Curs 2 Inele și corpuri

Def: Fie $(G,\cdot)$ grup, $H \subseteq G$

$H \leq G$ dacă (subgrup în G) $\begin{cases} H \text{ p.s. în } G \\ (H,\cdot) \text{ grup} \end{cases}$

Ex: 1) $(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ $(\mathbb{C},+)$ sunt grupuri fiecare fiind subgrup în grupurile care urmează

2) $\mathbb{N} \not\leq (\mathbb{Z},+)$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \not\leq (\mathbb{R},+)$

3) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ grupuri

fiecare e subgrup în gr care urmează

Def: Fie $(G,\cdot)$, $(G',\cdot)$ grupuri, $f: G \to G'$. Spunem că f este un (omo)morfism de grupuri dacă

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y), \ \forall x,y \in G$$

Endomorfism = morfism de la un grup la el însuși

Izomorfism = morfism bijectiv

Automorfism = endomorfism bijectiv

a) $f(e) = e'$ $\begin{cases} e \in G \\ e' \in G' \end{cases}$

b) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ $\forall x \in G$

Dem:

~~$\Rightarrow 1' \ f(1) = f(1) \Rightarrow f(1$~~

a) $1' \cdot f(1) = f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)\cdot f(1) \ \Big|\ [f(1)]^{-1} \Rightarrow 1' = f(1)$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x)\cdot f(x^{-1}) = f(x\cdot x^{-1}) = f(1) \overset{a)}{=} 1' \\ f(x^{-1})\cdot f(x) = \boxed{\text{temă}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = [f(x)]^{-1}$

Def: Un triplet $(R,+,\cdot)$ este un inel (com) dacă

$$\begin{cases} (R,+) \text{ grup abelian} \\ \cdot \text{ asociativă (com)} \\ \cdot \text{ distr față de "+" } \forall x,y \in R \end{cases}$$

$$x(y+z) = xy + yz$$
$$(y+z)x = yx + yx$$

Un inel $(R,+,\cdot)$ cu proprietatea că $\exists\, 1 \in R\ \forall x \in R$:

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ s. n. inel cu unitate (inel din

Fie $(R,+,\cdot)$ inel cu unitate, $x \in R$, x . s. n. el.

dacă $\exists\, x^{-1} \in R$ a.î. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

Def: Un triplet $(K,+,\cdot)$ este corp (com) dacă

$$\begin{cases} (K,+) \text{ grup abelian} \\ K^* \text{ p. a. în } (K,\cdot) \text{ și } (K^*,\cdot) \text{ grup (com)} \\ \cdot \text{ distr față de } + \end{cases}$$

Obs: $(K,+,\cdot)$ corp ~~com~~ $\iff \begin{cases} (K,+,\cdot) \text{ inel cu unitate} \\ |K| \geq 2 \\ \forall x \in K,\ x \neq 0,\ x \text{ inversabil} \end{cases}$

Reguli:

I Fie $(R,+,\cdot)$ inel, $a \in R$. Atunci:

$t_a, t'_a : R \to R$, $t_a(x) = ax$, $t'_a(x) = xa$ sunt endomorfisme ale grupului $(R,+)$

temă

Dem: Fie $x, y \in R$

$t_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = t_a(x) + t_a(y)$

Consecințe: Reguli de calcul într-un inel

Fie $a, b, c \in R$ ($(R,+,\cdot)$ inel)

1) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

2) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$

$(-a)(-b) = ab$

3) $a(b-c) = ab - ac$, $(b-c)a = ba - ca$

ale teoremei

Dem: t_a endom $(R,+) \Longrightarrow t_a(0) = 0$ și $t_a(-b) = -t_a(b)$, $\forall b \in R$

$\Leftrightarrow a \cdot 0 = 0$ și $a(-b) = -ab \ \forall b \in R$

Restul consecinței: temă

Obs: 1) $(R,+,\cdot)$ inel, $a \in R$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n = \begin{cases} a, & n = 1 \\ a^{n-1} \cdot a, & n > 1 \end{cases} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ori}}$$

! $(R,+,\cdot)$ inel cu unitate, $a^0 = 1$

$(R,+,\cdot)$ inel cu unitate, $a \in R$ inversabil, $a \in R$ el nenul $n \in \mathbb{N}^*$

$a^{-k} = (a^{-1})^k$

2) Dacă $(R,+,\cdot)$ inel cu unitate. Atunci $|R| \geq 2 \Leftrightarrow R \neq \{0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \neq 1$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Dem: $R \neq \{0\} \Rightarrow 0 \neq 1 \equiv (0=1 \overset{?}{\Rightarrow} R=\{0\})$

Fie $a \in R$ arbitrar

$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ $\Rightarrow$ inelul nu are alte elem în afară de 0

(① Inelul $(\{0\},+,\cdot)$ s.n inel nul și este un inel com cu unitate $\boxed{②}$ Op din inelul nul sunt date de egalitățile $0+0=0$ și $0\cdot 0=0$)

③ Într-un inel cu unitate $(R,+,\cdot)$ cu $0 \neq 1$, 0 nu este inversabil)

Def: Fie $(R,+,\cdot)$ inel, $a \in R$, $a \neq 0$

→ a s.n divizor al lui 0 dacă $\exists\, b \in R$, $b \neq 0$ a.î.

$a \cdot b = 0$ sau $b \cdot a = 0$

→ a nu e div al lui 0 dacă $b \in R$,

$a \cdot b = 0$ sau $b \cdot a = 0 \Rightarrow b = 0$

→ R este inel fără divizori ai lui 0 dacă $a, b \in R$,

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $b = 0$

Un inel com cu unitate $0 \neq 1$ și fără divizori ai lui 0 s.n. domeniul de integritate.

Obs: 1) Corpurile nu au divizori ai lui 0.

2) $(K,+,\cdot)$ corp comutativ $\Rightarrow$ K d.i.

$\Leftarrow$ nu neapărat ex: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

ex = 1) Inelul nul ~~corp~~

2) $\underbrace{(\mathbb{Z},+,\cdot)\ (\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)}$ inele comut d.i

d.i = dom de identitate corpuri com

Elem inv în $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ sunt -1 și 1

3) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

T împ cu rest în $\mathbb{Z}$:

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\ \exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$ a.î $a = bq + r$,

$0 \leq r < |b|$

$\hat{0} = n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{1} = \quad = \{nk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$\widehat{n-1} = \quad = \{nk+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$

$\hat{i} + \hat{j} = \widehat{i+j}$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = \widehat{ij}$

$+, \cdot$ bine definite

$i' \in \hat{i}$
$j' \in \hat{j}$, $\hat{i}+\hat{j} \in \widehat{i'+j'}$

Reamintim

$\hat{a} = \hat{b}$ (în $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ a și b $\Leftrightarrow n \mid a-b$

$i' \in \hat{i} \Leftrightarrow n \mid i - i'$
$j' \in \hat{j} \Leftrightarrow n \mid j - j'$ $\Rightarrow n \mid (i+j) - (i'+j') \Leftrightarrow i'+j' \in \widehat{i+j}$

$+, \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, op pe $\mathbb{Z}_n$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbb{Z}_n, +) \text{ grup abelian} \\ \text{el nul } \hat{0} \\ \text{opusul lui } \hat{a} \text{ este } -\hat{a} \\ \hline (\mathbb{Z}_n, \cdot) \text{ monoid com} \\ \text{elem neutru } \hat{1} \\ \text{„}\cdot\text{" distr față de „}+\text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \text{ inel comutativ cu unitate } \hat{0} \neq \hat{1}$$

! Atenție: pt $n = 4$, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ are div ai lui 0

$\hat{0} \neq \hat{2}$, $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} = \hat{0}$

$(\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}, +, \cdot)$ corp com.

Obs: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ corp com $\Leftrightarrow$ n = nr prim

Def: Fie $(R, +, \cdot)$ inel, $A \subseteq R$

A subinel în R dacă

$$\begin{cases} A \text{ p s în } (R,+) \text{ și în } (R,\cdot) \\ (A, \underbrace{+, \cdot}_{\text{op induse}}) \text{ inel} \end{cases}$$

Obs: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inel cu unitate

$\{0\}$ subinel în $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $1 \in \{0\}$

$2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inel cu unitate

(mult nr pare)

Def: Fie $(K, +, \cdot)$ corp $A \subseteq K$

A subcorp în K dacă $\begin{cases} A \text{ p s în } (K,+) \text{ și în } (K,\cdot) \\ A(\underbrace{, +, \cdot}_{\text{op induse}}) \text{ corp} \end{cases}$

Ex = 1) $(K,+,\cdot)$ corp. $\{0\}$ nu – e subcorp în $(K,+,\cdot)$
– e subinel în $(K,+,\cdot)$

2) ~~$(\mathbb{Z},+,\cdot)$~~ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ (*) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ (**) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ (***) inele, fiecare fiind subinel în cele ce urmează

3) (*), (**), (***) corpuri, fiecare fiind corp în cele ce urmează

4) $\mathbb{Z}$ nu e subcorp în $(\mathbb{R},+,\cdot)$

Def = Fie $(R,+,\cdot)$ și $(R',+,\cdot)$ inele. $f: R \to R'$

f este (omo) morfism de inele dacă

$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x,y \in R$

$f(xy) = f(x)\cdot f(y) \ \forall x,y \in R$

Dacă R, R' sunt inele cu unitățile $1, 1'$ și $f: R \to R'$ morfism de inele spunem că f este morfism unital dacă $f(1) = 1'$

izomorfism de inele = morfism bijectiv de inele

endomorfism de inel = —"— de la un inel la el însuși

autom — = ~~endomorfism~~ bij

ex = 1) Fie $(R,+,\cdot)$ inel, $1_R = R \to R$, $1_R(x) = x$
autom al lui $(R,+,\cdot)$

2) $(R,+,\cdot)$, $(R',+,\cdot)$ inele. $\theta: R \to R'$, $\theta(x) = 0$
morfism de inele (n

$|R'| \geq 2 \Rightarrow \theta$ nu e unital

3) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

f bij $\Rightarrow$ automorfism al lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

(I) Fie $(R, +, \cdot)$, $(R', +, \cdot)$ inele. $f: R \to R'$ morfism de inele $\Rightarrow$

1) $f(0) = 0'$ și $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in R$

2) Dacă în plus, R și R' inele cu unitate și $f(1) = 1'$ atunci $\forall x \in R$ el inv în R, $f(x)$ este inv în R' și $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

Dem: 1) f mor de inele = f morf de la $(R, +)$ la $(R', +)$ $\Rightarrow$

2) $\left.\begin{array}{l} f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1' \\ f(x^{-1}) \cdot f(x) \quad = \text{temă} \qquad = 1' \end{array}\right\} \Rightarrow$ Concluzia