CURS 10

Transformări liniare

Definiţia 1. Fie V, V' două K-spaţii vectoriale. O funcţie $f : V \to V'$ se numeşte **transformare liniară** (sau **funcţie liniară** sau **aplicaţie liniară** sau **morfism de K-spaţii vectoriale**) dacă

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ şi } f(\alpha x) = \alpha f(x),\ \forall x, x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha \in K. \tag{3}$$

O transformare liniară bijectivă se numeşte **izomorfism** de spaţii liniare. O transformare liniară a unui spaţiu vectorial V în V se numeşte **endomorfism** al lui V. Un izomorfism al lui V pe V se numeşte **automorfism** al lui V.

Observaţiile 2. a) O funcţie $f : V \to V'$ este liniară dacă şi numai dacă

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{4}$$

b) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n),\ \forall x_1, \ldots, x_n \in V, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.$$

c) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci f este un morfism între grupurile $(V, +)$ şi $(V', +)$ de unde rezultă

$$f(0) = 0 \text{ şi } f(-x) = -f(x),\ \forall x \in V.$$

d) Dacă V, V' şi V'' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ sunt transformări liniare, atunci $g \circ f$ este transformare liniară.

e) Dacă $f : V \to V'$ este izomorfism de spaţii vectoriale, atunci f^{-1} este izomorfism de spaţii vectoriale, adică

$$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2),\ \forall\ y_1, y_2 \in V', \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{5}$$

f) Fie V un K-spaţiu vectorial, $End_K(V)$ mulţimea endomorfismelor K-spaţiului vectorial V. Din Observaţia 2 d) rezultă că $End_K(V)$ este stabilă în monoidul $(V^V, \circ)$, iar $(End_K(V), \circ)$ este monoid.

g) Grupul elementelor inversabile ale monoidului $(End_K(V), \circ)$ este $(Aut_K(V), \circ)$, unde $Aut_K(V)$ este mulţimea automorfismelor spaţiului vectorial V.

h) Dacă $f : V \to V'$ este transformare liniară şi $X \subseteq V$, atunci

$$f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle.$$

Exemplele 3. a) Pentru orice K-spaţii vectoriale V şi V' funcţia $\theta : V \to V'$, $\theta(x) = 0$ este o transformare liniară numită transformarea liniară **nulă** sau **zero**.

Într-adevăr,

$$\theta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0 = 0 + 0 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = \alpha_1\theta(x_1) + \alpha_2\theta(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

b) Pentru orice K-spaţiu vectorial V aplicaţia identică $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$ este automorfism al lui V. Acest automorfism este element neutru în $(End_K(V), \circ)$.
c) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$ fixat. Rotaţia planului de unghi φ, adică funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi),$$

este o transformare liniară (la seminar).
d) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $C(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } I\}$. Funcţia

$$F : C(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F(f) = \int_a^b f(x)dx$$

este o transformare liniară.

Într-adevăr, pentru orice $f, g \in C(I, \mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$F(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \alpha F(f) + \beta F(g).$$

Teorema 4. Fie V şi V' K-spaţii vectoriale. Dacă $f, g : V \to V'$ şi $\alpha \in K$, atunci definim $f + g : V \to V'$ şi $\alpha f : V \to V'$ prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{6}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \tag{7}$$

1) Dacă f şi g sunt transformări liniare, atunci $f + g$ este o transformare liniară.
2) Dacă f este transformare liniară, atunci αf este transformare liniară.

Corolarul 5. a) Mulţimea $Hom_K(V, V')$ a transformărilor liniare ale lui V în V' este stabilă în raport cu operaţia definită de (6) şi $(Hom_K(V, V'), +)$ este grup abelian.

b) Mulţimea $Hom_K(V, V')$ este stabilă în raport cu operaţiile definite în (6) şi (7) şi $Hom_K(V, V')$ este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse de acestea.

c) Grupul abelian $(End_K(V), +)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă definită de (7). Mai mult, compunerea $\circ$ a endomorfismelor K-spatiului vectorial V este distributivă faţă de $+$, prin urmare avem şi o structură de inel cu unitate pe $End_K(V)$, şi anume $(End_K(V), +, \circ)$.
d) $End_K(V)$ este o K-algebră cu unitate.

Teorema 6. Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci:
1) $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V\}$ (adică **imaginea** lui f) este un subspaţiu al lui V'.
2) $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ este un subspaţiu al lui V numit **nucleul** lui f.
3) Transformarea liniară f este injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Baze. Dimensiune

Fie $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial.

Definiţiile 7. Vectorii $x_1,\dots,x_n \in V$ se numesc **liniar independenţi** dacă

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

unde $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$. În caz contrar vectorii $x_1,\dots,x_n$ se numesc **liniar dependenţi**. O submulţime finită a lui V se numeşte **liberă** dacă elementele sale sunt vectori liniar independenţi, iar în caz contrar se numeşte **legată**. O submulţime oarecare $X \subseteq V$ se numeşte **liberă** dacă orice submulţime finită a lui X este liberă, iar în caz contrar se numeşte **legată**.

Observaţiile 8. a) Vectorii $x_1,\dots,x_n \in V$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă există scalarii $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ nu toţi zero astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

b) Dacă unul dintre vectorii $x_1,\dots,x_n \in V$ este zero, atunci ei sunt liniar dependenţi.

c) Dacă vectorii $x_1,\dots,x_n \in V$ sunt liniar independenţi, atunci ei sunt doi câte doi diferiţi.

d) Dacă $x \in V$ atunci $\{x\}$ este liberă dacă şi numai dacă $x \neq 0$.
e) Submulţimea vidă $\emptyset \subseteq V$ este liberă.
f) Orice submulţime a unei mulţimi libere este liberă.
g) Dacă submulţimea $X \subseteq V$ are o submulţime legată atunci X este legată. În particular, orice submulţime a lui V care conţine vectorul zero este legată.

Teorema 9. Vectorii $x_1,\dots,x_n \in V$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă unul dintre ei este o combinaţie liniară a celorlalţi.

Demonstraţie.

Corolarul 10. a) Dacă $X \subseteq V$, atunci X este legată dacă şi numai dacă există $x \in X$ astfel încât $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$.
b) Dacă $X \subseteq V$, atunci X este liberă dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$.

Exemplele 11. a) Fie V_2, respectiv V_3, $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial al vectorilor din plan, respectiv spaţiu. Doi vectori din V_2 sau V_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă nu au aceeaşi direcţie. Orice trei vectori din V_2 sunt liniar dependenţi.

Trei vectori din V_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă nu sunt coplanari. Orice patru vectori din V_3 sunt liniar dependenţi.
b) Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$. În K-spaţiul vectorial K^n vectorii

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

sunt liniar independenţi pentru că

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = (0, \ldots, 0) \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

c) Fie K un corp comutativ. În K-spaţiul vectorial $K[X]$ mulţimea $\{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ este liberă.

Definiţiile 12. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime $X \subseteq V$ se numeşte **bază** a lui V dacă X este liberă şi X generează pe V, adică $V = \langle X \rangle$.

Teorema 13. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime X a lui V este bază a lui V dacă şi numai dacă orice vector din V se exprimă într-un singur mod ca şi combinaţie liniară de elemente din X (mai exact, pentru orice $v \in V$ există o singură familie de scalari $(\alpha_x)_{x \in X}$ cu un număr finit de componente nenule astfel încât $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x$).

Demonstraţie.

Exemplele 14. a) Orice doi vectori din V_2 (plan) care nu au aceeaşi direcţie formează o bază a lui V_2. Orice trei vectori necoplanari din V_3 (spaţiu) formează o bază a lui V_3.
b) Vectorii $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,$ $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ formează o bază în K-spaţiul vectorial K^n numită **baza canonică**.
c) Fie K un corp comutativ. Mulţimea $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o bază în K-spaţiul vectorial $K[X]$.

Teorema 15. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $X \subseteq V$. Dacă X generează pe V şi submulţimea $X_1 \subseteq X$ e liberă, atunci există o bază X_2 a lui V astfel încât $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$.

Demonstraţie. *(facultativă)*
Fie $\mathcal{C} = \{X' \mid X_1 \subseteq X' \subseteq X,\ X' \text{ liberă}\}$. Cum $X_1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Fie $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ un lanţ nevid în $(\mathcal{C}, \subseteq)$ şi

$$X_0 = \bigcup \{X' \mid X' \in \mathcal{C}'\}.$$

Arătăm că $X_0 \in \mathcal{C}$. Pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in X_0$ există $X_1', \ldots, X_n'$ în $\mathcal{C}'$ astfel încât $x_i \in X_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, iar $\mathcal{C}'$ fiind lanţ rezultă că există $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $X_i' \subseteq X_{i_0}'$ $(i = 1, \ldots, n)$ ceea ce implică $x_i \in X_{i_0}'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Prin urmare, din $X_{i_0}' \in \mathcal{C}$ deducem că elementele $x_1, \ldots, x_n$ sunt liniar independente. Deci X_0 este liberă şi $X_1 \subseteq X_0 \subseteq X$, adică $X_0 \in \mathcal{C}$ şi X_0 este majorantă a lui $\mathcal{C}'$. Din lema lui Zorn rezultă că există, în $\mathcal{C}$, un element maximal X_2. Din $X_2 \in \mathcal{C}$ urmează că X_2 este liberă.

Pentru a arăta că X_2 este o bază a lui V mai trebuie arătat că $V = \langle X_2 \rangle$. Dacă $V \neq \langle X_2 \rangle$ urmează că $X \nsubseteq \langle X_2 \rangle$, adică există $x \in X \setminus \langle X_2 \rangle$ şi vom deduce că $X_2 \cup \{x\}$ este liberă ceea ce contrazice maximalitatea lui X_2.

Într-adevăr, dacă

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha x = 0,$$

unde $x_i \in X_2$ şi $\alpha, \alpha_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$ atunci $\alpha = 0$ deoarece în caz contrar

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1} \alpha_i x_i \in \langle X_2 \rangle$$

ceea ce contrazice alegerea lui x. Întrucât X_2 este liberă rezultă $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Deci $X_2 \cup \{x\}$ este liberă.

Corolarul 16. a) Orice spaţiu vectorial V are o bază.

b) Orice submulţime liberă a unui spaţiu vectorial V poate fi extinsă la o bază a lui V.

c) O submulţime Y a unui spaţiu vectorial V este o bază a lui V dacă şi numai dacă Y este o submulţime liberă maximală a lui V.

$Y \subseteq V$ bază în ${}_K V \Leftrightarrow (Z \subseteq V,\ Z$ liberă şi $Y \subseteq Z \Rightarrow Y = Z)$

dem: „$\Rightarrow$" Pp. prin reducere la absurd că $\exists Z \subseteq V$ liberă a.î. $Y \subsetneq Z$. Atunci

$\left.\begin{array}{l}\exists z \in Z \setminus Y \subseteq V \\ Y \text{ bază}\end{array}\right\} \Rightarrow z \in V = \langle Y \rangle \underset{Y \subseteq Z \setminus \{z\}}{\subseteq} \langle Z \setminus \{z\} \rangle$ contrad cu Z liberă.

„$\Leftarrow$" Arătăm că $V = \langle Y \rangle$.

Fie $v \in V$. Dacă $v \in Y$ atunci $v \in \langle Y \rangle$ evident.

Dacă $v \in V \setminus Y$, considerăm mulţimea $Z = Y \cup \{v\}$.

Cum Y este liberă maximală şi $Y \subsetneq Z \Rightarrow Z$ nu e liberă $\Rightarrow \exists z \in Z$ a.î. $z \in \langle Z \setminus \{z\} \rangle$,

adică z este o comb. liniară de celelalte elemente din $Z = Y \cup \{v\}$, adică $z \in \langle (Y \cup \{v\}) \setminus \{z\} \rangle$.

Dacă $z = v$ atunci $z \in \langle (Y \cup \{v\}) \setminus \{v\} \rangle = \langle Y \rangle$ şi afirmaţia e demonstrată.

Dacă $z \neq v$ atunci $z \in Y$ şi, ca într-un exerciţiu de la seminarul anterior se deduce că v apare efectiv în această comb. liniară (altfel, $z \in \langle Y \setminus \{z\} \rangle$ ceea ce contrazice faptul că Y este liberă). Ca în ex. anterior menţionat, cum coef. lui v este nenul în această comb. liniară, îl putem exprima pe v ca o comb. liniară de elem. din Y, adică $v \in \langle Y \rangle$, ceea ce completează demonstraţia.

d) Din orice sistem de generatori al unui spaţiu vectorial V se poate extrage o bază a lui V.

e) O submulţime Y a unui spaţiu vectorial V este o bază a lui V dacă şi numai dacă Y este un sistem de generatori minimal al lui V.

$Y \subseteq V$ bază în ${}_K V \Leftrightarrow (Z \subseteq V,\ V = \langle Z \rangle,\ Z \subseteq Y \Rightarrow Z = Y)$

Dem: „$\Rightarrow$" Pp. prin reducere la absurd că $\exists\, Z \subsetneqq Y$ a.î. $V = \langle Z \rangle$. Atunci

$\exists\, y \in Y \setminus Z$ şi $y \in V = \langle Z \rangle \underset{Z \subseteq Y \setminus \{y\}}{\subseteq} \langle Y \setminus \{y\} \rangle \Rightarrow Y$ legată, contrad cu Y liberă.

„$\Leftarrow$" Vrem să arătăm că Y este liberă (adică pt. orice $n \in \mathbb{N}^*$ orice n vectori sunt l. indp.).

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\underset{\text{distincţi}}{y_1, \dots, y_n} \in Y$ arbitrare şi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Arătăm că $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Pp. că $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in K$. $\alpha_i^{-1} \cdot \Big|$

Din $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{i-1} y_{i-1} + \alpha_i y_i + \alpha_{i+1} y_{i+1} + \dots + \alpha_n y_n = 0 \Rightarrow \alpha_i y_i = -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_{i-1} y_{i-1} - \alpha_{i+1} y_{i+1} - \dots - \alpha_n y_n$

$\Rightarrow y_i = -\alpha_i^{-1}\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_i^{-1}\alpha_{i-1} y_{i-1} - \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1} y_{i+1} - \alpha_i^{-1}\alpha_n y_n \in \langle y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n \rangle \subseteq \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle$

Prin urmare, $\left.\begin{array}{l} y_i \in \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle \\ Y \setminus \{y_i\} \subseteq \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Y = (Y \setminus \{y_i\}) \cup \{y_i\} \subseteq \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \langle Y \rangle \subseteq \langle \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle \rangle = \langle Y \setminus \{y_i\} \rangle$.

Cum $Y \setminus \{y_i\} \subsetneqq Y$, se contrazice minimalitatea lui Y.

Prin urmare, pres. făcută nu e corectă, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ şi $y_1, \dots, y_n$ sunt l. indp.

Deci Y este liberă.

.

f) Dacă X_1 este o submulţime liberă a lui V şi $V = \langle Y \rangle$ atunci X_1 poate fi completată cu vectori din Y până la o bază a lui V.

Teorema 17. (Proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale)
1) Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi X o bază a sa, atunci pentru orice K-spaţiu vectorial V' şi orice funcţie $f : X \to V'$ există o singură transformare liniară $\overline{f} : V \to V'$ pentru care $\overline{f}|_X = f$ (cu alte cuvinte $f : X \to V'$ se poate prelungi în mod unic la o transformare liniară $\overline{f} : V \to V'$).
2) Transformarea liniară $\overline{f}$ este injectivă dacă şi numai dacă f este injectivă şi $f(X)$ este liberă.
3) Transformarea liniară $\overline{f}$ este surjectivă dacă şi numai dacă $V' = \langle f(X) \rangle$.

Demonstraţie.

Corolarul 18. a) Dacă X este o bază a spaţiului vectorial V şi $\varphi, \varphi' : V \to V'$ sunt transformări liniare, atunci

$$\varphi|_X = \varphi'|_X \Rightarrow \varphi = \varphi',$$

adică o transformare liniară este determinată de restricţia sa la o bază.
b) Dacă $\varphi : V \to V'$ este o transformare liniară şi X o bază a lui V, atunci φ este izomorfism dacă şi numai dacă $\varphi|_X$ este injectivă şi $\varphi(X)$ este o bază a lui V'.

În Corolarul 16 a) am arătat că orice spaţiu vectorial are o bază. **În cele ce urmează vom considera că spaţiile vectoriale cu care lucrăm sunt de tip finit.** Vom arăta că toate bazele unui spaţiu vectorial V de tip finit au acelaşi cardinal (adică acelaşi număr de elemente). Acest cardinal se numeşte **dimensiunea** lui V. Chiar dacă în acest material nu este inclus cazul spaţiilor vectoriale care au un sistem infinit de generatori, menţionăm că şi în cazul lor toate bazele au acelaşi cardinal, cardinal care este dimensiunea spaţiului. De altfel, cititorul atent va observa că unele demonstraţii ce vor urma se potrivesc şi pentru spaţii vectoriale care nu sunt finit generate.

Teorema 19. (Teorema schimbului (Steinitz))
Fie V un K-spaţiu vectorial. Dacă $x_1, \dots, x_m \in V$ sunt vectori liniar independenţi şi $V = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, atunci $m \leq n$ şi după o reindexare convenabilă avem

$$V = \langle x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n \rangle.$$

Demonstraţie.

Corolarul 20. Toate bazele unui spaţiu vectorial V de tip finit (finit generat) sunt finite şi au acelaşi număr de vectori.

Din Corolarul 20 rezultă că pentru orice K-spaţiu vectorial V de tip finit toate bazele lui V au acelaşi număr de elemente. Acest număr se numeşte **dimensiunea** lui V şi se notează cu $\dim V$ sau $\dim_K V$. Deci $\dim V$ este cardinalul unei baze a lui V.

Observaţiile 21. a) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită, atunci $\dim V = n$ dacă şi numai dacă există n vectori liniar independenţi şi orice $n+1$ vectori din V sunt liniar dependenţi.

Această afirmaţie rezultă din definiţia $\dim V$ şi din faptul că bazele lui V coincid cu submulţimile independente maximale ale lui V.
b) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci orice n vectori liniar independenţi din V formează o bază a lui V.
c) Dacă V este un spaţiu vectorial de tip finit şi A este un subspaţiu al lui V, atunci $\dim A \leq \dim V$. Mai mult, $A \neq V$ dacă şi numai dacă $\dim A < \dim V$.

Exemplele 22. a) Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\dim K^n = n$ pentru că $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ formează o bază a lui K^n.
b) Luând $n = 1$ în a) deducem că $\dim_K K = 1$. În particular, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Totuşi, cum

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ unic determinate } : \ z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i\,,$$

se deduce că $\{1, i\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{C}$, prin urmare, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

c) Dacă K este un corp comutativ, atunci $\dim P_n(K) = n+1$ pentru că $1, X, X^2, \ldots, X^n$ formează o bază a K-spaţiului $P_n(K) = \{f \in K[X] \mid \operatorname{grad} f \leq n\}$.
d) Dacă V_1 şi V_2 sunt K-spaţii vectoriale şi X, respectiv Y este o bază a lui V_1, respectiv V_2, atunci se verifică uşor că $\{(x,0) \mid x \in X\} \cup \{(0,y) \mid y \in Y\}$ este o bază a produsului direct $V_1 \times V_2$, de unde ţinând seama că $|X| = |\{(x,0) \mid x \in X\}|$, $|Y| = |\{(0,y) \mid y \in Y\}|$ şi $\{(x,0) \mid x \in X\} \cap \{(0,y) \mid y \in Y\} = \emptyset$ rezultă

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Teorema 23. Două K-spaţii vectoriale V şi V' sunt izomorfe dacă şi numai dacă $\dim V = \dim V'$.

Demonstraţie.

Corolarul 24. Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci V este izomorf cu K^n. Dacă $\{x_1, \ldots, x_n\}$ este o bază a lui V, atunci

$$f : K^n \to V,\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

este un izomorfism ce aplică baza canonică a lui K^n pe baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Teorema 25. Dacă V şi V' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V). \tag{4}$$

Demonstraţie.

Cu notaţiile din teoremă, $\dim \operatorname{Ker} f$ se numeşte **defectul** lui f, iar $\dim f(V)$ se numeşte **rangul** lui f.

Corolarul 26. a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi A, B subspaţii ale lui V. Atunci

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A+B). \tag{5}$$

b) Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, iar A şi B sunt subspaţii ale lui V, atunci

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B \Leftrightarrow A + B = A \oplus B.$$

c) **(Teorema alternativei)** Dacă V, V' sunt K-spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune finită (i.e. $\dim V = \dim V' \in \mathbb{N}$), iar $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:
i) f este injectivă;
ii) f este surjectivă;
iii) f este izomorfism.