Curs 13 - Serii puteri

Def: Fie $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$. Atunci s.n. serie de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \ (x\in\mathbb{R})$

$\mathcal{C} = \{c\in\mathbb{R} \mid \sum\limits_{n\geq 0} a_n \cdot c^n$ este C$\}$ - mulț de conv. a seriei de puteri

Obs: $0 \in \mathcal{C}$

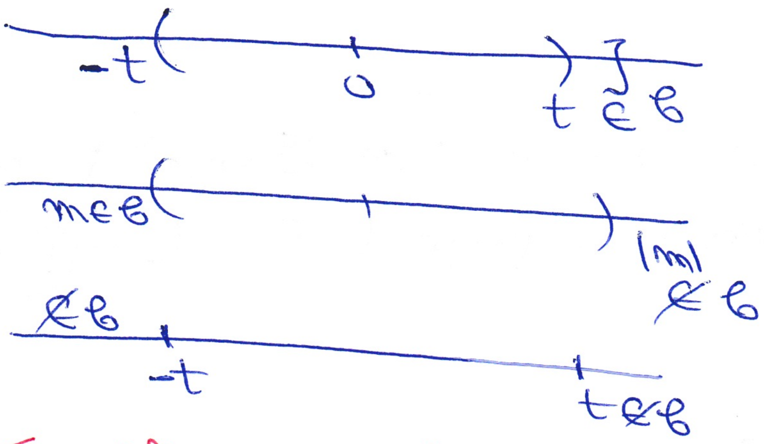
T lui Abel - serii de puteri

$\sum a_n x^n$ SDP atunci

a) Dacă $t \in \mathcal{C} \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n u^n$ este AC pt $\forall\, u$ a.î. $|u|<|t|$

b) Dacă $t \notin \mathcal{C} \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n v^n$ este D pt $\forall\, v$ a.î. $|v|>|t|$

Obs: T lui Abel nu tratează $\leq, \geq$, cazuri care vor fi investigate în particular



Def: Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Atunci:

$R = \sup \mathcal{C}$ $(\in [0, \infty])$ s.n. RAZA DE CONVERGENȚĂ a seriei de puteri.

T. (T lui Cauchy - Hadamard relativ la SDP)

Fie $\sum a_n x^n$ o SDP. Dacă:

$\exists\ \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \left(= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ atunci $R = \frac{1}{\lambda}$

Dem: Studiem natura seriei $\sum a_n x^n$. STO

Încercăm absolut convergența AC, deci studiem $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n x^n|$ STP

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\cdot |x| = |x| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\lambda} = |x|\cdot\lambda$$

I $\lambda = 0 \Rightarrow \ell = 0 < 1$

$\Downarrow$

$\sum |a_n x^n|$ este C $\Rightarrow \sum a_n x^n$ AC

$\Downarrow$

$\sum a_n x^n$ este C pt $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \mathbb{R} \Rightarrow \sup \mathcal{C} = \infty = \frac{1}{0_+}$

deci $R = \frac{1}{\lambda}$

II $\lambda = \infty$ și $x \neq 0$

$\ell = |x|\cdot\infty = \infty > 1 \Rightarrow \sum a_n x^n$ D nu este AC

dar pt $x > 0$ ea nu poate fi C $\Rightarrow$ D $\Rightarrow \boxed{R = 0} = \boxed{\frac{1}{\infty}}$

III $\lambda \in (0, \infty)$

$\ell = |x|\cdot\lambda \xrightarrow[\text{Comp } \sqrt{\ }]{\text{crit}} |x|\cdot\lambda < 1 \Rightarrow$ AC

$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \boxed{R = \sup \mathcal{C} = \frac{1}{\lambda}}$

Concluzie: Din T lui Abel și Cauchy Hadamard $\Rightarrow$ pt $\sum a_n x^n$ SDP

$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R]$

Algoritm pt studiul seriilor de puteri

I (λ) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\lambda}$

II Scriem $(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R]$

III Analizăm pe rând cazurile

$x = -R$, deci $\sum_{n\geq 0} a_n(-R)^n$

și $x = R$, deci $\sum_{n\geq 0} a_n (R)^n$

IV $\mathcal{C}$

Ex: Studiați SDP: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \cdot x^n \sim (a_n)$

unde $\begin{cases} a_n = \frac{(-1)^n}{n} \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

I $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow R = 1$

II $(-1, 1) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-1, 1]$

III $\boxed{x = -1}$

analizăm $\sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum \frac{1}{n}$ D $\Rightarrow -1 \notin \mathcal{C}$

$\boxed{x = 1}$

analizăm $\sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot 1^n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ C (Leibnitz) $\Rightarrow 1 \in \mathcal{C}$

IV $\mathcal{C} = (-1, 1]$

Obs: Polinomul lui Taylor de rang n atașat funcției $-\ln(x+1)$ și punctului 0 este $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n}$ deoarece $C=(-1,1] \Rightarrow$ funcție nu poate fi dezvoltată în serie Taylor doar pe C.

De exemplu $\forall x\in\mathbb{R}$ analizând seria de puteri
$\sum \frac{1}{n!}x^n$ obținem $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{R=\infty}$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

Seriile de puteri pot fi dezvoltate în jurul altor centre

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-c)^n$$

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Def: Fie $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$. Not prin

$\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = \{ f \mid f: A \to \mathbb{R} \}$ mulț. func. reale cu dom A

Orice funcție $\gamma: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ s.n. ȘIR DE FUNCȚII

Obs: Un șir de funcții $\gamma: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ asociază în mod unic oricărui nr nat $n\in\mathbb{N}$, o funcție notată $f_n \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\gamma(n) = f_n$ iar $f_n: A\to\mathbb{R}$

Not: $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ este un șir de funcții

Ex: Fie $n\in\mathbb{N}$. Considerăm

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

deci $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f_2(x)=x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f_7:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f_7(x)=x^7$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Def: Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ un șir de funcții. Atunci mulțim

$\mathcal{C} = \{c \in A : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(c) \in \mathbb{R}\} = \{c \in A :$ șirul de nr reale $(f_n(c))$ este convergent$\}$

s.n. MULȚIMEA DE CONVERGENȚĂ A ȘIRULUI DE FUNC (f_n)

Reanalizând ex. de mai sus:

$\forall n \in \mathbb{N}, \ [f_n(x) = x^n, \ \forall x \in \mathbb{R}]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ \nexists, & |x| \leq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{C} = (-1, 1] \ (\neq A = \mathbb{R})$

Def: Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ a.î. $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Atunci funcția $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \forall x \in \mathcal{C}$ s.n. FUNCȚIA LIMIT PUNCTUALĂ a șirului de funcții (f_n)

ex: $f : (-1,1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

Obs: Notația uzuală pt convergența punctuală este:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{C}} f$$

T (t. de caracterizare cu ε a convergenței punctuale)

Fie
- $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ un șir de funcții
- $\mathcal{C} \subseteq A$
- $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci

$f_n \xrightarrow{\mathcal{C}} f \iff \forall x \in \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (*)

Dem: $f_n \xrightarrow{B} f \Leftrightarrow \forall x \in B, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

T.E pt şiruri în $\mathbb{R}$

Limitări ale acestei noţiuni:

- Continuitatea funcţiilor din şir nu este moştenită de funcţia limită punctuală

Ex 2: $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)\ \forall x \in \mathbb{R}\ (f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Fixăm $x \in \mathbb{R}$ arbitrar şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = 0\ \exists \in \mathbb{R}$$

x arbitrar

$\Rightarrow B \in \mathbb{R}$

definim funcţia limită punctuală ca fiind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 0\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{B} f$

Ex 3: $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : A \to \mathbb{R}\quad f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}\ \forall x \in [0,\infty)$

$A = [0,\infty)$

Fixăm $x \in [0,\infty)$ şi calculăm $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} =$

$$= \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \exists \in \mathbb{R}$$

$B = A = [0,\infty)$

Introducem $f : A \to \mathbb{R}\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ funcţia limită punctuală

Def: Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ un șir de funcții

$B \subseteq A$

$f : B \to \mathbb{R}$ - funcție

Spunem că șirul de funcții (f_n) converge (uniform) către funcția f dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall x \in B$

(**) $\forall n \geq n_\varepsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Obs: UC $\Rightarrow$ PC

$\not\Leftarrow$

(T) (lui Weierstrass pentru șiruri de funcții)

Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ un șir de funcții

$B \subseteq A$

$f : B \to \mathbb{R}$

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$

Dacă: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

și $\exists n' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall n \geq n' \quad |f_n(x) - f(x)| < a_n$

atunci $\boxed{f_n \xrightarrow[\to]{B} f}$

Obs: Algoritm de studiere al șirurilor de funcții

I Fixăm $x \in \mathbb{R}$ și calc. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

II Specificăm B și $f : B \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \forall x \in B$

III Fixăm $n \in \mathbb{N}$ și analizăm

$a_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in B\} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$

IV Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[]{\mathcal{C}} f$

altfel $f_n \not\xrightarrow[]{\mathcal{C}} f$

Ex: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

I Fixăm $x \in \mathbb{R}$ și calc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2+x^4} = 0 \ \exists \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

II $\mathcal{C} = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$

III Fixăm $n \in \mathbb{N}$

? $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = a_n =$

$= \sup\{|\frac{x^2}{n^2+x^4} - 0| \ x \in \mathbb{R}\} =$

$= \sup\{|\frac{x^2}{n^2+x^4}| : x \in \mathbb{R}\}$

Folosim funcția auxiliară:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{x^2}{n^2+x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

și îi studiem variația:

g este deriv pe $\mathbb{R}$ și $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \frac{2x(n^2+x^4) - 4x^5}{(n^2+x^4)^2} =$

$$= \frac{2xn^2 + 2x^5 - 4x^5}{(n^2+x^4)^2} = \frac{-2x^5 + 2xn^2}{(n^2+x^4)^2} = \frac{-2x(x^4 - n^2)}{(n^2+x^4)^2} =$$

$$= -\frac{2x(x^2-n)(x^2+n)}{(n^2+x^4)^2}$$

x		$-\sqrt{n}$			0		$\sqrt{n}$	
x	+ +	+	+		0	−	−	−
x^2-n	+ +	0	− −	−		−	0	+ + +
$g'(x)$	+ +	0	− −		0	+	0	− − −
$g(x)$	$\nearrow$	$g(-\sqrt{n})$	$\searrow$		$g(0)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{n})$	$\searrow$

$\Rightarrow g(x) \le \max\{g(-\sqrt{n}), g(\sqrt{n})\}$

$\Rightarrow g(-\sqrt{n}) = g(\sqrt{n}) = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow g(x) \le \frac{1}{2n} \ \forall x \in \mathbb{R}$

Punem $a_n = \frac{1}{2n}$

III $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \Longrightarrow f_n \overset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f$

Obs: Atunci când funcția limită punctuală nu moștenește prop precum cont, intgr, deriv nu avem conv. uniformă $\rightrightarrows$

Pt ex 1, 3 $f_n \not\rightrightarrows f$

(este suficient menționarea pb)

Obs: Pt ex 2 $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)\right| = \frac{|\sin nx|}{n} \le \frac{1}{n}$

$\Rightarrow a_n$ este ușor de determinat

Ex 4: $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \forall x \in [0,\infty)$

I fixăm $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$ → disc în 0

$\mathcal{B} = [0,\infty)$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow{[0,\infty)} f$

dör f dixc
$\left.\begin{array}{l} \\ \forall n \in \mathbb{N} \; f_n C. \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \overset{[0,\infty)}{\not\rightrightarrows} f_n$