

SEMINAR 13

1) a) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$. Să se arate că rotația în plan de unghi φ , adică funcția

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi),$$

este automorfism al lui \mathbb{R}^2 . Să se scrie matricea lui h în baza canonică a lui \mathbb{R}^2 (adică în baza (e_1, e_2) , cu $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$).

b) Să se arate că funcțiile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$ (simetria în raport cu axa Ox) și $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (-x, y)$ (simetria în raport cu axa Oy) sunt automorfisme ale lui \mathbb{R}^2 . Să se scrie matricele lui f , g , $f - g$, $f + 2g$ și $g \circ f$ în baza canonică.

2) Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, 2x - y, 3x + 2y)$. Să se arate că f este o transformare liniară, să se arate că $v = ((1, 2), (-2, 1))$, respectiv $v' = ((1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ este bază în \mathbb{R}^2 , respectiv \mathbb{R}^3 și să se scrie matricea lui f în perechea de baze (v, v') .

3) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ o bază a \mathbb{R} -spațiului vectorial \mathbb{R}^4 ,

vectorii

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_1 + v_2, \quad u_3 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

și $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$.

a) Să se arate că $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ este o bază a lui \mathbb{R}^4

b) Știind că $[f]_v = A$, să se scrie matricea $[f]_u$.

c) Știind că $[f]_u = A$, să se scrie matricea $[f]_v$.

4) Fie V, V' două \mathbb{R} -spații vectoriale, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ câte o bază în V , respectiv V' și $f : V \rightarrow V'$ o transformare liniară a cărei matrice în perechea de baze (a, b) este

$$[f]_{a,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:

i) $f(v)$ pentru orice $v \in V$;

ii) dimensiunea spațiilor vectoriale $\text{Im } f$ și $\text{Ker } f$;

iii) matricea $[f]_{a',b'}$, unde $a' = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3)$ și $b' = (b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$.

5) Fie V, V' \mathbb{R} -spații vectoriale, $v = (v_1, v_2, v_3)$ o bază în V , $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ o bază în V' și $f : V \rightarrow V'$ transformarea liniară cu

$$[f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:

i) dimensiunea și câte o bază pentru $\text{Im } f$ și $\text{Ker } f$;

ii) $[f]_{v,e'}$ în cazul în care $V' = \mathbb{R}^3$, $v'_1 = (1, 0, 0)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$ și e' este baza canonică a lui \mathbb{R}^3 ;

iii) $f(x)$ pentru $x = 2v_1 - v_2 + 3v_3$, în condițiile de la ii).

6) Fie $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4)$ pentru care matricea în baza canonică este

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine câte o bază în $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $\text{Ker } f + \text{Im } f$ și $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$.