Série 2

2018-2019

Interpolation polynomiale

Exercice 1

1) $P_2(x) = 2x - 2$

2) Il suffit d'observer que $f(x)$ est un polynôme de degré 3

et donc $P_3(x) = f(x)$

Exercice 2

1) Le poly d'interp de f relatif aux pts $x_0 = 1$ et $x_1 = 4$

s'écrit dans la base de Lagrange :

$$P_1(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x)$$

avec $L_0(x) = -\frac{1}{3}(x-4)$ et $L_1(x) = \frac{1}{3}(x-1)$

$$\Rightarrow P_1(x) = -\frac{1{,}5709}{3}(x-4) + \frac{1{,}5727}{3}(x-1)$$

soit $f(3,5) \simeq P_1(3,5) = 1{,}5724$.

2) De même on a pour les points $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$.

$$L_0(x) = \frac{1}{15}(x-4)(x-6), \quad L_1(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-6)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{10}(x-1)(x-4)$$

Ainsi $P_2(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$

$$= \frac{1{,}5709}{15}(x-4)(x-6) - \frac{1{,}5727}{6}(x-1)(x-6) + \frac{1{,}5751}{10}(x-1)(x-4)$$

soit $f(3,5) \simeq P_2(3,5) = 1{,}57225$

3) La forme de Newton de P_1 est $P_1(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)$

où $f(x_0) = f(1) = 1{,}5709$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(4) - f(1)}{3} = 6 \cdot 10^{-4}$$

On obtient alors $P_1(3,5) = 1.5709 + 6 \cdot 10^{-4}(3,5-1) = 1{,}5724$

- Si on considère maintenant les 3 pts x_0, x_1 et x_2

La forme de Newton de P_2 est $P_2(x) = P_1(x) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[4,6] - f[1,4]}{6-1} = 1{,}2\ 10^{-4}$$

Il vient donc
$$P_2(3{,}5) = P_1(3{,}5) + 1{,}2\ 10^{-4}\,(3{,}5-1)(3{,}5-4)$$
$$= 1{,}57225$$

On retrouve bien le résultat de 1).

4) On voit ici l'avantage de la forme de Newton. Si on utilise l'expression sur la base de Lagrange, l'ajout d'un pt nous oblige à recalculer l'ensble des polynômes (L_i). Au contraire, avec la forme de Newton, nous pouvons réutiliser les expressions déjà calculées

Exercice 4

1) on a $f(x_i) = P(x_i)$ pour $i=0..n$. Alors, la fonction $f-P$ s'annule en $(n+1)$ pts distincts, et par suite $f'-P'$ s'annule en n pts distincts, et ceci grâce au Th de Rolle.

En procédant par recurrence sur les dérivées successives $f^{(k)} - P^{(k)}$ et en appliquant le Th de Rolle, on obtient

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad tq \quad f^{(n)}(\xi) - P^{(n)}(\xi) = 0$$

d'où le résultat

2) $f[x_0,\dots,x_n]$ est le coeff dominant du polg d'interpolation P

donc $P^{(n)}(x) = f[x_0,\dots,x_n]\,.\,n! \quad \forall x$

D'où $P^{n}(\xi) = f[x_0,\dots,x_n]\,.\,n!$

Il s'en suit que $f^{(n)}(\xi) = P^{(n)}(\xi) = f[x_0,\dots,x_n]\,.\,n!$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 5

La fonction f est C^∞ sur $[0,1]$.

soit $x \in [0,1]$, alors il existe $\xi \in [0,1]$ tq

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$E_n(f) = \max_{x \in [0,1]} |E_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[0,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Par ailleurs, $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$, $f'(x) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

Par récurrence on montre $f^{(n+1)}(x) = \frac{2}{3^{n+1}} \sin\left(\frac{x}{3} + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Ce qui donne $\max_{[0,1]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{2}{3^{n+1}} < 1$.

Par suite $E_n(f) < \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$

On résoud le système

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= f(0)\\
\alpha_1 &= f'(0)\\
\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 &= f(a)\\
\alpha_0 - \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 - \alpha_3 a^3 &= f(-a)
\end{aligned}$$

$2a^3 \alpha_3 = f(a) - f(-a) + 2a f'(0) \Rightarrow \alpha_3 = \dfrac{f(a)-f(-a)}{2a^3} \mp \dfrac{f'(0)}{a^2}$

$2a^2 \alpha_2 = f(a) + f(-a) + 2f(0) \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{f(a)+f(-a)}{2a^2} \mp \dfrac{f(0)}{a^2}$

La formule de l'erreur est donnée dans le cours :

Thm p11

$$E(t) = f(t) - P(t) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\, x^2(x-a)(x+a)$$

donc $|E(t)| \leq \dfrac{M_4}{4!} |x^2(x-a)(x+a)|$

avec $M_4 = \max\limits_{-a \leq \xi \leq a} |f^{(4)}(\xi)|$

et comme $\max\limits_{-a \leq x \leq a} |x^2(x-a)(x+a)| = \dfrac{a^4}{4}$ on a $\max E(x) \leq \dfrac{M_4 a^4}{96}$

$$\max E(x) \leq \frac{M_4}{96} a^4$$

Exercice 9

Soient x_0, x_1 et x_2 trois nombres réels tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On note $\mathcal{P}_m$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq m$.

Soit $g : [x_0, x_2] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5.

1 - Montrons qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ unique vérifiant :

$$(*) \quad \begin{cases} P(x_0) = g(x_0), \quad P(x_1) = g(x_1), \\ P'(x_0) = g'(x_0), \quad P'(x_1) = g'(x_1) \text{ et } P'(x_2) = g'(x_2). \end{cases}$$

Montrons d'abord l'unicité : Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q dans $\mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$. Soit R le polynôme défini par : $R(x) = P(x) - Q(x)$.

Alors $R \in \mathcal{P}_4$ et vérifie :

$$(**) \quad R(x_0) = R(x_1) = 0, \text{ et}$$

$$(***) \quad R'(x_0) = R'(x_1) = R'(x_2) = 0$$

D'après $(**)$ et en utilisant le théorème de Rolle, on obtient :

$$\exists\, c \in \,]x_0, x_1[\text{ tel que } R'(c) = 0.$$

Il s'en suit, grâce à $(***)$, que R' s'annule en 4 points distincts ; et comme $R' \in \mathcal{P}_3$, alors on a nécessairement $R'(x) = 0 \ \forall x$. D'où $R(x) = \text{cte} \ \forall x$, et comme $R(x_0) = 0$, alors $R \equiv 0$, i.e. $P = Q$. Ce qui prouve l'unicité.

Montrons l'existence :

Un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ s'écrit $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4$.

Soit $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 \end{pmatrix}$$

Posons $\Lambda = (\lambda_i)_{0 \le i \le 4} \in \mathbb{R}^5$ et $G = (g(x_i))_{0 \le i \le 4} \in \mathbb{R}^5$

On a alors les équivalences suivantes :

Trouver $P \in \mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$

$\Updownarrow$

$M\Lambda = G$ admet une solution

$\Updownarrow$

La matrice M est inversible

$\Updownarrow$

La matrice M est injective.

Ainsi, montrer qu'il existe $P \in \mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$, revient à montrer que M est injective.

Montrons alors que M est injective. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^5$ tel que $M\Lambda = 0$, ou de manière équivalente, que : $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4$ vérifie :

$$P(x_0) = P(x_1) = 0, \text{ et}$$
$$P'(x_0) = P'(x_1) = P'(x_2) = 0$$

Il s'en suit que $P \equiv 0$, i.e. $\Lambda = 0$. (la démonstration est identique à celle utilisée pour démontrer l'unicité). Ainsi M est injective.

2 - Soit W le polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant :

$$W(x_0) = 0, \quad W(x_1) = 0, \quad W(x_2) = 1$$
$$W'(x_0) = 0, \quad W'(x_1) = 0 \text{ et } W'(x_2) = 0.$$

Nous savons que $W \in \mathcal{P}_5$

2-a Comme $W \in \mathcal{P}_5$, alors il est clair $W^{(5)}$ est une constante. Montrons que $W^{(5)}(t) = cte \neq 0$, $\forall t$. Supposons que $W^{(5)}(t) = 0$ $\forall t$. Alors $W \in \mathcal{P}_4$ et donc $W' \in \mathcal{P}_3$. Par ailleurs, on a $W(x_0) = W(x_1) = 0$, et donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_0, x_1[$ tel que $W'(c) = 0$. Et par suite, puisque $W'(x_0) = W'(x_1) = W'(x_2) = 0$, $W' \in \mathcal{P}_3$ s'annule en 4 points distincts et donc $W' \equiv 0$. D'où $W(x) = cte$ $\forall x$, ce qui est absurde, puisque $W(x_0) = 0$ et $W(x_2) = 1$. Ainsi $W^{(5)} = cte \neq 0$.

Rmq : (Autre démonstration) : on a, si $W^{(5)}(t) = 0$ alors $W \in \mathcal{P}_4$. or $\left.\begin{array}{l} W(x_0) = W(x_1) = 0 \\ \text{et } W'(x_0) = W'(x_1) = W'(x_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W = 0$, d'après 1- Absurde donc $W^{(5)}(t) \neq 0$.

- Montrons que $W(t) \neq 0$, $\forall t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$. Démontrons ce résultat par l'absurde.

Supposons qu'il existe $t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$ tel que $W(t) = 0$.
Or $W(x_0) = W(x_1) = 0$. Il s'en suit, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe deux points c_1 et c_2 ($\neq x_0, x_1$ et t) tels que

$$W'(c_1) = W'(c_2) = 0$$

Par ailleurs, on a $W'(x_0) = W'(x_1) = W'(x_2) = 0$. Ainsi $W' \in \mathcal{P}_4$ et W' s'annule en 5 points, d'où $W' = 0$ et donc $W = cte$. Ce qui est absurde puisque $W(x_0) = 0 \neq W(x_2) = 1$. Ainsi, on a

$$\forall t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}, \quad W(t) \neq 0.$$

2-b Soient P le polynôme introduit en 1- et $t \in [x_0, x_2]$.
Montrons qu'il existe $\xi = \xi(t) \in]x_0, x_2[$ tel que

$$(*) \qquad g(t) - P(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t)$$

Si $t = x_0$ ou $t = x_2$, alors d'une part $g(t) - P(t) = 0$ et d'autre part $W(t) = 0$. Ainsi $(*)$ est vérifiée, d'ailleurs pour tout ξ.
Soit, à présent, $t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$. Considérons la fonction G définie par

$$G(x) = g(x) - P(x) - \frac{g(t) - P(t)}{W(t)} W(x).$$

On a :

$$G(t) = 0, \quad G(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad G(x_1) = 0$$

Et par suite, grâce au théorème de Rolle, G' s'annule en deux points distincts (et qui sont distincts de x_0, x_1 et t).
Par ailleurs, on a :

$$G'(x) = g'(x) - P'(x) - \frac{g(t) - P(t)}{W(t)} W'(x)$$

utilisant le fait que $g'(x_i) = P'(x_i)$ et $W'(x_i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$, on obtient :

$$G'(x_0) = G'(x_1) = G'(x_2) = 0$$

Ainsi, d'après ce qui précède, G' s'annule en 5 points distincts. Par application du théorème de Rolle sur G'', jusqu'à $G^{(5)}$, on obtient :

$$\exists\, \xi = \xi(t) \in]x_0, x_2[\setminus \{t, x_1\} \text{ tel que } G^{(5)}(\xi) = 0.$$

Or $G^{(5)}(x) = g^{(5)}(x) - \underbrace{P^{(5)}(x)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ P \in \mathcal{P}_4}} - \dfrac{g(t) - P(t)}{W(t)} W^{(5)}(x)$

Il s'en suit, puisque $G^{(5)}(\xi) = 0$, que

$$g(t) - P(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t)$$

ce qui prouve le résultat énoncé.

Exercice 7

1) On pose $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(0) = f(0) \\ P'(0) = f'(0) \\ P''(0) = f''(0) \\ P(1) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \\ a_3 = f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2} f''(0) \end{cases}$$

d'où $P(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \left(f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2} f''(0)\right) x^3$

2) (a) f de classe C^4, ℓ de classe C^4 et $t \mapsto t^3(t-1)$ C^4 $\Rightarrow$ F est C^4 sur $[0,1]$

$F(0) = F(1) = F(x) = 0 \xRightarrow{\text{Rolles}} \exists\, x_1, x_2 \notin \{0,1,x\}$ tq $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$

$F'(0) = F'(x_1) = F'(x_2) \xRightarrow{\text{Rolles}} \exists\, x_3, x_4 \notin \{0,1,x\}$ tq $F''(x_3) = F''(x_4) = 0$

$F''(0) = F''(x_3) = F''(x_4) = 0 \xRightarrow{\text{Rolles}} \exists\, x_5, x_6 \notin \{0,1,x\}$ tq $F^{(3)}(x_5) = F^{(3)}(x_6) = 0$

$F^{(3)}(x_5) = F^{(3)}(x_6) = 0 \xRightarrow{\text{Rolles}} \exists\, \xi_x \in]0,1[$ tq $F^{(4)}(\xi_x) = 0$.

(b) $\forall\, t \in [0,1]$, $F^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) + \ell^{(4)}(t) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)} \dfrac{d^4}{dt^4}\left(t^3(t-1)\right)$, pour $x \notin \{0,1\}$

$\ell^{(4)}(t) = 0$ car $d°\ell \leq 3$

$\dfrac{d^4}{dt^4}\left(t^3(t-1)\right) = 4!$

d'où $F^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)}(4!)$ $\forall t \in [0,1]$

Pour $t = \xi_x$ on obtient $0 = f^{(4)}(\xi_x) - \dfrac{f(x)-\ell(x)}{x^3(x-1)}(4!)$

Ce qui donne $f(x) - \ell(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^3(x-1)$ avec $\xi_x \in]0,1[$

Pour $x \in \{0,1\}$, $f(x) - \ell(x) = 0$.

<u>Conclusion</u> : $\forall x \in [0,1]$, $\exists \xi_x \in]0,1[$ tq $E(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^3(x-1)$

Exercice 8

1/ Calcul de w_1

$w_1(-1) = w_1'(-1) = 0 \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ tq $w_1(x) = C(x+1)^2$ (-1 racine dou

et $w_1(1) = 1$ donne $4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

d'où $\boxed{w_1(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2.}$

Calcul de w_2 :

$w_2(-1) = w_2(1) = 0 \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tq $w_2(x) = K(x+1)(x-1)$
$= K(x^2-1)$

et $w_2'(-1) = 1$ donne $-2K = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$

d'où $\boxed{w_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)}$

Calcul de w_3 :

$w_3(1) = 0 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $w_3(x) = (x-1)(ax+b)$

on a $\begin{cases} w_3(-1) = 1 \\ w_3'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 3a = -\frac{3}{4} \end{cases}$

d'où $\boxed{w_3(x) = -\frac{1}{4}(x+3)(x-1)}$

2) Il suffit de montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre.

soit α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tq $\alpha w_1(x) + \beta w_2(x) + \gamma w_3(x) = 0$.

Pour $x = -1$, on déduit $\gamma = 0$; pour $x = 1$ on déduit $\alpha = 0$

et pour $x = 0$ (par exple) on trouve $\beta\, w_2(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

d'où $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre donc forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

3) P est le polynôme d'interpolation de f relatif aux pts -1 et 1 et aux entiers 1 et 0 donc $d^\circ P \leq 1 + 1 = 2$.

$P \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\{w_1, w_2, w_3\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ donc $\exists\, \alpha_1, \alpha_2$ et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$

tq $P(x) = \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x) + \alpha_3 w_3(x)$.

Calculons α_1, α_2 et α_3.

- Pour $x = -1$, on obtient $\alpha_1 w_1(-1) + \alpha_2 w_2(-1) + \alpha_3 w_3(-1) = P(-1) = f(-1)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = f(-1)}$

$w_3(-1) = 1$ et $w_1(-1) = w_2(-1) = 0$

- Pour $x = 1$, on obtient $\alpha_1 w_1(1) + \alpha_2 w_2(1) + \alpha_3 w_3(1) = f(1)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = f(1)}$

$w_1(1) = 1$ et $w_2(1) = w_3(1) = 0$

- En dérivant P, on obtient, pour $x = -1$;

$\alpha_1 w_1'(-1) + \alpha_2 w_2'(-1) + \alpha_3 w_3'(-1) = P'(-1) = f'(-1)$

$\Rightarrow \alpha_2 = f'(-1)$

$w_1'(-1) = w_3'(-1) = 0$ et $w_2'(-1) = 1$

Conclusion : $\boxed{P(x) = f(1)\, w_1(x) + f'(-1)\, w_2(x) + f(-1)\, w_3(x)}$

4) $P \in \mathbb{R}_2[x]$. D'après un théorème du cours, l'erreur d'interpolation d'Hermite de f est donné par : Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(2+1)}(\xi_x)}{(2+1)!}(x+1)^2(x-1) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6}(x+1)^2(x-1)$$

avec $\xi_x \in [-1, 1]$