Cursul 4

Inelul polinoamelor cu coef într-un corp com

Fie $(K,+,\cdot)$ corp com, $(K[x],+,\cdot)$ dom de integritate

$$\text{grad}(f\cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

Def: Fie $f \in K[x]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, $c \in K$

$\rightarrow f(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n \in K$ s.n. valoarea lui f în punctul c

$\rightarrow c \in K$ s.n. răd a lui f dacă $f(c) = 0$

T împ cu rest în $K[x]$:

$\forall f, g \in K[x]$, $g \neq 0$, $\exists!\, q, r \in K[x]$ a.î.

$f = gq + r$, grad $r <$ grad g

C: 1) Restul împ unui pol. f la $x-c$ este $f(c)$

2) $c \in K$ răd a lui $f \Leftrightarrow (x-c) \mid f$

3) Un pol $f \in K[x]$ nenul cu grad $f = k$ are cel mult k rădăcini în K

Dem: $\exists!\, q, r \in K[x]$ a.î. $f = (x-c)q + r$ cu grad $r < 1$

$\Downarrow$

$r \in K$

$\xrightarrow[\text{cu } c]{\text{înloc } i}$ $f(c) = 0 \cdot q(c) + r \Rightarrow r = f(c)$

Dem: Inducție după $k \in \mathbb{N}$

$k = 0$; $f \in K^*$ are zero rădăcini

Considerăm grad $f = k \in \mathbb{N}^*$ și prop ~~ade~~ pt pol de grad $< k$.

f nu are nicio răd în $K \Rightarrow$ prop e adv

sau

f are cel puțin o răd $c_1 \in K \Rightarrow (X - c_1) \mid f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ pol $f_1 \in K[X]$ a.î. $f = (X - c_1) f_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ grad $f_1 = k-1$

$\Rightarrow f_1$ are cel mult $k-1$ răd, iar răd lui f sunt c_1 sau rădăcinile lui f care sunt în număr de cel mult k răd

4) ~~Dacă~~ $f \in K[X]$ cu gradul $n \in \mathbb{N}^*$ și toate răd: $x_1, x_2, \dots x_n \in K$ nu sunt neapărat diferite, atunci:

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 =$$
$$= a_0 (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_n^{-1} a_{n-1} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = a_n^{-1} a_{n-2} \\ \vdots \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n a_n^{-1} a_0 \end{cases}$$ rel lui Viete

Inele de matrici

Fie $(K,+,\cdot)$ corp com, $m,n \in \mathbb{N}^*$. O funcție

$A:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\to K$ s.n. matrice

de tipul (m,n) cu elem din K

$$A(i,j)=a_{ij}\in K \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$M_{mn}(K)$ mulț matricelor de tipul (m,n) cu el din K

(cu m lin, n col)

$m=n$ $M_{mn}(K)=M_n(K)$ mulț matricelor pătrate de ord n cu elem din K

$A=(a_{ij})\in M_{mn}(K)$, $B=(b_{ij})\in M_{mn}(K)$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})\in M_{mn}(K)$

I = $(M_{mn}(K),+)$ grup abelian

$\boxed{\text{Dem temă}}$

Fie $A=(a_{ij})\in M_{mn}(K)$, $\alpha\in K$

$\alpha A=(\alpha a_{ij})\in M_{mn}(K)$

$\cdot : K\times M_{mn}(K)\to M_{mn}(K)$

care are prop următoare

i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

ii) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

iii) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

10) $1A = A$

$\forall \alpha, \beta \in K, \forall A, B \in M_{mn}(K)$

Dem: temă

$A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$, $B = (b_{ij}) \in M_{np}(K)$ $(m, n, p \in \mathbb{N}^*)$

$AB = (c_{ij}) \in M_{mp}(K)$, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$\cdot : M_{mn}(K) \times M_{np}(K) \to M_{mp}(K)$

verifică proprietățile:

a) $(AB)C = A(BC)$, $\forall A \in M_{mn}(K)$ $\forall B \in M_{np}(K)$
$\forall C \in M_{pq}(K)$, $q \in \mathbb{N}^*$

b) $I_m B = B$ și $A I_n = A$ $\forall A \in M_{mn}(K)$ $\forall B \in M_{np}(K)$

unde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \vdots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$

c) $A(B+C) = AB + AC$ $\forall A \in M_{mn}(K)$, $\forall B, C \in M_{np}(K)$

c') $(A+B)C = AC + BC$ $\forall A, B \in M_{mn}(K)$ $\forall C \in M_{np}(K)$

d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ $\forall \alpha \in K$, $\forall A \in M_{mn}(K)$
$\forall B \in M_{mn}(K)$

Dem: b) - d) temă

a) Elem. din linia i și col j a lui $(AB)C$ este:

$$\sum_{j=1}^{p} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}_{\text{lin i a lui } AB}\Big) \underbrace{c_{ji}}_{\text{col i a lui } C} = \sum_{\substack{k=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,p}}} a_{ik} b_{kj} c_{jk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} c_{jl}\right)$$

col l al lui BC

Care este elem din linia i și col l a lui $A(BC)$ (i, l fixate)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $(M_n(K), +, \cdot)$ inel cu unitate

Obs: 1) înmult matricelor din $M_n(K)$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\cdot$ nu e com și că inelul $(M_n(K), +, \cdot)$ are divizori ai lui zero

2) $f: K \to M_n(K)$, $f(a) = a I_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & a \end{pmatrix}$

morfism injectiv de inele (unital)

Def: Inelul $(M_n(K), +, \cdot)$ s.n. inelul matricelor pătratice de ordinul n peste K.

Def: Fie $A \in M_{mn}(K)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

Matricea ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}}$ s.n. transpusa mat A

Propoziție: 1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ $\forall A, B \in M_{mn}(K)$

2) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ $\forall A \in M_{mn}(K)$, $\forall B \in M_{nm}(K)$

3) ${}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA$ $\forall \alpha \in K$, $\forall A \in M_{mn}(K)$

Elem inversabile din inelul $M_n(K)$ sunt

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \exists B \in M_n(K) \text{ a.î. } AB = I_n = BA\}$$

pr $\mathcal{U}(M_n(K), \cdot)$ și

$(GL_n(K), \cdot)$ grupul general liniar de grad n peste K

$K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}$

Determinanți

Fie $(K, +, \cdot)$ corp com, $k \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

Def: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} (\in K)$

temă: urmăriți aplicarea def de mai sus pt $n=2$ și $n=3$

$\det : M_n(K) \to K$ funcția determinantului

Obs: În suma din $\det A$, produsele sunt formate în așa fel încât nu avem 2 elemente din aceeași linie sau aceeași col din A

$\boxed{\text{Prop}}$ Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Atunci $\det A = \det({}^tA)$

Dem: $\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$

$\sigma(i) = j \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$

$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$

$\varepsilon : S_n \to U_2 = \{-1, 1\}$

$\sigma \cdot \sigma^{-1} = e \Rightarrow 1 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

$S_n \to S_n$, $\sigma \to \sigma^{-1}$ funcție bijectivă $\Rightarrow$

când σ parcurge S_n, σ^{-1} parcurge S_n

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det({}^tA) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \det A$$

Consecință: Toate prop det valabile pt liniile lui A sunt valabile și pt coloanele lui A și reciproc

P: Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A''} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}' & \dots & a_{in}' \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A'}$$

Dem: $\det A'' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} (a_{i\sigma(i)} + a_{i\sigma(i)}') \dots$

$a_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} \dots 7$$

$= \det A + \det A'$

Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

P: Dacă B rezultă din A prin ... liniei i (col j) cu $\alpha \in K$ atunci $\det B = \alpha \det A$

$$\det B = i\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \alpha a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right)$$

$$= \alpha \det A$$

P: Dacă A are linia i (col j) toate elem nule atunci $\det A = 0$

P: