

Șiruri de numere reale - partea a 2-a

Exercițiul 1: Studiați natura (monotonia și mărginirea)șirului cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2.$$

În caz de convergență calculați efectiv limita.

Exercițiul 2: Calculați limitele următoarelor șirui de numere reale având ca termen general:

$$a) \quad \frac{6^n}{7^n}, \quad b) \quad \frac{3^n + (-3)^n}{4^n}, \quad c) \quad \frac{3 - 2n^5}{3n^4 - 2}, \quad d) \quad \left(2 + \frac{4^n + (-5)^n}{7^n + 1}\right)^{2n^3 - n^2},$$

$$e) \quad \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}, \quad f) \quad \left(\frac{n^3 + 4n + 1}{2n^3 + 5}\right)^{\frac{-2n^4 + 1}{n^4 + 3n + 1}}, \quad g) \quad (\cos(-2013))^n,$$

$$h) \quad \left(\frac{n^5 + 3n + 1}{2n^5 - n^4 + 3}\right)^{\frac{3n - n^4}{n^3 + 1}}.$$

Exercițiul 3: Calculați limitele următoarelor șirui de numere reale

$$a) \quad \left(1 + \frac{1}{-n^3 + 3n}\right)^{n^2 - n^3}, \quad b) \quad (3n^2 + 5)\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$c) \quad \frac{n^n}{1^1 + 2^2 + \dots + n^n}$$

$$d) \quad \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n^2},$$

unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent către $x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 4: Calculați limitele șirurilor de numere reale având termenul general:

$$a) x_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad a \neq 0$$

$$b) y_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, \quad a \neq -b$$

$$c) z_n = \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n}, \quad a, b > 0.$$