Bài tập phần vector

Võ Quốc Phong

Ngày 32 tháng 13 năm ∞

Yêu cầu: Tất cả phải làm hết. Tuần sau ngày 24/03/2024 sẽ kiểm tra.

Bài 1: Nếu biểu diễn tích 2 vector dưới dạng: $\vec{x}\vec{y} = x^\mu y_\mu$ sau đó chuyển hệ tọa độ. Hãy chứng minh rằng:

a/ Tích này không đổi khi chuyển hệ tọa độ.

b/ Sử dụng câu a trên chỉ ra rằng nếu thành phần hiệp biến biến đổi theo $\Lambda^i_{j'}$ thì thành phần phản biến biến đổi theo $A^{j'}_i = ((\Lambda^i_{j'})^T)^{-1}$. Lưu ý rằng bài tập này làm khác với trong lớp, trong lớp dùng vector cơ sở.

Bài 2: Chứng minh rằng ký hiệu Christoffel không phải là tensor hạng 3. Gợi ý: thực hiện phép biến đổi tọa độ của ký hiệu này.

Bài 3: Chứng minh rằng định thức của tensor metric luôn khác không. Gợi ý: nếu $\vec{x}\vec{y} = 0$ với mọi $\vec{y}$, nếu tồn tại $\vec{x}$ với các thành phần không đồng thời bằng không sẽ dẫn đến định thức metric bằng 0.

Bài 4: Nếu ta đặt θ là góc giữa hai vector, và định nghĩa tích vô hướng $\vec{a}\vec{b} = a.b\cos\theta$. Hãy chứng minh rằng: $\cos\theta = \frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\sqrt{g_{ij}b^ib^j}}$. Từ đó nêu lên ý nghĩa của việc đưa độ đo vào thông qua tích vô hướng.

Bài 5: Chứng minh rằng tích có hướng của hai vector cơ sở trong không gian 3 chiều trực giao: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sqrt{g}e_{ijk}\vec{e}^k$. g là định thức của tensor metric.

Từ đó đưa ra tích vô hướng của hai vector bất kỳ trong không gian bất kỳ.

Bài giải

Bài 1a: chiều dài của một vector là một con số, con số nên bất biến trong mọi hệ tọa độ.

Bài 1b: $x^{\mu'} y_{\mu'} = A^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\beta}_{\mu'} x^{\alpha} y_{\beta} = x^{\mu} y_{\mu}$ nên $A^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\beta}_{\mu'} = \delta^{\beta}_{\alpha}$.

Bài 2: Dựa theo phép đặt của ký hiệu Christoffel ta viết lại:

$dA_i = \Gamma^{\alpha}_{ik} A_{\alpha} dx^i$

$dA'_i = \Gamma'^{\alpha}_{ik} A'_{\alpha} dx'^i$.

Ngoài ra ta dùng biến đổi tọa độ:

$A'_i = \Lambda^{m}_{'i} A_m$.

Sau đó dùng one-form ta có thể thấy rằng: $\Lambda^{m}_{'i} = \frac{\partial x_m}{\partial x'_i}$. Tiếp theo sẽ thấy vi phân hai vế của A'_i và so sánh sẽ rút ra kết quả.

Bài 3: $\vec{x}\vec{y} = 0$ với mọi $\vec{y}$ mà tồn tại một $\vec{x} \neq 0$ sẽ dẫn đến:

$\vec{x}\vec{y} = g_{ij} x^i y^j = 0$ như vậy các thành phần x^i sẽ không đồng thời bằng 0, do $\vec{x}$ khác không. Để nghiệm đúng phương trình trên với mọi $\vec{y}$ tức là $|g_{ij}| = 0$. Hay nói cách khác là hệ suy biến, tức là không có nghiệm duy nhất. Để hệ không suy biến, buộc $|g_{ij}| \neq 0$.

Hệ phương trình tuyến tính, có nghiệm duy nhất khi $|A| \neq 0$, có nghiệm không tầm thường khi $|A| = 0$.

Bài 4: $\vec{a}\vec{b} = a.b \cos\theta = g_{ij} a^i a^j$.

Từ đó ta suy ra:

$\cos\theta = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j} \sqrt{g_{ij} b^i b^j}}$

trong đó đã sử dụng $a = \sqrt{a^i a_i} = \sqrt{g_{ij} a^i a^j}$ và b tương tự quy luật như a.

Bài 5: Tensor metric có định nghĩa, $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$. Như vậy ta có $\vec{e^i}\vec{e^j}\vec{e}_j\vec{e}_k = \delta^i_k$. Nếu $i \neq k$, chúng ta có $\delta^i_k = 0$ và lưu ý thêm rằng $\vec{e^i}\vec{e}_j = \delta^i_j$ do tính trực giao, vì vây:

$\vec{e^i}\vec{e}_j\vec{e}_k = 0.$

Do đó, $\vec{e^i}$ luôn vuông góc với mặt phẳng $(\vec{e}_j, \vec{e}_k)$. Tích có hướng của $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ sẽ có phương theo vector $\vec{e^k}$.

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = |\vec{e}_i||\vec{e}_j| \sin\theta \frac{\vec{e^k}}{|\vec{e^k}|}.$

Tiếp theo ta tính tiếp $\cos\theta = \frac{\vec{e}_i\vec{e}_j}{|\vec{e}_i||\vec{e}_j|} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$. Lưu ý rằng không chạy tổng.

Trong đó ta đã dùng $|\vec{e}_i| = \sqrt{\vec{e}_i\vec{e}_i} = \sqrt{g_{ii}}$. Ta suy ra:
$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{g_{ij}^2}{g_{ii}g_{jj}}} = \sqrt{\frac{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}{g_{ii}g_{jj}}}.$
$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = |\vec{e}_i||\vec{e}_j| \sin\theta \frac{\vec{e^k}}{|\vec{e^k}|} = \sqrt{g_{ii}g_{jj}}\sqrt{1 - \frac{g_{ij}^2}{g_{ii}g_{jj}}}\frac{\vec{e^k}}{|\vec{e^k}|} = \sqrt{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}\frac{\vec{e^k}}{\sqrt{g^{kk}}}.$

Do hệ trục tọa độ trực giao nên $g_{kk} = \frac{1}{g^{kk}}$.

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sqrt{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}\frac{\vec{e^k}}{\sqrt{g^{kk}}} = \sqrt{g_{kk}(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2)}\vec{e^k} = \sqrt{g}\epsilon_{ijk}\vec{e^k}.$

Như vậy tích vector của 2 vector bất kỳ trong không gian trực chuẩn như sau:

$\vec{a} \times \vec{b} = a^i\vec{e}_i \times (b^j\vec{e}_j) = a^i b^j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sqrt{g} a^i b^j \epsilon_{ijk}\vec{e^k}.$

Ta phát triển lên không gian cong bất kỳ: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = c^k\vec{e}_k$.

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$. Mà $\cos\theta$ dùng công thức trong bài 4, từ đó suy ra được $\sin\theta$. Gọi $\vec{u}$ là **vector đơn vị theo phương** $\vec{c}$ hay $\vec{c} = c\vec{u} = c.u^k\vec{e}_k$.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = ab\sin\theta u^k\vec{e}_k$. Lưu ý: $g_{ij}u^i u^j = 1$.