SEMINAR 6 + 7

1) Să se rezolve sistemele de ecuaţii folosind metoda lui Gauss:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\,(\text{în } \mathbb{R}^3);\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{array}\right. \quad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7\,(\text{în } \mathbb{R}^4);\\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13\end{array}\right.$$

$$\text{c)}\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-3x_3=-1\\ 2x_1+x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+2x_2-3x_3=1\end{array}\right. \quad (\text{în } \mathbb{R}^3).$$

2) Folosind metoda lui Gauss, să se discute după parametrul real α compatibilitatea sistemelor de mai jos, apoi să se rezolve:

$$a)\left\{\begin{array}{r} 5x_1-3x_2+2x_3+\ 4x_4=3\\ 4x_1-2x_2+3x_3+\ 7x_4=1\\ 8x_1-6x_2-\ x_3-\ 5x_4=9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\alpha\end{array}\right.,\ b)\left\{\begin{array}{r} 2x_1-\ x_2+3x_3+\ 4x_4=\ 5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+\ 6x_4=\ 7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+\ 8x_4=\ 9\\ \alpha x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11\end{array}\right.;$$

$$c)\left\{\begin{array}{r} \alpha x_1+\ x_2+\ x_3=1\\ x_1+\alpha x_2+\ x_3=1\\ x_1+\ x_2+\alpha x_3=1\end{array}\right..$$

3) Sunt inversabile următoarele matrici? În caz afirmativ, să se determine inversele lor folosind transformări elementare:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2\\ 6 & 8 & 5\\ 9 & 12 & 10\end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Definiţie. Orice matrice pătratică rezultată din matricea unitate prin aplicarea unei transformări elementare se numeşte **matrice elementară**.

4) Arătaţi că matricele elementare sunt inversabile şi că inversa oricărei matrici elementare este tot o matrice elementară.

5) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că orice transformare elementară asupra matricei $A = (a_{ij})$ din $M_{m,n}(K)$ este rezultatul înmulţirii lui A cu o matrice elementară. Mai precis, orice transformare elementară asupra liniilor (coloanelor) matricei A se obţine prin înmulţirea lui A la stânga (dreapta) cu matricea elementară rezultată prin efectuarea aceleiaşi transformări elementare asupra matricei I_m (respectiv I_n).

6) (TEMĂ) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice elementară $E \in M_n(K)$ şi orice matrice $A \in M_n(K)$ avem

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A = \det(AE).$$

8) Arătaţi că orice matrice inversabilă este un produs de matrici elementare.

9) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice $A, B \in M_n(K)$ avem $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.