Curs 2

Elemente de topologie pe $\mathbb{R}$

Fișă de lucru

~~barca~~, ~~locul~~, aerul

1. vecinătate a omului (om pe barcă, barca pe loc)
2. nu e vecinătate a omului: organele omului??
3. vecinătate a bărcii: ~~locul~~, aerul
4. nu e vecinătate a bărcii: omul

! vecinătate: interval deschis centrat în punct !

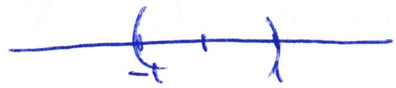
$\boxed{\text{efectul de sferă !}}$

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ $(r>0)$

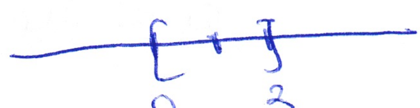
a) Mulțimea $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \text{ a.î. } |y-x| < r\} = (x-r, x+r)$ s.n. bila deschisă de centru x și rază r.

b) Mulțimea $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| \le r\} = [x-r, x+r]$ s.n. bila închisă de centru x și rază r.

Ex: a) $(-1,1)$ = bilă deschisă de centru 0 și rază 1 $= B(0,1)$



$[0,2] = \overline{B}(1,1)$



b) $(-1,2]$ sau $[-1,2)$ sau $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu sunt bile nici închise nici deschise

Dem: că $\mathbb{Q}$ nu este o bilă

pp că 0 este centru, $r \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow$ nu e bilă

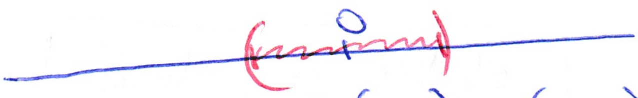
Def: Fie $x \in \mathbb{R}$

O mulțime $V \subseteq \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui x dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq V$

Obs: $\mathcal{V}(x)$ = mulțimea tuturor vecinătăților lui x =

$= \{V \subseteq \mathbb{R} \mid \exists\, r_V > 0 \text{ a.î. } B(x, r_V) \subseteq V\}$

Ex: $x = 0$



a) $(-1,1) \rightarrow \exists\, r = 1$ a.î. $B(0,1) = (-1,1) \subseteq (-1,1)$

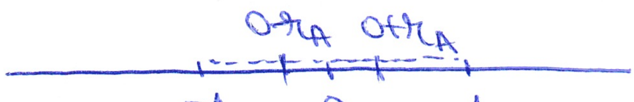
$\hookrightarrow \exists\, r' = \frac{1}{2}$ a.î. $B(0, \frac{1}{2}) \subseteq (-1,1)$

b) $(-2,1] \cup \{2,5,7\}$

$\overset{?}{\in} \mathcal{V}(0)$

$\exists\, r = \frac{1}{2}$ a.î. $B(0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subseteq A$

c) $(-1,1) \cap \mathbb{Q} = A$



Dem că A nu e o vecinătate a lui 0

$A \notin \mathcal{B}(0)$

pp că $A \in \mathcal{V}(0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, r_A > 0$ a.î. $B(0, r_A) \subseteq A$ (1)

$0 < r_A \xrightarrow{?} \boxed{\exists\, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ a.î.}}$

$0 < s < r_A \Rightarrow s \in B(0, r_A)$

(2)

① $\Rightarrow r \in \mathbb{Q}$

② $\Rightarrow r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\Big\} \Rightarrow r \in \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ ↯

$\Rightarrow A \notin \mathcal{V}(0)$

Obs: Cu o demonstrație aprox similară se poate demonstra că $\forall$ dintre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau submulț. lor nu sunt vecinătăți pt niciun elem. pe care îl conțin

Propoziție: Fie $x \in \mathbb{R}$

a) $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$

b) $\left.\begin{array}{l} V \in \mathcal{V}(x) \\ V \subseteq W \subseteq \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$

c) $V, W \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(x)$

d) $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists\, T \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $\forall\, t \in T, V \in \mathcal{V}(t)$

Dem: a) Știm: $V \in \mathcal{V}(x) \xRightarrow{def} \exists\, r_V > 0$ a.î. $\left.\begin{array}{l} B(x, r_V) \subseteq V \\ x \in B(x, r_V) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \boxed{x \in V}$

b) Știm: $\begin{array}{l} V \in \mathcal{V}(x) \\ V \subseteq W \end{array}$ $\xRightarrow{def}$ $\exists\, r_V > 0$ a.î. $\left.\begin{array}{l} B(x, r_V) \subseteq V \\ V \subseteq W \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x, r_V) \subseteq W$

$\xRightarrow{def} W \in \mathcal{V}(x)$

c) Știm: $V \in \mathcal{V}(x) \xRightarrow{def} \exists\, r_V > 0$ a.î. $B(x, r_V) \subseteq V$ ③

$W \in \mathcal{V}(x) \xRightarrow{def} \exists\, r_W > 0$ a.î. $B(x, r_W) \subseteq W$ ④

din ③ și ④ $\boxed{\exists\, r = \min\{r_V, r_W\} > 0}$

$\xRightarrow{③} B(x, r) \subseteq B(x, r_V) \subseteq V$

$\xRightarrow{④} B(x, r) \subseteq B(x, r_W) \subseteq W$

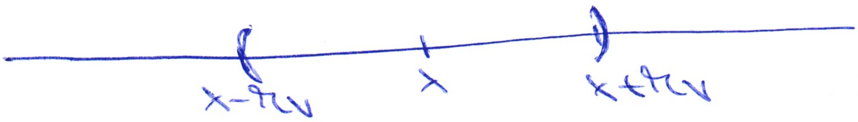
$\boxed{\text{astfel } B(x,r) \subseteq V \cap W}$

$\xRightarrow{def} V \cap W \in \mathcal{V}(x)$

d) Știm: $V \in \mathcal{V}(x)$

Dorim: $T \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $\forall\, t \in T,\ V \in \mathcal{V}(t)$

• $V \in \mathcal{V}(x) \xRightarrow{def} \exists\, r_V > 0$ a.î. $B(x, r_V) \subseteq V$



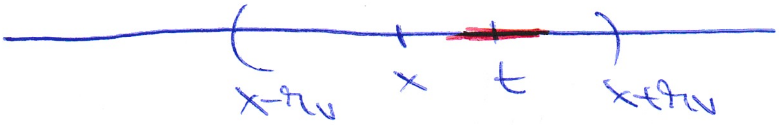
Arătăm că

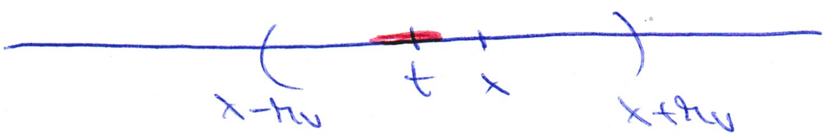
$B(x, r_V)$ este o opțiune bună pt alegerea lui T (nu e unică)

~~Fie $t \in B(x, r_V)$ arbitrar dar~~

Arătăm că $\forall\, t \in B(x, r_V),\ V \in \mathcal{V}(t)$

Alegem $t \in B(x, r_V)$ arbitrar





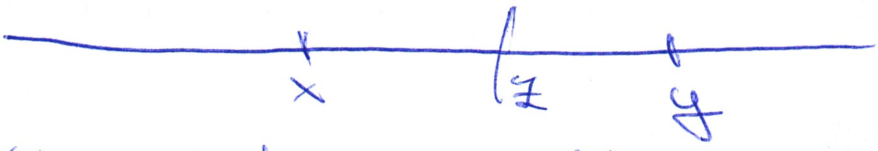
Alegem $r_t = \min\{x + r_V - t,\ t - (x - r_V)\} > 0$

$\boxed{\text{Bila } (t, r_t) \subseteq B(x, r_V) \subseteq V}$

$$\left.\begin{array}{l} \xRightarrow{def} V \in \mathcal{V}(t) \\ t \text{ - arbitrar} \end{array}\right\} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(t),\ \forall\, t \in T \ \blacksquare$$

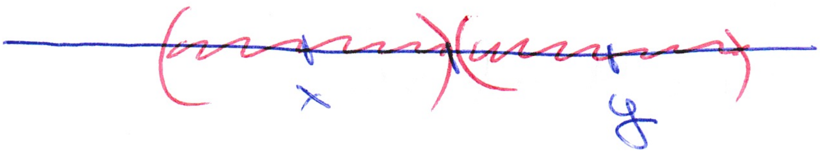
Propoziția 2:

Fie $x \neq y \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists\, V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap T = \emptyset$
$\exists\, T \in \mathcal{V}(y)$



Fără a reduce generalitatea pp $x < y$

$V = B(x, z-x)$
$W = B(y, y-z)$ din AS



$y - x > 0$

$r = \frac{y-x}{2}$, $V = \left(x, \frac{y-x}{2}\right)$, $V \cap W = \emptyset$
$W = \left(y, \frac{y-x}{2}\right)$

Def: Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Atunci:

a) A s.n mulțime deschisă dacă este vecinătate pentru toate punctele sale

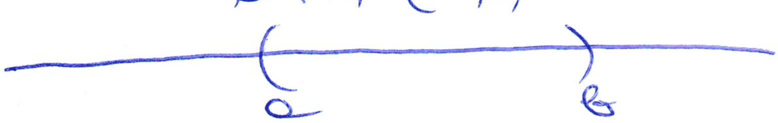
$\Leftrightarrow \forall a \in A, A \in \mathcal{V}(a)$

$\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists\, r_a > 0$ a.î. $B(a, r_a) \subseteq A$

b) B s.n mulțime închisă dacă $\mathbb{R} \setminus B$ este deschisă

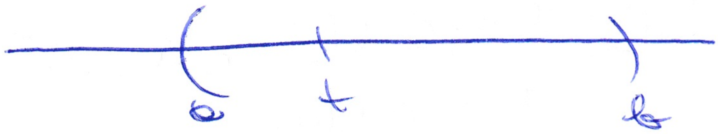
Exemple: Ex. de mulțimi deschise

a) $\forall a < b \in \mathbb{R}$, (a, b) este o mulțime deschisă



(a,b) deschisă $\Leftrightarrow \forall t \in (a,b), (a,b) \in \mathcal{V}(t)$
$\forall t \in (a, b)\ \exists\, r_t > 0$ a.î. ...

$B(t, r_t) \subseteq (a, b)$



$\exists\ r_t = \min\{b-t, t-a\} > 0$ a.î. $B(t, r_t) \subseteq (a, b)$

$$\left.\begin{array}{l} t - \text{arbitrar} \\ \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{V}(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\checkmark}$$

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\quad (-\infty, a)$ și (a, ∞) sunt m. deschise

$r_t = |t - a| > 0$

c) $\mathbb{R} \rightarrow$ este o mulțime deschisă $\quad r_t = 1 > 0$

B. de mulțimi închise

a) $\forall\, a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ este mulțime închisă

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ deschisă $= \underbrace{\underset{d}{(-\infty, a)} \cup \underset{d}{(b, \infty)}}_{d}$

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\quad (-\infty, a]$ și $[a, \infty)$ sunt închise (în $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, \infty)$ d $\longrightarrow$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ este închisă $\quad \mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup \underset{d}{(x, \infty)}$

Definiție:

Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci:

a) Mulțimea:

$$\operatorname{int} A = \{a \in A : A \in \mathcal{V}(a)\} =$$
$$= \{a \in A : \exists r_a > 0 \text{ a.î. } B(a, r_a) \subseteq A\}$$

s.n. interiorul lui A și reprezintă cea mai mare mulțime deschisă $\subseteq A$.

Obs: $\operatorname{int} A \subseteq A$

b) Mulțimea:

$$\operatorname{cl} A = \{x \in \mathbb{R} : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

s.n. închiderea lui A și reprezintă cea mai mică mulțime închisă care îl include pe A.

Obs: $A \subseteq \operatorname{cl} A$

c) Mulțimea

$$\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$$

s.n. frontiera lui A.

Aceasta este caracterizarea pe care o folosim de obicei în exerciții, iar def matematică este:

$$\operatorname{bd} A = \left\{x \in \mathbb{R} : \forall V \in \mathcal{V}(x), \begin{array}{l} V \cap A \neq \emptyset \\ \text{și } V \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \end{array}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \forall r>0,\ B(x,r)\cap A \neq \emptyset,\ B(x,r)\cap(\mathbb{R}\setminus A)\neq\emptyset\}$$

Obs: $\text{int} \cap \text{bd}\, A = \emptyset$

$\text{bd}\, A \subseteq \text{cl}\, A$

d) Mulțimea

$$\text{izo}\, A = \{a \in A : \exists\, V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } V\cap A = \{a\}\}$$
$$: \exists\, r_a > 0 \text{ a.î. } B(a, r_a)\cap A = \{a\}\}$$

a.n. mulț. punct. izolate

Obs: $\text{izo}\, A \subseteq A$

e) Mulțimea

$$A' = \text{cl}\, A \setminus \text{izo}\, A$$

a.n. mulțimea punctelor de acumulare ale lui A.

$$A' = \{x\in\mathbb{R} \mid \forall\, V\in\mathcal{V}(x),\ V\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset\}$$
$$\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset\}$$

Obs: $A' \subseteq \text{cl}\, A$

f) Mulțimea

$$\text{ext}\, A = \text{int}\,(\mathbb{R}\setminus A)$$

a.n. exteriorul mulțimii A

Reprezintă cea mai mare mulțime deschisă inclusă în complementara $(\mathbb{R}\setminus A)$ mulțimii.

Exemplu: $A = (-\infty, -6) \cup [-5, 0] \cup \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ nu au bile

$\operatorname{int} A = (-\infty, -6) \cup (-5, 0)$

$\operatorname{cl} A = [-5, 0] \cup (-\infty, -6] \cup \mathbb{N}$

$\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A = \{-6, -5, 0\} \cup \mathbb{N}$

$\operatorname{izo} A = \mathbb{N}$

$A' = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{izo} A = (-\infty, -6] \cup [-5, 0]$

se pot defini lim

$\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus A) = (-6, -5) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \ldots$

$= (-6, -5) \cup (n, n+1) \quad n \in \mathbb{N}^*$