Curs 1

ANALIZĂ

Topologie pe $\mathbb{R}$ (studiază spațiul mulțimii $\mathbb{R}$)

1. Mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ - mulțimea nr naturale

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

1

$1+1$

$1+1+1$

$\dots$

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

! $\nexists$ 0 în $\mathbb{N}$ pt că altfel nu s-ar respecta regula nr nat

$\mathbb{Z}$ - mulțimea nr întregi

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \cup \{0\}$

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ - mulțimea nr raționale

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{R}$ - mulțimea nr reale

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - mulțimea nr iraționale

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$: \; : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ~

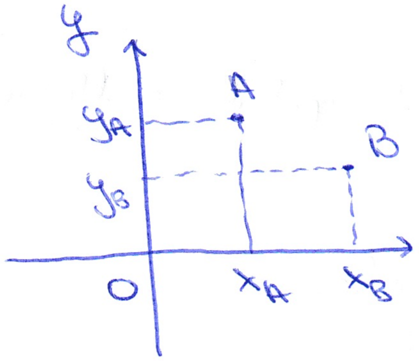
→ 2 tipuri de op cu nr reale

$\boxed{\leq}$ - relație pe $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$)

→ pune în legătură 2 elem din $\mathbb{R}$

→ relație de ordine

Obs: Pe $\mathbb{R}^2$ care se reprezintă grafic ca fiind un plan



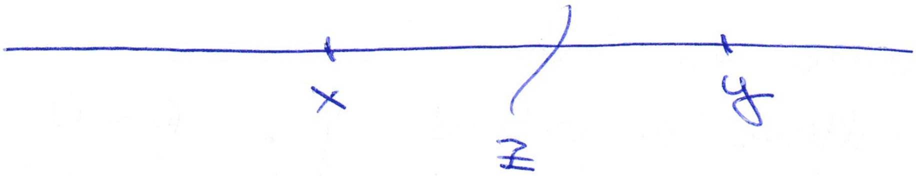
$d(O,A)=d(O,B)$
dar $A\neq B$
→ nu pot fi introduse rel de ordine totală

Obs: $(\mathbb{R},\leq)$ este o mulțime total ordonată adică $\forall x,y\in\mathbb{R}$
fie $x\leq y$, fie $y\leq x$

iar $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ este un corp comutativ total ordonat

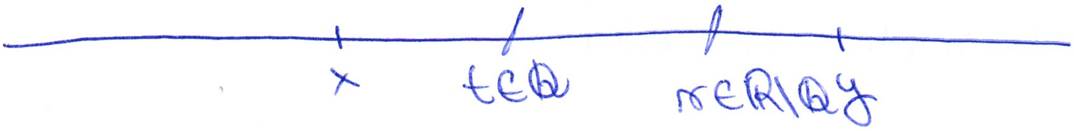
Mulțimea $\mathbb{R}$ se poate introduce prin (AXIOMA ELEMENTULUI SEPARATOR) : (AES)

$\forall x \cancel{\leq} y \in\mathbb{R}$ $(x<y)$ $\exists z\in\mathbb{R}$ a.î. $x<z<y$
$x\neq y$



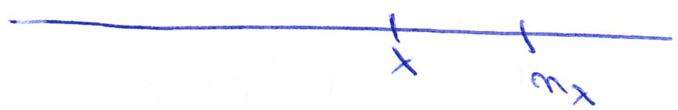
Obs: a) pt $(\mathbb{N},\leq)$ AES nu merge
$\exists\ 1<2$ dar $\forall z\in\mathbb{N}$ $1\not<z\not<2$
nici pe $\mathbb{Z}$
b) pe $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ avem (axiome de densitate)

AXIOMA DE DENSITATE pt $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\forall x<y\in\mathbb{R}$ $\exists t\in\mathbb{Q}$ a.î. $x<t<y$
$\exists r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x<r<y$



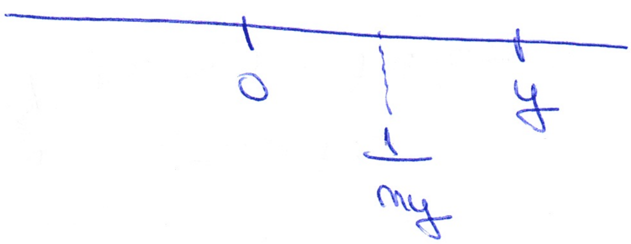
c) Pe $\mathbb{N}$ considerăm (axioma lui Arhimede)

$\forall x>0, \exists n_x \in \mathbb{N}$ a.î. $x<n_x$



$\Leftrightarrow$

$\forall y>0, \exists n_y \in \mathbb{N}$ a.î. $0<\frac{1}{n_y}<y$

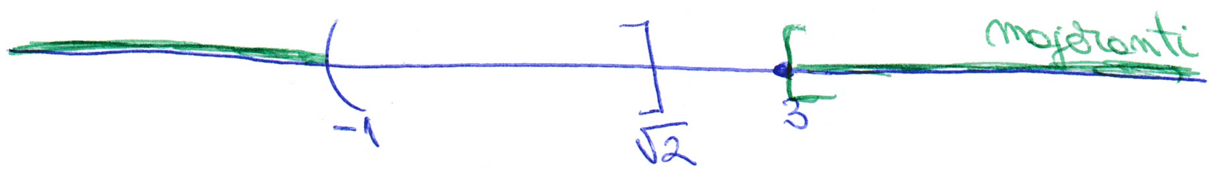


Def: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci x s.n.:
(A = subm. nevidă a lui $\mathbb{R}$)

a) MINORANT al mulțimii A dacă
$\forall a \in A, x \le a$

b) MAJORANT al mulțimii A dacă
$\forall a \in A, a \le x$

ex: a) $A = (-1, \sqrt{2}] \cup \{3\}$

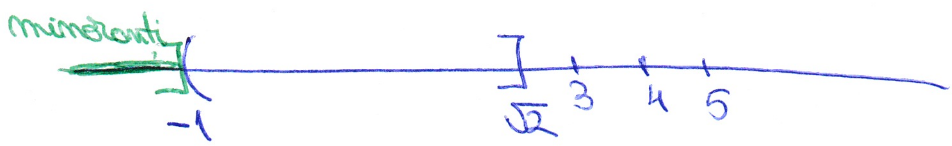


-2 = minorant

$-5, -1$ minorant

$-1 \notin A$

b) $B = (-1, \sqrt{2}] \cup \mathbb{N}$



Dem că B nu are majoranți

Pp $\exists t \in \mathbb{R}$ a.î. $\boxed{\forall a \in A, a \leq t}$ (1)

$\Downarrow$

$t > 0$

Ax. lui Arhimede

$\Downarrow$

$\left(\begin{cases} \exists n_t \in \mathbb{N} \text{ a.î. } t < n_t \\ n_t \in \mathbb{N} \Rightarrow n_t \in A \xrightarrow{(1)} n_t \leq t \end{cases} \right.$

$\Rightarrow n_t \leq t < n_t$

$n_t < n_t$ ↯ contradictoriu

$\Rightarrow$ B nu are majoranți

c) $I_c \rightarrow$ nu are nici minoranți, nici majoranți

Notație:

$Mino(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \leq a\}$ - mulțimea minoranților mulțimii A

$Majo(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, a \leq x\}$ - - " - majo

Ele pot fi $\emptyset$ (b) și c)) dar sunt independente una față de cealaltă

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$, atunci x s.n.:

a) INFIMUMUL mulțimii A dacă $Mino(A) \neq \emptyset$ și x este cel mai mare mi

b) SUPREMUMUL mulțimii A dacă $Majo(A) \neq \emptyset$ și x este cel mai mic majora

Aceste noțiuni sunt susținute de axiome:

AXIOMA INFIMUMULUI (Ai)

Dacă $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $Mino(A) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \inf A$ și $\in \mathbb{R}$

AXIOMA SUPREMUMULUI (AS)

Dacă $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $Majo(A) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A$ și $\in \mathbb{R}$

Obs: Pe $\mathbb{R}$

$$AES \Leftrightarrow Ai \Leftrightarrow AS$$

Ex: a) $\inf A = -1$, $\sup A = 3$

b) $\inf A = -1$, $\sup A = ?$ $(\nexists)$ $Majo(A) = \emptyset$

c) ? ?

Def: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

a) Dacă $Mino(A) = \emptyset$ atunci $\inf A = -\infty$

b) Dacă $Majo(A) = \emptyset$ atunci $\sup A = +\infty$

Obs: Concatenând cele 2 def. vom observa că cele 2 noțiuni de infimum și supremum sunt bine defin[ite] indiferent de structura unei submulțimi nevide A. Ele există ÎNTOTDEAUNA, dar $\in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

~~Fie A subm. m~~

Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ atunci x s.m:

a) MINIMUM mulțimii A dacă $x \in A$ și $x = \inf A$

b) MAXIMUM mulțimii A dacă $x \in A$ și $x = \sup A$

Obs: În contrast cu infimumul și supremumul unei mulțimi nevide care $\exists$ întotdeauna, minimul sau maximul unei mulțimi $\nexists$ întotdeauna și sunt independente una față de cealaltă.

Obs: a) $A = (-1, \sqrt{2}] \cup \{3\}$

$Mino(A) = (-\infty, -1] \neq \emptyset \overset{Ai}{\Longrightarrow} \exists \inf A \in \mathbb{R}$

$\inf A = -1 \notin A \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \min A$

$Majo(A) = [3, \infty) \neq \emptyset \overset{AS}{\Longrightarrow} \exists \sup A \in \mathbb{R}$

$\sup A = 3 \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ ~~sup~~ $\max A = 3$

b) → Mino, inf, min analog

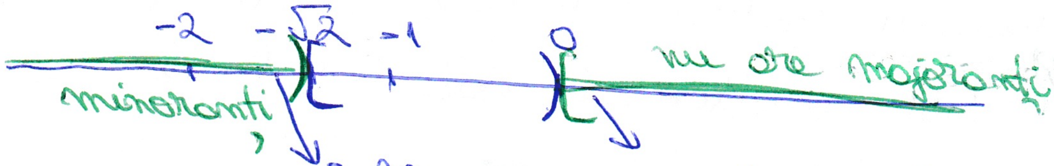
→ $Majo(A) = \emptyset \overset{def}{\Longrightarrow} \exists \sup A = +\infty \notin A \Rightarrow \nexists \max A$

Obs: → Mino și majo sunt mulțimi, iar când nu au niciun element $\Rightarrow$ mulț. vidă

→ Min, max, sup sunt elem. din $\overline{\mathbb{R}}$. În anumite cazuri min, max $\nexists$

Ex: Mulțimea $A = \{[-\sqrt{2}, 0) \cap \mathbb{Q}\} \cup \mathbb{N}$! ex. lui Arhimede

Mino, Majo, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$



$\inf A =$ $\qquad$ $\sup A = +\infty$

$\min A = -\sqrt{2}$ $\qquad$ $Mino(A) = (-\infty, -\sqrt{2})$

$\max A = +\infty$ $\qquad$ $Majo(A) = \emptyset$