Curs 7 - Algebră

Transformări elementare asupra unei matrice.

Aplicații

Fie K corp comutativ. $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

Transf elem:

- permutarea a 2 linii (col
- înm. unei linii (col) cu $\alpha \in K^*$
- — " — $\alpha \in K$ și adunată la alta

1. Calculul determinanților } se pot efectua atât transf de
2. Calculul rangului } linii cât și col
3. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (cu metoda lui Gauss)

Fie $n_0(i)$ de la începutul liniei:

A are o formă eșalon cu K linii $(0 \le k \le m)$ dacă

i) liniile $k+1, \dots m$ sunt formate numai din ~~zero~~ zerouri

ii) $0 \le n_0(1) < n_0(2) < \dots < n_0(k) \underset{\neq}{<} n$

Dacă $n_0(i) = i-1$ formă eșalon = formă trapezoidală

formă trapezoidală cu n linii = formă triunghiulară

Obs: 1) Orice matrice $A \in M_{mn}(K)$ poate fi adusă la o formă eșalon exclusiv prin transf elem de linii.

2) O matrice $A \in M_n(K)$ este inversabilă $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ A poate fi adusă la o formă triunghiulară exclusiv prin transf elem de linii:

dem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \dots \underset{\text{doar transf de linii}}{\sim} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = B$$

$\det A = \alpha \cdot \det B$, $\alpha \in K^*$

A inv $\iff \det A \neq 0 \iff \det B \neq 0 \iff a'_{11}, a'_{22}$ nenul

3*) $A \in M_n(K)$ inversabilă $\iff$ A poate fi adusă la I_n exclus

prin transf de linii

dem:
$$B \underset{l_1 - a'_{1n} \cdot (a'_{nn})^{-1} l_n}{\sim} \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a''_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & a''_{nn} \end{pmatrix} \underset{(a''_{nn})^{-1} l_n}{\sim} I_n$$

Considerăm sistemul:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_j \in K, \quad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$$

$\bar{A} \sim$ formă eșalon = formă trapezoidală

↑

transf elem de linii

\+ perm de col ≠ col term liberi

$$C=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: i) Situația de incompatibilitate în metoda lui Gauss apare când toate elem. dintr-o linie sunt 0 cu excepția ultimului.

ii) C este matricea extinsă a unui sistem echivalent cu (S) (pp că nu s-au făcut perm de col). Acesta este:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + a'_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n} = b'_1 \\ \\ \qquad a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \in K \\ \vdots \\ x_n \in K \end{cases}$$

4) O astfel de „rafinare" a metodei lui Gauss este metoda Gauss-Jordan în care continuăm să formăm 0 deasupra diagonalei principale.

$$C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transf de}\\ \text{linii}}}{\sim} \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & \dots & 0 & a''_{1r+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & \dots & 0 & a''_{2r+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & & a''_{rr} & \dots & & a''_{rn} & b''_{rn} \\ 0 & 0 & & \dots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(a''_{11})^{-1} L_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'''_{1r+1} & \dots & a'''_{1n} & b'''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'''_{2r+1} & \dots & a'''_{2n} & b'''_2 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'''_{rr+1} & \dots & a'''_{rn} & b'''_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atenție: La rez sistemelor de ec liniare cu met Gauss avem voie să efec orice transf elem de linii și doar perm de col diferite de ultima

4. Calculul inversei unei matrice.

Fie $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})$, $\det A \neq 0$

$$j = \overline{1,n} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \quad (1)$$

luăm pt $j=1$, $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ ~~este~~ col 1 a lui A^{-1}

$j=2$, $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$ este col 2 a lui A^{-1}

$\vdots$

(1) poate fi descrisă cu ajutorul met Gauss-Jordan:

$$\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right) \sim \text{transf elem de linii} \sim \left(I_n \;\middle|\; A^{-1} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \right)$$

ind col

Să procedăm astfel:

$$\underbrace{\left(A \;\middle|\; I_n \right)}_{\text{am pus la un loc matricele extinse ale celor } n \text{ sisteme discutate anterior}} \overset{*}{\sim} \left(I_n \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

col 1 a lui A^{-1} col 2 a lui A^{-1} col n a lui A^{-1}

Descrierea algoritmului: Pornim cu matricea de tip $(n, 2n)$ din stânga prin transf elem succesive. Aducem blocul din stânga la form I_n și atunci blocul din dreapta va fi A^{-1}.

LIPSEȘTE

Cap: SPAȚII VECTORIALE

Fie $(K,+,\cdot)$ corp comutativ

Def: O pereche formată dintr-un grup abelian $(V,+)$ și o funcție $\cdot : K\times V \to V$ (care asociază $(\alpha, x) \longmapsto \alpha\cdot x$) se numește spațiu vectorial peste K (K-spațiu vectorial) dacă
(liniar) (liniar)

liniar

1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ $\forall\ \alpha\in K$, $\forall\ x,y\in \beta$

liniar scalar vector

2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ $\forall\ \alpha,\beta\in K$

3) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ $\forall\ x,y\in V$

4) $1\cdot x=x$

→ el unitate din K

Terminologie și notații:

$\cdot : K\times V\to V$ s.n. operație externă

El lui K le numim scalari

El lui V le numim vectori

$+$ din $(K,+)$ s.n. adunarea vectorilor

s.n. înmulțirea vectorilor cu scalari

${}_K V$, V_K, V K-sp vect.

(? scalar)

Def: O pereche formată dintr-un inel $(R,+,\cdot)$ și o operație externă $\cdot : K\times R \to R$ s.n. K-algebră (algebră peste K) dacă:

i) $(R,+)$ este K-sp vectorial

ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad \forall \alpha\in K, \forall x,y\in R$

Obs: R inel com $\Rightarrow$ R K-algebră com.

R inel com cu unitate $\Rightarrow$ R K-algebră com cu unitate

(T) Fie V, K sp. vectorial

i) $\forall \alpha\in K$, $t_\alpha : V\to V$, $t_\alpha(x)=\alpha x$

endomorfism al $(V,+)$

Mai mult, dacă $\alpha\neq 0$ atunci t_α autom $(V,+)$

cu $(t_\alpha)^{-1} = t_{\alpha^{-1}}$

ii) $\forall x\in V$, $t'_x : K\to V$, $t'_x(\alpha)=\alpha x$

morfism de grupuri de la $(K,+)$ la $(V,+)$

Dem: i) Fie $x,y\in V$

$t_\alpha(x+y) = \alpha(x+y) \overset{1)}{=} \alpha x+\alpha y = t_\alpha(x)+t_\alpha(y)$

morfism

$t_\alpha\circ t_{\alpha^{-1}} = 1_x = t_{\alpha^{-1}}\circ t_\alpha$

Fie $x\in V$

$(t_\alpha\circ t_{\alpha^{-1}})(x) = t_\alpha(t_{\alpha^{-1}}(x)) = \alpha(\alpha^{-1}\cdot x) \overset{3)}{=}$

$= (\alpha\cdot\alpha^{-1})x \overset{4)}{=} 1_K\cdot x = x = 1_x(x)$

ii) Fie $\alpha, \beta \in K$

$$\underline{f'_x(\alpha+\beta)} = (\alpha+\beta)x \overset{2)}{=} \alpha x + \beta x = \underline{f'_x(\alpha) + f'_x(\beta)}$$

morfism

C (reguli de calcul într-un sp vectorial)

Fie V K-sp vect $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$x_1, \dots x_n \in V$

a) $\alpha \cdot x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$

b) $\alpha \cdot (-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$ și $(-\alpha)(-x) = \alpha x$

c) $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y$ și $(\alpha-\beta)x = \alpha x - \beta x$

d) $\alpha(x_1 + \dots + x_n) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n$

e) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x$

Dem: c) $\Rightarrow$ b)

d) dem prin inducție $n \in \mathbb{N}^*$