Analiză pe $\mathbb{R}$ Lect. dr. Anca Grad
Tema nr. 5

Serii de numere reale - partea 1

Noţiuni introductive

Serii geometrice

Reamintim umătoarea limită:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & : a > 1 \\ 1 & : a = 1 \\ 0 & : a \in (-1,1) \\ \nexists & : a \leq -1 \end{cases}$$

Se numeşte **serie geometrică** orice serie de tipul

$$\sum_{n\geq m} q^{n-1},$$

atunci când $q \in \mathbb{R}$. Pentru această serie avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} 0 & : q = 0 \\ \frac{1}{1-q} & : q \in (-1,1)\setminus\{0\} \\ +\infty & : q \geq 1 \end{cases}$$

Pentru cazul în care $q \leq -1$, seria geometrică nu are sumă.

Demonstraţie:

Studiem şirul sumelor parţiale pentru un $n \geq 1$.

$$s_n = q^0 + q^1 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Cazul 1: $q = 0$**.** În acest caz, şirul sumelor parţiale este $s_n = 0, \forall n \geq 1$, deci are limita tot 0, aceasta fiind şi suma seriei.

Cazul 2: $q \in (-1,1)\setminus\{0\}$**.** Atunci: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Cazul 3: $q > 1$**.** Atunci: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\infty}{1-q} = \frac{-\infty}{1-q} = \infty$ deoarece $1-q < 0$.

Cazul 4: $q \leq -1$**.** În acest caz remarcăm că

$$\lim_{n\to\infty q^n}$$

nu există, şi de aceea nu există nici $\lim_{n\to\infty} s_n$. Astfel, în acest caz seria geometrică nu are sumă.

Serii telescopice

Daca seria de numere reale $\sum_{n \geq m} x_n$ are termenul de grad n definit ca diferenţă a doi termeni succesivi ai unui şir de numere reale $(a_n)_{n \geq m}$, deci

$$x_n = a_n - a_{n+1}, \forall n \geq m,$$

ea se numeşte **serie telescopică**. În cazul în care şirul $(a_n)_{n \geq m}$ are limita

$$l = \lim_{n \to \infty} a_n,$$

seria $\sum_{n \geq m} x_n$ are sumă iar aceasta este:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n = a_m - l.$$

Demonstraţie: Scriem formula generală a termenului de grad n, al şirului sumelor parţiale ataşat seriei:

$$s_n = x_m + x_{m+1} + ... + x_n = a_m - a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + ... + a_{n-1} - a_n + a_n - a_{n+1} =$$

$$= a_m - a_{n+1}.$$

În concluzie

$$s_n = a_m - a_{n+1}, \forall n \geq m.$$

În această expresie a_m este un termen constant, iar deoarece şirul $(a_n)_{n \geq m}$ are limită, şi şirul $(s_n)_{n \geq m}$ va avea limita, iar aceasta este

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (a_m - a_{n+1}) = a_m - \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = a_m - l.$$

Cum limita şirului sumelor parţiale este chiar suma seriei, concluzionăm că:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n = a_m - l.$$

Operaţii cu serii convergente

1. Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ şi $\sum_{n \geq 1} y_n$ doua serii care au sumele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y.$$

şi $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $ax + by$ nu este un caz de nedeterminare, atunci şi seria

$$\sum_{n \geq 1} ax_n + by_n$$

are sumă, iar suma ei este:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n) = ax + by.$$

2. Primul termen de la care începem însumarea este important în cazul seriilor. De aceea, dacă seria $\sum x_n$ are sumă, iar $p \in \mathbb{N}$, atunci

$$\sum_{n=p}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \Big(x_1 + x_2 + ... + x_{p-1}\Big).$$

Exerciţii

Exerciţiul 1: Calculaţi suma umătoarelor serii geometrice:

$$a) \sum_{n\geq 3}\frac{3}{5^n}, \quad b) \sum_{n\geq 4}\frac{2^{n-3}+(-3)^{n+3}}{5^n}, \quad c) \sum_{n\geq 5} e^n, \quad d) \sum_{n\geq 2}\Big(-\frac{1}{\pi}\Big)^n \quad e) \sum_{n\geq 3}(-3)^n.$$

Exerciţiul 2: Calculaţi suma umătoarelor serii telescopice:

$$a) \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}, \quad b) \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \quad c) \sum_{n\geq 5}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$d) \sum_{n\geq 1}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big), \quad e) \sum_{n\geq 2}\frac{\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln\big(n^{\ln(n+1)}\big)}.$$