Curs 6

Analiză - STP

Def: Fie $\sum_{n\geq k} x_n$ o serie de nr reale.

Ea s.n. serie cu termeni pozitivi (STP) dacă $x_n > 0$, $\forall n \geq k$ ($! \, S$ a.î. $s_n \xrightarrow{w} S$ (conv))

(P1) Fie $\sum x_n$ STP $\Longrightarrow$ (s_n) este strict crescător

Dem: Fie $n \geq k$ $\quad s_{n+1} - s_n = (x_k + x_{k+1} + \dots + x_n + x_{n+1}) - (x_k + x_{k+1} + \dots + x_n) = x_{n+1} > 0$

$\Rightarrow (s_n)$ este strict crescător

(C1) Fie $\sum x_n$ STP $\longrightarrow \exists \sum_{n=k}^{\infty} x_n \in (0, \infty]$

Dem: $\sum x_n$ STP

$\Downarrow$ P1

(s_n) strict crescător $\xrightarrow{w} \exists \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}}$

(Cum $s_n > 0 \Rightarrow \in (0, \infty]$)

(C2) Fie $\sum x_n$ STP

$\sum x_n$ C $\Leftrightarrow$ (s_n) este mărginit

Dem: ($\Rightarrow$) Știm $\sum x_n$ C $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (s_n) este c $\Rightarrow$

$\Rightarrow (s_n)$ mărginit ✓

$(\Leftarrow)$ Știm $\sum x_n$ STP. $\xRightarrow{P_1}$ (s_n) strict crescător
$\xLeftarrow{ip}$ (s_n) mărginit

$\xRightarrow{W}$ (s_n) C
$\Updownarrow$ def
$\sum x_n$ C

CRITERII DE COMPARAȚIE PENTRU STP

$\boxed{C1C}$ (Primul criteriu de comparație pentru STP)

Fie $\sum a_n$ și $\sum b_n$ STP a.î.
$\exists\, k_0 \geq k$
$\exists\, \alpha > 0$ pt care $\forall\, n \geq k_0,\ a_n \leq \alpha b_n$

Atunci:

a) $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum a_n$ C

b) $\sum a_n$ D $\Rightarrow \sum b_n$ D

Dem: a) Știm $\sum b_n$ C
Dorim $\sum a_n$ C

Notăm: $\forall\, n \geq k$ $t_n = b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n$
$s_n = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$, termenii generali ai șirurilor sumelor parțiale pt cele 2 serii

$\sum b_n$ C $\xRightarrow{C_2}$ (t_n) mărginit

$\Leftrightarrow \exists\, T > 0$ a.î. $\forall\, n \geq k$ $0 < t_n < T$ (1)

STP

$s_n = \underbrace{a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k_0-1}}_{A = \text{const}} + \underbrace{a_{k_0}}_{\leq \alpha b_{k_0}} + \ldots + \underbrace{a_n}_{\leq \alpha b_n}$

$\Rightarrow s_n \le A + \alpha(b_{k_0} + \dots + b_n) = A + \alpha\{\underbrace{(b_1 + \dots + b_n)}_{t_n} - \underbrace{(b_1 + \dots + b_{k_0-1})}_{B = \text{const}}\}$

$= A + \alpha(t_n - B) = A + \alpha t_n - \underbrace{\alpha B}_{>0} \boxed{< A + \alpha t_n}$

$\overset{①}{\Longrightarrow} < \underbrace{A + \alpha T}_{>0}$ constantă

Concluzie: $\forall\, n \ge k_0$, $s_n < A + \alpha T$

$P_1\ (s_n) \to$ ș. crescător $\Big\} \Rightarrow s_n < A + \alpha T$ $\forall\, n \ge k$

$\Rightarrow (s_n)$ mărginit $\overset{C_2}{\Longleftrightarrow} \sum a_n\ C$

b) Știm că $\sum a_n\ D$

Dorim $\sum b_n\ D$. Pp. prin absurd $\sum b_n\ C \overset{a)}{\Longrightarrow} \sum a_n\ C \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ↯ deci $b_n\ D$

Obs: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ pt a)

Obs: $\boxed{C1C}$ nu poate fi aplicat oricând. Las-o deoparte cazurile: $\sum a_n\ C$ sau $\sum b_n\ D$

Exemplu: Studiați natura seriei:

$$\sum_{n \ge 1} \frac{7^n}{6^n + 8^n} =$$

? $\quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \le x_n \le \left(\frac{7}{8}\right)^n$

Not $y_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$ $\quad \sum y_n$ C (serii geometrice

$z_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^n$ $\quad \sum z_n$ $\quad$ de rație $\left|q = \frac{7}{8}\right| < 1$)

$$z_n \leq x_n \leq y_n$$

pt $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left.\begin{array}{l} x_n \leq y_n \\ \sum y_n \text{ C} \end{array}\right\} \xRightarrow{\boxed{C1C}}$ a) $\sum x_n$ este C

$k_0 = 1$

$\alpha = 1$

$a_n = x_n$

$b_n = y_n$

! Atenție $\left.\begin{array}{l} z_n \leq x_n \\ \sum z_n \text{ C} \end{array}\right\}$! dar C1C nu se poate aplica pt $\sum x_n$ și $\sum z_n$

$\boxed{C2C}$ (Al doilea criteriu de comparație pentru STP)

$\sum a_n$ și $\sum b_n$ STP a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \ (\in [0,\infty])$

Atunci:

a) Dacă $\ell = 0$ au loc concluziile $\boxed{C1C}$

a1) $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum a_n$ C

a2) $\sum a_n$ D $\Rightarrow \sum b_n$ D

b) Dacă $\ell \in (0,\infty) \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$

(seriile au aceeași natură)

c) Dacă $\ell = \infty \Rightarrow$ concluziile $\boxed{C1C}$ inversate

c1) $\sum a_n$ C $\Rightarrow \sum b_n$ C

c2) $\sum b_n$ D $\Rightarrow \sum a_n$ D

Dem: a) $\boxed{l=0}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall n \geq n_\varepsilon, \left|\frac{a_n}{b_n}-0\right|<\varepsilon$ ①

Din ① $\varepsilon=\sqrt{2}$, $\boxed{\exists n_{\sqrt{2}} \in \mathbb{N}}$ a.î. $\boxed{\forall n \geq n_{\sqrt{2}}}$

$\left|\frac{a_n}{b_n}-0\right|<\sqrt{2}$

Σa_n
Σb_n STP

$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}<\sqrt{2} \Rightarrow a_n<\boxed{\sqrt{2}}\, b_n$ $\Rightarrow$

$\overset{CIC}{\Longrightarrow}$ Concluzie : $a_1)$

$k_0=n_{\sqrt{2}}$ $a_2)$

$\alpha=\sqrt{2}$

b) $\boxed{l \in (0,\infty)}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$,

② $\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$
$n \geq n_\varepsilon$ $\quad \left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-l<\varepsilon \;\Big|+l$

$\Leftrightarrow l-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<l+\varepsilon \;\Big|\cdot(b_n)>0$

$\Leftrightarrow b_n(l-\varepsilon)<a_n<b_n(l+\varepsilon)$ ③

Dorim : $\Sigma a_n \sim \Sigma b_n$

deci fie ~~arătăm~~ că $\Sigma a_n C \Leftrightarrow \Sigma b_n C$ $\quad p \Leftrightarrow q$

$\Sigma a_n D \Leftrightarrow \Sigma b_n D$ $\quad \bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$

Astfel dem că $\Sigma a_n C \Leftrightarrow \Sigma b_n C$

$\boxed{\Leftarrow}$ Știm $\boxed{\sum b_n \; C}$ din ③ partea dreaptă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$a_n < (l+\varepsilon) b_n$

pt $\varepsilon = l$

$\exists n_l \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_l \quad a_n < 2l \cdot b_n$

$\xrightarrow[k_0 = n_l]{C1C(a)} \boxed{\sum a_n \; C}$ ✓

$\alpha = 2l$

$\boxed{\Rightarrow}$ Știm $\boxed{\sum a_n \; C}$ din ③ partea stângă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$b_n(l-\varepsilon) < a_n$

pt $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$

$\exists n_{\frac{l}{2}} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_{\frac{l}{2}}$, $b_n \frac{l}{2} < a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n < \frac{2}{l} a_n$

$\xrightarrow[k_0 = n_{\frac{l}{2}}]{C1Ca} \boxed{\sum b_n \; C}$ ✓

$\alpha = \frac{2}{l} > 0$

$a_n \leftrightarrow b_n$

Din $\boxed{\Rightarrow}$ și $\boxed{\Leftarrow} \Rightarrow \boxed{\Leftrightarrow}$ ~~Dai~~ $\sum a_n C \Leftrightarrow \sum b_n C$

c) $l = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$\varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$

pt $\varepsilon = 17$ $\exists\, n_{17} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_{17}$, $b_n \cdot 17 < a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n < \frac{1}{17} a_n$

CIC

$k_0 = n_{17}$

$\alpha = \frac{1}{17}$

$a_n \Rightarrow b_n$

C1C2 V

Obs: De regulă este de dorit să încercăm aplicarea lui (C2C b) pt că el furnizează rezultate indiferent de natura seriei cu care se face comparație.

Cazurile a) și c) trb tratate cu atenție deoarece func pt un nr limitat de ipoteze.

Menționăm criteriul de condensare al lui Cauchy

(dem ΔUCA) Fie $\sum x_n$ STP a.î. (x_n) descrescător

Atunci $\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n}$

Aplicație importantă: SERIA ARMONICĂ GENERALIZATĂ

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

(pt $\alpha = 1$ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \to \infty$)

Studiem cu discuție după parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$, natura seriei armonice generalizate.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$

Atunci când trebuie să studiem natura unei serii și nu implică prea mari eforturi, pornim cu $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n}$ [ilizibil, tăiat de marginea paginii] $\frac{1}{n^\alpha}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases}\infty, & \alpha<0\\ 1, & \alpha=0\\ 0, & \alpha>0 \Rightarrow \boxed{?}\end{cases}$$

$\alpha<0$, $\alpha=0$ $\Rightarrow \sum x_n$ D, STP $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\infty$$

- Luăm separat cazul $\alpha>0$

$\sum x_n$ STP

$\boxed{?}$ monotonia x_n ?

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_n)$ strict descresc[…]

criteriul de condensare al lui Cauchy

$$\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n}$$

$$x_n = \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow 2^n \cdot x_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{n(\alpha}}[…]$$

! α constantă $\Rightarrow (\alpha-1)$ constantă $\Rightarrow 2^{\alpha-1}$ consta[…]

$$= \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

constantă $\Rightarrow \sum 2^n x_{2^n}$ este o serie geometrică cu rația $q = \frac{1}{2^{[…]}}$

pt că $q \geq 0 \Rightarrow \sum 2^n x_{2^n} = \sum q^n \begin{cases} C: q<1 \\ D: q\geq 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C: 1<2^{\alpha-1} \\ D: 1\geq 2^{\alpha-1}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C : 0 < \alpha - 1 \\ D : 0 \geq \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C : \alpha > 1 \\ D : \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (! \alpha > 0)$$

Concluzie: $\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} C : \alpha > 1 \\ D : \alpha \leq 1 \end{cases}$

iar pt $\alpha \leq 1$ STP $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$

de ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty$$

Exemplu: Studiați natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3n^4 + 7n^2 - 5}{\sqrt[3]{n^{14} + 6n^3 - 8}}$$

Atunci când în formularea termenului general al șirului generator întâlnim n la o putere constantă încercăm aplicarea lui C2CB.

Luăm $y_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Calculăm $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 7n^2 - 5}{\sqrt[3]{n^{14} + 6n^3 - 8}} \cdot n^\alpha =$

$$= \begin{cases} \infty : 4 + \alpha > \frac{14}{3} \\ 3 : 4 + \alpha = \frac{14}{3} \\ 0 : 4 + \alpha < \frac{14}{3} \end{cases}$$

acum = setăm $\alpha = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 3 \in (0,\infty) \xrightarrow[b)]{C2C} \sum x_n \sim \sum y_n =$

$= \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

$\downarrow$

serie armonică gen $\alpha = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow D$ → serie arm gen

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{3n^4+7n^2-5}{\sqrt[3]{n^{14}+6n^3-8}}$ este D STP $\Bigg\} \Rightarrow$ bonus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+7n^2-5}{\sqrt[3]{n^{14}+6n^3-8}} =$

$\boxed{C3C}$ (Al treilea criteriu de comparație)

$\sum a_n$, $\sum b_n$ STP a.î. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha > 0$ a.î. $\forall n \geq k_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

atunci $\boxed{C1C}$

Dem: Din $(*)$

$$\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \leq \frac{b_{k_0+1}}{b_{k_0}}$$

$$\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \leq \frac{b_{k_0+2}}{b_{k_0+1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \odot$

$$\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot \frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{k_0+1}}{b_{k_0}} \cdot \frac{b_{k_0+2}}{b_{k_0+1}} \cdot \ldots \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\forall n \geq k_0 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_{k_0}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_{k_0}} \quad \Big| \cdot a_{k_0} > 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq \underbrace{\boxed{\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}}}}_{\alpha} \cdot b_{n+1}$$

$\boxed{C1C}$ $\quad k_0 = k_0 + 1$

$\alpha = \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}} \quad \Rightarrow$ Concluzie ✓✓

Criteriul lui D'Alembert (al raportului)

a) Fie $\sum x_n$ STP a.î. $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq k_0$:
$\exists\, q \in (0,1)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$$

atunci $\sum x_n$ este convergentă

b) Fie $\sum x_n$ STP a.î. $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq k_0$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$

$\Rightarrow \sum x_n$ ~~este~~ D

Dem: a) în $\boxed{C3C}$ $\quad \left.\begin{array}{l} a_n := x_n \\ b_n = q^n \end{array}\right\} \xrightarrow{ip}$

$\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq k_0$ $\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$

$\sum b_n = \sum q^n$

$\hookrightarrow$ serie de tip geometric $\left.\begin{matrix} \\ q \in (0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow C$

$\xRightarrow[c)]{C3C} \boxed{\sum x_n \, C}$

b) $\hat{I}n$ C3C $\quad a_n = x_n \quad b_n = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \; D$

$\left.\begin{matrix} \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq k_0 \quad \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \\ C3C \\ k_0 = k_0 \\ a_n = b_n \\ b_n = x_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ În practică se aplică urm. consecință a criteriului raportului:

Fie $\sum_{n \geq k} x_n$ a STP a.î. : $\exists\, \ell = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

$\ell < 1 \Rightarrow \sum x_n \, C$

$\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n \, D$

$\ell = 1 \Rightarrow \boxed{?}$

Exemplu: Studiați natura seriei $\sum_{n \geq 1} \dfrac{2^n}{n^n \cdot n!}$

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \dfrac{n^n \cdot n!}{2^n} =$

$= 2 \lim_{n \to \infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+2}} =$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

Studiem raport $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underline{\underline{(1^\infty}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow l = 2 \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow \sum x_n \text{ este C}$$

Obs: Conform t. lui Cesaro-Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

din D'Alembert ⇒ criteriu al radicalului

→ se aplică de obicei n^n

* soluția cea mai rapidă depinde de formula term. general