

CURS 12

Vectori proprii și valori proprii

Fie K un corp comutativ și V un K -spațiu vectorial.

Definiția 1. Fie $f : V \rightarrow V$ o transformare liniară, adică $f \in \text{End}_K(V)$. Un vector nenul $x \in V$ se numește **vector propriu al lui f** dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $f(x) = \lambda x$. Scalarul λ se numește **valoare proprie** a lui f corespunzătoare lui x . Mulțimea tuturor valorilor proprii ale lui f se numește **spectrul** lui f .

Observațiile 2. a) Unui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie.

Într-adevăr, dacă $x \in V$, $x \neq 0$ este un vector propriu al lui f și λ, λ' sunt valori proprii ale lui f corespunzătoare lui x , atunci

$$f(x) = \lambda x \text{ și } f(x) = \lambda' x \Rightarrow \lambda x = \lambda' x \Rightarrow (\lambda - \lambda')x = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \lambda - \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'.$$

b) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui f și $V(\lambda)$ este submulțimea lui V formată din vectorul nul și din vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ , adică

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\},$$

atunci $V(\lambda)$ este un subspațiu al lui V numit **subspațiul propriu** al lui f corespunzător lui λ .

Într-adevăr

$$x \in V(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda 1_V)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f - \lambda 1_V)$$

ceea ce demonstrează că $V(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda 1_V)$. Întrucât nucleul unei transformări liniare este un subspațiu rezultă că $V(\lambda)$ este un subspațiu al lui V .

c) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui $f \in \text{End}_K(V)$, atunci $\dim V(\lambda) \geq 1$.

Într-adevăr, cum $V(\lambda) \leq_K V$ este nenul, $\dim V(\lambda) > 0$, prin urmare, $\dim V(\lambda) \geq 1$.

d) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui $f \in \text{End}_K(V)$, atunci $f(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda)$.

Într-adevăr,

$$x \in V(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda x \Rightarrow f(f(x)) = \lambda f(x) \Rightarrow f(x) \in V(\lambda).$$

În continuare considerăm că V are dimensiunea finită și $\dim V = n (\in \mathbb{N}^*)$.

Teorema 3. Fie $f \in \text{End}_K(V)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ o bază ordonată a lui V și $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ matricea lui f în baza v , adică $A = [f]_v$. Atunci valorile proprii λ ale lui f coincid cu rădăcinile din K ale ecuației $\det(A - \lambda I_n) = 0$, adică ale ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

unde

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \text{ și } a_0 = p_f(0) = \det A.$$

Întrucât polinomul p_f nu depinde de bază rezultă că suma $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (numită **urma** lui A) și $\det A$ sunt invariante ai lui f . De aceea $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ se mai numește și **urma** lui f și $\det A$ se numește **determinantul** lui f .

b) Polinomul caracteristic al lui $f \in \text{End}_K(V)$ are gradul $n = \dim V$.

c) Un endomorfism $f \in \text{End}_K(V)$ are cel mult $n = \dim V$ valori proprii diferite.

d) Dacă $K = \mathbb{C}$, $f \in \text{End}_K(V)$ și $n = \dim V$, atunci polinomul caracteristic al lui f are n rădăcini (nu neapărat diferite) în K . Această afirmație nu este adevărată în cazul $K = \mathbb{R}$.

Definiția 7. O matrice din $M_n(K)$ de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

se numește **matrice diagonală**.

Definiția 8. Fie V un K -spațiu vectorial de dimensiune n . Un **endomorfism** f al lui V se numește **diagonalizabil** dacă există o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V în care matricea lui f este diagonală. O **matrice** $A \in M_n(K)$ se numește **diagonalizabilă** dacă există un endomorfism diagonalizabil $f \in \text{End}_K(V)$ și o bază v a lui V astfel încât $[f]_v = A$.

Observația 9. O matrice $A \in M_n(K)$ este diagonalizabilă dacă și numai dacă există $S \in GL_n(K)$ astfel încât $S^{-1}AS$ are forma (4).

Teorema 10. Un endomorfism $f \in \text{End}_K(V)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă V are o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ formată numai din vectori proprii ai lui f .

Demonstrație. Un $f \in \text{End}_K(V)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă există o bază ordonată $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V în care matricea $[f]_v$ are forma (4) ceea ce este echivalent cu

[illegible]

adică cu faptul că fiecare v_i ($i = 1, \dots, n$) este vector propriu al lui f cu valoare proprie λ_i . \square

Corolarul 11. Dacă $f \in \text{End}_K(V)$ este diagonalizabil, atunci polinomul caracteristic al lui f are toate rădăcinile în K .

Într-adevăr, dacă există o bază v a lui V pentru care $[f]_v$ are forma (4), atunci

$$p_f(\lambda) = \det([f]_v - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

ceea ce ne arată că cele n rădăcini ale lui $p_f(\lambda)$ sunt $\lambda_i \in K$ ($i = 1, \dots, n$).

Definiția 12. Fie $f \in \text{End}_K(V)$ și $\lambda_i \in K$ o rădăcină a polinomului $p_f(\lambda)$. Ordinul de multiplicitate m_i al lui λ_i în polinomul caracteristic $p_f(\lambda)$ se numește **multiplicitatea algebrică** a lui λ_i , iar $n_i = \dim V(\lambda_i)$ se numește **multiplicitatea geometrică** a lui λ_i .

Propoziția 13. Fie $f \in \text{End}_K(V)$ și $\lambda_i \in K$ o rădăcină a polinomului $p_f(\lambda)$. Dacă m_i este multiplicitatea algebrică a lui λ_i , atunci $\dim V(\lambda_i) \leq m_i$ (adică multiplicitatea geometrică a lui λ_i este cel mult egală cu multiplicitatea algebrică a lui λ_i).

Demonstrație. (facultativă)

Dacă $v = (v_1, \dots, v_{n_i})$ este o bază a lui $V(\lambda_i)$ și $v' = (v_1, \dots, v_{n_i}, v_{n_i+1}, \dots, v_n)$ este o completare a lui v la o bază a lui V , atunci $f(v_1) = \lambda_i v_1, \dots, f(v_{n_i}) = \lambda_i v_{n_i}$. Prin urmare, notând cu B_1 matricea diagonală din $M_{n_i}(K)$ care are pe diagonala principală scalarul λ_i , adică $B_1 = \lambda_i I_{n_i}$, avem

$$[f]_{v'} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

unde O este matrice zero. Din (5) rezultă

$$p_f(\lambda) = \det(B_1 - \lambda I_{n_i}) \cdot \det(B_3 - \lambda I_{n-n_i}) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i} \cdot \det(B_3 - \lambda I_{n-n_i})$$

ceea ce ne arată că

$$p_f(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i} \cdot p_{B_3}(\lambda). \quad (6)$$

Din (6) urmează $n_i \leq m_i$. \square

Corolarul 14. Fie $f \in \text{End}_K(V)$ și $\lambda_i \in K$ o rădăcină simplă a polinomului $p_f(\lambda)$. Atunci multiplicitatea geometrică a lui λ_i este egală cu multiplicitatea algebrică a lui λ_i și ambele sunt 1.

Într-adevăr, dacă m_i și n_i sunt multiplicitățile algebrică, respectiv geometrică ale lui λ_i , atunci

$$1 \leq \dim V(\lambda_i) = n_i \leq m_i = 1 \Rightarrow m_i = n_i = 1.$$

Vom vedea că vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenți.

Teorema 15. Dacă $f \in \text{End}_K(V)$ și $v_1, \dots, v_k \in V$ sunt vectori proprii ai lui f care au valorile proprii două câte două diferite, atunci v_1, \dots, v_k sunt liniar independenți.

Demonstrație. Fie λ_i valoarea proprie corespunzătoare lui v_i ($i = 1, \dots, k$).

Demonstrăm teorema prin inducție după k . Pentru $k = 1$, din $v_1 \neq 0$ rezultă că dacă $\alpha_1 v_1 = 0$ cu $\alpha_1 \in K$, atunci $\alpha_1 = 0$. Deci pentru $k = 1$ afirmația din teoremă este adevărată.

Presupunem afirmația adevărată pentru $k \geq 1$ și o demonstrăm pentru $k+1$ valori proprii distincte. Dacă $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in K$ și

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (7)$$

atunci aplicând pe f obținem

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \quad (8)$$

Înmulțind pe (7) cu $-\lambda_{k+1}$ și adunând cu (8) primim

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0$$

de unde conform ipotezei inducției rezultă

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \dots = \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

ceea ce împreună cu $\lambda_1 \neq \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ implică $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Acum din (7) rezultă și $\alpha_{k+1} = 0$. Deci vectorii v_1, \dots, v_k, v_{k+1} sunt liniar independenți. \square

Corolarul 16. Dacă $f \in \text{End}_K(V)$, $n = \dim V$ și f are n valori proprii două câte două diferite, atunci V are o bază formată din vectori proprii, deci f este diagonalizabil.

Teorema 17. Fie $n = \dim V$, $f \in \text{End}_K(V)$. Sunt echivalente următoarele afirmații:

- a) f este diagonalizabil.
- b) Polinomul caracteristic $p_f(\lambda)$ are toate rădăcinile în K , iar dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sunt aceste rădăcini (două câte două diferite) și m_i , respectiv n_i este multiplicitatea algebrică, respectiv geometrică a lui λ_i , atunci $m_i = n_i$ pentru toți $i \in \{1, \dots, k\}$.

(fără demonstrație)

După cum am văzut în Corolarul 14, pentru λ_i cu $m_i = 1$ egalitatea multiplicităților este automat verificată. În practică, pentru a testa diagonalizabilitatea lui f folosim următorul corolar:

Corolarul 18. Cu notațiile din teorema 17, f este diagonalizabil dacă și numai dacă toate rădăcinile lui $p_f(\lambda)$ sunt în K și

$$m_i = n - \text{rang}(f - \lambda_i 1_V), \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (9)$$

Condiția (9) se obține din $m_i = n_i$ având în vedere că $V(\lambda_i) = \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V)$ astfel:

$$n_i = \dim V(\lambda_i) = \dim \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V) = \dim V - \dim(f - \lambda_i 1_V)(V) = n - \text{rang}(f - \lambda_i 1_V).$$

Teorema Cayley-Hamilton

Fie K un corp comutativ, $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \in K[X]$ și $A \in M_n(K)$. Matricea

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_m A^m$$

se numește valoarea polinomului f în A iar dacă $f(A) = O_n$, atunci spunem că A e rădăcină a lui f .

Dacă $f, g \in K[X]$, $\alpha \in K$, atunci

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A), (fg)(A) = f(A)g(A),$$

$$(\alpha f)(A) = \alpha f(A), f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

Teorema 19. (Teorema Cayley-Hamilton). Orice matrice $A \in M_n(K)$ este rădăcină a polinomului său caracteristic, adică $p_A(A) = O$, unde $O = O_n$ este matricea nulă din $M_n(K)$.

Demonstrație. (facultativă)

Să observăm că orice matrice $C \in M_n(K[X])$ se scrie în mod unic sub forma

$$C = C_0 + C_1 X + \dots + C_m X^m, \text{ unde } C_i \in M_n(K) \text{ (} i = 0, 1, \dots, m \text{)}.$$

Dacă B este matricea adjunctă a matricei $A - X I_n$, atunci

$$B \cdot (A - X I_n) = p_A(X) \cdot I_n \quad (10)$$

pentru că $p_A(X) = \det(A - X I_n)$. Polinomul caracteristic este de forma

$$p_A(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n. \quad (11)$$

Elementele lui B fiind complementii algebrici ai elementelor matricei $A - XI_n$ urmează că aceste elemente sunt polinoame din $K[X]$ de grad cel mult $n - 1$. Deci B se poate scrie sub forma

$$B = B_0 + B_1X + \cdots + B_{n-1}X^{n-1} \quad (12)$$

unde $B_i \in M_n(K)$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$). Din (10), (11) și (12) rezultă

$$(B_0 + B_1X + \cdots + B_{n-1}X^{n-1})(A - XI_n) = (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n)I_n$$

ceea ce are loc dacă

$$\begin{cases} -B_{n-1} = a_nI_n \\ B_{n-1}A - B_{n-2} = a_{n-1}I_n \\ \vdots \\ B_1A - B_0 = a_1I_n \\ B_0A = a_0I_n \end{cases}$$

Înmulțind la dreapta prima egalitate cu A^n , a doua cu A^{n-1} , \dots , penultima cu A și adunând egalitățile obținute cu ultima egalitate primim

$$a_nA^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = O \quad (13)$$

adică $p_A(A) = O$. \square

Corolarul 20. Dacă $A \in M_n(K)$ este o matrice inversabilă, atunci din (13) rezultă

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A}(a_1I_n + a_2A + \cdots + a_nA^{n-1}).$$