代数与数论

1. 对于 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集 S，其消失理想 $I(S)$ 是多项式环 $\mathbb{R}[x,y,z]$ 的由全体满足如下条件的元素 f 组成的理想：对于任意点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$，$f(x_0,y_0,z_0)=0$。找出最小的整数 k，使得对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意三条共点的两两不同的直线 L_1,L_2,L_3，理想 $I(L_1\cup L_2\cup L_3)$ 可由 k 个元素生成；并证明你的答案。

2. 设 p 是一个大于 2023 的素数。记 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbb{F}_p$-线性空间 $\mathbb{F}_p^{2023}$ 的所有 2000 维子空间组成的集合。找出满足对任意 $V\in\mathcal{X}$，
$$\sum_{W\in\mathcal{Y}}(V\cap W)=V$$
成立的 $\mathcal{X}$ 的子集 $\mathcal{Y}$ 的最小可能元素个数；并证明你的答案。

3. 一个数域 K 称为是全实的，如果任意同态 $\varphi\colon K\to\mathbb{C}$ 的像均包含在 $\mathbb{R}$ 内。证明：对任一整数 $d>1$，均存在无穷多个两两互不同构的次数为 d 的全实数域。

4. 设 n 是一个至少为 2 的整数。考虑秩为 n 的自由 $\mathbb{Z}$-模 $V\coloneqq\mathbb{Z}^{\oplus n}$ （写成列向量）。证明：存在某个正整数 N 以及某个元素
$$s\in V^{\otimes N}\coloneqq\underbrace{V\otimes_{\mathbb{Z}}V\otimes_{\mathbb{Z}}\cdots\otimes_{\mathbb{Z}}V}_{N\text{重}},$$
使得对任意素数 p，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的一个元素 g 是上三角的当且仅当 s 在 $V^{\otimes N}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$ 中的像是 g 的一个特征向量。这里，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 从左边对角作用在 $V^{\otimes N}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p=(V\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p)^{\otimes N}$ 上。（证明 $n=2$ 的情况将有部分分数。）

5. 设 n 是一个正整数。分别记 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ 和 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的多项式环和有理函数环。设 Γ 是 $\mathbb{C}^n$ 的由坐标置换和整数点平移生成的自同构群。记 $r\colon\Gamma\to\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbb{C}^n])$ 是一个态射，它将 γ 映到自同构 r_γ，满足 $(r_\gamma P)(x)=P(\gamma^{-1}x)$ 对任意 $P\in\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ 和 $x\in\mathbb{C}^n$。设 R 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbb{C}^n])$ 的由 r 的像和“乘以 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ 里的元素”生成的子代数；特别的，它是一个 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$-代数。
   (a) 证明：R 是一个自由 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$-模。
   (b) 设 T 是 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^n)\otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]}R$ 的一个元素，当它看作是 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^n)$ 的一个自同态时保持子集 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$。证明：T 属于 $\mathbb{C}\langle\mathbb{C}^n\rangle\otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]}R$；这里，$\mathbb{C}\langle\mathbb{C}^n\rangle$ 是 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^n)$ 的由所有非零整系数一次多项式的逆生成的 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$-子代数。

几何与拓扑

1. 令A为$\mathbb{R}^3$中由2023个点组成的点集。假设A中任意5个点不在同一球面上。（这里“球面”是几何意义上的球面，即到一个固定点距离为常值的点的集合。）证明存在三个球面S_1，S_2，S_3满足如下条件：三个球面的补空间$\mathbb{R}^3\setminus(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 恰好有8个连通分支，使得其中一个连通分支包含A中的252个点，另外七个连通分支每个包含A中的253个点。

2. 设M 为$\mathbb{R}^3$ 中的紧致定向极小曲面且具有连通的边界∂M, 证明:

$$L^2(\partial M) \geq 4\pi\sigma(M),$$

其中$L(\partial M)$ 表示∂M 的长度, $\sigma(M)$ 表示M 的面积.

3. 假设X为CW复形，满足$H^2(X;\mathbb{Z})=0$。令V为S^2上的实向量丛，$f: X\to S^2$为连续映射。证明：$f^*(V)$为平凡丛。

4. 阿里巴巴叫了一声芝麻开门后，进入一个奇特的山洞, 里面有许多金银财宝. 这个山洞可以看成是一个平面的一部分即$x, y\geq 0$ 但是x 与y 不可同时为0. 每一个人在山洞里面的位置可以用(x, y) 这个坐标点来表示.

   阿里巴巴每天都偷偷地进去拿些金银财宝去接济穷人. 某一天阿里巴巴突然被40 大盗们发现了. 阿里巴巴被发现时在位置$(4,3)$ 处, 40 大盗们分成两拨, 20 个出现在位置$(2+\sqrt{3},0)$ 处, 另外20 个在位置$(0,1)$ 处. 整个山洞唯一的出口在位置$(1,0)$ 处, 在位置$(6,5)$ 处有一个戒指. 阿里巴巴和大盗们在(x, y) 处的速率都是$x+y$. 阿里巴巴和任意一组大盗只知道他们自己的位置以及出口位置. 另外只有阿里巴巴知道神戒指的位置, 并且懂得召唤神戒指的仆人, 神戒指的仆人可以使阿里巴巴速度翻倍, 即在(x, y) 的速率变为$2(x+y)$.

   请确定阿里巴巴能否比两组大盗们更快地到达出口(从而离开洞穴), 并证明你的结论。

   说明:

   (a) 山洞内可随意走动. 阿里巴巴唯一取胜策略就是比任意一组大盗更快到达出口.

   (b) 假设两组大盗都不会在他们到达出口前去半路抓阿里巴巴, 因为他们并不知道阿里巴巴以及神戒指的位置. 所以对大盗来说也是要更快的到达出口.

   (c) 我们假设召唤仆人和速度翻倍生效的时间可以忽略不计。

5. 设M 是完备黎曼轨形(orbifold)，维数$n\geq 2$，具有孤立奇点。

   (1) 假设M 的截面曲率非负，无穷远处的体积增长大于0，即，对某个$x\in M$，

   $$\lim_{r\to\infty}\frac{vol(B(x,r))}{r^n}>0. \tag{1}$$

   证明：M 的奇异点最多只有1 个。

   (2) 假设M 紧致，里奇曲率非负。进一步假设在某个奇异点x，局部群Γ_x 作用不可约，即Γ_x 的作用不存在非平凡不变子空间。证明：$b_1(M)=0$。

下面是一些题目中出现的概念。一个n 维轨形M 是一个拓扑空间，在每个点x，存在邻域U_x 和一个同胚$\phi_x: U_x\to B/\Gamma_x$ 满足$\phi_x(x)=0$，其中B 是n 为欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的单位球，Γ_x 是$O(n)$ 的离散子群，在$\mathbb{R}^n$ 上具有线性、有效作用。组合(U_x,Γ_x,ϕ_x) 称为轨形的一个坐标卡。一个点x 称为正则点，如果Γ_x 是平凡的；否则，x 称为一个奇点。具有有限奇点$\Sigma=\{p_i\}_{i\in I}$ 的黎曼轨形M 是一个轨形，满足如下条件：(a) $M\backslash\Sigma$ 是一个光滑流形，赋予一个（非完备）黎曼度量g，(b) 在每个点p_i 存在坐标卡(U_i,Γ_i,ϕ_i) 使得(b1) ϕ_i 在$U_i\backslash\{p_i\}$ 上光滑，并且(b2) 在$U_i\backslash\{p_i\}$ 上，度量$g=\phi_i^*\tilde{g}_i$，其中$\tilde{g}_i$ 是B 上某个Γ_i 不变的光滑度量。M 称为完备的黎曼轨形，如果诱导的度量空间是完备的。

分析与方程

1. 考虑序列
$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2},\quad a_1=\frac{2}{5}.$$
证明对所有正整数n都有$a_n<1$。

2. 假设V是平面闭区域$Q=[0,1]\times[0,1]$上的由连续函数构成的n维线性空间。证明存在函数$f\in V$使得
$$\|f\|_{L^2(Q)}=1,\quad \|f\|_{L^\infty(Q)}\geq\sqrt{n}.$$

3. 对于复平面$\mathbb{C}$上的全纯函数$f(z)$，归纳定义$f^{(n+1)}(z)=f(f^{(n)}(z))$, $f^{(1)}(z)=f(z)$。是否存在$\mathbb{C}$上的全纯函数$f(z)$使得对任意$z\in\mathbb{C}$都有$f^{(2023)}(z)=e^{2023z}$？证明你的结论。

4. 记$B_r=\{x\in\mathbb{R}^3||x|\leq r\}$为$\mathbb{R}^3$中半径为$r$的球。假设定义在$\mathbb{R}^3\backslash B_1$(单位球之外)上的连续函数$u$满足
$$\Delta u\leq -u^3,\quad u\geq 0,\quad \forall |x|\geq 1.$$
证明在$\mathbb{R}^3\backslash B_1$上有
$$u=0.$$

5. 考虑函数
$$F(\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n):=\int_{0<s_1<t_1<\cdots<s_n<t_n<1}\prod_{j=1}^{n}e^{i(\alpha_j(t_j+s_j)+\beta_j t_j)}\,\mathrm{d}s_j\mathrm{d}t_j.$$
证明对任何可测集$E\subset\mathbb{R}^n$和任何$\delta>0$，存在只依赖于δ（与E和n都无关）的常数C_δ使得
$$\int_E \mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n\int_{\mathbb{R}^n}|F(\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n)|\,\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\leq C_\delta^n\cdot|E|^\delta.$$

应用与计算数学

1. 考虑如下线性方程组
$$Ax = b,$$
其中$A = (A_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$对称半正定且对角元都是正数, $b = (b_i)_i \in \mathbb{R}^n$。假设该方程组有解，考虑使用高斯－赛德尔迭代求解之。高斯－赛德尔迭代的格式为
$$x_i^{(k+1)} := \frac{1}{A_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \dots, n, \ k \in \mathbb{N}.$$

[(a)]

(a) 请证明高斯－赛德尔迭代从任意初始点出发均收敛。

(b) 若A还是一个秩一矩阵, 请证明不论从何处出发, 高斯－赛德尔迭代一步即可收敛。

2. 为了使大语言模型(LLM) 与人类偏好保持一致，我们需要对其进行微调。给定一个特定的prompt，让LLM生成n个回答。人类标注者将对这n 个回答进行从最好到最差的排序。用π 表示排序（比如，第$\pi(1)$ 个回答认为是最好的）。假设我们有一个在区间$[-1, 1]$ 上强凹（等价地，$-G$是强凸）的且单调递增的函数G。我们的目标是训练一个奖励模型，为第i 个回答分配一个$0 \le r_i \le 1$ 的评分。理想情况下，奖励r_i 应该是以下优化问题的解：
$$\max_{0\le r_1,\dots,r_n\le 1} \sum_{i<j} G(r_{\pi(i)} - r_{\pi(j)}).$$

(a) 解释为什么
$$L(r_1, \dots, r_n) := \sum_{i<j} G(r_{\pi(i)} - r_{\pi(j)})$$
是凹的但不是强凹的（如果需要，可以假设G 具有足够的光滑性）。尽管如此，请证明上述优化问题仍具有唯一解$(r_1^\star, \dots, r_n^\star) \in [0, 1]^n$。

(b) 证明解必须满足
$$1 = r^\star_{\pi(1)} \ge r^\star_{\pi(2)} \ge \cdots \ge r^\star_{\pi(n)} = 0.$$
以及对于所有的$i = 1, \dots, n$，证明$r^\star_{\pi(i)} + r^\star_{\pi(n+1-i)} = 1$。

(c) 现在考虑问题的极限版本。假设当$n \to \infty$ 时，$r_1^\star, \dots, r_n^\star$ 的经验分布收敛于区间$[0, 1]$ 上的概率测度μ。问题可以重新表述为
$$\sup_{\mu} \mathbb{E}_{X,X' \overset{iid}{\sim} \mu} G(|X - X'|),$$
其中X, X' 是从μ 独立且同分布抽取的。如果$\mathbb{E}_{X,X' \overset{iid}{\sim} \mu} G(|X - X'|)$在一个概率测度$\mu^\star$ 上取得最大值，试证明$\mathbb{E}_{X\sim\mu^\star} G(|X - c|)$ 不依赖于$c \in [0, 1]$。

3. 考虑由以下随机微分方程表示的一维交互作用粒子系统：

$$\mathrm{d}X_i = -U'(X_i)\,\mathrm{d}t - \theta\left(X_i - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t^i, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

这儿每个粒子X_i 属于实数轴$\mathbb{R}$，参数θ 和σ 是正数，外部势能$U(x)$定义为$U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$，而$(W_\cdot^i)$ 表示一维空间中的N 个独立的标准布朗运动。

(a) 设N 个粒子的联合分布由$F_N(t,\cdot)$ 表示。请明确地写下F_N 的演化方程。

(b) 考虑独立同分布（i.i.d.）的初始分布，由$F_N(0) = f_0^{\otimes N}$ 表示，其中f_0 属于Schwarz 空间$\mathcal{S}(\mathbb{R})$. 我们如下定义相对熵

$$H(F_N(t)|f_t^{\otimes N}) = \int_{\mathbb{R}^N} F_N(t)\log\frac{F_N(t)}{f_t^{\otimes N}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N.$$

证明对于任意固定时间$T > 0$，

$$\sup_{t\in[0,T]} H(F_N(t)|f_t^{\otimes N}) \le C_T < \infty,$$

其中C_T 是一个仅依赖于T 的普适常数，$(f_t)_{t\in[0,T]}$ 是下面非线性偏微分方程（PDE）的解，

$$\partial_t f_t + \partial_x\Big(f_t[-U'(x) - \theta\,(x - m(t))]\Big) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta_x f_t,$$

其中初始值为f_0，且$m(t) = \int_{\mathbb{R}} y f(t,y)\,\mathrm{d}y$。

(c) 一般来说，我们是否可以期望将先前的结果扩展到如下所示的对时间一致的版本？

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} F_N\log\frac{F_N}{f_t^{\otimes N}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \le C < \infty$$

提供您的结论以及一些直观的计算来支持您的回答。

4. 考虑以下在有界开集Ω上的椭圆方程：

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a(x,u)\nabla u)=h(x)\,, & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d\,,\\ u(x)=g(x), \quad x\in\partial\Omega\,, \end{cases}$$

其中对任意$x\in\Omega$，都有$C\geq a(x,u(x))\geq c>0$，而且Ω 的边界是C^2光滑的. 为了求解这个问题，我们考虑在函数空间$\mathcal{F}$ 上找一个近似解，表示为$f(t,x;\theta)\in\mathcal{F}$，其中$\theta$是表示这个近似解的参数。假设函数空间$\mathcal{F}$ 有这样的性质：对任意函数$u\in C^2(\bar\Omega)$，我们总可以找到一个函数$f(t,x;\theta)\in\mathcal{F}$任意逼近$u$。也就是说对任意$\epsilon>0$，总是存在$f(t,x;\theta)\in\mathcal{F}$ 满足：

$$\max_{|\alpha|\leq 2}\sup_{x\in\bar\Omega}|\partial_x^{(\alpha)}u-\partial_x^{(\alpha)}f|\leq\epsilon\,.$$

(a) 现假设以上椭圆方程有经典解, 并且$a(x,u)$ 和$\frac{\partial}{\partial u}a(x,u)$ 都是关于u 局部Lipschitz的，且最多只有多项式增长。即以下两个不等式对x一致成立：

$$|a(x,u)-a(x,v)|\leq C(|u|^{q_1/2}+|v|^{q_2/2})|u-v|\,;$$
$$|\frac{\partial}{\partial u}a(x,u)-\frac{\partial}{\partial v}a(x,v)|\leq C(|u|^{q_3/2}+|v|^{q_4/2})|u-v|\,,$$

其中q_1,q_2,q_3,q_4 都是非负常数。定义

$$J(f(\cdot;\theta))=\|\nabla\cdot(a(x,f)\nabla f)+h\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f-g\|^2_{H^1(\partial\Omega)}\,.$$

证明对任意$\epsilon>0$, 总是存在常数$C>0$ 使得

$$J(f(\cdot;\theta))<C\epsilon\,.$$

(b) 当$a(x,u)\equiv 1$, 考虑一族近似解$f(\cdot;\theta_k)$，使得当$k\to\infty$ 我们有$J(f(\cdot;\theta_k))\to 0$。证明$\|f(\cdot;\theta_k)-u\|_{L^2(\Omega)}\to 0$。

(c) 在以上J 的定义中，我们把边界条件处理成了惩罚项，因此在实际计算中边界条件可能有误差，请尝试构造一种新的方法使得近似函数能严格满足边界条件。

5. 小孩子玩秋千时，都会通过调整自己的姿势使得秋千越摆越高。让我们考虑如下秋千的简化（线性单摆）数学模型

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+\big(1+\epsilon\cos(\omega t)\big)\phi=0$$

初始条件为$\phi(0)=0$及$\phi'(0)=1$。在模型中$\epsilon\cos(\omega t)$刻画由于小孩姿态改变而引起的秋千摆动长度变化，这里$\epsilon\ll 1$是一个小参数。

(a) 为了让秋千摆幅变大，在上述模型中，ω应该取什么值（讨论所有可能）？

(b) 考虑选取$\omega=1$，方程的解可以展开成为关于小参数ϵ的级数

$$\phi^\epsilon(t)=\phi_0(t)+\epsilon\phi_1(t)+\epsilon^2\phi_2(t)+\ldots$$

请推导时间t 上至$O(1/\epsilon^2)$ 范围内ϕ_0 的解。

(c) 在实际情况中，秋千本身的长度可能有一个小的扰动，此时模型变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+\big(1-\alpha\epsilon^2+\epsilon\cos(\omega t)\big)\phi=0$$

初始条件为$\phi(0)=0$以及$\phi'(0)=1$。已知$\omega=1$，请确定α的取值范围，从而秋千的摆幅依然会放大。

组合与概率

1. 假设$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$满足：$(B_t)_{t\geq 0}$ 和$(B_{-t})_{t\geq 0}$ 是两个独立的1维标准布朗运动且$B_0=0$. (这是所谓的双边布朗运动.) 对于$t\in\mathbb{R}$，令$X_t=B_t-|t|$. 令τ 为(几乎一定) 唯一的时间τ使得$X_\tau=\max_{t\in\mathbb{R}}X_t$. 证明$(X_{\tau+t})_{t\geq 0}$ 和$(X_{\tau-t})_{t\geq 0}$ 同分布.

   注. 如能提出并证明该命题适当的离散版本将酌情得分.

2. 对每个正整数n, 找出最大的实数$f(n)$使得以下性质成立: 对每个$n\times n$ 双随机矩阵M(双随机矩阵是指所有元素均为非负实数且每行每列的元素之和均为1的方阵), 都存在一个$[n]$上的置换π使得$M_{i,\pi(i)}\geq f(n)$对每个$i\in[n]$ 都成立. 此处, $[n]$ 代表集合$\{1,\ldots,n\}$.

3. 令$n\geq 2$ 为一个正整数, 以及$[n]=\{1,\ldots,n\}$. 对$(u_1,\ldots,u_n)\in[0,1]^n$, 分别定义其$S$-平均和$r$-平均为

$$S(u_1,\ldots,u_n)=\min_{i\in[n]}\frac{n}{i}u_{(i)}\quad\text{and}\quad M_r(u_1,\ldots,u_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i^r\right)^{1/r},$$

   其中$u_{(i)}$ 是$u_1,\ldots,u_n$ 中第i 个最小的数, 以及$r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 一个标准均匀变量是一个随机变量$U$ 满足$\mathbb{P}(U\leq\alpha)=\alpha$ 对所有$\alpha\in(0,1)$ 成立; 一个次均匀变量是U 满足$\mathbb{P}(U\leq\alpha)\geq\alpha$ 对所有$\alpha\in(0,1)$成立. 令$U_1,\ldots,U_n$ 为一组独立的标准均匀变量.

   (a) 证明$S(U_1,\ldots,U_n)$ 是标准均匀变量.

   (b) 证明$M_r(U_1,\ldots,U_n)$ 是次均匀变量当且仅当$r\leq -1$.

4. 本题的两问均与在使用尽量少的信息的前提下找到答案有关, 但是他们的解答并没有依赖性.

   (a) 一个服务器上储存了m个(不一定互不相同)的n维布尔向量(即每个向量属于集合$\{0,1\}^n$). 这里$1 \le m \le 2^n$. 我们的目标是找到一个与这些向量都不相同的向量, 或者判定这是不可能的. 但是我们只允许询问服务器"第i个向量的第j维比特是什么?" $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$. 服务器会正确的返回被询问的比特。

   达成目标需要的最少的询问次数是多少? 答案应是一个m和n的函数. 证明你的答案是充分必要的.

   提示. 答案会随m的值的变化有三个区间.

   (b) 令$f : \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ 为一个n 维函数, 即, 有n个变量的布尔函数. 对于$x \in \{0,1\}^n$, 计算$f(x)$的值的时候我们往往不需要知道x的每一位比特. 考虑一个"询问策略" $\mathcal{T}$如下. 我们一位一位地揭示x的值, 一旦已经揭示的值足够决定$f(x)$ 的值, 我们就停止并输出这个值. 如果$f(x)$ 依然不确定, 那么策略$\mathcal{T}$ 根据已经揭示的信息决定下一步询问x的哪一位. 这个方法将一直继续直到$f(x)$ 被确定, 在最坏情况下我们需要揭示所有x的所有位.

   现在令$X : \{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$ 为一个n位的随机字符串, 其中每一位都是独立采样的，第i位的分布为$\mathrm{Ber}(q_i)$，$0 < q_i < 1$. 记P为X对应的概率测度. 给定一个函数f的询问策略$\mathcal{T}$, 对每一个样本X, 在确定$f(X)$的值的过程中, X的某一位不一定会被询问到. 我们令

   $$\delta_i(\mathcal{T}) := P[X_i \text{ 在执行}\mathcal{T}\text{的过程中被询问到}], \qquad i = 1,\dots,n.$$

   另一方面，对于一个布尔函数g, 定义一个变量X_i 对g的影响如下

   $$\mathrm{Inf}_i(g) := P[g(X) \ne g(X^{(i)})],$$

   这里$X^{(i)}$ 是翻转X 的第i位所得到的向量.

   令$f, g : \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ 为两个布尔函数, 令$\mathcal{T}$ 为一个确定f的值的询问策略. 试证明:

   $$|\mathrm{Cov}[f(X), g(X)]| \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\mathcal{T})\mathrm{Inf}_i(g).$$

   这里$\mathrm{Cov}(\cdot,\cdot)$表示协方差.

5. 证明：对任意$\varepsilon > 0$, 存在n_0 使得任取$n \ge n_0$, 所有边数不少于$n^{1+\varepsilon}$ 的n 阶简单图包含一个圈C 满足: 其至少有$|E(C)|$ 条弦. 这里$|\cdot|$是集合的势. (圈C 中**弦**是一条边, 其连接C 中两个顶点但不属于C的边集$E(C)$.)

   注. 若对某个相对小的常数$\varepsilon > 0$ 给出证明将酌情得分.