv a_2-(a_1+(n-3)a_2)m \pmod{m^2} . \qquad ②$$

…………………10 分

事实上，当 $n=3$ 时②显然成立．假设 $n=k$ 时②成立（其中 k 为某个大于 2 的整数），注意到①，有 $ma_{k-1} \equiv ma_2 \pmod{m^2}$，结合归纳假设知

$$\begin{aligned} a_{k+1}=a_k-ma_{k-1} &\equiv a_2-(a_1+(k-3)a_2)m-ma_2 \\ &\equiv a_2-(a_1+(k-2)a_2) \pmod{m^2}, \end{aligned}$$

即$n=k+1$时②也成立．因此②对任意整数$n\geq 3$均成立．　　…………………20 分

注意，当$a_1=a_2$时，②对$n=2$也成立．

设整数$r,s\,(r>s\geq 2)$，满足$a_r=a_s=a_1$．

若$a_1=a_2$，由②对$n\geq 2$均成立，可知

$$a_2-(a_1+(r-3)a_2)m\equiv a_r=a_s\equiv a_2-(a_1+(s-3)a_2)m\ (\mathrm{mod}\, m^2),$$

即$a_1+(r-3)a_2\equiv a_1+(s-3)a_2\ (\mathrm{mod}\,|m|)$，即

$$(r-s)\,a_2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,|m|). \quad ③$$

若$a_1\neq a_2$，则$a_r=a_s=a_1\neq a_2$，故$r>s\geq 3$．此时由于②对$n\geq 3$均成立，故类似可知③仍成立．　　…………………30 分

我们证明a_2,m互素．

事实上，假如a_2与m存在一个公共素因子p，则由①得p为$a_2,a_3,a_4,\cdots$的公因子，而a_1,a_2互素，故$p\nmid a_1$，这与$a_r=a_s=a_1$矛盾．

因此，由③得$r-s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,|m|)$．又$r>s$，所以$r-s\geq |m|$．

…………………50 分

四、（本题满分 50 分）设V是空间中 2019 个点构成的集合，其中任意四点不共面．某些点之间连有线段，记E为这些线段构成的集合．试求最小的正整数n，满足条件：若E至少有n个元素，则E一定含有 908 个二元子集，其中每个二元子集中的两条线段有公共端点，且任意两个二元子集的交为空集．

解：为了叙述方便，称一个图中的两条相邻的边构成一个“角”．

先证明一个引理：设$G=(V,E)$是一个简单图，且G是连通的，则G含有$\left[\dfrac{|E|}{2}\right]$个两两无公共边的角（这里$[\alpha]$表示实数$\alpha$的整数部分）．

引理的证明：对E的元素个数$|E|$归纳证明．当$|E|=0,1,2,3$时，结论显然成立．下面假设$|E|\geq 4$，并且结论在$|E|$较小时均成立．只需证明，在G中可以选取两条边a,b构成一个角，在G中删去a,b这两条边后，剩下的图含有一个连通分支包含$|E|-2$条边．对这个连通分支应用归纳假设即得结论成立．

考虑G中的最长路$P: v_1v_2\cdots v_k$，其中$v_1,v_2,\cdots,v_k$是互不相同的顶点．因为G连通，故$k\geq 3$．

情形 1：$\deg(v_1)\geq 2$．由于P是最长路，v_1的邻点均在$v_2,\cdots,v_k$中，设$v_1v_i\in E$，其中$3\leq i\leq k$．则$\{v_1v_2,v_1v_i\}$是一个角，在E中删去这两条边．若v_1处还有第三条边，则剩下的图是连通的；若v_1处仅有被删去的两条边，则v_1成为孤立点，其余顶点仍互相连通．总之在剩下的图中有一个连通分支含有$|E|-2$条边．

情形 2：$\deg(v_1)=1$，$\deg(v_2)=2$．则$\{v_1v_2,v_2v_3\}$是一个角，在G中删去这两条边后，v_1,v_2都成为孤立点，其余的点互相连通，因此有一个连通分支含有$|E|-2$条边．

情形 3：$\deg(v_1)=1$，$\deg(v_2)\geq 3$，且v_2与$v_4,\cdots,v_k$中某个点相邻．则$\{v_1v_2,v_2v_3\}$

是一个角，在G中删去这两条边后，v_1成为孤立点，其余点互相连通，因此有一个连通分支含有$|E|-2$条边.

情形 4：$\deg(v_1)=1$，$\deg(v_2)\geq 3$，且v_2与某个$u\notin\{v_1,v_3,\cdots,v_k\}$相邻．由于$P$是最长路，故$u$的邻点均在$v_2,\cdots,v_k$之中．因$\{v_1v_2,v_2u\}$是一个角，在$G$中删去这两条边，则$v_1$是孤立点．若$u$处仅有边$uv_2$，则删去所述边后$u$也是孤立点，而其余点互相连通．若$u$处还有其他边$uv_i$，$3\leq i\leq k$，则删去所述边后，除$v_1$外其余点互相连通．总之，剩下的图中有一个连通分支含有$|E|-2$条边.

引理获证． …………………20 分

回到原题，题中的V和E可看作一个图$G=(V,E)$.

首先证明$n\geq 2795$.

设$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2019}\}$．在$v_1,v_2,\cdots,v_{61}$中，首先两两连边，再删去其中 15 条边（例如$v_1v_2,v_1v_3,\cdots,v_1v_{16}$），共连了$\mathrm{C}_{61}^2-15=1815$条边，则这 61 个点构成的图是连通图．再将剩余的$2019-61=1958$个点配成 979 对，每对两点之间连一条边，则图G中一共连了$1815+979=2794$条线段．由上述构造可见，G中的任何一个角必须使用$v_1,v_2,\cdots,v_{61}$相连的边，因此至多有$\left[\frac{1815}{2}\right]=907$个两两无公共边的角．故满足要求的$n$不小于 2795． …………………30 分

另一方面，若$|E|\geq 2795$，可任意删去若干条边，只考虑$|E|=2795$的情形.

设G有 k 个连通分支，分别有$m_1,\cdots,m_k$个点，及$e_1,\cdots,e_k$条边．下面证明$e_1,\cdots,e_k$中至多有 979 个奇数.

反证法，假设$e_1,\cdots,e_k$中有至少 980 个奇数，由于$e_1+\cdots+e_k=2795$是奇数，故$e_1,\cdots,e_k$中至少有 981 个奇数，故$k\geq 981$．不妨设$e_1,e_2,\cdots,e_{981}$都是奇数，显然$m_1,m_2,\cdots,m_{981}\geq 2$.

令$m=m_{981}+\cdots+m_k\geq 2$，则有$\mathrm{C}_{m_i}^2\geq e_i\,(1\leq i\leq 980)$，$\mathrm{C}_m^2\geq e_{981}+\cdots+e_k$，故

$$2795=\sum_{i=1}^{k}e_i\leq \mathrm{C}_m^2+\sum_{i=1}^{980}\mathrm{C}_{m_i}^2\ . \qquad ①$$

利用组合数的凸性，即对$x\geq y\geq 3$，有$\mathrm{C}_x^2+\mathrm{C}_y^2\leq \mathrm{C}_{x+1}^2+\mathrm{C}_{y-1}^2$，可知当$m_1,\cdots,m_{980},m$由 980 个 2 以及一个 59 构成时，$\mathrm{C}_m^2+\sum_{i=1}^{980}\mathrm{C}_{m_i}^2$取得最大值．于是

$$\mathrm{C}_m^2+\sum_{i=1}^{980}\mathrm{C}_{m_i}^2\leq \mathrm{C}_{59}^2+980\mathrm{C}_2^2=2691<2795,$$

这与①矛盾．从而$e_1,\cdots,e_k$中至多有 979 个奇数． …………………40 分

对每个连通分支应用引理，可知G中含有N个两两无公共边的角，其中

$$N=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{e_i}{2}\right]\geq\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}e_i-979\right)=\frac{1}{2}(2795-979)=908.$$

综上，所求最小的n是2795． …………………50分