Mục lục

Chương 1
Các khái niệm cơ bản

1. Nhóm

Tập hợp $G \neq \emptyset$ được trang bị phép nhân

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \to gh$$

G được gọi là một **nhóm** nếu thỏa các tiên đề sau:

1. Tính kết hợp:

   $\forall$ g, h, k $\in$ G: (gh)k = g(hk)

2. Tồn tại đơn vị:

   $\exists$ e $\in$G, $\forall$ g$\in$G: ge = eg = g

3. Tồn tại nghịch đảo:

   $\forall$ g $\in$G, $\exists$ $g^{-1} \in$G: $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Phép toán (g, h) $\to$ gh gọi là **phép nhân nhóm**, gh là tích của g và h.

Nếu gh = hg $\forall$g, h $\in$ G thì G là nhóm giao hoán.

e là đơn vị của nhóm,

g^{-1} là nghịch đảo của g.

Số phần tử của nhóm G được gọi là cấp của nhóm: G là nhóm hữu hạn nếu có cấp hữu hạn, ngược lại G là nhóm vô hạn.

Ví dụ:

Các số nguyên Z (các số hữu tỷ Q, các số thực R) với phép cộng thông thường là các nhóm giao hoán, vô hạn.

Các số thực khác 0 với phép nhân thông thường là một nhóm vô hạn, giao hoán.

{1, -1} với phép nhân thông thường là một nhóm cấp 2, giao hoán.

{1, -1, i, -i} với phép nhân số phức là một nhóm cấp 4, giao hoán.

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập hợp gồm n phần tử. Phép hoán vị là một song ánh $\sigma: S \to S$. Nhóm hoán vị S_n là tập hợp các phép hoán vị với phép nhân nhóm là phép hợp các ánh xạ. Nhóm S_n có cấp n!

M(n,R) hay M(n,C) các ma trận cấp n, thực hay phức, với phép cộng các ma trận là một nhóm giao hoán.

GL(n,R) hay GL(n,C) các ma trận cấp n, thực hay phức, không suy biến (định thức khác 0) với phép nhân các ma trận là một nhóm không giao hoán. GL(n,C) được gọi là Nhóm tuyến tính tổng quát.

SL(n,R) hay SL(n,C) các ma trận có định thức bằng 1 gọi là Nhóm tuyến tính đặc biệt.

$O(n) = \{O \in GL(n, R): O^t O = I_n\}$ gọi là nhóm các ma trận trực giao.

$SO(n) = \{O \in O(n): \det O = 1\}$ là nhóm các ma trận trực giao đặc biệt.

$U(n) = \{U \in GL(n,C): U^+ U = I_n\}$ là nhóm các ma trận unita.

$SU(n) = \{U \in U(n): \det U = 1\}$ là nhóm các ma trận unita đặc biệt.

2. Nhóm con

Tập con khác rỗng H của nhóm G được gọi là một nhóm con nếu H là một nhóm với phép nhân nhóm trong G.

$H = \{e\}$ hay $H = G$ là các nhóm con hiển nhiên. Nhóm con $H \neq \{e\}$ và $H \neq G$ được gọi là một nhóm con thực sự.

Ví dụ:

{1, -1} là nhóm con của nhóm {1, -1, i, -i}.

SL(n,R), O(n) là các nhóm con của nhóm GL(n,R).

SL(n,C), U(n) là các nhóm con của nhóm GL(n,C).

Giả sử H là một nhóm con của nhóm G và $g \in G$, tập con $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}: h \in H\}$ cũng là một nhóm con của G. Nếu $gHg^{-1} = H \ \ \forall g \in G$, thì H được gọi là một nhóm con chuẩn tắc của G.

Ví dụ:

Các số nguyên chẵn là một nhóm con chuẩn tắc của nhóm các số nguyên Z.

SO(n) là nhóm con chuẩn tắc của nhóm O(n).

SU(n) là nhóm con chuẩn tắc của nhóm U(n).

3. Phép đồng cấu

G_1 và G_2 là các nhóm. Ánh xạ $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ là một phép đồng cấu nếu

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\,\phi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G_1$$

Nếu phép đồng cấu $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ là một song ánh thì ϕ được gọi là một phép đẳng cấu. Khi đó G_1 và G_2 là hai nhóm đẳng cấu với nhau và được xem là đồng nhất về mặt cấu trúc nhóm.

4. Tích trực tiếp các nhóm

Có một cách đơn giản để xây dựng một nhóm mới từ các nhóm cho trước.

G_1 và G_2 là các nhóm. Tập hợp

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2): g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

được trang bị phép nhân sau

$$(g_1, g_2)\otimes(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2), \forall g_1, h_1 \in G_1 \ \&\ g_2, h_2 \in G_2$$

là một nhóm được gọi là tích trực tiếp $G_1 \otimes G_2$ của hai nhóm G_1 và G_2 .

Các nhóm G_1 và G_2 bây giờ là các nhóm con chuẩn tắc (thông qua các phép đẳng cấu) của tích trực tiếp $G_1 \otimes G_2$.

5. Tổng trực tiếp các không gian tuyến tính

Giả sử $V_1, V_2, \dots, V_k$ là các không gian tuyến tính trên C.

Đặt $V = \{(v_1, v_2, \dots, v_k): v_j \in V_j,\ j = 1,2, \dots, k\}$.

Ta trang bị phép cộng và phép nhân với vô hướng trong V như sau:

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) + (u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_k + u_k)$$

$$z(v_1, v_2, \dots, v_k) = (zv_1, zv_2, \dots, zv_k) \ \ z \in C$$

V bây giờ là một không gian tuyến tính.

Bởi vì mỗi vector trong V có một biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) = (v_1, 0, \dots, 0) + (0, v_2, \dots, 0) + \cdots + (0,0, \dots, v_k)$$

và $\{(v_1, 0, \dots, 0): v_1 \in V_1\}, \dots, \{(0,0, \dots, v_k): v_k \in V_k\}$ là các không gian con trong V lần lượt đẳng cấu với $V_1, \dots, V_k$ nên không gian V được gọi là tổng trực tiếp của các không gian $V_1, V_2, \dots, V_k$. Ta dùng ký hiệu:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

Rõ ràng: $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k$

Giả sử $J_j: V_j \to V_j$ là các toán tử tuyến tính. Gọi $J: V \to V$ là toán tử xác định như sau:

$$J(v_1, v_2, \dots, v_k) = (J_1 v_1, J_2 v_2, \dots, J_k v_k)$$

Rõ ràng J là toán tử tuyến tính.

Để ý rằng:

$$J(v_1, 0, \dots, 0) = (J_1 v_1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots$$

$$J(0, \dots, 0, v_k) = (0, \dots, 0, J_k v_k)$$

nghĩa là $\{(v_1, 0, \dots, 0): v_1 \in V_1\}, \dots, \{(0, \dots, 0, v_k): v_k \in V_k\}$ là các không gian con bất biến của J, và

$$J(v_1, v_2, \dots, v_k) = (J_1 v_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, J_k v_k)$$

Nên J được gọi là tổng trực tiếp của các toán tử $J_1, J_2, \dots, J_k$, và ta viết

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k .$$

Bây giờ giả sử $V_1, V_2, \dots, V_k$ là các không gian con của không gian V:

Ta nói V là tổng trực tiếp của $V_1, V_2, \dots, V_k$ và viết $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ nếu mỗi vector v của V có một biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$v = v_1 + \cdots + v_k,\ \ v_j \in V_j$$

Điều này có được khi và chỉ khi

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset,\ \ i \neq j.$$

Tiếp tục, giả sử $J: V \to V$ là toán tử tuyến tính. Ta có:

$$Jv = Jv_1 + \cdots + Jv_k$$

Nếu $V_j, j = 1, \dots, k$ là các không gian con bất biến của toán tử J, nghĩa là:

$$Jv_j \in V_j, \forall\, v_j \in V_j.$$

Đặt $J_j = J: V_j \to V_j$, ta có:

$$Jv = J_1 v_1 + \cdots + J_k v_k$$

J được gọi là tổng trực tiếp của các toán tử $J_1, J_2, \dots, J_k$ và ta viết như sau

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k.$$

6. Tích tensor các không gian

U và V là các không gian tuyến tính có các cơ sở $\{u_j,\ j = 1, \dots, m\}$ và $\{v_k,\ k = 1, \dots, n\}$.

Đặt $U\otimes V = \{u\otimes v: u \in U, v \in V\}$

Phép toán $u\otimes v$ được qui ước là song tuyến tính:

$$(\alpha u_1 + \beta u_2)\otimes v = \alpha u_1\otimes v + \beta u_2\otimes v$$

$$u\otimes(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha u\otimes v_1 + \beta u\otimes v_2 \quad \alpha, \beta\in C$$

Rõ ràng mọi tích $u\otimes v$ đều có thể được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính:

$$u\otimes v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_j\otimes v_k \quad \alpha_{jk}\in C$$

Ta xem $U\otimes V$ là không gian tuyến tính được căng bởi các vector cơ sở

$$\{u_j\otimes v_k:\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, n\}$$

$U\otimes V$ được gọi là **tích tensor** của U và V. Rõ ràng dim $U\otimes V$ = mn.

Cho A là ma trận cấp m, B là ma trận cấp n.

Tích trực tiếp $A\otimes B$ là ma trận cấp mn xác định như sau:

$$(A\otimes B)u_j\otimes v_k = Au_j\otimes Bv_k = \left(\sum_{p=1}^{m} A_{pj} u_p\right)\otimes \left(\sum_{q=1}^{n} B_{qk} v_q\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pj} B_{qk} u_p\otimes v_q$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (A\otimes B)_{pq\,jk} u_p\otimes v_q$$

Phần tử ở hàng pq cột jk trong ma trận $A\otimes B$ là

$$(A\otimes B)_{pq\,jk} = A_{pj} B_{qk}$$

Chỉ số hàng pq và chỉ số cột jk là chỉ số kép. Thứ tự của các hàng và các cột trong ma trận $A\otimes B$ được xác định khi cơ sở $\{u_p\otimes v_q: p = 1, \dots, m, q = 1, \dots, n\}$ được cho một thứ tự:

$$pq < p'q' \Leftrightarrow \begin{cases} p < p' \\ p = p' \text{ và } q < q' \end{cases}$$

Ma trận $A\otimes B$ được gọi là **tích trực tiếp** của hai ma trận A và B.

Một số công thức hữu dụng của tích trực tiếp:

a. $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$

$$((A\otimes B)\otimes C)_{pqr\,jkl} = (A\otimes B)_{pq\,jk} C_{rl} = A_{pj} B_{qk} C_{rl} = A_{pj} (B\otimes C)_{qr\,kl}$$

$$= (A\otimes(B\otimes C))_{pqr\,jkl}$$

b. $(A + B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$

$A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$

c. $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$

$$(A\otimes B)(C\otimes D)_{pq\,rs} = \sum_{jk}(A\otimes B)_{pq\,jk}(C\otimes D)_{jk\,rs} = \sum_{jk} A_{pj}B_{qk}C_{jr}D_{ks}$$

$$= \left(\sum_j A_{pj}C_{jr}\right)\left(\sum_k B_{qk}D_{ks}\right) = (AC)_{pr}(BD)_{qs}$$

$$= (AC\otimes BD)_{pq\,rs}$$

d. $\overline{A\otimes B} = \overline{A}\otimes\overline{B}$

e. $(A\otimes B)^t = A^t\otimes B^t$

Chương 2
Hàm Exponential và hàm Logarithm của ma trận

1. Chuẩn của ma trận

Cho ma trận $A \in M(n, C)$. Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij})$ được định nghĩa như sau:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Chuẩn của ma trận có các tính chất cơ bản sau:

1. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\| \quad \alpha \in C$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
4. $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$,

Một số định nghĩa cơ bản:

Dãy ma trận A_k, $k = 1,2,\dots$ được gọi là hội tụ về ma trận A, ký hiệu $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ hay $A_k \to A$, nếu $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0$.

Cho dãy ma trận $A_k = (a_{k\,ij})$ và ma trận $A = (a_{ij})$. Dễ thấy rằng: $A_k \to A$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k\,ij} = a_{ij}, i, j = 1, \dots, n$.

Chuỗi ma trận $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ được gọi là hội tụ về ma trận S nếu dãy các tổng từng phần $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ hội tụ về ma trận S, khi đó ta viết: $S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Cho ma trận $A(t) = \left(a_{jk}(t)\right)$, $a_{jk}(t)$ là các hàm giải tích của biến thực $t \in (a, b)$. Đạo hàm của ma trận $A(t)$ tại điểm t được định nghĩa là giới hạn:

$$A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(A(t+h) - A(t))$$

Rõ ràng: $\qquad A'(t) = \left(a'_{jk}(t)\right)$

Không gian định chuẩn

X là một không gian tuyến tính trên trường số thực R hay trường số phức C. Chuẩn $\| \ \|$ là một hàm số thực không âm xác định trên X, thỏa các tiên đề sau:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \alpha \in R, C.$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Không gian tuyến tính X được trang bị chuẩn được gọi là một không gian định chuẩn.

Các số thực R cùng với giá trị tuyệt đối $|x|, x \in R$, các số phức C cùng với mô đun $|z|, z \in C$ là các không gian định chuẩn.

Không gian Euclide $R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n): x_j \in R\}$ với chuẩn $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

M(n,C) cùng với chuẩn của ma trận là một không gian định chuẩn.

Trong một không gian định chuẩn ta có thể định nghĩa **sự hội tụ** của một dãy, một chuỗi, và định nghĩa các hàm bằng các chuỗi lũy thừa hội tụ.

Không gian topology

X là tập khác rỗng và $\boldsymbol{\tau}$ là một họ các tập con của X. $\boldsymbol{\tau}$ là một topology nếu:

1. $X, \emptyset \in \boldsymbol{\tau}$,
2. $O_\alpha \in \boldsymbol{\tau}$ thì $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \boldsymbol{\tau}$,
3. $O_\alpha \in \boldsymbol{\tau}$ $\alpha = 1, \dots, n$ thì $\bigcap_{\alpha=1}^{n} O_\alpha \in \boldsymbol{\tau}$.

X bây giờ là một không gian topology. $O_\alpha \in \boldsymbol{\tau}$ được gọi là các tập mở. Một tập được gọi là tập đóng nếu phần bù của nó là một tập mở.

Không gian topology M(n,C):

- Quả cầu mở tâm $A \in M(n, C)$, bán kính $r > 0$ là tập hợp

$$B_r(A) = \{M \in M(n, C): \|M - A\| < r\}$$

- Tập con O trong M(n,C) được gọi là một tập mở nếu với mọi điểm $A \in O$ tồn tại $r > 0$ sao cho $B_r(A) \subset O$.

- Lân cận của một điểm là một tập mở chứa điểm đó.

- Tập $D \subseteq M(n,C)$ là tập đóng khi và chỉ khi nó chứa giới hạn của mọi dãy trong D hội tụ. Thật vậy, giả sử D là tập đóng và A_k là một dãy trong D hội tụ về A. Nếu $A \in D^c$, do D^c là một tập mở nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B_\varepsilon(A) \subset D^c$. Suy ra $\|A_k - A\| > \varepsilon, \forall k = 1,2, \dots$.Điều này là vô lý nên $A \in D$. Ngược lại, giả sử D là tập chứa giới hạn của mọi dãy trong D hội tụ và $A \in D^c$. Do A không là giới hạn của một dãy trong D hội tụ nên tồn tại số nguyên dương k sao cho $B_{1/k}(A) \cap D = \emptyset$. Suy ra $B_{1/k}(A) \subset D^c$, hay D^c mở.

2. Hàm exponential của ma trận

Tương tự như hàm $\exp z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$, $z \in C$, $|z| < \infty$, ta có sự mở rộng sau đây cho ma trận.

Hàm exp A của ma trận A cấp n được định nghĩa bởi chuỗi hội tụ

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} , \qquad \|A\| < +\infty$$

Quy ước $A^0 = I_n$.

Ta chứng minh chuỗi exp A hội tụ:

Thật vậy, ta xét dãy các tổng từng phần $S_k = \sum_{p=0}^{k} \frac{A^p}{p!}$, và đặt $S_k = \left(s_{k\,ij}\right)$ $i, j = 1, \dots, n$.

Chuỗi số $\exp\|A\| = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!}$ hội tụ nên dãy các tổng từng phần của nó là một dãy Cauchy: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ số tự nhiên m sao cho $\forall\, l > k \geq m: \sum_{p=k+1}^{l} \frac{\|A\|^p}{p!} < \varepsilon$.

Ta có:

$$\left|s_{l\,ij} - s_{k\,ij}\right| \leq \|S_l - S_k\| \leq \sum_{p=l+1}^{k} \frac{\|A\|^p}{p!} < \varepsilon, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Vậy dãy số $s_{k\,ij}, k = 1,2, \dots$ là một dãy Cauchy nên hội tụ. Đặt $\lim_{k\to\infty} s_{k\,ij} = s_{ij}$ và $S = \left(s_{ij}\right)$, ta có $S_k \to S$.

Chuỗi ma trận $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ hội tụ. Một chuỗi ma trận hội tụ tuyệt đối thì hội tụ. Chứng minh tương tự exp A.

Bởi vì exp A là chuỗi lũy thừa hội tụ với mọi ma trận $\|A\| < +\infty$ nên các phần tử ma trận của exp A là các hàm nguyên của các phần tử ma trận của A.

Một số công thức hữu dụng của exp A:

1. Nếu $AB = BA$ thì $\exp A \exp B = \exp(A + B)$.

$$\frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} A^i B^{n-i}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = \exp(A + B)$$

Hệ quả: exp A là ma trận khả nghịch $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

2. $B(\exp A)B^{-1} = \exp(BAB^{-1})$.

Tổng từng phần thứ n của vế phải:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(BAB^{-1})^j}{j!} = B\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!}\right) B^{-1}$$

Cho $n \to \infty$, ta có:

$$\left\| B\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!}\right) B^{-1} - B(\exp A)B^{-1} \right\| \le \|B\| \left\| \sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!} - (\exp A) \right\| \|B^{-1}\| \to 0$$

3. $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

Ma trận $C = (c_{ij})$ i,j = 1,...,n là một ma trận tam giác trên nếu $c_{ij} = 0$ với mọi $1 \le j < i \le n$, nghĩa là tất cả các phần tử bên dưới đường chéo chính đều bằng 0 và các phần tử trên đường chéo chính là các trị riêng của C. Giả sử các trị riêng đó là $\lambda_1,...,\lambda_n$. Dễ thấy rằng ma trận exp C cũng là một ma trận tam giác trên với các trị riêng $\exp\lambda_1, ... , \exp\lambda_n$.

Bởi vì mọi ma trận A cấp n đều tương đương với một ma trận tam giác trên C: $A = BCB^{-1}$, suy ra: $\det \exp A = \det \exp (BCB^{-1}) = \det (B (\exp C) B^{-1}) = \det \exp C = \exp (\lambda_1 + ... + \lambda_n) = \exp (\operatorname{tr} C) = \exp (\operatorname{tr} A)$.

4. $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.

Theo định nghĩa phép đạo hàm của ma trận:

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[e^{(t+h)A} - e^{tA}\right] = e^{tA} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(e^{hA} - I_n)$$

Và

$$\frac{1}{h}\left(e^{hA} - I_n\right) = A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \cdots$$

Khi $|h| < 1$, ta có đánh giá:

$$\left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I_n\right) - A \right\| \le \frac{|h|\,\|A\|^2}{2!} + \frac{|h|^2\|A\|^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|h|^j \|A\|^{j+1}}{(j+1)!}$$

$$\le |h| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{j+1}}{(j+1)!} \le |h| e^{\|A\|}$$

Suy ra: $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I_n\right) = A$.

3. Hàm logarithm của ma trận

Ta gọi w là logarithm của số phức z, viết w = log z, nếu $z = e^{w}$.

Để tìm w ta đặt w = u + iv, $z = re^{i\theta}$ và thay vào phương trình $z = e^{w}$:

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv}$$

Ta có: $u = \ln r = \ln|z|$,

$v = \theta + k2\pi = \arg(z)\,,\ k \in Z$

Suy ra: $\log z = \ln|z| + i\arg(z)$.

Hàm $\arg(z) = \theta + k2\pi$, $k \in Z$ là hàm đa trị nên log z là hàm đa trị.

Khi z = 0 thì ln0 và arg(0) không xác định nên log 0 cũng không xác định.

Chọn $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi$. Khi đó ta có Nhành Chính (Principal Branch) của hàm log z:

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

Nhành Chính Log z bây giờ là một hàm đơn trị, giải tích trên tập mở của mặt phẳng phức với phần không dương của trục thực $\{x \in R : x \le 0\}$ bị loại bỏ (a branch cut).

Khai triển Taylor của Log z quanh 1 có dạng:

$$\mathrm{Log}\, z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(z-1)^{j}, \quad |z-1| < 1$$

Định nghĩa của logarithm log z cho ta các đẳng thức:

$$e^{\mathrm{Log} z} = z\,, \qquad |z-1| < 1$$

$$\mathrm{Log}\, e^{z} = z\,, \qquad |e^{z}-1| < 1$$

Bây giờ ta mở rộng logarithm cho ma trận.

Hàm logarithm log B của ma trận B cấp n được định nghĩa bằng chuỗi ma trận:

$$\log B = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(B - I_n)^{j}, \qquad \|B - I_n\| < 1$$

Chuỗi này hội tụ tuyệt đối. Các phần tử ma trận log B là các hàm giải tích của các phần tử ma trận B.

Hàm mũ exp A và hàm logarithm log B của ma trận cũng thỏa các đẳng thức sau:

$$\log(\exp A) = A, \qquad \|\exp A - I_n\| < 1.$$

$$\exp(\log B) = B, \qquad \|B - I_n\| < 1.$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất:

Giả sử A là ma trận thỏa $\|\exp A - I_n\| < 1$. Nếu A có thể chéo hóa, tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch C sao cho $A = CDC^{-1}$. Ta dùng ký hiệu $D = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ cho các ma trận chéo.

Ta có:

$$\exp A = \exp(CDC^{-1}) = C(\exp D)C^{-1} = C\,\mathrm{diag}\{e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}\}C^{-1},$$

$$(\exp A - I_n)^j = C\,\mathrm{diag}\{(e^{\alpha_1} - 1)^j, \dots, (e^{\alpha_n} - 1)^j\}C^{-1},$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\log \exp A &= C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \mathrm{diag}\{(e^{\alpha_1} - 1)^j, \dots, (e^{\alpha_n} - 1)^j\}\Big)C^{-1} \\
&= C\,\mathrm{diag}\{\log e^{\alpha_1}, \dots, \log e^{\alpha_1}\}C^{-1} \\
&= C\,\mathrm{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}C^{-1} \\
&= C\,D\,C^{-1} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Tổng quát, mọi ma trận A cấp n là giới hạn của một dãy các ma trận có thể chéo hóa A_k, k=1,2,….

Ta đã chứng minh: $\log \exp A_k = A_k$.

Do các hàm exp và log là liên tục nên:

$$\log \exp A = \lim_{k\to\infty} \log \exp A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = A.$$

Đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Với mọi ma trận $A \in M(n,C)$ thì ma trận exp A có định thức khác 0, $\exp A \in GL(n,C)$, đặc biệt $\exp O = I_n$. Như vậy exp là một ánh xạ từ M(n,C) vào GL(n,C). Hơn nữa, ta sẽ chứng minh rằng trong một lân cận của ma trận không $O \in M(n,C)$ ánh xạ exp còn là một song ánh.

a. $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: \|A\| < \delta \Rightarrow \|\exp A - I_n\| < \varepsilon$,

Đặc biệt, nếu $\|A\| < \ln 2$ thì $\|\exp A - I_n\| < 1$.

Thật vậy:

$\forall \varepsilon > 0$ và $0 < \delta < \ln(1+\varepsilon)$, nếu ma trận $A \in M(n,C)$ có $\|A\| < \delta$ thì

$$\|\exp A - I_n\| \le \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\Big\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j}{j!} = e^{\delta} - 1 < \varepsilon$$

b. Tồn tại một lân cận V của ma trận không O trong M(n,C) và quả cầu mở $B_\varepsilon(I_n)$ tâm I_n bán kính $\varepsilon > 0$ trong GL(n,C) sao cho ánh xạ exp: $V \to B_\varepsilon(I_n)$ là một song ánh.

Gọi $B_{\ln 2}(O) = \{A \in M(n,C) : \|A\| < \ln 2\}$ là quả cầu mở tâm O, bán kính ln2 trong M(n,C) và $B_1(I_n) = \{B \in GL(n,C) : \|B - I_n\| < 1\}$ là quả cầu mở tâm I_n, bán kính 1 trong GL(n,C).

Ánh xạ exp: $B_{\ln 2}(O) \to B_1(I_n)$ là 1-1. Thật vậy, nếu $A_1, A_2 \in B_{\ln 2}(O)$ và $\exp A_1 = \exp A_2$ thì $\log(\exp A_1) = \log(\exp A_2)$, nghĩa là $A_1 = A_2$.

Chọn $\varepsilon = \frac{\ln 2}{1+\ln 2} < 1$. Ánh xạ exp: $B_{\ln 2}(O) \to B_\varepsilon(I_n)$ là ánh xạ lên. Thật vậy, giả sử $B \in B_\varepsilon(I_n)$. Ta có:

$$\|\log B - O\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \|B - I_n\|^j < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \varepsilon^j < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j = \varepsilon/(1-\varepsilon) = \ln 2$$

Suy ra: $\log B \in B_{\ln 2}(O)$.

Như đã biết exp (log B) = B, nên exp là ánh xạ lên.

Đặt $V = B_{\ln 2}(O) \cap \exp^{-1}\big(B_\varepsilon(I_n)\big)$, V là tập mở do exp là ánh xạ liên tục. Khi đó exp: $V \to B_\varepsilon(I_n)$ là một song ánh.

Ánh xạ ngược $\exp^{-1}$ là hàm logarithm log: $B_\varepsilon(I_n) \to V$.

Chương 3
Nhóm Lie và đại số Lie

1. Nhóm Lie ma trận

Nhóm Lie ma trận G là một nhóm con của nhóm GL(n,C), ngoại trừ các nhóm con hữu hạn hay vô hạn đếm được.

GL(n,C), SL(n,C), GL(n,R), SL(n,R), U(n), SU(n), O(n), SO(n) là các nhóm Lie.

U(n) là một nhóm Lie đóng (tập đóng trong M(n,C)).

Giả sử U_k là một dãy trong U(n) hội tụ về U:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in N, \forall k > m: \|U_k - U\| < \varepsilon.$$

Suy ra:

$$|\|U_k\| - \|U\|| < \|U_k - U\| < \varepsilon,\ \ k > m,$$

$$\|U_k\| < \|U\| + \varepsilon,\ \ k > m.$$

Gọi $b = \max\{\|U_1\|, \dots, \|U_m\|, \|U\| + \varepsilon\}$.

Vậy dãy U_k bị chặn: $\|U_k\| < b, \forall k \in N$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\|U^+U - I_n\| &= \|U^+(U - U_k) + (U^+ - U_k^+)U_k\| \\ &\leq \|U^+\|\|U - U_k\| + \|U_k\|\|U^+ - U_k^+\| \\ &< c\,\|U - U_k\|, \qquad c = b + \|U^+\|.\end{aligned}$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, chọn k đủ lớn ta sẽ có:

$$\|U^+U - I_n\| < \varepsilon$$

Suy ra $U^+U = I_n$.

GL(n,C) và GL(n,R) là các nhóm Lie mở.

Ta chứng minh phần bù của GL(n,C) trong M(n,C) là đóng. Giả sử dãy B_k trong $GL(n,C)^c$ hội tụ về B. Do det: M(n,C) → C là hàm liên tục nên $\det B = \lim_{k\to\infty} \det B_k = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$. Vậy $B \in GL(n,C)^c$.

2. Ma trận tiếp xúc

G là một nhóm Lie ma trận và $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$ là một đường cong giải tích trong G đi qua đơn vị $A(0) = I_n$, tham số thực $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset R$.

Ma trận tiếp xúc A của đường cong A(t) tại đơn vị I_n được định nghĩa bởi phép đạo hàm

$$A = \frac{d}{dt}A(t)\big|_{t=0} = A'(0)$$

Giả sử A(t) và B(t) là hai đường cong giải tích đi qua đơn vị $A(0) = B(0) = I_n$, và $A = A'(0)$ và $B = B'(0)$ là các ma trận tiếp xúc:

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t))\ \big|_{t=0} = A'(0)\,B(0) + A(0)B'(0) = A + B$$

Vậy A+ B là ma trận tiếp xúc của đường cong A(t)B(t),

$$\frac{d}{dt}\,A(\alpha t)\big|_{t=0} = \alpha A'(0) = \alpha A \qquad \alpha \in R$$

Vậy, αA là ma trận tiếp xúc với đường cong $A(\alpha t)$.

Như vậy tổng của hai ma trận tiếp xúc và tích của một ma trận tiếp xúc với một số thực cũng là các ma trận tiếp xúc. Tập hợp các ma trận tiếp xúc, ký hiệu bởi $\mathcal{G}$, lập thành một **không gian tuyến tính trên trường số thực R**.

Tiếp tục, ta định nghĩa giao hoán tử [A, B] của hai ma trận tiếp xúc A và B bởi

$$[A\,,B] = \frac{d}{dt}\,(A(\tau)B(\tau)A(\tau)^{-1}B(\tau)^{-1})\big|_{t=0} \qquad t = \tau^2$$

Nghĩa là [A, B] là ma trận tiếp xúc tại đơn vị của đường cong

$$C(t) = A(\tau)B(\tau)A(\tau)^{-1}B(\tau)^{-1}$$

Khai triển Taylor của $A(\tau), B(\tau), C(\tau)$:

$$A(\tau\,) = I_n + A\tau + A'\tau^2 + \cdots$$

$$B(\tau) = I_n + B\tau + B'\tau^2 + \cdots$$

$$C(t) = I_n + C\tau + C'\tau^2 + \cdots$$

Thay vào đẳng thức $C(t)B(\tau)A(\tau) = A(\tau)B(\tau)$, ta có:

$$I_n + (A + B + C)\tau + (A' + B' + C' + BA + CB + CA)\tau^2 + \ \ldots = I_n + (A + B)\tau + (A' + B' + AB)\tau^2 + \cdots$$

So sánh hai vế của đẳng thức, suy ra: $C = O$ và $C' = AB - BA$.

Theo định nghĩa $[A, B] = \frac{d}{dt}C(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{d\tau^2}(I_n + C'\tau^2 + \cdots)\big|_{\tau=0} = C'$

Suy ra: $[A, B] = AB - BA.$

3. Đại số Lie

Không gian tuyến tính X được trang bị phép nhân $X \times X \to X, (x, y) \to [x, y]$ được gọi là một đại số Lie nếu thỏa các tiên đề sau

a. $[x, y] = -[y, x]$, (Skew- symmetry)

b. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, (Bilinearity)

c. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = O$. (Jacobi identity)

Phép nhân [x, y] gọi là phép nhân Lie hay ngoặc Lie.

Nếu α, β là các số thực R (số phức C) ta có đại số Lie thực (phức).

Giao hoán tử $[A, B] = AB - BA$ của các ma trận M(n,C) tự nhiên thỏa các tiên đề của phép nhân Lie nên M(n,C) là một đại số Lie. Đặc biệt, các ma trận tiếp xúc $\mathcal{G}$ là một **đại số Lie thực**. Ta gọi $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nhóm Lie G. Dĩ nhiên $\mathcal{G}$ là một đại số con của M(n,C).

Giả sử $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nhóm Lie ma trận G và $A \in \mathcal{G}$. Rõ ràng $A(t) = \exp(tA), t \in R$ là một đường cong giải tích trong GL(n,C) đi qua I_n. A(t) thỏa phương trình vi phân:

$$\frac{d}{dt}A(t) = A\,A(t)$$

$$\frac{d}{dt}A(t)\big|_{t=0} = A$$

Định lý Tồn tại và Duy nhất bảo đảm $A(t) = \exp(tA), |t| < \varepsilon$ bé phải là đường cong giải tích nằm trọn trong nhóm Lie G. Suy ra exp ánh xạ một lân cận của ma trận không O trong $\mathcal{G}$ vào một lân cận của ma trận đơn vị I_n trong G. Hơn nữa, như đã được chứng minh, ánh xạ này là một song ánh. Sử dụng ánh xạ exp này cho ta biết các đại số Lie của các nhóm Lie ma trận.

Ví dụ:

gl(n,C) = M(n,C) là đại số Lie của nhóm Lie GL(n,C).

sl(n,C) = $\{A \in M(n, C): trA = 0\}$ là đại số Lie của nhóm Lie SL(n,C).

gl(n,R) = M(n,R) là đại số Lie của nhóm Lie GL(n,R).

sl(n,R) = $\{A \in M(n,R): \mathrm{tr}A = 0\}$ là đại số Lie của nhóm Lie SL(n,R).

Bây giờ $\{A_k : k = 1, \dots, m\}$ là một cơ sở của đại số Lie $\mathcal{G}$. Mỗi phần tử của nhóm Lie G đủ gần với đơn vị I_n có thể được viết một cách duy nhất dưới dạng:

$$A(\alpha) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k A_k\right), \qquad |\alpha| = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2)^{1/2} \text{ bé.}$$

Bộ có thứ tự m số thực α = $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ được gọi là **tọa độ chính tắc** của phần tử nhóm A(α).Tương ứng $\alpha \to A(\alpha)$ được gọi là phép tham số hóa chính tắc. Nhóm Lie G, được nói trên qui ước, có số chiều dim G = dim $\mathcal{G}$ = m.

Khai triển Taylor của A(α):

$$A(\alpha) = I_n + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A_k + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} \alpha_k \alpha_l A_k A_l + \cdots$$

$$A_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} A(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$$

Các ma trận A_k, $k = 1, \dots, m$ được gọi là các **phần tử sinh** của nhóm Lie G. Các giao hoán tử:

$$[A_j, A_k] = \sum_{l=1}^{m} c_{jkl} A_l \quad j, k, l = 1, \dots, m$$

Các số thực c_{jkl} gọi là các hằng số cấu trúc của nhóm Lie G.

Các nhà vật lý thường viết A(α) dưới dạng sau:

$$A(\alpha) = \exp\left(\mp i \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A_k\right), \quad i^2 = -1$$

$$A_k = \pm i \frac{\partial}{\partial \alpha_k} A(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$$

Điều này tương ứng với việc thay A_k bởi $H_k = \pm iA_k$. Các giao hoán tử bây giờ có dạng:

$$[H_j, H_k] = \textstyle\sum_{l=1}^{m} \pm i\, c_{jkl} H_l\,, \quad c_{jkl} \in R$$

a. Đại số Lie o(n)

Ma trận trực giao O là một ma trận thực cấp n thỏa $O^t O = I_n$. Nếu O đủ gần với đơn vị I_n thì tồn tại duy nhất ma trận A trong lân cận bé của ma trận không, sao cho $O = \exp A$. Ta có:

$$\exp A^t \exp A = I_n$$

Suy ra: $A^t = -A$ (skew-symmetry).

Vậy, đại số Lie o(n) là tập hợp các ma trận thực phản đối xứng:

$$o(n) = \{ A \in M(n, R): A^t = - A\}$$

$$\dim o(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

Nếu $A^t = -A$ thì trA = 0. Suy ra det O = det exp A = exp trA = exp 0 = 1. Vậy, O = exp A $\in$ SO(n). Do đó đại số Lie so(n) của nhóm trực giao đặc biệt cũng chính là o(n).

b. Đại số Lie u(n)

Ma trận unita U là ma trận phức cấp n thỏa $U^+U = I_n$. Nếu U thuộc một lân cận nhỏ của I_n thì có một ma trận duy nhất A gần ma trận không: U = exp A.

$$\exp A^+ \exp A = I_n$$

Suy ra: $A^+ = - A$ (skew- hermitian).

Vậy, đại số Lie u(n) là tập hợp các ma trận phản liên hợp:

$$u(n) = \{A \in M(n,C): A^+ = - A\}$$

$\dim u(n) = n^2$ (không gian thực n^2-chiều)

Hơn nữa, nếu U$\in$ SU(n) thì det U = det exp A = exp trA = 1. Suy ra trA = 0.

Vậy, đại số Lie su(n) của nhóm SU(n) là các ma trận phản liên hợp và có vết bằng 0:

$$su(n) = \{A \in M(n,C): A^+ = - A \text{ và } trA = 0\}$$

$$\dim su(n) = n^2 - 1.$$

Giả sử A_k $k = 1, \dots, n^2 - 1$ là một cơ sở của su(n):

$$[A_j, A_k] = \sum_{l=1}^{n^2-1} c_{jkl} A_l \quad c_{jkl} \in R$$

Đặt $H_k = iA_k$. Ta có: $H_k^+ = -iA_k^+ = iA_k = H_k$.

Vậy H_k là ma trận tự liên hợp, vết bằng 0. Các giao hoán tử:

$$[H_j, H_k] = \sum_{l=1}^{n^2-1} i\, c_{jkl} H_l \quad c_{jkl} \in R$$

Thực ra các ma trận tự liên hợp không lập thành một đại số Lie bởi vì

$$[H_j, H_k]^+ = (H_jH_k - H_kH_j)^+ = H_k^+H_j^+ - H_j^+H_k^+ = H_kH_j - H_jH_k = -[H_j, H_k]$$

c. Đại số Lie so(3)

Các phép quay trong R^3 có trục quay là các vector cơ sở e_1= (1,0,0), e_2= (0,1,0), e_3= (0,0,1) và các góc quay tương ứng ϕ,θ,ω có dạng:

$$R(\phi\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$R(\theta\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\omega\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các phần tử sinh của nhóm quay:

$$R_1 = \frac{\partial}{\partial\phi}R(\phi\mathbf{e}_1)\Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta\mathbf{e}_2)\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \frac{\partial}{\partial\omega}R(\omega\mathbf{e}_3)\Big|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Các ma trận R_1, R_2 và R_3 lập thành một cơ sở của đại số Lie so(3). Các giao hoán tử:

$$[R_j, R_k] = \varepsilon_{jkl}R_l \quad j,k,l = 1,2,3.$$

Ở đây ε_{jkl} là ký hiệu Levi-Civita.

Phép quay trong không gian euclide R^3 có trục quay $\boldsymbol{\phi}$ = (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) và góc quay $|\boldsymbol{\phi}| = \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2\right)^{1/2}$ có dạng:

$$R(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left(\phi_1R_1 + \phi_2R_2 + \phi_3R_3\right).$$

d. Đại số Lie su(2)

Mọi ma trận A cấp 2 phản liên hợp ($A^+ = -A$) và có vết bằng 0 (traceless) có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} -it & -s-ri \\ s-ri & it \end{pmatrix} \quad r, s, t \in R$$

Ta có khai triển:

$$A = r\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = rA_1 + sA_2 + tA_3$$

Ở đây $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ lập thành một cơ sở của đại số Lie su(2). Phép tính cho ta:

$$[A_j, A_k] = 2\varepsilon_{jkl}A_l$$

Đặt $J_k = \frac{i}{2}A_k \quad k = 1,2,3.$

Các ma trận J_k là tự liên hợp $J_k^+ = J_k$ và có các giao hoán tử:

$$[J_j, J_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,J_l$$

Ở đây ε_{jkl} là ký hiệu Levi-Civita.

$\sigma_k = iA_k \;\; k = 1, 2, 3$ là các ma trận Pauli:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

Chương 4
Phép biểu diễn của đại số Lie

1. Các khái niệm

a. Phép biểu diễn

$\mathcal{G}$ là đại số Lie của nhóm Lie G.

V là một không gian tuyến tính n-chiều.

L(V) là đại số các toán tử tuyến tính từ V vào V.

Phép biểu diễn R của đại số Lie $\mathcal{G}$ trên không gian V là một **đồng cấu đại số**

$$R: \mathcal{G} \to L(V)$$

$$A \to R(A)$$

$$R(\alpha A + \beta B) = \alpha R(A) + \beta R(B)$$

$$R([A, B]) = [R(A), R(B)] \qquad A, B \in \mathcal{G} \quad \alpha, \beta \in C$$

Khi đã chọn một cơ sở của không gian V, các toán tử tuyến tính R(A) là các ma trận M(n,C).

Số chiều của không gian V là số chiều của biểu diễn R.

Ví dụ:

Đại số Lie su(2) có các phần tử sinh J_k , $k = 1,2,3$.

Đại số Lie so(3) có các phần tử sinh R_k, $k = 1,2,3$.

Ánh xạ tuyến tính R: su(2) $\to$ so(3), xác định bởi $R(J_k) = R_k$, $k = 1,2,3$ là một biểu diễn 3 chiều của su(2).

Ánh xạ tuyến tính R: so(3) $\to$ su(2), xác định bởi $R(R_k) = J_k$, $k = 1,2,3$ là một biểu diễn 2 chiều của so(3).

Mỗi đại số Lie $\mathcal{G}$ có biểu diễn cơ bản R_f (**The Fundamental representation**) xác định bởi

$$R_f(A) = A \quad A \in \mathcal{G}$$

b. Biểu diễn liên hợp (Adjoint representation)

$\mathcal{G}$ là một đại số Lie của nhóm Lie G.

Biểu diễn liên hợp ad là phép tương ứng mỗi phần tử $A \in \mathcal{G}$ với một toán tử $ad(A): \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ xác định như sau:

$$ad(A)\,(B) = [A, B], \quad B \in \mathcal{G}$$

Ánh xạ ad thỏa các điều kiện:

$$ad(\alpha A + \beta B) = \alpha\, ad(A) + \beta\, ad(B)$$

$$ad([A, B]) = [ad(A), ad(B)]$$

Vậy, ánh xạ ad: $\mathcal{G} \to L(\mathcal{G})$, $A \to ad(A)$, là một đồng cấu đại số. Nói cách khác, ad là một biểu diễn của đại số Lie $\mathcal{G}$ trên không gian $\mathcal{G}$.

c. Biểu diễn bất khả quy

R: $\mathcal{G} \to L(V)$ là một biểu diễn trên không gian V.

Không gian con thực sự $W \subset V$ ($W \neq \{O\}$ và $W \neq V$) được gọi là R-bất biến nếu $R(A)w \in W$, $\forall A \in \mathcal{G}$, $w \in W$.

Nếu trong V có không gian con R-bất biến thì biểu diễn R được gọi là khả quy (reducible), bởi vì khi đó ta có **biểu diễn thu nhỏ** của biểu diễn R: $\mathcal{G} \to L(W)$ trên không gian W.

Ngược lại, nếu không có không gian con R-bất biến thì biểu diễn R và không gian V được gọi là bất khả quy (irreducible).

Các biểu diễn bất khả quy có ý nghĩa quan trọng trong vật lý học.

2. Tích tensor của các biểu diễn

U và V là các không gian tuyến tính.

Giả sử $R^{(1)}: \mathcal{G} \to L(U)$ và $R^{(2)}: \mathcal{G} \to L(V)$ là các biểu diễn của đại số Lie $\mathcal{G}$.

Ta định nghĩa ánh xạ $R^{(1\otimes 2)}: \mathcal{G} \to L(U\otimes V)$

$$A \to R^{(1\otimes 2)}(A)$$

Ở đây, $R^{(1\otimes 2)}(A): U\otimes V \to U\otimes V$ là một toán tử tuyến tính, xác định như sau:

$$R^{(1\otimes 2)}(A)(u\otimes v) = R^{(1)}(A)u\otimes v + u\otimes R^{(2)}(A)v$$

$$R^{(1\otimes 2)}(A) = R^{(1)}(A) \otimes I_n + I_m \otimes R^{(2)}(A) \quad A \in \mathcal{G}$$

Dễ thấy rằng

$$R^{(1\otimes 2)}(\alpha A + \beta B) = \alpha R^{(1\otimes 2)}(A) + \beta R^{(1\otimes 2)}(B)$$

Và

$[R^{(1\otimes 2)}(A), R^{(1\otimes 2)}(B)] = [R^{(1)}(A) \otimes I_n + I_m \otimes R^{(2)}(A), R^{(1)}(B) \otimes I_n + I_m \otimes R^{(2)}(B)]$

$= R^{(1)}(A) R^{(1)}(B) \otimes I_n + R^{(1)}(A) \otimes R^{(2)}(B) + R^{(1)}(B) \otimes R^{(2)}(A) + I_m \otimes R^{(2)}(A) R^{(2)}(B)$

$- R^{(1)}(B) R^{(1)}(A) \otimes I_n - R^{(1)}(B) \otimes R^{(2)}(A) - R^{(1)}(A) \otimes R^{(2)}(B) - I_m \otimes R^{(2)}(B) R^{(2)}(A)$

$= ((R^{(1)}(A) R^{(1)}(B) - R^{(1)}(B) R^{(1)}(A)) \otimes I_n + I_m \otimes (R^{(2)}(A) R^{(2)}(B) - R^{(2)}(B) R^{(2)}(A))$

$= [R^{(1)}(A), R^{(1)}(B)] \otimes I_n + I_m \otimes [R^{(2)}(A), R^{(2)}(B)]$

$= R^{(1)}([A,B]) \otimes I_n + I_m \otimes R^{(2)}([A,B])$

$= R^{(1\otimes 2)}([A,B])$

Vậy, $R^{(1\otimes 2)}$ là một biểu diễn của $\mathcal{G}$ trên không gian $U \otimes V$. $R^{(1\otimes 2)}$ được gọi là **tích tensor** của $R^{(1)}$ và $R^{(2)}$. $\dim R^{(1\otimes 2)} = \dim U \dim V$.

Chương 5
SU(2)

1. Biểu diễn bất khả quy của su(2)

Cho R là một biểu diễn của su(2) trên không gian V

$$[R(J_j), R(J_k)] = i\varepsilon_{jkl}R(J_l)$$

Ở đây $R(J_k)$ là các ma trận tự liên hợp.

Để làm đơn giản các ký hiệu ta sẽ viết J_k thay cho $R(J_k)$ và hiểu J_k là ma trận của phép biểu diễn:

$$[J_j, J_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,J_l$$

$$J_k^+ = J_k$$

Đặt $\quad J_\pm = J_1 \pm i\,J_2$

Ta có $\quad J_\pm^+ = J_\mp$

$$[J_+, J_-] = 2J_3$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

Gọi $\phi \in V$ là vector riêng của J_3 với trị riêng thực m

$$J_3\phi = m\,\phi, \quad \phi \neq 0$$

Ta có:

$$J_3J_+\phi = ([J_3, J_+] + J_+J_3)\phi = (J_+ + J_+J_3)\phi = (m+1)\phi$$

$$J_3J_-\phi = ([J_3, J_-] + J_-J_3)\phi = (-J_- + J_-J_3)\phi = (m-1)\phi$$

Vậy, $J_+\phi$ và $J_-\phi$ là các vector riêng của J_3 tương ứng với các trị riêng m + 1 và m – 1. Do đó J_+ được gọi là toán tử tăng và J_- là toán tử giảm.

Gọi $\Phi \in V$ là vector riêng của J_3 ứng với trị riêng lớn nhất j, hay gọi là **trạng thái có trọng cực đại**:

$$J_3\Phi = j\Phi \text{ và } J_+\Phi = O$$

Ta có:

$$J_3J_-^q\Phi = (j-q)J_-^q\Phi \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Bởi vì các vector riêng $J_-^q\Phi$ của J_3 là độc lập tuyến tính trong một không gian hữu hạn chiều V nên tồn tại số nguyên p = 0, 1, 2,... sao cho:

$$J_-^p\Phi \neq 0,\ J_-^{p+1}\Phi = 0$$

Ta có đẳng thức:

$$\begin{aligned}J_+J_-^q &= (J_+J_-)J_-^{q-1} = (2J_3 + J_-J_+)J_-^{q-1}\\ &= 2J_3J_-^{q-1} + J_-(J_+J_-)J_-^{q-2}\\ &= \ldots\\ &= 2J_3J_-^{q-1} + 2J_-J_3J_-^{q-2} + 2J_-^2J_3J_-^{q-3} + \cdots + 2J_-^{q-1}J_3 + J_-^qJ_+\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}J_+J_-^q\Phi &= [2(j-q+1) + 2(j-q+2) + \cdots + 2j]J_-^{q-1}\Phi\\ &= q(2j-q+1)J_-^{q-1}\Phi \qquad q = 1,2,\ldots\end{aligned}$$

Với q = p + 1, ta được:

$$J_+J_-^{p+1}\Phi = (p+1)(2j-p)J_-^p\Phi = 0$$

Suy ra

2j = p = 0, 1, 2,...

Như vậy trị riêng lớn nhất j của J_3 phải là một số nguyên hoặc một số bán nguyên không âm

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

Toán tử Casimir:

$$\begin{aligned}J^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\\ &= J_3 + J_3^2 + J_-J_+\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}J^2J_-^q\Phi &= (J_3 + J_3^2 + J_-J_+)J_-^q\Phi\\ &= [(j-q) + (j-q)^2 + q(2j-q+1)]J_-^q\Phi\\ &= j(j+1)J_-^q\Phi\end{aligned}$$

Tóm lại, ta có các phương trình:

$$J_3J_-^q\Phi = (j-q)J_-^q\Phi$$

$$J^2 J_-^q \Phi = j(j+1) J_-^q \Phi \quad q = 0,1,\dots,2j$$

$$J_+ J_-^q \Phi = q(2j - q + 1) J_-^{q-1} \Phi$$

$$J_- J_-^q \Phi = J_-^{q+1} \Phi$$

Trong vật lý học để chỉ một trạng thái lượng tử người ta thường dùng ký hiệu bra- ket của Paul Dirac

$ket\ |\phi\rangle$ là vector cột

$bra\ \langle\phi| = |\phi\rangle^+$ là vector hàng

$\langle\psi|\phi\rangle$ là tích vô hướng hermitian

Đặt $m = j - q = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$

$|j\ m\rangle = J_-^{j-m}\Phi = J_-^q \Phi$

Các phương trình trên bây giờ có dạng

$$J_3|j\ m\rangle = m|j\ m\rangle$$

$$J^2|j\ m\rangle = j(j+1)|j\ m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

$$J_+|j\ m\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]|j\ \ m+1\rangle, \quad J_+|j\ j\rangle = 0$$

$$J_-|j\ m\rangle = |j\ \ m-1\rangle, \quad J_-|j\ -j\rangle = 0$$

Đặt $W = \mathrm{span}\{|j\ j\rangle, |j\ \ j-1\rangle, \dots, |j\ -j\rangle\}$, $\dim W = 2j+1.$

Các phương trình trên cho thấy W là một không gian con J-bất biến, bất khả quy. Vậy biểu diễn thu nhỏ của J trên W là bất khả quy và có số chiều 2j + 1.

Để chuẩn hóa các vector $||j\ m\rangle|^2 = 1, \quad m = -j, \dots, j.$ Giả sử:

$$J_+|j\ m\rangle = \alpha|j\ \ m+1\rangle$$

Ta có:

$$|\alpha|^2 = |J_+|j\ m\rangle|^2 = \langle j\ m|J_-J_+|j\ m\rangle = \langle j\ m|J^2 - J_3^2 - J_3|j\ m\rangle$$
$$= j(j+1) - m(m+1)$$

Suy ra:

$$J_+|j\ m\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{1/2}|j\ \ m+1\rangle$$

Tương tự:

$$J_-|j\ m\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2}|j\ \ m-1\rangle$$

Ta có:

$$|J_+|j\ m\rangle|^2 = j(j+1) - m(m+1) = 0 \text{ khi và chỉ khi } m = j$$

Vậy $|j\ j\rangle$ là trạng thái có trọng cực đại duy nhất trong W.

Các toán tử J_3 và J^2 là tự liên hợp nên các vector riêng của chúng trực giao:

$$\langle j'm'|j\ m\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

2. Phép phân tách (Decomposition)

Ta xét biểu diễn tích tensor của hai biểu diễn bất khả quy và phép phân tách biểu diễn tích tensor này thành tổng trực tiếp của các biểu diễn bất khả quy.

Gỉa sử $J^{(1)}, J^{(2)}$ là các biểu diễn bất khả quy của su(2) trên các không gian V_{j_1} và V_{j_2}:

$$V_{j_1} = \text{span}\{|j_1 m_1\rangle,\ m_1 = -j_1, \dots, j_1\}, \dim V_{j_1} = 2j_1 + 1$$

$$V_{j_2} = \text{span}\{|j_2 m_2\rangle,\ m_2 = -j_2, \dots, j_2\}, \dim V_{j_2} = 2j_2 + 1$$

$$V = V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \text{span}\{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle, m_1 = -j_1, \dots, j_1, m_2 = -j_2, \dots, j_2\}$$

Gọi J là biểu diễn tích tensor của $J^{(1)}$ và $J^{(2)}$ trên không gian $V = V_{j_1} \otimes V_{j_2}$

$$J_k = J_k^{(1)} \otimes I + I \otimes J_k^{(2)}, \quad k = 1,2,3$$

$$J_k^+ = J_k$$

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$$

$$J_\pm^+ = J_\mp$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

Các giao hoán tử:

$$[J_j, J_k] = i\varepsilon_{jkl}J_l, \quad j, k, l = 1,2,3.$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3$$

Gọi $|j\ m\rangle$ $m = -j, \dots, j$ là các vector riêng trong $V = V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ của J_3 và J^2

$$J_3|j\ m\rangle = m|j\ m\rangle$$

$$J^2|j\ m\rangle = j(j+1)|j\ m\rangle$$

Ta có khai triển Clebsch-Gordon:

$$|j\ m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m) |j_1 m_1\rangle\ |j_2 m_2\rangle$$

Ở đây $(j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m)$ được gọi là các hệ số Clebsch-Gordon.

Ta có:

$$J_3 |j\ m\rangle = (J_3^{(1)} \otimes I + I \otimes J_3^{(2)}) \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m) |j_1 m_1\rangle\ |j_2 m_2\rangle$$

$$m |j\ m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (m_1 + m_2)(j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m) |j_1 m_1\rangle\ |j_2 m_2\rangle$$

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (m - m_1 - m_2)(j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m) |j_1 m_1\rangle\ |j_2 m_2\rangle = 0$$

Suy ra:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 |\ j\ m) = 0 \text{ nếu } m \neq m_1 + m_2$$

Vậy m và những số hạng khả dĩ trong khai triển Clebsch-Gordon cần phải thỏa:

$$m = m_1 + m_2$$

Xét $|j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$, ta có:

$$J_3 |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle = \left(J_3^{(1)} \otimes I + I \otimes J_3^{(2)}\right) |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle = (j_1 + j_2) |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$$

$$J_+ |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle = \left(J_+^{(1)} \otimes I + I \otimes J_+^{(2)}\right) |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle = 0$$

Vậy $|j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$ là trạng thái có trọng cực đại $|j\ j\rangle$, $j = m = j_1 + j_2$. Khai triển Clebsch-Gordon trong trường hợp này có dạng:

$$|j_1 + j_2\ j_1 + j_2\rangle = |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$$

Áp dụng toán tử giảm J_- lên trạng thái có trọng cực đại $|j_1 + j_2\ j_1 + j_2\rangle$ ta được không gian con J-bất biến, bất khả quy

$$V_{j_1+j_2} = \text{span}\{|j_1 + j_2\ j_1 + j_2\rangle, |j_1 + j_2\ j_1 + j_2 - 1\rangle, \dots, |j_1 + j_2\ -(j_1 + j_2)\rangle\}$$

Biểu diễn thu nhỏ của J trên không gian con $V_{j_1+j_2}$, ký hiệu bởi $J^{(j_1+j_2)}$, là bất khả quy.

Giả sử $j_1 \geq j_2$ và ta đã tìm được tất cả các không gian con J-bất biến $V_{j'}$ cho các giá trị $j_1 + j_2 \geq j' > j \geq j_1 - j_2$. Số các trạng thái độc lập tuyến tính $|j'\ m\rangle$ có $m = j$ trong tất cả các không gian $V_{j'}$ là $j_1 + j_2 - j$ trong khi số chiều của không gian con trong $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ có $m_1 + m_2 = j$ là $j_1 + j_2 - j + 1$, nên trong không gian con này phải có một vector ψ khác không trực giao với tất cả các không gian $V_{j'}$. Vì $J^+\psi$ phải thuộc về các không gian J-bất biến $V_{j'}$, đôi một trực giao nên $J^+\psi = 0$. Suy ra nó phải là trạng thái có trọng cực đại, tức là: $\psi = |j\, j\rangle$.

Áp dụng toán tử giảm J_- lên $|j\, j\rangle$ ta được không gian con J-bất biến, bất khả quy

$$V_j = \mathrm{span}\{|j\, j\rangle, \dots, |j\; -j\rangle\}$$

Như vậy với $j_1 + j_2 \geq j \geq j_1 - j_2$ ta đã xây dựng được các không gian con J-bất biến bất khả quy V_j có số chiều $\dim V_j = 2j + 1$. Với $j < j_1 - j_2$ không còn các không gian con J-bất biến nữa, bởi vì

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \dim V_j = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) &= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} [(j+1)^2 - j^2] \\ &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 - j_2)^2 \\ &= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= \dim V_{j_1} \otimes V_{j_2}\end{aligned}$$

Cuối cùng ta có sự phân tách:

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = V_{j_1+j_2} \oplus V_{j_1+j_2-1} \oplus \dots \oplus V_{|j_1-j_2|}$$

$$J^{(j_1 \otimes j_2)} = J^{(j_1+j_2)} \oplus J^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus J^{(|j_1-j_2|)}$$

Một cách đơn giản, ta viết:

$$j_1 \otimes j_2 = (j_1 + j_2) \oplus (j_1 + j_2 - 1) \oplus \dots \oplus |j_1 - j_2|$$

Ví dụ:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$$

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

3. Isospin

Proton (điện tích + e, khối lượng 938.27 MeV) và neutron (điện tích 0, khối lượng 939.56 MeV) cấu tạo nên hạt nhân nguyên tử. Các lực hạt nhân proton-neutron (p-n), neutron-neutron (n-n) và proton-proton là đồng nhất. Nghĩa là proton và neutron hành xử như nhau khi tham gia các tương tác trong hạt nhân. Heisenberg và Kemmer đã xem proton và neutron là hai trạng thái khác nhau của một hạt nucleon. Các trạng thái này được phân biệt bởi một thuộc tính nội tại được chỉ định bằng một số lượng tử có hai giá trị + 1/2 và – 1/2 một cách tương tự như spin của điện tử. Số lượng tử này được gọi là isotopic spin hay **isospin**.

Mỗi trạng thái isospin của nucleon được mô tả bằng một vector cơ sở của một không gian isospin 2- chiều

$$|\mathrm{I}\ \mathrm{I}_3\rangle,\ \mathrm{I}=\frac{1}{2},\ \mathrm{I}_3=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$$

Ở đây

$$\text{Proton }\ \mathrm{p}=\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \text{ và Neutron }\ \mathrm{n}=\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Ta có:

$$\mathrm{I}_3\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle,\ \ \mathrm{I}_3\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\mathrm{I}_-\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)]^{1/2}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\mathrm{I}_+\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle=[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-(-\frac{1}{2})\left(-\frac{1}{2}+1\right)]^{1/2}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

Ta nói Proton và Neutron lập thành một **lưỡng tuyến nucleon**.

Điện tích Q và isospin I_3 tuân theo hệ thức sau:

$$\mathrm{Q}=\mathrm{I}_3+\frac{1}{2}$$

Ba hạt Pi (pion) π^0(134.9 MeV), $\pi^{\pm}$ (139.5 MeV) lập thành một **tam tuyến pi-meson**:

$$\pi^+=|1\ 1\rangle,\ \pi^-=|1-1\rangle,\ \pi^0=|1\ 0\rangle$$

Các hạt pi-meson tích điện $\pi^{\pm}$ được Powell tìm ra trong các tia vũ trụ. Chúng được sanh ra do sự va chạm của các proton chuyển động nhanh từ vũ trụ với các hạt nhân nguyên tử ở thượng tầng khí quyển. Các hạt này không bền (vòng đời trung bình 2.6×10^{-8}s), chúng phân rã thành các hạt muon μ và muon neutrino ν_μ từ rất sớm trước khi có thể tới được mực nước biển

$$\pi^-\rightarrow\mu^-+\overline{\nu_\mu}$$

$$\pi^+\rightarrow\mu^++\nu_\mu$$

Isospin là đại lượng bảo toàn trong tương tác mạnh (lực mạnh).

4. Hadrons

Hadrons là tên gọi chung của các hạt tham gia tương tác mạnh, lực giữ các hạt trong nhân nguyên tử, bao gồm họ meson (các hạt có khối lượng trung bình như pions, kaons,...) và họ baryon (các hạt có khối lượng lớn như protons, neutrons, lambda,...).

Neutron tự do là hạt không bền có vòng đời trung bình 881.5 s và phân rã thành proton, điện tử và phản neutrino (beta decay)

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \overline{\nu_{\mathrm{e}}}$$

Proton là một hạt bền vững. Vì là baryon nhẹ nhất nên proton chẳng thể phân rã thành các baryon khác, và cũng chẳng quan sát thấy proton phân rã theo các phản ứng đại loại như

$$\mathrm{p} \rightarrow \text{mesons (leptons)} + \text{photons (neutrinos)} \ldots$$

Để giải thích tính bền vững của proton, Stuckelberg đưa ra định luật bảo toàn số baryon. Theo đó mỗi hạt baryon có một thuộc tính được lượng hóa bằng một số lượng tử gọi là **số baryon** B. Mỗi hạt baryon có B = 1, antibaryon có B = -1, các hạt meson có B = 0, số baryon không áp dụng cho các hạt lepton hay photon. Định luật bảo toàn số baryon cho rằng tổng số baryon được bảo toàn trong mọi loại tương tác. Chẳng hạn phân rã beta hay phản ứng $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ là được phép vì tổng số baryon trước và sau phản ứng bằng nhau, nhưng các phân rã như $\mathrm{p} \rightarrow \pi^{+} + \nu$ hay $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{e}^{+} + \gamma$ không xảy ra vì vi phạm luật bảo toàn số baryon.

Các hạt K^0 (497.6 MeV), K^+ (493.6 MeV) và Λ^0 (1115.6 MeV, $2.6 \times 10^{-10} s$) lần đầu được tìm thấy trong các tia vũ trụ do dấu vết các sản phẩm phân rã của chúng để lại trong buồng hơi

$$\mathrm{K}^{0} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{-}$$

$$\mathrm{K}^{+} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{+} + \pi^{-}$$

$$\Lambda^{0} \rightarrow \mathrm{p} + \pi^{-}$$

Theo luật bảo toàn số baryon thì K^0, K^+ phải thuộc họ meson còn Λ^0 là hạt baryon.

Từ khi máy gia tốc hạt đầu tiên (the Brookhaven Cosmotron) đi vào hoạt động, các hạt K-meson và nhiều hạt baryon nặng hơn được phát hiện: các hạt sigma $\Sigma^{+}(1189.3\ \mathrm{MeV}, 8 \times 10^{-11}\mathrm{s})$, $\Sigma^{0}(1192.6\ \mathrm{MeV}, 7.4 \times 10^{-20}\mathrm{s})$, Σ^{-}(1197.4

MeV, 1.479×10^{-10}s), các hạt xi Ξ, hạt lambda Λ^0(ba loại hạt này còn được gọi là các hyperon)...Các hyperon này được sanh ra rất nhanh (trên thang thời gian 10^{-23}s), nhưng có vòng đời tương đối dài (trên thang thời gian 10^{-10}s) trước khi phân rã. Rõ ràng các hạt này phải được sanh ra bởi lực mạnh và phân rã bởi lực yếu. Gell-Mann và Nishijima đã đưa ra ý tưởng cho rằng các "hạt lạ" này phải có một tính chất mới được chỉ định bằng một số lượng tử gọi là **số lạ** (strangeness) S, nó được bảo toàn trong tương tác mạnh nhưng không bảo toàn trong tương tác yếu. Các hạt pions, proton và neutron được chỉ định có S = 0 (các "hạt thường"), các hạt K^0 và K^+ có S = 1, các hạt Σ và Λ^0 có S = -1, các hạt Ξ có S = -2. Vì số lạ được bảo toàn nên các "hạt lạ" được sanh từng cặp bởi lực mạnh. Chẳng hạn trong va chạm pion-proton

$$\pi^- + p \to \begin{cases} \Lambda^0 + K^0 \\ \Sigma^0 + K^0 \\ \Sigma^- + K^+ \end{cases}$$

Các hyperon sigma Σ thường phân rã thành

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$$

$$\Sigma^- \to n + \pi^-$$

$$\Sigma^+ \to \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}$$

Gell-mann và Nishijima đưa ra công thức sau đây

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2}$$

Đại lượng $Y = B + S$ gọi là **siêu tích** (hypercharge)

Các hadrons có khối lượng gần như đồng nhất cũng được nhóm lại thành một biểu diễn bất khả quy của su(2), cũng gọi là một **đa tuyến isospin**.

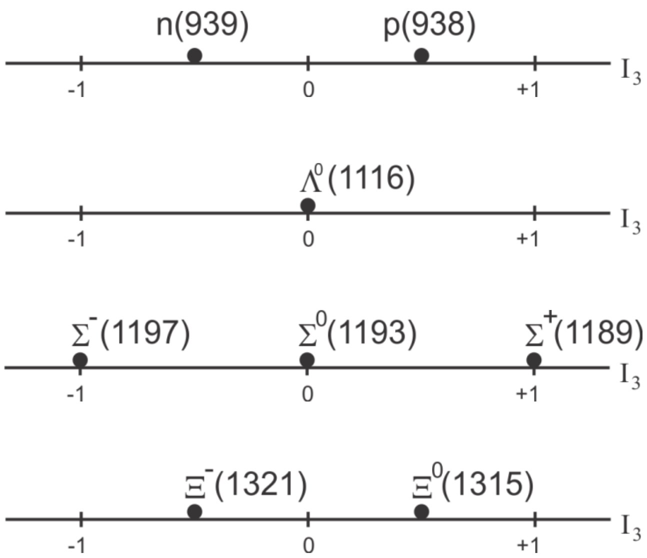
Đa tuyến $\{|I\, I_3\rangle : I_3 = -I, \dots, I\}$ là một biểu diễn bất khả quy $(2I + 1)$ chiều, chứa $2I + 1$ hạt cơ bản phân biệt bởi isospin I_3:

$I = 0$: Đơn tuyến (Singlet)

$I = 1/2$: Lưỡng tuyến (Doublet)

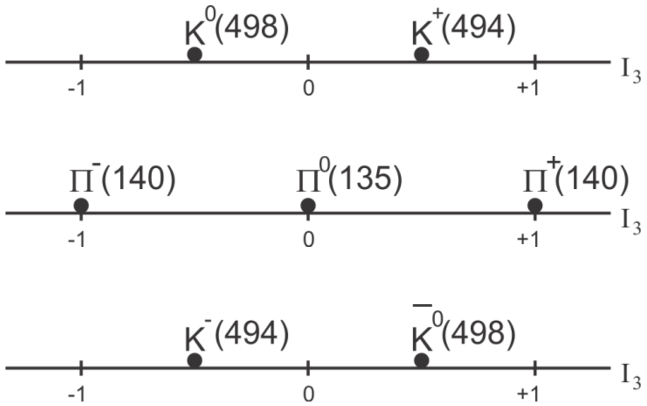
$I = 1$: Tam tuyến (Triplet)…

Sau đây ta xem xét một số đa tuyến isospin của các baryon và các meson. Các đa tuyến này được sắp xếp theo thứ tự khối lượng các hạt tăng dần



Y	B	S
1	1	0
0	1	-1
0	1	-1
-1	1	-2

Spin 1/2 Baryons



Y	B	S
1	0	1
0	0	0
-1	0	-1

Spin 0 Mesons

Chương 6
SU(3)

1. Các ma trận Gell-Mann

Các ma trận Gell-Mann là tám ma trận cấp 3 độc lập tuyến tính, tự liên hợp và có vết bằng 0:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Các ma trận λ_j thỏa

$$\mathrm{Tr}(\lambda_j \lambda_k) = 2\delta_{jk}$$

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2ic_{jkl}\lambda_l, \quad c_{jkl} \in R$$

$$c_{jkl} = \frac{1}{4i}\mathrm{Tr}([\lambda_j, \lambda_k]\lambda_l)$$

Đặt $F_j = \frac{1}{2}\lambda_j \quad j = 1, \dots, 8$

Giao hoán tử: $[F_j, F_k] = ic_{jkl}F_l$

Ba tập hợp sau đây là các đại số con của su(3):

$$\{F_1, F_2, F_3\}$$

$$\left\{F_4, F_5, \frac{1}{2}(F_3 + \sqrt{3}F_8)\right\}$$

$$\left\{F_6, F_7, \frac{1}{2}(-F_3 + \sqrt{3}F_8)\right\}$$

Các giao hoán tử của các đại số con này tương tự như các giao hoán tử của su(2) nên chúng là các biểu diễn 3-chiều của su(2). Do vậy ta đặt:

$$I_+ = F_1 + iF_2\,, \quad I_- = F_1 - iF_2\,, \quad I_3 = F_3 \text{ (isospin operator)}$$

$$V_+ = F_4 + iF_5\,,\quad V_- = F_4 - iF_5\,,\quad V_3 = \frac{1}{2}\left(F_3 + \sqrt{3}F_8\right)$$

$$U_+ = F_6 + iF_7\,,\quad U_- = F_6 - iF_7\,,\quad U_3 = \frac{1}{2}\left(-F_3 + \sqrt{3}F_8\right)$$

$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$ (hypercharge operator)

Vì phép biểu diễn là một đồng cấu đại số nên các toán tử, các giao hoán tử, các phương trình dưới đây được hiểu là của phép biểu diễn

$$[I_3, I_\pm] = \pm\, I_\pm\,,\quad [I_+, I_-] = 2I_3$$

$$[V_3, V_\pm] = \pm\, V_\pm,\quad [V_+, V_-] = 2V_3 \ = \ I_3 + \frac{3}{2}Y$$

$$[U_3, U_\pm] = \pm\, U_\pm,\quad [U_+, U_-] = 2U_3 \ = -\, I_3 + \frac{3}{2}Y$$

$$[I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm,\quad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm$$

$$[I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm,\quad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm$$

$$[I_3, Y] = 0,\quad [Y, I_\pm] = 0$$

Hai toán tử isospin I_3 và siêu tích Y lập thành đại số con Cartan của su(3).

2. Sơ đồ trọng

Gọi ϕ là vector riêng đồng thời của cả hai toán tử I_3 và Y

$$I_3\phi = I_3\phi$$

$$Y\,\phi \ = Y\,\phi$$

Cặp trị riêng (I_3, Y) được gọi là **trọng** (weight) của vector riêng đồng thời ϕ (ta cũng gọi ϕ là vector trạng thái hay trạng thái)

Từ các giao hoán tử ta có

$$I_3 I_\pm\phi \ = \ (I_3 \pm 1)I_\pm\phi$$

$$Y\, I_\pm\phi \ = Y\, I_\pm\phi$$

$$I_3 V_\pm \phi = \left(I_3 \pm \frac{1}{2}\right) V_\pm \phi$$

$$Y\, V_\pm \phi = (Y \pm 1) V_\pm \phi$$

$$I_3 U_\pm \phi = \left(I_3 \mp \frac{1}{2}\right) U_\pm \phi$$

$$Y\, U_\pm \phi = (Y \pm 1) U_\pm \phi$$

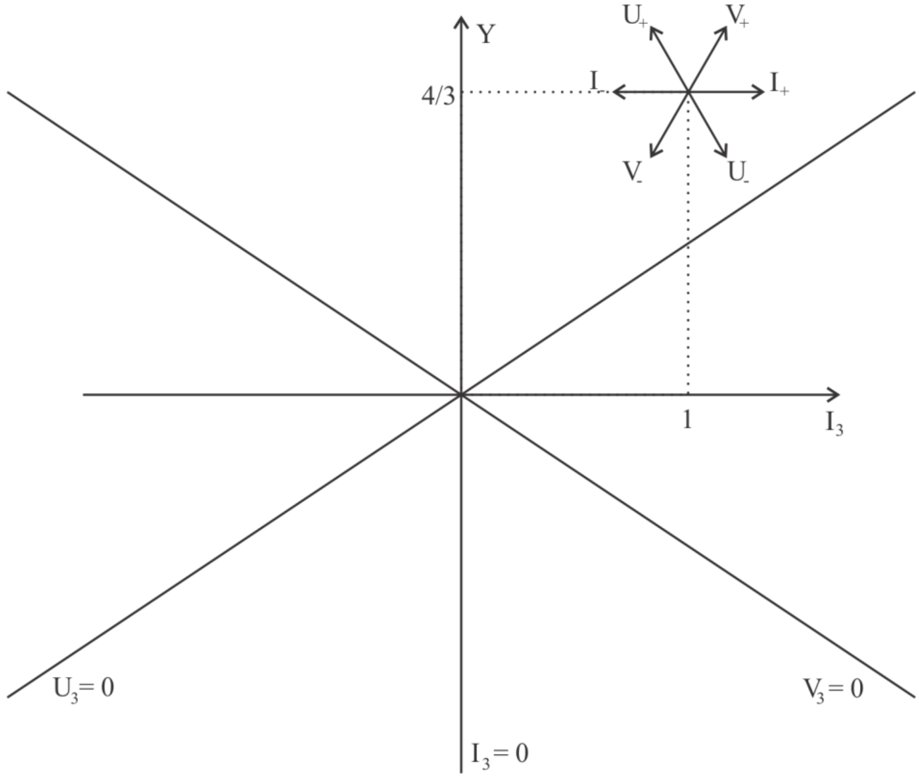
Ghi chú: Các ký tự I_3 và ở Y vế trái là toán tử, ở vế phải là trị riêng.

Vậy nếu vector trạng thái ϕ có trọng (I_3, Y) thì

$I_\pm \phi = 0$ hoặc $I_\pm \phi$ có trọng $(I_3 \pm 1, Y) = (I_3, Y) \pm (1,0)$

$V_\pm \phi = 0$ hoặc $V_\pm \phi$ có trọng $\left(I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1\right) = (I_3, Y) \pm (\frac{1}{2}, 1)$

$U_\pm \phi = 0$ hoặc $U_\pm \phi$ có trọng $\left(I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1\right) = (I_3, Y) \pm (-\frac{1}{2}, 1)$



Mặt phẳng I_3- Y

Trong mặt phẳng I_3- Y có 3 đường thẳng đặc biệt:

$$I_3 = 0,\quad V_3 = 0\left(Y = -\frac{2}{3} I_3\right),\ \text{và}\ U_3 = 0\left(Y = \frac{2}{3} I_3\right)$$

Các mũi tên minh họa tác dụng của 6 toán tử $I_\pm, V_\pm$ và $U_\pm$ lên trạng thái có trọng (I_3, Y). Giả sử ϕ là trạng thái có trọng (I_3, Y) $I_3 \geq 0$, từ các giao hoán tử cho thấy trạng thái $I_-^{2I_3}\phi$ có trọng $(-I_3, Y)$, hai trọng này đối xứng với nhau qua đường $I_3 = 0$. Tác dụng lặp lại của $I_\pm$ trên ϕ cho ra một không gian con bất biến, bất khả quy của một biểu diễn bất khả quy của đại số con $\{I_+, I_-, I_3\}$. Như đã biết trọng của các trạng thái này có trung điểm (tâm hình học) nằm trên đường $I_3 = 0$. Tương tự, các đường thẳng $U_3 = 0$ ($V_3 = 0$) chứa trung điểm của các trọng của các biểu diễn bất khả quy của đại số con $\{U_+, U_-, U_3\}$ ($\{V_+, V_-, V_3\}$).

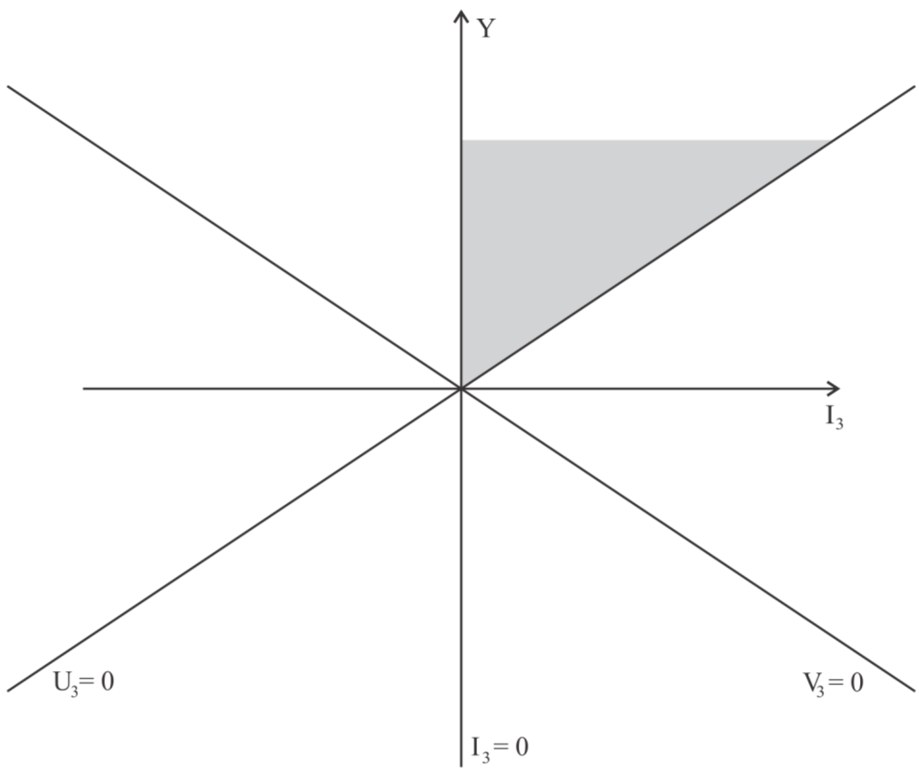
Vì số các vector riêng độc lập tuyến tính của I_3 và Y là hữu hạn nên phải tồn tại vector trạng thái Φ sao cho

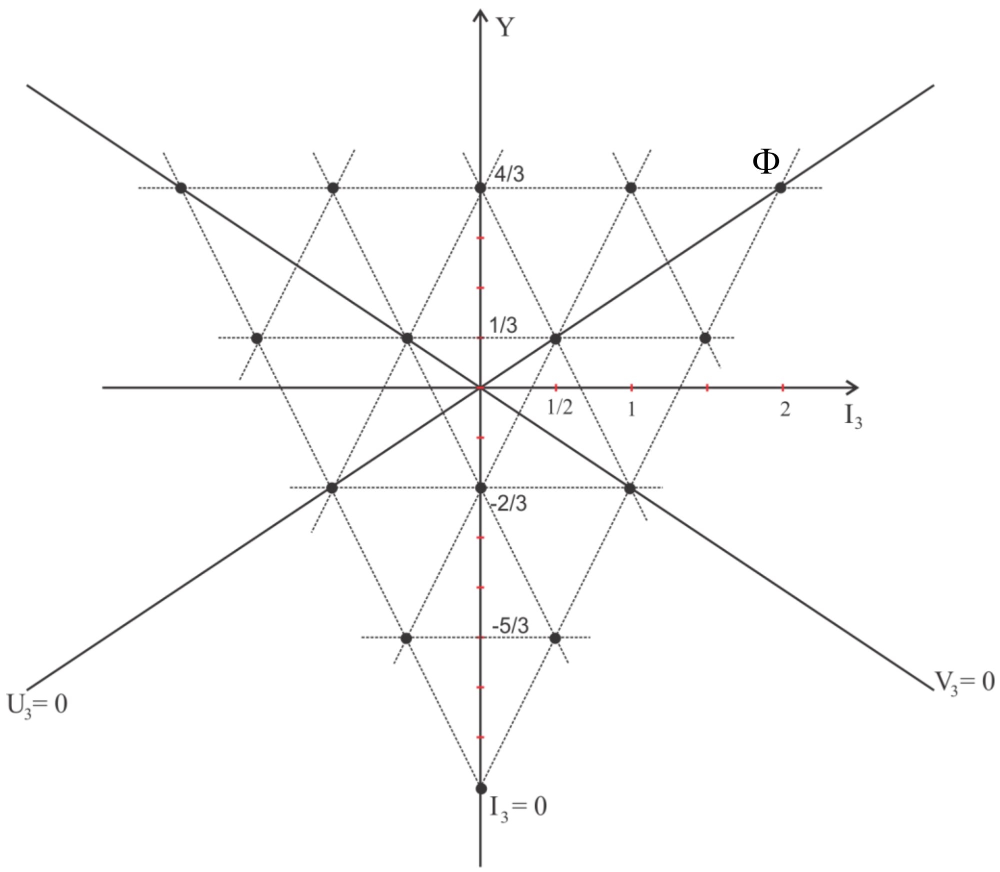
$$I_+\Phi = U_+\Phi = V_+\Phi = 0$$

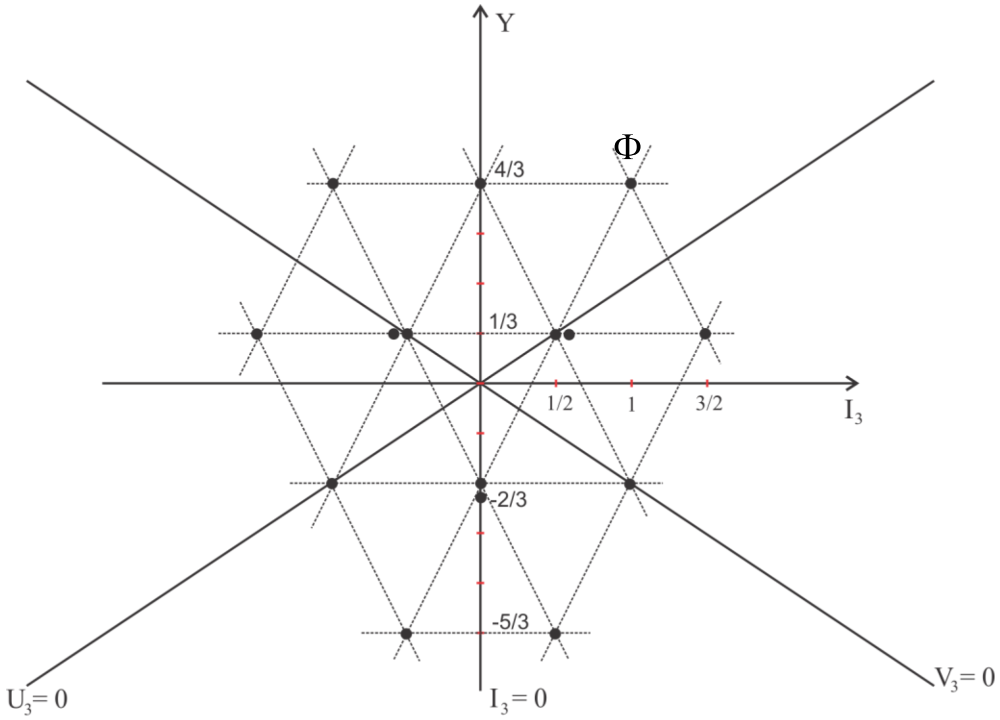
Φ được gọi là **trạng thái có trọng cực đại**.

Tác dụng lặp lại của I_-, U_-, V_- lên Φ cho ta một không gian con bất biến hữu hạn chiều của biểu diễn. Nếu không gian con bất biến này là bất khả quy thì biểu diễn là bất khả quy. Đối với một biểu diễn bất khả quy, trạng thái có trọng cực đại Φ là duy nhất.

Tập hợp các trọng của một không gian con bất biến trên mặt phẳng I_3- Y, hay **mặt phẳng trọng**, được gọi là **sơ đồ trọng** của biểu diễn. Trọng của trạng thái Φ được gọi là **trọng cực đại**. Vì trọng cực đại có các giá trị $I_3, U_3,$ và V_3 là cực đại nên nó phải nằm trong miền $I_3 \geq 0, U_3 \geq 0, V_3 \geq 0$ (miền được tô đậm).


Y
I_3
$U_3 = 0$
$V_3 = 0$
$I_3 = 0$


Y
Φ
4/3
1/3
1/2
1
2
I_3
-2/3
-5/3
$U_3 = 0$
$V_3 = 0$
$I_3 = 0$



3. Biểu diễn liên hợp phức

Đại số Lie su(n) gồm các ma trận cấp n tự liên hợp và có vết bằng 0.

Các giao hoán tử

$$[A_j, A_k] = \sum_{l=1}^{n^2-1} i c_{jkl} A_l \ , \quad c_{jkl} \in R$$

Trước đây su(n) là đại số Lie thực. Bây giờ ta xem su(n) là đại số Lie phức.

Nếu R là một biểu diễn của su(n):

$$[R(A_j), R(A_k)] = \sum_{l=1}^{n^2-1} i c_{jkl} R(A_l)$$

Lấy liên hợp phức * thông thường

$$[R(A_j)^*, R(A_k)^*] = \sum_{l=1}^{n^2-1} -i c_{jkl} R(A_l)^*$$

$$[-R(A_j)^*, -R(A_k)^*] = \sum_{l=1}^{n^2-1} i c_{jkl} (-R(A_l)^*)$$

Đặt $\overline{R}(A_j) = -R(A_j)^* \ \ j = 1, \dots, n^2 - 1.$

Ta có các giao hoán tử:

$$[\overline{R}(A_j), \overline{R}(A_k)] = \sum_{l=1}^{n^2-1} i\, c_{jkl} \overline{R}(A_l)$$

Các ma trận $\overline{R}(A_j)$ $j = 1, \dots, n^2 - 1$ được gọi là **biểu diễn liên hợp phức** của biểu diễn R.

Ví dụ:

Biểu diễn liên hợp phức $\overline{R_f}$ của biểu diễn cơ bản R_f của $su(3)$

$\overline{I_3} = \overline{R_f}(I_3) = -{I_3}^* = -I_3$

$\overline{I_+} = \overline{R_f}(I_1 + iI_2) = \overline{R_f}(I_1) + i\overline{R_f}(I_2) = -{I_1}^* - i{I_2}^* = -I_1 + iI_2 = -I_-$

$\overline{I_-} = \overline{R_f}(I_1 - iI_2) = \overline{R_f}(I_1) - i\overline{R_f}(I_2) = -{I_1}^* + i{I_2}^* = -I_1 - iI_2 = -I_+$

Tương tự

$\overline{V_3} = -V_3, \quad \overline{V_\pm} = -V_\mp$

$\overline{U_3} = -U_3, \quad \overline{U_\pm} = -U_\mp$

4. Một số biểu diễn có số chiều thấp

a. Biểu diễn 1

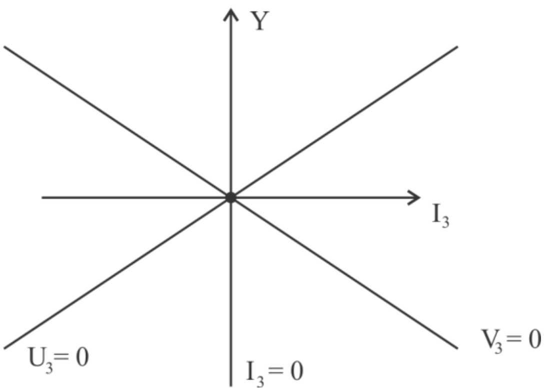
Trạng thái $|0\ 0\rangle \neq 0$ có trọng (0, 0):

$$I_3|0\ 0\rangle = 0|0\ 0\rangle$$

$$Y|0\ 0\rangle = 0|0\ 0\rangle$$

$$I_\pm|0\ 0\rangle = V_\pm|0\ 0\rangle = U_\pm|0\ 0\rangle = 0$$

Đây là biểu diễn 1-chiều.



Sơ đồ trọng **1**

b. Biểu diễn 3

Biểu diễn **3** là biểu diễn cơ bản 3-chiều R_f

$$R_f(F_j) = F_j, \quad F_j = \frac{1}{2}\lambda_j \quad j = 1, \dots, 8$$

Ở đây λ_j là các ma trận Gell-Mann.

$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Đặt

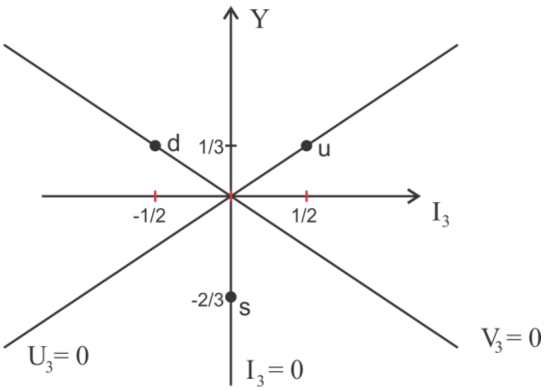
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$I_3 u = \frac{1}{2}u, \qquad Yu = \frac{1}{3}u$$

$$I_3 d = -\frac{1}{2}d, \quad Yd = \frac{1}{3}d$$

$$I_3 s = 0, \qquad Ys = -\frac{2}{3}s$$



Sơ đồ trọng **3**

Các trạng thái của biểu diễn bất khả quy **3** được gọi là các quark:

u (up quark), d (down quark), s (strange quark).

Spin J, số baryon B, số lạ S và điện tích Q của các quark:

Quarks	J	B	S	Q
u	1/2	1/3	0	2/3
d	1/2	1/3	0	-1/3
s	1/2	1/3	-1	-1/3

c. Biểu diễn $\overline{3}$

Đây là biểu diễn liên hợp phức của biểu diễn **3**.

Các toán tử isospin và siêu tích

$$\overline{I}_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{Y} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Đặt

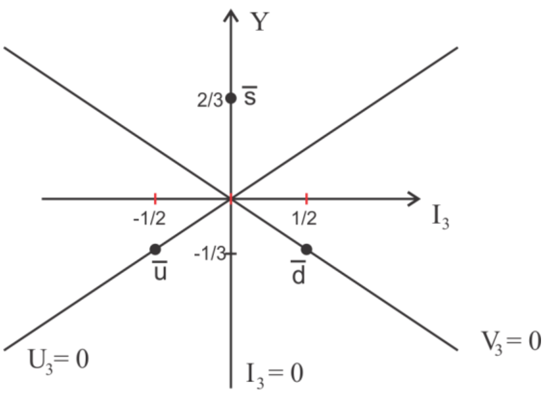
$$\overline{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overline{d} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overline{s} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ta có

$$\overline{I}_3\overline{u} = -\frac{1}{2}\overline{u},\qquad \overline{Y}\overline{u} = -\frac{1}{3}\overline{u}$$

$$\overline{I}_3\overline{d} = \frac{1}{2}\overline{d},\qquad \overline{Y}\overline{d} = -\frac{1}{3}\overline{d}$$

$$\overline{I}_3\overline{s} = 0,\qquad \overline{Y}\overline{s} = \frac{2}{3}\overline{s}$$



Sơ đồ trọng $\mathbf{\overline{3}}$

Các trạng thái $\overline{u}$, $\overline{d}$, và $\overline{s}$ gọi là anti-quarks (có điện tích đối dấu với các quarks).

Spin J, số baryon B, số lạ S và điện tích Q của các anti-quark:

Antiquarks	J	B	S	Q
$\overline{s}$	1/2	-1/3	1	1/3
$\overline{u}$	1/2	-1/3	0	-2/3
$\overline{d}$	1/2	-1/3	0	1/3

d. Biểu diễn 8

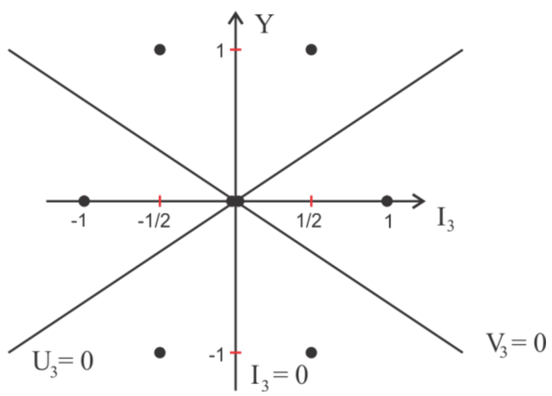
Biểu diễn liên hợp ad của su(3):

$$\mathrm{ad}_A(B) = [A, B] \quad A, B \in su(3).$$

Trọng của các trạng thái có được từ các giao hoán tử

$$\mathrm{ad}_{I_3}(B) = [I_3, B] \text{ và } \mathrm{ad}_Y(B) = [Y, B], \quad B \in su(3)$$

B	$[I_3, B]$	[Y, B]	Trọng
I_3	0	0	(0, 0)
Y	0	0	(0, 0)
I_+	1	0	(1, 0)
I_-	-1	0	(-1, 0)
V_+	1/2	1	(1/2, 1)
V_-	-1/2	-1	(-1/2, -1)
U_+	-1/2	1	(-1/2, 1)
U_-	1/2	-1	(1/2, -1)



Sơ đồ trọng **8**

5. Biểu diễn tích tensor và phép phân tách

Giả sử $I_3^{(i)}$, $I_\pm^{(i)}, V_3^{(i)}, V_\pm^{(i)}, U_3^{(i)}$ và $U_\pm^{(i)}$ i = 1,2 là hai biểu diễn của su(3).Trạng thái và trọng của các không gian con bất biến là $\left|I_3^{(i)} Y^{(i)}\right\rangle$ và $(I_3^{(i)}, Y^{(i)})$ i = 1,2.

Gọi $$V = \mathrm{span}\left\{\left|I_3^{(1)} Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)} Y^{(2)}\right\rangle\right\}.$$

Toán tử isospin và toán tử siêu tích của biểu diễn tích tensor trên V có dạng:

$$I_3^{(1\otimes 2)} = I_3^{(1)} \otimes I + I \otimes I_3^{(2)}$$

$$Y^{(1\otimes 2)} = Y^{(1)}\otimes I + I \otimes Y^{(2)}$$

Ta có

$$I_3^{(1\otimes 2)} \left|I_3^{(1)}Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)}Y^{(2)}\right\rangle = \left(I_3^{(1)} + I_3^{(2)}\right) \left|I_3^{(1)}Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)}Y^{(2)}\right\rangle$$

$$Y^{(1\otimes 2)} \left|I_3^{(1)}Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)}Y^{(2)}\right\rangle = (Y^{(1)} + Y^{(2)}) \left|I_3^{(1)}Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)}Y^{(2)}\right\rangle$$

Vậy trạng thái $\left|I_3^{(1)}Y^{(1)}\right\rangle \otimes \left|I_3^{(2)}Y^{(2)}\right\rangle$ có trọng $(I_3^{(1)} + I_3^{(2)}, Y^{(1)} + Y^{(2)})$.

Theo quy tắc cộng các vector:

$$\left(I_3^{(1)} + I_3^{(2)}, Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) = (I_3^{(1)}, Y^{(1)}) + (I_3^{(2)}, Y^{(2)})$$

Vậy để có sơ đồ trọng của biểu diễn tích tensor ta chỉ cần cộng các trọng của hai biểu diễn như phép cộng các vector trong mặt phẳng trọng. Mỗi trọng của biểu diễn tích tensor có thể tương ứng với nhiều hơn một trạng thái, số trạng thái như vậy được gọi là số bội của trọng đó.

Nếu Φ_1 và Φ_2 là các trạng thái có trọng cực đại của hai biểu diễn, dễ thấy rằng $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ là trạng thái có trọng cực đại của biểu diễn tích tensor.Tác dụng lặp lại của các toán tử $I_-^{(1\otimes 2)}, V_-^{(1\otimes 2)}, U_-^{(1\otimes 2)}$ lên trạng thái Φ cho ta một không gian con bất biến bất khả quy của một biểu diễn bất khả quy. Lấy sơ đồ trọng của không gian con đó ra khỏi sơ đồ trọng của không gian tích tensor. Các trọng còn lại là sơ đồ trọng của một biểu diễn nào đó. Nếu biểu diễn đó là bất khả quy thì phép phân tách được hoàn tất, nếu không ta lặp lại các bước ở trên. Vì sơ đồ trọng của biểu diễn tích tensor là hữu hạn nên cuối cùng không gian tích tensor V được phân tách thành tổng trực tiếp của các không gian con bất biến bất khả quy. Các biểu diễn thâu nhỏ của biểu diễn tích tensor trên các không gian con đó là bất khả quy.

Các bước như đã nói được gọi là **Phép phân tách (Decomposition)** biểu diễn tích tensor thành tổng trực tiếp các biểu diễn bất khả quy.

6. Mô hình quark của các hadron

Gell-Mann và Ne̓eman đã chỉ ra su(3) có các kiến trúc toán học thích hợp để sắp xếp các hadrons thành các nhóm 8 hạt (octet) hay các nhóm 10 hạt (decuplet) (**Eightfold Way**). Một nhóm gồm 9 hạt cộng hưởng có spin 3/2 có thể xếp vào một nhóm 10 hạt nhưng thành viên thứ 10, hạt Ω^-, vẫn chưa được quan sát thấy. Việc phát hiện ra nó vào đầu năm 1964 tại Phòng thí nghiệm Quốc gia Brookhaven, New York đã xác nhận tính hợp lý của đối xứng SU(3).

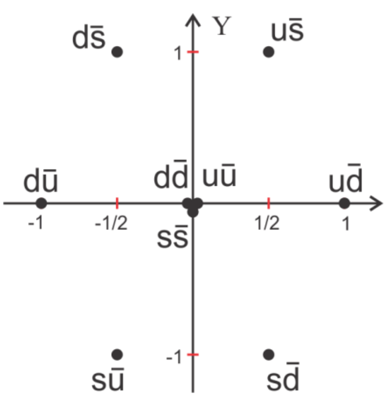
Các biểu diễn **3** và $\overline{\mathbf{3}}$ là các kiến trúc duy nhất mà từ chúng có thể xây dựng các biểu diễn **8** và biểu diễn **10.** Gell-Mann và George Zweig một cách độc lập đã đề xuất ý tưởng là các hadrons được xây dựng từ 3 hạt cơ bản mà George Zweig gọi là "aces", còn Gell-Mann gọi chúng là các "quark". Mô hình của Gell-Mann cho thấy các hạt mesons được cấu thành từ một quark và một phản quark và các hạt baryons được cấu thành từ 3 quarks.

a. Bát tuyến meson

Xét tích tensor $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ và phép phân tách $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus 1$.

Tích tensor $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ là một biểu diễn 9-chiều (a nonet) có các trạng thái và sơ đồ trọng như sau

$\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$	
Nội dung quark	Trọng
$u \otimes \bar{s}$	(1/2, 1)
$u \otimes \bar{d}$	(1, 0)
$d \otimes \bar{s}$	(-1/2, 1)
$u \otimes \bar{u}$, $d \otimes \bar{d}$, $s \otimes \bar{s}$	(0, 0)
$d \otimes \bar{u}$	(-1, 0)
$s \otimes \bar{u}$	(-1/2, -1)
$s \otimes \bar{d}$	(1/2, -1)



Sơ đồ trọng $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$

Các toán tử giảm

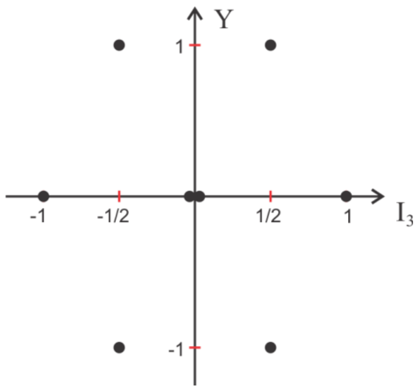
$$\mathrm{I}_-^{3\otimes\bar{3}} = \mathrm{I}_-\otimes 1 + 1 \otimes \bar{\mathrm{I}}_-$$

$$\mathrm{U}_-^{3\otimes\bar{3}} = \mathrm{U}_-\otimes 1 + 1 \otimes \overline{\mathrm{U}_-}$$

$$\mathrm{V}_-^{3\otimes\bar{3}} = \mathrm{V}_-\otimes 1 + 1 \otimes \overline{\mathrm{V}_-}$$

Tác dụng lặp lại của các toán tử giảm này lên trạng thái có trọng cực đại $u\otimes\bar{s}$ cho ra biểu diễn bất khả quy **8** với các trạng thái được chuẩn hóa và sơ đồ trọng như sau

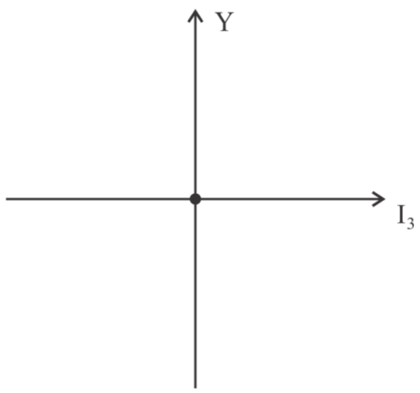
8 trong 3 ⊗ $\bar{3}$	
Nội dung quark	Trọng
$u\otimes\bar{s}$	(1/2, 1)
$u\otimes\bar{d}$	(1, 0)
$d\otimes\bar{s}$	(-1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\otimes\bar{u} - d\otimes\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{6}}(u\otimes\bar{u} + d\otimes\bar{d} - 2s\otimes\bar{s})$	(0, 0)
$d\otimes\bar{u}$	(-1, 0)
$s\otimes\bar{u}$	(-1/2, -1)
$s\otimes\bar{d}$	(1/2, -1)



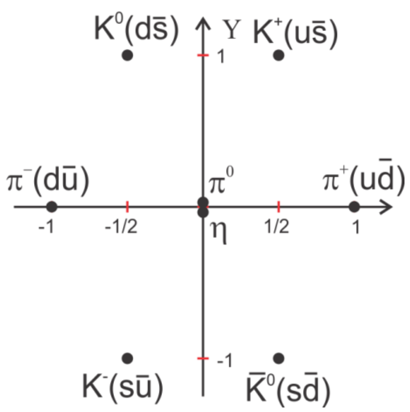
Sơ đồ trọng **8**

Sau khi lấy sơ đồ trọng **8** (bất khả quy) ra khỏi sơ đồ trọng **9** (khả quy), ta thu được biểu diễn **1** dưới đây:

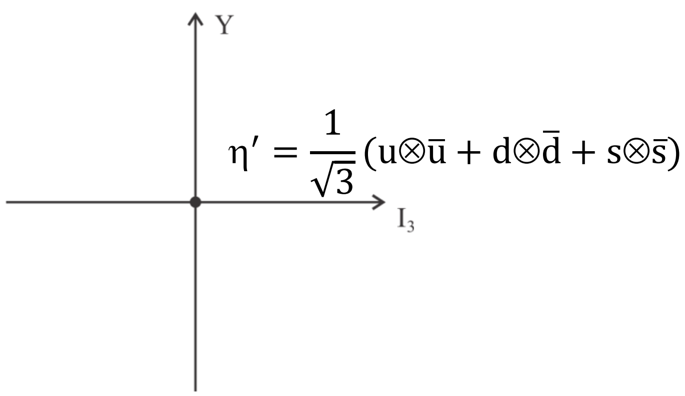
1 trong $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$	
Nội dung quark	Trọng
$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\otimes\bar{u} + d\otimes\bar{d} + s\otimes\bar{s})$	(0, 0)



Sơ đồ trọng **1**



Spin 0 mesons octet



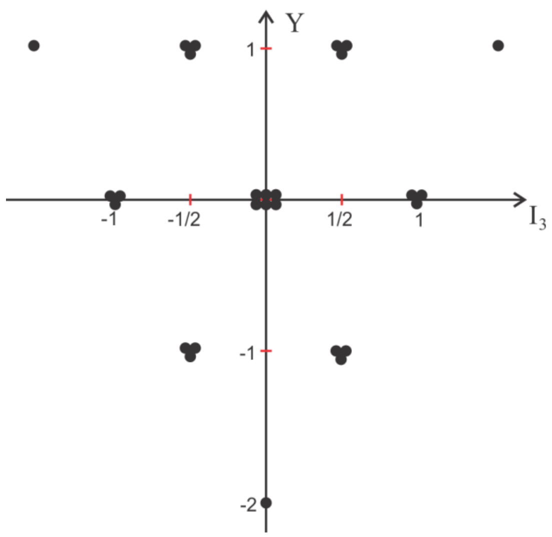
A meson singlet

b. Bát tuyến và Thập tuyến baryon

Tích tensor $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ có bảng các trạng thái và trọng như sau:

$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$	
Trạng thái	**Trọng**
uuu	(3/2, 1)
ddd	(-3/2, 1)
sss	(0, -2)
uud, udu, duu	(1/2, 1)
udd, dud, ddu	(-1/2, 1)
uus, usu, suu	(1, 0)
uss, sus, ssu	(1/2, -1)
dds, dsd, sdd	(-1, 0)
ssd, sds, dss	(-1/2, -1)
uds, usd, dus, dsu, sud, sdu	(0, 0)

Ba trọng đầu tiên có số bội là 1, sáu trọng tiếp theo có số bội là 3, trọng (0, 0) có số bội là 6. Không gian của biểu diễn tích tensor này có số chiều là 27.



Sơ đồ trọng $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$

Ta sẽ thực hiện phân tách biểu diễn tích tensor này thành tổng trực tiếp của các biểu diễn bất khả quy: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$

Áp dụng các toán tử giảm:

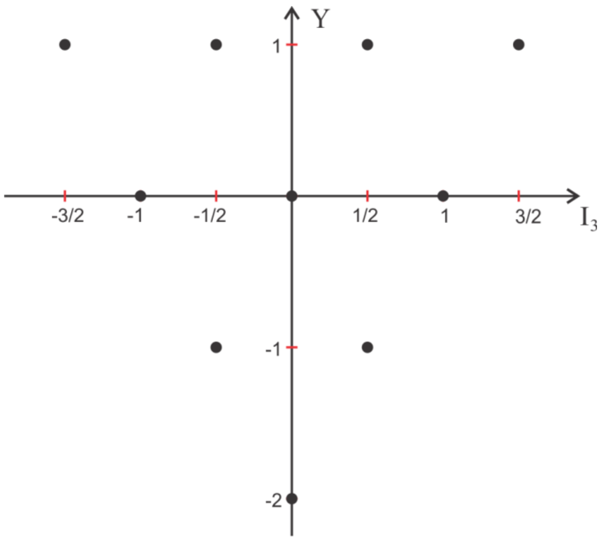
$$I_-^{(3\otimes 3\otimes 3)} = I_-\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes I_-\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes I_-$$

$$U_-^{(3\otimes 3\otimes 3)} = V_-\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes V_-\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes V_-$$

$$V_-^{(3\otimes 3\otimes 3)} = U_-\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes U_-\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes U_-$$

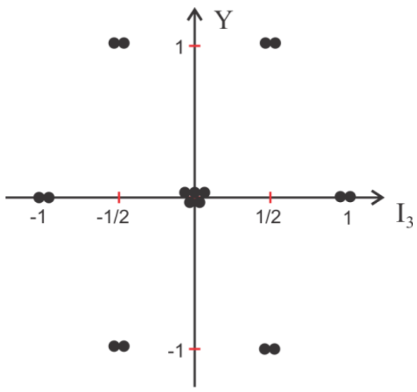
lên trạng thái có trọng cực đại uuu trong không gian 27- chiều $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$, ta thu được biểu diễn bất khả quy 10- chiều sau đây:

10	
Trạng thái	**Trọng**
uuu	(3/2, 1)
ddd	(-3/2, 1)
sss	(0, -2)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uud}+\mathrm{udu}+\mathrm{duu})$	(1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{udd}+\mathrm{dud}+\mathrm{ddu})$	(-1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uus}+\mathrm{usu}+\mathrm{suu})$	(1, 0)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uss}+\mathrm{sus}+\mathrm{ssu})$	(1/2, -1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{dds}+\mathrm{dsd}+\mathrm{sdd})$	(-1, 0)
$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{ssd}+\mathrm{sds}+\mathrm{dss})$	(-1/2, -1)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uds}+\mathrm{usd}+\mathrm{dus}+\mathrm{dsu}+\mathrm{sud}+\mathrm{sdu})$	(0, 0)



Sơ đồ trọng **10**

Lấy ra sơ đồ trọng **10** này, còn lại sơ đồ trọng của một không gian có số chiều là 17:



Trọng cực đại (1/2, 1) trong sơ đồ trọng này có số bội là 2. Ta chọn 2 trạng thái trực giao như sau:

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{duu} - \mathrm{udu})$$

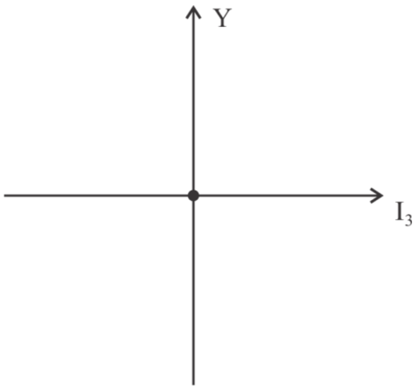
$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{duu} + \mathrm{udu} - 2\mathrm{uud})$$

Áp dụng các toán tử giảm lên hai trạng thái này ta sẽ nhận được hai biểu diễn bất khả quy 8 – chiều sau:

8	
Trạng thái	**Trọng**
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{duu}-\mathrm{udu})$	(1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dud}-\mathrm{udd})$	(-1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{suu}-\mathrm{usu})$	(1, 0)
$\frac{1}{2}(\mathrm{dsu}+\mathrm{dus}-\mathrm{sdu}-\mathrm{uds})$, $\frac{1}{2}(\mathrm{sdu}+\mathrm{sud}-\mathrm{dsu}-\mathrm{usd})$	(0, 0)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dsd}-\mathrm{sdd})$	(-1, 0)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sus}-\mathrm{uss})$	(1/2, -1)
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dss}-\mathrm{sds})$	(-1/2, -1)

8	
Trạng thái	**Trọng**
$\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{duu}+\mathrm{udu}-2\mathrm{uud})$	(1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{ddu}-\mathrm{dud}-\mathrm{udd})$	(-1/2, 1)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{suu}+\mathrm{usu}-2\mathrm{uus})$	(1, 0)
$\frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathrm{dsu}+\mathrm{dus}+\mathrm{sdu}+\mathrm{uds}-2\mathrm{sud}-2\mathrm{usd})$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathrm{sdu}+\mathrm{sud}+\mathrm{dsu}+\mathrm{usd}-2\mathrm{dus}-2\mathrm{uds})$	(0, 0)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{dds}-\mathrm{dsd}-\mathrm{sdd})$	(-1, 0)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{ssu}-\mathrm{sus}-\mathrm{uss})$	(1/2, -1)
$\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{sds}-\mathrm{dss}-2\mathrm{ssd})$	(-1/2, -1)

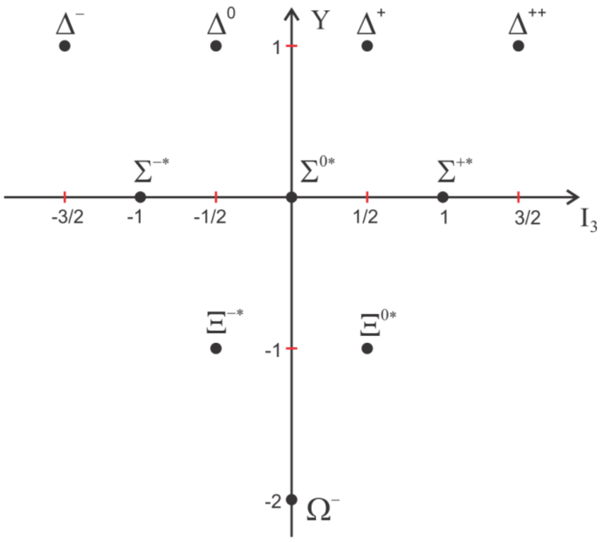
Lấy ra hai sơ đồ trọng **8** này, còn lại sơ đồ trọng sau:



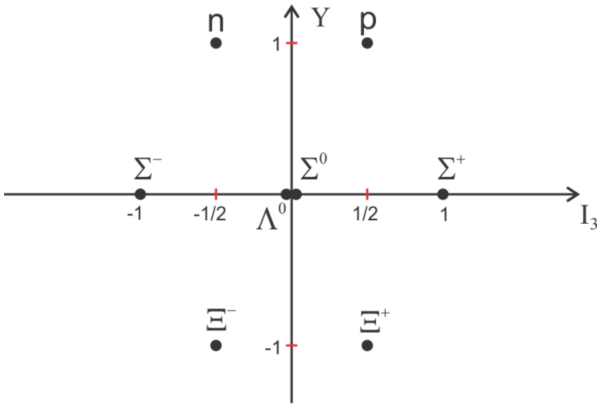
Sơ đồ trọng **1**

Đây là biểu diễn 1- chiều (đương nhiên bất khả quy)

1	
Trạng thái	**Trọng**
$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + sud + dsu - sdu - dus - usd)$	(0, 0)



A baryon decuplet



A baryon octet