SEMINAR 8

Exemple de spaţii vectoriale.

1) Arătaţi că grupul abelian $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă $*$ definită prin

$$\alpha * x = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}_+^* .$$

2) Fie V un K-spaţiu vectorial şi M o mulţime. Să se arate că V^M este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite punctual în V^M, adică

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall f, g \in V^M, \ \forall \alpha \in K.$$

3) Poate fi organizată o mulţime finită M ca un spaţiu vectorial peste un corp infinit K?

4) Fie $p \in \mathbb{N}$ prim. Poate fi organizat grupul abelian $(\mathbb{Z}, +)$ ca spaţiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$?

SEMINAR 9+10

1) Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii în spaţiile indicate alăturat:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$, $(a, b \in \mathbb{R}$ fixate) în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$; DA

b) $D = [-1, 1]$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$; NU

b') $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$; NU

b") $D'' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$; NU

Dem? c) $P_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad} f \leq n\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ $(n \in \mathbb{N}$ fixat); DA

d) $B = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad} f = n\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ $(n \in \mathbb{N}$ fixat)? NU

2) Fie V un K-spaţiu vectorial, $A \leq_K V$ şi $C_V A = V \setminus A$.

i) Este $C_V A$ subspaţiu în ${}_K V$? X $\left.\begin{matrix} 0 \in A \\ 0 \in V \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \notin V \setminus A$

ii) Dar $C_V A \cup \{0\}$? V

3) Fie V un K-spaţiu vectorial, $S \leq_K V$ şi $x, y \in V$. Notăm $\langle S, x \rangle = \langle S \cup \{x\} \rangle$. Să se arate că dacă $x \in V \setminus S$ şi $x \in \langle S, y \rangle$ atunci $y \in \langle S, x \rangle$. dublă

4) Fie V un K-spaţiu vectorial, $\alpha, \beta, \gamma \in K$, $x, y, z \in V$ astfel încât $\alpha\gamma \neq 0$ şi

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Să se arate că $\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle$. dublă $\langle x,y \rangle \subseteq \langle y,z \rangle$, $\langle y,z \rangle \subseteq \langle x,y \rangle$

5) Fie V, V' K-spaţii vectoriale, $f : V \to V'$ o transformare liniară, $A \leq_K V$ şi $A' \leq_K V'$. Să se arate că:

↳ $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

a) $f(A) = \{f(a) \in V' \mid a \in A\} \leq_K V'$;

b) $\overset{-1}{f}(A') = \{x \in V \mid f(x) \in A'\} \leq_K V$.

6) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considerăm

$$\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este impară}\}, \ \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este pară}\}.$$

Să se arate că $\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}}$ şi $\mathbb{R}_p^{\mathbb{R}}$ sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ şi că $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}}$.

7) Să se arate că proprietatea unui subspaţiu de a fi sumand direct este tranzitivă.

8) Fie funcţiile:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (-x, y)$ (simetria în raport cu axa Oy);

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) = (x, -y)$ (simetria în raport cu axa Ox);

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, (rotaţia în plan de unghi φ);

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(x, y) = (x + y, 2x - y, 3x + 2y)$.

Să se arate că f_1, f_2, f_3, f_4 sunt transformări liniare de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale. Care dintre acestea sunt izomorfisme? Care dintre acestea sunt endomorfisme? Care dintre acestea sunt automorfisme?

9) Există o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(1, 0, 3) = (1, 1) \text{ şi } f(-2, 0, -6) = (2, 1)\,?$$

10) Fie V, V_1, V_2 K-spaţii vectoriale, două funcţii $f : V \to V_1$, $g : V \to V_2$ şi

$$h : V \to V_1 \times V_2, \ h(x) = (f(x), g(x)).$$

$f(-2,0,-6) = (-2)(f(1,0,3)) = (-2)(1,1) = (-2,-2) \neq (2,1)$

$\Rightarrow$ NU

Să se arate că h este o transformare liniară dacă şi numai dacă f şi g sunt transformări liniare. Generalizare.

11) a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Să se arate că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale dacă şi numai dacă există $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m,\ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

b) Să se determine tranformările liniare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

12) Să se arate că există o transformare $\mathbb{R}$-liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(1, 1) = (2, 5)$ şi $f(1, 0) = (1, 4)$. Să se determine $f(2, 3)$. Este f izomorfism?

transf elem

- rang
  orile
- inversa
  linii
- sisteme
  linii
  | col cu ținut minte

SEMINAR 11+12

1) Daţi o condiţie necesară şi suficientă pentru ca vectorii $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$ să formeze o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$. Să se interpreteze geometric această condiţie. Folosind condiţia stabilită, găsiţi o infinitate de baze ale lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. Există o bază a lui $\mathbb{R}^2$ în care coordonatele unui vector $v = (x, y)$ să coincidă cu x şi y? Să se arate că $v_1 = (1, 0)$ şi $v_2 = (1, 1)$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^2$ şi să se găsească coordonatele lui $v = (x, y)$ în această bază.

Temă: Formulaţi şi rezolvaţi o problemă similară celei de mai sus pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

2) Să se arate că există o transformare $\mathbb{R}$-liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(1, 1) = (2, 5)$ şi $f(1, 0) = (1, 4)$. Să se determine $f(2, 3)$. Este f izomorfism?

3) Să se arate că vectorii $(1, 2, -1)$, $(3, 2, 4)$, $(-1, 2, -6)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenţi şi să se găsească o relaţie de dependenţă între ei.

4) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$, $v_3 = (1, 1, a)$ să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^3$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ bază $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$

$a^3 + 1 + 1 - 3a \neq 0$

$a^3 - 3a + 2 \neq 0$

$a(a^2-1) - 2(a-1) \neq 0$

$(a-1)(a(a+1)-2) \neq 0$

$a^2 + a - 2 \neq 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -2\}$

Temă: Care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$;
b) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, 1)\}$;
c) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 3), (2, 1, 1)\}$;
d) $\{(-1, 3, 1), (2, -4, -3), (-3, 8, 2)\}$;
e) $\{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$

sunt baze ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$?

5) Să se arate că în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$ matricele

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formează o bază şi să se scrie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

Exerciţiu suplimentar 1: a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinoamele

$$f_1 = (X - b)(X - c), \ f_2 = (X - c)(X - a), \ f_3 = (X - a)(X - b).$$

Să se arate că:

i) f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}[X]$ dacă şi numai dacă

$$(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0;$$

ii) dacă $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$ atunci pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad} f \leq 2$ există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.

b) Să se determine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ când $f = 1 + 2X - X^2$, $a = 1$, $b = 2$ şi $c = 3$.

Exerciţiu suplimentar 2: Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim. Să se arate că operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire înzestrează pe

$$V = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

cu o structură de $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi să se determine o bază şi dimensiunea acestui spaţiu vectorial.

Exerciţiu suplimentar 3: Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, v_3 \in V$.
i) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă vectorii $v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2$ sunt liniar independenţi.
ii) Să se arate că $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2\rangle$.
iii) Este proprietatea i) adevărată într-un spaţiu vectorial peste un corp oarecare K?

6) În $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{Q}^3$ considerăm vectorii

$$a = (-2, 1, 3),\ b = (3, -2, -1),\ c = (1, -1, 2),\ d = (-5, 3, 4),\ e = (-9, 5, 10).$$

Are loc egalitatea $\langle a, b\rangle = \langle c, d, e\rangle$?

7) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiile generate astfel:
a) $S = \langle u_1, u_2\rangle$, cu $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$;
b) $S = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, -1, -2)$, $u_2 = (3, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1, -1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (-1, 2, -7, -3)$, $v_2 = (2, 5, -6, -5)$;
c) $S = \langle u_1, u_2\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (2, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 3, 7)$;
d) $S = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, -2)$, $u_2 = (2, 3, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$T = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, cu $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 3, 0, -3)$.
Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru fiecare dintre subspaţiile S, T, $S + T$ şi $S \cap T$.