Controlling the spread of infectious diseases via Markov chains
Part 2: Analysis – PiE2 – Fall 2021

Sonia Castro

February 4, 2023

a) For i $\in [N]_0 = \{0, .., N\}$ and $n \in N$, define

$$p_i(n) = Pr(X_n = i).$$

Find a recurrence for $p_i(n+1)$ in terms of$((p_j(n))_{j \in [N]_0}$.

$$p_i(n+1) = b_{i-1}p_{i-1}(n) + (1 - b_i - d_i)p_i(n) + d_{i+1}p_{i+1}(n)$$

Com que és una cadena de Markov el nombre d'infectats al moment n+1 només depèn del nombre d'infectats del moment n. En aquest cas la probabilitat de que al moment n+1 hi hagi i infectats és la suma de les probabilitats de que al moment n hi hagi i-1 infectats i es contagi una persona, que hi hagi i+1 infectats i es curi una persona o de que hi hagi i infectats i no passi res.

b) Justify the existence of the limit $\pi_i = lim_{n \to \infty} p_i(n)$ and compute π_i.

La nostra cadena es pot partir en dues classes, la que conté l'estat absorbent 0 que és tancada i la que conté els estats de 1 fins a N que és oberta i tots els seus estats transitoris. Per tant és evident que els estats de la segona classe seran abandonats amb probabilitat 1 quan n tendeixi a infinit.

Per tant

$$\pi_i = lim_{n \to \infty} p_i(n) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \in [1, N] \end{cases}$$

c)For i $\in [N]$ and $n \in N$, define

$$q_i(n) = Pr(X_n = i | T.ext > n) = \frac{p_i(n)}{1 - p_0(n)}.$$

Show that, for all $i \in [N]$ the following recurrence is satisfied

$$q_i(n+1)(1 - d_1 q_1(n)) = b_{i-1}q_{i-1}(n) + d_{i+1}q_{i+1}(n) + (1 - b_1 - d_i)q_i(n). * (1)$$

Tenint en copte la definició de q_i tenim:

$$\frac{p_i(n+1)}{1-p_0(n+1)}(1-\frac{d_1 p_1(n)}{1-p_0(n)}) = \frac{p_i(n+1)}{1-p_o(n)}$$

Simplificant tenim:

$$\frac{1}{1-p_0(n)} = \frac{1-p_0(n)-d_1 p_1(n)}{(1-p_0(n+1)(1-p_0(n))}$$

$$p_0(n+1) = p_0(n) + d_1 p_1(n) \Rightarrow Pr(X_{n+1}=0) = Pr(X_n=0) + Pr(X_n=1)d_1$$

I això sabem que és cert perquè la probabilitat de tenir 0 infectats en el moment n+1, com que 0 és un estat absorbent, és la suma de tenir 0 infectats al moment n més la probabilitat de tenir-ne 1 i que es curi.

d) Unfortunately, $q_i(n)$ does not admit a closed form. We will consider an approximate version $\widehat{q}_i(n)$ of $q_i(n)$, by setting $d_1 = 0$. This assumption is not too unrealistic, as $d_1 = \gamma \leq 1/N$ is very small when N is large and we hope that not a lot of time is spent at state 1. Justify the existence of the limit $\widehat{\theta}_i(n) = lim_{n\to\infty}\widehat{q}_i(n)$ and compute $\widehat{\theta}_i$ using *(1) with $d_1 = 0$ in terms of R0, i and N. For the values in (S3), compare $\widehat{\theta}_i$ with your simulations from Part 1.c), by plotting them in the same graphic. (Hint: to compute $\widehat{\theta}_i$, use the detailed balance equations.)

El límit existeix perquè com que $q_0(x)$ per tota $x \in \{1,..n\}$ és 0, la cadena que ens queda amb els estats de 1 a N és ergòdica. És irreductible (aquests estats formen una sola classe), positivament recurrent (la classe és tancada i el nombre d'estats finits) i és aperiòdica (els estats tenen període 1, ja que en un pas pots tornar al mateix estat on et trobaves).

Al ser ergòdica $\widehat{\theta}_i(n) = lim_{n\to\infty}\widehat{q}_i(n)$ existeix.

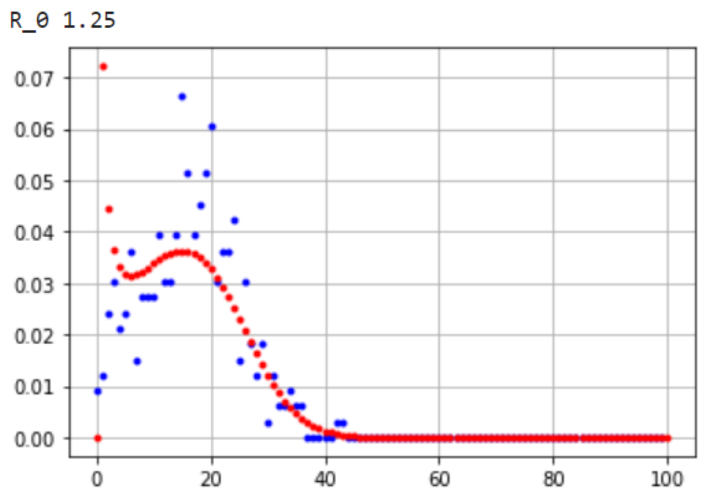

Figure 1: S3 simulations (blue) $\widehat{\theta}_i$ (red)

El codi emprat per comparar $\widehat{\theta}_i$ amb la simulació de la part 1:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import comb

N = 100
B = 0.01
A = 0.008
freq = [0]*N
itval = 0

for n in range (0,1000):
    X_n = [75]
    i = X_n[-1]

    b_i = B * i * (N-i)/N
    d_i = A * i

    while i>0 and i<= N:
        i= X_n[-1]
        rand_num = random.random()

        if(rand_num <= b_i):
            X_n.append(i+1)


        elif (b_i <=rand_num <= b_i + d_i):
             X_n.append(i-1)
        else:
             X_n.append(i)

        b_i = B * i * (N-i)/N
        d_i = A * i

        #a cada nova i sumem 1 a aquest valor
        i = X_n[-1]

    #si el Text > 10000, calculem vector freq dividint la suma
    pel nombre de rep q es la long d X_n
    if X_n.index(0) > 10000:
        itval = itval+1
        val = X_n[10000]
        freq[val-1] = freq[val-1]+1


freq = [x /itval for x in freq]

R0 = 1.25
factor = 1.00

for i in range (2, N + 1):
```

```
    factor += ((R0 / N)**(i - 1)) * ((factorial(i - 1) / N) * comb(N, i))

pi = [None] * (N + 1)
pi[0] = 0
pi[1] = 1/factor

for i in range (2, N + 1):
    pi[i] = ((R0 / N)**(i - 1)) * ((factorial(i - 1) / N) *
    comb(N, i)) * pi[1]



print("\n\n\n")

print("R_0", B/A)

eix_x =[]
for i in range(len(pi)):
    eix_x.append(i)


plt.plot( freq, 'b.', pi, 'r.')
plt.grid()
plt.show()
```

e) Compute the probability of an ϵ-outbreak in terms of X_0, R_0, and N. For the values in (S1') and (S3'), compare it with your simulations from Part 1.d).

Per a poder calcular la probabilitat fent servir els resultats de "the Gambler's ruin" presentats a classe, suposem que no hi ha possibilitat de quedar-nos en el mateix estat en un pas i que l'estat ϵN és absorbent. Per tant com que b_i i d_i han de sumar 1 les proporcionem: $b_ik + d_ik = 1$.

Agafem l'exemple del gambler's ruin on l'estat 0 i N són absorbents, puges amb probabilitat p i baixes (cap a 0) probabilitat q. Sabem que la probabilitat de que la cadena acabi a 0 si comença a $X_0 = i$ és: $q_i = \frac{b^i - b^n}{1-b^n}$ on $b = (1-p)/p$. Girem la cadena per aprofitar aquest resultat i per tant la probabilitat de pujar (cap a 0) és q i la de baixar és p. És a dir relacionant-ho amb el nostre cas $q = b_ik$ i $p = d_ik$. I completant la fórmula esmentada abans tindríem la probabilitat de que la cadena acabi a ϵN. En el nostre cas i és el nombre d'infectats inicial.

$$q_i = \frac{(\frac{1-d_ik}{d_ik})^i - (\frac{1-d_ik}{d_ik})^{\epsilon N}}{1 - (\frac{1-d_ik}{di_k})^{\epsilon N}} = \frac{(\frac{1-\gamma ik}{\gamma ik})^i - (\frac{1-\gamma ik}{\gamma ik})^{\epsilon N}}{1 - (\frac{1-\gamma ik}{\gamma ik})^{\epsilon N}}$$

Tenim $b_ik + d_ik = 1$. i $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

$$\frac{(\frac{\beta ik}{\gamma ik})^i - (\frac{\beta ik}{\gamma ik})^{\epsilon N}}{1 - (\frac{\beta ik}{\gamma ik})^{\epsilon N}} = \frac{R_0^i - R_0^{\epsilon N}}{1 - R_0^{\epsilon N}}$$

En els casos (S1') i (S2') de la part 1 $\epsilon = \frac{1}{2000}$ **i** $X_0 = 200$.

(S1') N= 1000000, $\beta = 0.0008$ **and** $\gamma = 0.001 \Rightarrow R_0 = 0.8$
(S2') N= 1000000, $\beta = 0.001$ **and** $\gamma = 0.0008 \Rightarrow R_0 = 1.25$

El resultat és 4.149e-20, és a dir, 0 en el cas S1' i 1 en el cas S2' tal i com ens havia sortit a les simulacions de la part 1.

El codi emprat per fer els càlculs:

```
R = 0.8
i = 200
N = 1000000
E= 1/2000

Q = (pow(R, i)- pow(R, E*N))/(1-pow(R, E*N))

Q
```

f) Suppose that $\beta = \gamma = \frac{1}{2\epsilon N}$ **. Show that the expected time until we can determine if there is an** ϵ**-outbreak is** $O(\epsilon^3 N^3)$**, regardless of** X_0**.**

Com en la pregunta anterior coneixem la fórmula en "Gambler's ruin" on el temps mitjà fins que la cadena acaba a 0 o N si $X_0 = i$ és:

$$E(M_i) = \frac{1}{1-2p}\Big(i - \frac{i - b^i}{1 - b^n} N\Big)$$

No hem aconseguit esbrinar com relacionar-ho amb el nostre cas, ja que tenim la probabilitat de que no passi res i de seguir en el mateix. I en aquest cas no podem simplificar-la ja que augmenta el temps que triguem en arribar a 0 o ϵN.