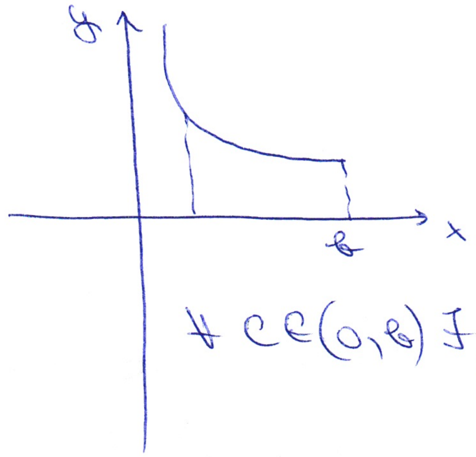
Curs 12 - Analiză

Integrale improprii

f LiR, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

? $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^b f(x)\,dx$ $\exists$?$\in\mathbb{R}$



$\forall\, c\in(a,b)\ \exists \int_c^b f(x)\,dx$

Pt simplificarea notației îi $a,b\in\mathbb{R}$

- de tipul 1 $[a,b)$ sau $[a,\infty)$
- de tipul 2 $(a,b]$ sau $(-\infty,b]$
- de tipul 3 (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$, $\mathbb{R}$

- din propr integralei Riemann, prin schimbare de variabilă $\forall$ integrală de tipul 2 poate fi considerată de tipul 1
- din propr îR, se dem că (a,b) cu $a\in[-\infty,\infty)$, $b\in(-\infty,\infty]$ se tratează printr-un punct intermediar $c\in(a,b)$ studiindu-se separat îi pe $(a,c]$ și $[c,b)$

Def = a) Fie $-\infty<a<b\le\infty$

Dacă $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ este LiR și dacă $\exists$ limita

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\to$ în INTEGRALA IMPROPRIE a funcției f pe $[a,b)$ și se not cu $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$

b) Analog $-\infty\le a<b<\infty$

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ este LiR se introduce INTEGRALA IMPROPRIE a funcției f pe $(a,b]$ ca fiind

$$\int_{a^+}^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \int_t^b f(x)\,dx$$

⑨ $-\infty \le a < b \le \infty$

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ LIR

Dacă: • $\exists\, c \in (a,b)$

• $\exists \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx$

• $\exists \int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$

și $\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$ nu e caz de nedeterminare

atunci suma s.n. INTEGRALA IMPROPRIE a funcției f pe (a,b) și se notează $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$

Ex1): Fie $p \in \mathbb{R}$

$a < b \in \mathbb{R}$

$f:[a,b) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ $\forall x \in [a,b)$

Studiați ii $\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx$

Soluție: $\forall t \in (a,b)$ f este IR pe $[a,t]$ ea fiind o funcț[ie] continuă.

? $\exists \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx$

Pas1) Determinăm o primitivă a lui f

$$\int \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \int \frac{(b-x)'(-1)}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} -\ln(b-x) + C & : p=1 \\ -\dfrac{(b-x)^{-p+1}}{-p+1} + C & : p \ne 1 \end{cases}$$

Alegem $F(x) = \begin{cases} -\ln(b-x) & : p=1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(b-x)^{p-1}} & : p \ne 1 \end{cases}$ o primitivă a lui f

Pas 2) Calculăm $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t)$

Caz 1) $p=1$ $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} -\ln(b-t) = -(-\infty) = \infty \; \boxed{\exists} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^{b^-} f(x)\,dx = \infty$ deci îi este DIVERGEN

Caz 2) $p\neq 1$ $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \frac{1}{(p-1)(b-t)^{p-1}} = \frac{1}{p-1}\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \frac{1}{(b-t)^{p-1}} =$

$= \frac{1}{p-1}\begin{cases} \frac{1}{0_+}, & p-1>0 \\ \frac{1}{\infty}, & p-1<0\end{cases} = \begin{cases} \infty, & \boxed{p>1} \; D \\ 0, & \boxed{p<1} \; C\end{cases}$

Concluzie $\exists \int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t) - F(a) = \begin{cases} \infty : p\geq 1 & D \\ -F(a) : p<1 & C\end{cases}$

Obs: Teorema lui Leibnitz-Newton pentru IR se generalizează la
îi astfel: (tipul 1)

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ LiR

$F:[a,b)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f atunci dacă f are

ea este $\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} F(t) - F(a)$

Ex2) Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ $(a>0)$

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ $\forall x\in[a,\infty)$ și $p\in\mathbb{R}$ fixat. Studiați îi $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Pas 1) $\int \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln x + C & : p=1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C & : p\neq 1\end{cases}$ alegem $F(x) = \begin{cases} \ln x & : p=1 \\ \frac{1}{(1-p)\,x^{p-1}} & : p\neq 1\end{cases}$

(Pas 2) $\lim_{t\to\infty} F(t) = \begin{cases} \infty & : p=1 \\ \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{\infty} & : p-1>0 \\ \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{0_+} & : p-1<0 \end{cases} = \begin{cases} \infty & : p=1 \\ 0 & : p>1 \\ \infty & : p<1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & : p\le 1 \\ 0 & : p>1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \infty & : p\le 1 \quad D \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & : p>1 \quad C \end{cases}$$

Analog: $\int_{a_+}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad f(x) = \frac{1}{\underbrace{(x-a)^p}_{0_+^p}} \quad \forall x\in(a,b] \quad$ și $\begin{cases} C & p<1 \\ D & p\ge 1 \end{cases}$

(T) (criteriul integral pentru serii)

$f:[a,\infty)\to[0,\infty)$ - continuă, - descresc. $\}$ Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx \sim \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$, $k\in\mathbb{N}\cap[a,\infty)$

au aceeași natură

Ex: Studiați $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ $\to C$, $\to$ descresc

atunci obs că $f(x)\ge 0 \overset{T}{\Longrightarrow} \int_1^\infty f(x)\,dx \sim \sum_{n=k}^{\infty} f(n) = \sum_{n\ge k} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$

$\sim \sum \frac{1}{n^{2}}_{>1}$ C $\quad k\in[1,\infty)\cap\mathbb{N}$

→ natura se obține ușor

pt valoare $x^2=t$ ......

Obs: Exploatând propr de monotonie ale integralei Riemann se obțin rezultate similare și pt ii

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$

atunci $\int_a^{b^-} f(x)\,dx \leq \int_a^{b^-} g(x)\,dx$

CRITERII DE COMPARAȚIE PENTRU ii (TP)

(T1) $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ LiR a.î. $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $\boxed{f(x) \leq g(x)}$ $\forall x \in [c, b)$ atunci

$$\boxed{\begin{cases} \int_a^{b^-} g \text{ C} \Rightarrow \int_a^{b^-} f \text{ C} \\ \int_a^{b^-} f \text{ D} \Rightarrow \int_a^{b^-} g \text{ D} \end{cases}}$$

(T2) $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ LiR a.î.

$\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $x \in [c, b)$, $\alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta$ atunci
$\exists\, 0 < \alpha < \beta < \infty$

$$\boxed{\int_a^{b^-} f(x)\,dx \sim \int_a^{b} g(x)\,dx}$$

(T3) $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ LiR

(C2Cb) ~~Dacă~~ $\exists \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t < b}} \frac{f(t)}{g(t)} \in (0, \infty) \Rightarrow \boxed{\int_a^{b^-} f(x)\,dx \sim \int_a^{b^-} g(x)\,dx}$

Utile în formularea și aplicarea comparațiilor sunt funcțiile:

① $[a, b)$, $\boxed{b \in \mathbb{R}}$ $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ C, $p < 1$
D, $p \geq 1$

② $(a, b]$, $(a \in \mathbb{R})$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ $\quad C, \ p<1$

$\quad D, \ p \geq 1$

③ $[a, \infty)$

$g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ $\quad C, \ p>1$

$\quad D, \ p \leq 1$

$L = \lim\limits_{x \to pb} \dfrac{f(x)}{g(x)} = $ • $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} (b-x)^p \cdot f(x) \sim 0_+^p f(x)$

$\boxed{\nexists\, pb} \downarrow b, \infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} (x-a)^p f(x) \sim 0_+^p f(x)$

• $\lim\limits_{x \to \infty} x^p f(x) \sim \infty^p f(x)$

Tabel de sinteză

Dom	L	p	Natura	
$[a, b)$ $(a, b]$	$<\infty$	<1	C	$0_+^p f(x)$
	>0	≥ 1	D	
$[a, \infty)$	$<\infty$	>1	C	$\infty^p f(x)$
	>0	≤ 1	D	

$\Downarrow$

ideal $L \in (0, \infty)$ pt că din tabel obț sol

Ex: Studiați natura ii $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\, dx$

$f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ $\quad$ • $C \Rightarrow LIR$ pe $[0, 1)$

$\downarrow$ punctul problemă $= 1$

• $\underbrace{f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, 1)}_{\text{putem aplica tabel}}$

$$L = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} O_+^p f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^p \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{4}}}_{\downarrow\, 2}\cdot\underbrace{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}_{\downarrow\, 2}} \;(=)$$

$$\underbrace{x<1}$$
$$0<\underbrace{1-x}_{0_+}$$

$$1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2)$$

$$(=)\; \frac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^p}{(1-x)^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \begin{cases} 0 : p>\frac{1}{4} \\ \boxed{1 : p=\frac{1}{4}} \\ \infty : p<\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} = 1$$

$\boxed{\text{Scop}}$: $L\in(0,\infty)$ pt că atunci $\boxed{\text{știm natura}}$

$$p=\frac{1}{4},\; L=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0,\infty) \underset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \int_0^{1^-} f(x)\,dx \text{ este C } (p<1)$$

SERII DE PUTERI

Fie $(a_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{R}$ un șir de nr reale

Def: S.n. SERIE DE PUTERI (în jurul lui 0) $\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n\cdot x^n,\ \forall x\in\mathbb{R}}$

Prin convenție dacă $\boxed{x=0}$ se consideră $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot 0^n = a_0}$

Def: Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri. S.n. MULȚIMEA DE CONVERGENȚĂ A SERIEI DE PUTERI:

$$\mathcal{C}=\{x\in\mathbb{R} : \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ este C}\}$$

Obs: $0\in\mathcal{C}$ (prin convenție) $\Rightarrow \mathcal{C}\neq\emptyset$

Ex: Fie $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n x^n$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot x^n = \lim_{n\to\infty} (-x)^n = \begin{cases} \infty : & -x > 1 \\ 1 : & -x = 1 \\ 0 : & |-x| < 1 \\ \nexists : & -x \leq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$, $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ $x \notin \mathcal{C}$

Dacă $x \in (-1,1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$

↳ serie geometrică de rație $|q| < 1 \Rightarrow C$

Concluzie: $\mathcal{C} = (-1,1)$

$\boxed{T_1}$ (teorema lui Abel pentru serii de puteri)

Fie $\sum a_n \cdot x^n$ o serie de puteri. Atunci:

1° Dacă $0 \neq t \in \mathcal{C} \Rightarrow$ seria $\sum a_n \cdot u^n$ este A.C. $\forall u$ a.î. $|u| < |t$

2° Dacă $0 \neq t \notin \mathcal{C} \Rightarrow$ seria $\sum a_n v^n$ este D $\forall v$ a.î. $|v| > |t$

Dem: 1°

$0 \neq t \in \mathcal{C} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ este C $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n t^n = 0$

$\Downarrow$

șirul $(a_n t^n)_{n\geq 0}$ este mărg.

$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \exists M > 0$ a.î. $|a_n t^n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{$

Fie $u \in \mathbb{R}$ a.î. $|u| < |t|$ arbitrar

(?) $\sum a_n u^n$ este A.C deci studiem $\sum_{n\geq 0} |a_n u^n|$

$$|a_n u^n| = \left|a_n t^n \cdot \frac{u^n}{t^n}\right| = |a_n t^n| \cdot \left|\frac{u}{t}\right|^n < M \cdot \left(\left|\frac{u}{t}\right|\right)^n$$

$$|u| < |t| \Leftrightarrow \left|\frac{u}{t}\right| < 1 \Rightarrow \left(\left|\frac{u}{t}\right|\right)^m < 1$$

$$\Rightarrow \underline{|a_n u^n| < M \cdot q^n} \text{ unde } \boxed{q = \left|\frac{u}{t}\right| \in (0,1) \text{ constant}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum M q^n = M \sum q^n \\ |q| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ (serie geom)}$$

$\overset{CC}{\Longrightarrow} \sum |a_n u^n|$ este $C \Leftrightarrow \sum a_n u^n$ este A.C.

u arbitrar $\Rightarrow \forall u$ cu $|u| <$

2°

$0 \neq t \notin \mathcal{C}$

Ar că $\forall v$ cu $|v| > |t|$, $\sum a_n v^n$ este D

Alegem v a.î. $|v| > |t|$ arbitrar

$\boxed{\text{Mra}}$ Pp că $\sum a_n v^n$ este $C \overset{1)}{\underset{|t|<|v|}{\Longrightarrow}} \sum a_n t^n$ este AC $\Downarrow$ C

$\Rightarrow t \in \mathcal{C}$ ↯

Obs: $t \in \mathcal{C} \Rightarrow (-|t|, |t|) \subseteq \mathcal{C}$