Analiză pe $\mathbb{R}$ Lect. dr. ANCA GRAD
Tema nr. 11

Integrale improprii

Exerciţiul 1: Studiaţi integrabilitatea improprie (cu ajutorul definiţiei şi a formulei lui Leibniz-Newton) pentru următoarele funcţii. În caz de convergenţă, determinaţi valoarea integralei improprii.

Pentru toate exemplele de aici, vorm urma următorii paşi:

Pasul 1: Determinăm integrala nedefinită a lui f

Pasul 2: Alegem o primitivă a lui f (de regulă din integrala nedefinită alegem funcţia cu constanta =0)

Pasul 3: Calculăm lim din primitivă, înspre punctele problemă. Dacă limita există şi este finită, atunci suntem într-un caz de convergenţă.

a)

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b)

$$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{x(x+1)}.$$

c)

$$f:(0,1]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\ln x.$$

d)

$$f:[0,1)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e)

$$f:(0,1]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

f)

$$f:[e,\infty)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}.$$

g)

$$f:\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},2\right]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$$

h)

$$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x.$$

i)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

j)

$$f\colon \left(\frac{1}{3}, 3\right] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

k)

$$f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Exerciţiul 2: Studiaţi integrabilitatea improprie (cu ajutorul criteriului de comparaţie) pentru următoarele funcţii. (În caz de convergenţă nu se poate determinaţi imediat valoarea integralei improprii, criteriul doar ne asigură ipotezele de convergenţă).

Pentru toate exemplele de aici, vorm urma următorii paşi:

Pasul 1: Determinăm capetele problemă ale domeniului de definiţie.

Pasul 2: Calculăm

$$\lim_{x \uparrow b} (b-x)^p f(x)$$

şi setăm p astfel încât valoarea limitei sa fie $\in (0, \infty)$, pentru $f : [a, b) \to [0, \infty)$. Dacă domeniul este deschis în a, atunci calculăm

$$L = \lim_{x \downarrow a} (x-a)^p f(x)$$

iar dacă domeniul este nemărginit superios (deci $[a, \infty)$)

$$L = \lim_{x \to \infty} x^p f(x).$$

Pasul 3: În primele două cazuri dacă $p < 1$ avem integrabilia improprie convergentă, iar în al treilea, dacă $p > 1$.

a)

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{s\sqrt{1+x^2}}$$

b)

$$f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

c)

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{arctgx}{x}\right)^2$$

d)

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

e)

$$f : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1-x^2}} \right)^2$$