 Lect. dr. Anca Grad

Schimbari de variabilă în integralele

1 Substituţiile lui Euler

Exerciţiile următoare sunte menite să vă ofere o recapitulare substanţială a tehnicilor de integrare deprinse in liceu:(integrare prin părţi, schimbare de variabilă). Pentru unele dintre ele, va trebui să foloşiţi aşa-numitele substituţii ale lui Euler. Acestea se aplică atunci când în funţia de integrat se întâlneşte un radical de forma

$$\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Se va trece la integrale în funţie de noua variablă t, făcân una din următoarele substituţii

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \pm\sqrt{a}x \pm t & \text{dacă } a>0 \\ \pm x\cdot t \pm \sqrt{c} & \text{dacă } c>0 \\ t(x-x_0) & \text{dacă } x_0 \text{ este o soluţie a ecuaţiei } ax^2+bx+c=0. \end{cases}$$

2 Substituţiile lui Weirstras (trigonometrice)

Substituţiile trigonometrice, cunoscute şi sub numele de substituţiile lui Weierstrass, se centrează de obicei pe schimbarea de variabilă

$$tg\frac{x}{2} = t.$$

Notăm prin $R(\sin x, \cos x)$ expresia care trebuie integrată. Există anumite cazuri, aşa numite scurtături, în care se pot folosi şi alte substituţii trigonometrice.

- Dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, atunci se foloseşte $\cos x = t$.
- Dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, atunci se foloseşte $\sin x = t$.
- Dacă $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, atunci se foloseşte $tg\ x = t$.

Reamintim următoarele formule trigonometrice:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+th^2 x}.$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

3 Substituţii trigonometrice (variabilele se notează cu funcţii trigonometrice)

Uneori atunci când în funţia de integrat intervin radicali din patrate perfecte (alternativ la substituţiile lui Euler), se poate încerca rezovlarea exerciţiilor prin trecere la funţiile trigonometrice. Atfel

- Pentru $\int R(x, \sqrt{r^2 - x^2}dx$ se alege $x = r\sin$ sau $x = r\cos t$.
- Pentru $\int R(x, \sqrt{r^2 + x^2}dx$ se alege $x = rtgt$ sau $x = rctgt$.
- Pentru $\int R(x, \sqrt{x^2 - r^2}dx$ se alege $x = \frac{r}{\cos x}$ sau $x = \frac{r}{\sin x}$.

Exerciţiul 1

a) $\int \frac{1}{1+\frac{1}{sinx}}dx, \quad x \in (\pi, \pi);$

b) $\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}dx \quad x \in (\pi, \pi);$

c) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx, \quad x \in (-3, 3);$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-8)^3}}dx \quad x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8});$

f) $\int \sqrt{2x - x^2}dx \quad x \in (0, 2);$

g) $\int \sqrt{4 - x^2}dx \quad x \in (-2, 2);$

h) $\int x\sqrt{1 + x^2}dx.$

Exerciţiul 2

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x, \;\; x \in]2,+\infty[;$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x, \;\; x > 1;$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^4}\mathrm{d}x, \;\; x > 1;$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10}, \; x \in \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}, \; x \in \mathbb{R}.$

Exerciţiul 3:

Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \;\; x \in]0,+\infty[;$

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x, \;\; x \in]1,+\infty[.$

Exerciţiul 4:

Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x-2}}\mathrm{d}x, \quad x \in]\sqrt{3}-1,+\infty[;$

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{-4x^2-x+1}}\mathrm{d}x, \quad x \in]\frac{-1-\sqrt{17}}{8}, \frac{\sqrt{17}-1}{8}[.$

Exerciţiul 5:

Să se calculeze:

$$a)\ \int_1^2 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_1^3 \frac{1}{x\left(x^2+9\right)}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

Exerciţiul 6:

Să se calculeze:

$$a)\ \int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)\left(x^2+3\right)}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x. e)\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\left(x^2+4\right)}\mathrm{d}x;$$

$$f)\ \int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\mathrm{d}x; \qquad g)\ \int_0^1 \frac{x^3+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$$

Exerciţiul 7:

Să se calculeze:

$$a)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_2^3 \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

Exerciţiul 8:

Să se calculeze:

$$a)\ \int_2^3 \sqrt{x^2+2x-7}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \sqrt{6+4x-2x^2}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

Exerciţiul 9:

Să se arate că:

a) $2\sqrt{2} < \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + 4x + 5}\,\mathrm{d}x < 2\sqrt{10}$;

b) $\mathrm{e}^2\left(\mathrm{e} - 1\right) < \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{\ln x}\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{e}^3}{2}\left(\mathrm{e} - 1\right).$