(Phi tương đối-Tương đối) $\bigotimes$ (Cổ điển-Lượng tử)

VÕ QUỐC PHONG

Ngày 32 tháng 13 năm ∞

- Cơ học Newton:
  - 3 định luật Newton: $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$
  - Xây dựng được các đại lượng bảo toàn: $E, \vec{P}, \vec{L}, ...$
- Cơ lý thuyết: Cơ học Lagrangian, Hamiltonian

$$S = \int L dt; L = T - U$$

$$\delta S = 0 : \text{Nguyên lý tác dụng tối thiểu (phổ quát)}$$

$$\Rightarrow \text{Rút lại được cơ học Newton}$$

- Cơ Newton, cơ lý thuyết là phi tương đối
  $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}|$ phải có giới hạn, max=c sẽ dẫn đến $\Rightarrow$ Cơ tương đối tính (Lý thuyết tương đối hẹp)
- $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}|$ lớn, ta rất khó kiểm soát được (như electron chuyển động trong nguyên tử với quỹ đạo rất phức tạp), vì vậy ta phải:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Cách 1: Xây dựng thêm các đại lượng sau:} \vec{a}, ..., \dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{a}}{dt}, ... \\ \text{Hoặc cách 2: không đi theo mô tuýp Newton} \rightarrow \text{ý niệm mô tả theo xác suất} \ni \text{Lượng tử.} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Như vậy việc có lý thuyết Quantum là tất yếu.

- **Mối quan hệ giữa cổ điển và lượng tử trong gần đúng WKB**:

  Trong QM, phương trình sóng: $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$.

  Gần đúng hàm sóng dưới dạng e-mũ: $\Psi = Ae^{\frac{iW(\vec{r},t)}{\hbar}}$

  $\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\Psi)^2 + V - \frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla}W = 0.$

  Giới hạn cổ điển: $\hbar \to 0$, ta suy ra:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}W)^2 + V = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \vec{\nabla}W \\ \frac{\partial W}{\partial t} + H(\vec{r},\vec{p}) = 0 \end{cases}$$

  Như vậy ta thấy momen của một hạt là gradient của pha W.

  Điều này cho ta một nhận xét, Có thể pha hàm sóng có mối quan hệ với 1 đại lượng cổ điển, chúng ta sẽ thấy rõ điều này trong Tích phân lộ trình.

Định luật II Newton tương đượng với phương trình chuyển động Euler-Lagrange hay phương trình Jacobi Hamilton thông qua Nguyên lý D'alambert và phép đặt tọa độ suy rộng là các tọa độ Descarte, hay minh chứng bằng 1 ví dụ đơn giản.

Định luật II Newton có thể thấy trong Phương trình Schrodinger và cũng cho thấy Pt Euler-Lagrange qua gần đúng WKB. Vì vậy thông qua phương trình Schrodinger chúng ta cũng thấy rằng: ĐL II Newton tương đượng PT Euler-Lagrange.

$E = K + V$, từ đây ta suy ra phương trình Schrodinger bằng cách toán tử hóa các đại lượng động lực. Mà $E = K + V$ là Đl II Newton thông qua cơ chế công.

Ngoài ra ta còn chứng minh, từ giao hoán tử $\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,A]$ và cho $A = P$.

$$\text{Phi tương đối} \rightarrow \text{Tương đối}$$
$$\bigotimes Spin$$
$$\text{Cổ điển} \rightarrow \text{Lượng tử}$$

- Electrodynamics
  - 4 phương trình Maxwell
  - Cổ điển, tương đối tính
- Quantum Mechanics:
  - Lượng tử phi tương đối tính
  - Phương trình Schrodinger + Nguyên lý bất định
- QED:
  - Lượng tử, tương đối tính
  - Quá trình trao đổi photon
  - Dùng hình thức luận Lagrangian của cơ lý thuyết. Xây dựng Lagrangian của QED
- QFT: QED $\rightarrow$ tất cả các trường khác.
- Standart Model (SM): QFT + Group theory + Gauge theory. Gauge theory $\Longleftarrow$ Gauge của QED.
- GR: lý thuyết tương đối rộng $\rightarrow$ hấp dẫn = hình học Riemann.
- String theory: khác hoàn toàn những thứ trên! Nhưng vẫn dùng nguyên lý tác dụng tối thiểu và phải đúng với các lý thuyết đã có.

SPIN

- Từ trường $\rightarrow$ hệ quả tương đối tính
- Từ trường $\rightarrow$ hệ quả của bất biến Lorentz trong ED
- ED $\rightarrow$ Spin $\Rightarrow$ spin là hệ quả của bất biến Lorentz
- Cổ điển phi tương đối không có spin.
  Cổ điển tương đối (như ED) lại có spin $\Rightarrow$ Spin là do C (do tính tương đối tính).
- Lượng tử phi tương đối $\rightarrow$ Spin đưa vào là chấp nhận (như Pauli) (*)
- Lượng tử tương đối tính (QED, QFT): spin tự nhiên (**)
  (*) và (**): các lý thuyết lượng tử, Mô tả "xác suất" $\rightarrow$ spin dễ chấp nhận hơn cổ điển.
- Quantum $\neq$ Cổ điển, Quantum $\rightarrow$ xác suất, Classical $\rightarrow$ lộ trình.
- Spin trong cơ học lương tử
  - Uhlenbeck, Goundsmit $\rightarrow$ Darwin (1927)
    Spin $\rightarrow$ hằng số Lande trong vật lý nguyên tử
  - 1927 (Pauli, Lindsay, Margenau 1957)
  - Spin $\rightarrow$ Zeeman effect
  - Pauli: Spin có hai giá trị $\pm\dfrac{\hbar}{2}$ trên 1 phương nào đó, tương ứng với Angular momentum
    $\phi(s) = a\delta_{s,+1} + b\delta_{s,-1}; a^*a + b^*b = 1$
    $\Rightarrow \hat{\sigma} = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; S_x, S_y$
  - QM $\rightarrow$ phi tương đối, spin là chấp nhận
- Spin trong QED

$$\vec{P}oyting = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0 c^2} = \frac{\vec{E} \times \text{Rot}\vec{A}}{\mu_0 c^2} = \frac{E^n \vec{\nabla} A^n - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{A})}{\mu_0 c^2}$$

$\Rightarrow$ Angular momentum:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int \vec{r} \times (E^n \vec{\nabla} A^n) d^3\vec{r} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \int \vec{r} \times (-\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} d^3\vec{r}$$

Dùng tích phân từng phần và $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$:

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} \int \vec{r} \times (-\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} d^3\vec{r} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_0 c^2} \int \vec{E} \times \vec{A} d^3\vec{r} \equiv \vec{S}$$

$$\vec{A} = (\hat{x} \pm i\hat{y}) \frac{iE_0}{\omega} e^{i\omega t - \frac{i\omega \hat{z}}{c}}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\int \mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{A}^*)d^3\vec{r} = \pm\frac{1}{\mu_0 c^2}\int \frac{\hat{z}E_0^2}{\omega}d^3\vec{r}$$

Năng lượng: $U = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\int \mathrm{Re}(\vec{E}^*\vec{E})d^3\vec{r} = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\int E_0^2 d^3\vec{r} \Rightarrow \frac{S_z}{U} = \frac{1}{\omega}$: nếu $U = \hbar\omega \to S_z = \hbar$ hay spin của trường điện từ bằng 1.

- Spin của trường Dirac

  Tensor năng-xung lượng $\Rightarrow$ xung lượng có dạng

$$\vec{G} = \frac{\hbar}{4i}\left(\psi^+\vec{\nabla}\psi - \frac{1}{c}\psi^+\vec{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + h.c$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \frac{mc^2}{i\hbar}\vec{\beta}\right)\psi$$
$$\Rightarrow \vec{G} = \frac{\hbar}{4i}\left(\overline{\psi^+}\vec{\nabla}\psi + \psi^+\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi)\right) + h.c$$

  Dùng giao hoán tử giữa các α_k

$$\Rightarrow \vec{G} = \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^+\vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^+)\psi\right) + \frac{\hbar}{4}\vec{\nabla}\times(\psi^+\vec{\sigma}\psi)$$
$$\sigma = -i\alpha_2\alpha_3; \sigma_2 = -i\alpha_3\alpha_1; \sigma_3 = -i\alpha_1\alpha_2$$

  Angular momentum

$$\vec{J} = \int \frac{\hbar}{2i}\vec{r}\times\vec{G}d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{4}\int \vec{r}\times[\vec{\nabla}\times(\psi^+\vec{\sigma}\psi)]d^3\vec{r} = \vec{S}$$

  Tích phân từng phần $\Rightarrow \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\int \psi^+\vec{\sigma}\psi d^3\vec{r}$

$$\Rightarrow \hat{S}_{op} = \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}$$

- Thí nghiệm Sterm-Gerlach
  - Có một sự quay của chùm e^-
    $\Rightarrow$ Momen động lượng: $\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p} \neq 0$
    $\Rightarrow$ Gợi ý $\to$ muốn tính $\to$ khảo sát $\vec{J}$
  - Nếu một lý thuyết muốn mô tả spin tự nhiên $\Rightarrow$ momen động lượng phải chứa thành phần spin
  - QM $\to$ không có, ta phải đưa vào bằng tay
  - CED $\to \vec{J}_{ED} \ni \int \vec{E}\times\vec{A}d^3\vec{r} \equiv spin$

- CED là tương đối tính: $\vec{B}$ là biểu hiện cho tính động học tương đối đó.
  $\vec{B} \to \vec{J}_{ED} \equiv spin$
- Trong CED, spin là hệ quả tương đối tính và bất biến Lorentz
- Tại sao ta phải đặt chùm e^- trong $\vec{H}$ ta mới quan sát được spin rõ ràng?

- Lý thuyết lượng tử trong hạt nhân
  - QCD $\to$ gluon SU(3), không dùng trong lý thuyết hạt nhân
  - Lý thuyết hạt nhân
    - QM hiệu dụng
    - Trường trung bình, Hatree-Fock
  - Spin của hạt nhân
    - Khái niệm quan trọng
    - Tổng spin của notron + proton
  - QCD $\to$ mô phỏng tinh thể
  - Khảo sát các đặc tính của hạt nhân $\to$ bán thực nghiệm
  - Vùng tương tác hạt nhân $\to$ strong $\neq$ gluon

- Trong ED, Dirac equation
  - Angular momentum gồm:
    - Orbit
    - Spin
  - Ta không thể quan sát spin riêng lẻ vì:
    - Spin + orbit
    - Và nếu hệ có tính đồng nhất, đẳng hướng của trường
    - Bảo toàn dòng
  - Muốn quan sát spin phải:
    - Loại bỏ orbit
    - Loại bỏ tính đồng nhất đẳng hướng của trường

    $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Cho trường chỉ theo một phương nhất định (loại bỏ tính đồng nhất+đẳng hướng)} \\ \text{Loại bỏ orbit} \to \text{cho vào 1 từ trường vuông với mặt phẳng chuyển động của trường} \end{cases}$$

    $\Rightarrow$ Thí nghiệm Stern-Gerlach

  Spin là đại lượng rất quan trọng trong Vật lý, nó nằm giữa mối quan hệ:

Phi tương đối $\to$ Tương đối

$\bigotimes$ *Spin*

Cổ điển $\to$ Lượng tử

Tích phân lộ trình

- $S_{classical}$ có đóng góp lớn nhất.
- Mỗi S tương ứng với $\leftrightarrow \phi \equiv e^{\frac{i}{\hbar}S}$; Kernel $K \equiv \sum_{S} e^{\frac{i}{\hbar}S}$. So sánh với gần đúng WKB, ta thấy S chính là pha của hàm xác suất.
- Kernel $\leftrightarrow$ xác suất $\Leftrightarrow$ hàm sóng $\Leftrightarrow$ WKB
- $K \backsim Ae^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$
- Lộ trình cổ điển là pha xác suất lớn nhất trong lý thuyết lượng tử.

Cổ điển cho ta biết gia tốc $\rightarrow \vec{a}$.

Lagrange cổ điển $L = T - U$; $\vec{F} = -\text{grad}U = m\vec{a}$, đối với các trường hợp thế U rất phức tạp (gần gủi nhất là thế điện từ $1/\vec{r}$, việc giải cũng rất khó, vì hàm thế dạng này dao động rật mạnh trong phạm vi $\vec{r}$ bé) $\Rightarrow$ Rất khó tính $\vec{a} \Rightarrow$ Ta thay đổi cách tiếp cận $\Rightarrow$ cách tiếp cận Xác suất.

Nhưng dưới phương pháp tích phân lộ trình và gần đúng WKB, cho ta thấy được giữa cổ điển và lượng tử có mối quan hệ chặt chẽ. Nếu ta không muốn tính phương trình Schrodinger$\rightarrow$Ta phải chịu cái khó tính S_{cl} trong hình thức tích phân lộ trình.

Tuy nhiên Kernel K chính xác giải được chỉ với U là dạng dao động tử điều hòa.