Curs 5

Analiză

Șiruri Cauchy (sau fundamentale)

Def: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$. (x_n) este un șir Cauchy dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\forall p \in \mathbb{N}$ $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

(T) $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$

(x_n) convergent $\Leftrightarrow$ (x_n) - Cauchy

ex: Dem că șirul (x_n) având termenul general:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

nu este șir Cauchy

Dem că:

$\forall \varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' \geq n$ a.î.
$\exists p \in \mathbb{N}$

$$|x_{n'+p} - x_{n'}| \geq \varepsilon$$

① Fie $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrar

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\dots} + \frac{1}{n+p} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \underbrace{\frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ ori}}$$

$$= \frac{p}{n+p}$$

$n=p: \quad \frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N}, \ \exists p=n$ a.î. $|x_{n+p}-x_n|\geq\frac{1}{2}$

$\exists n'=n$ a.î. $|x_{n'+p}-x_{n'}|\geq\frac{1}{2}$

Deci $\exists\ \varepsilon=\frac{1}{2}$ a.î. $\forall n\in\mathbb{N}, \ \exists n'=n\geq n$
$\exists\ p=n\in\mathbb{N}$ a.î.

$|x_{n'+p}-x_{n'}|\geq\frac{1}{2}\Rightarrow (x_n)$ nu este Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent

! OBS: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\infty$

Dem: (x_n) strict crescător

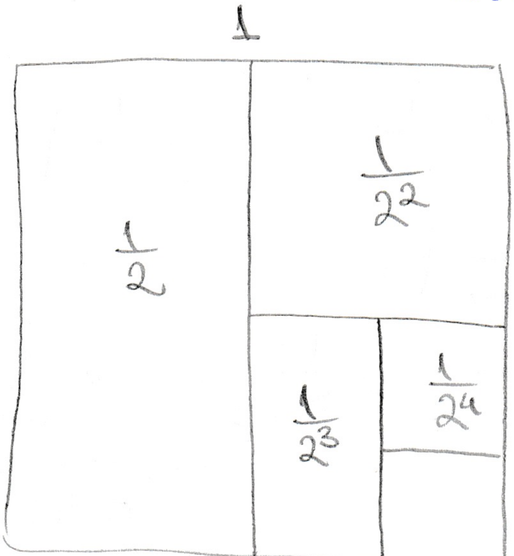
$\Downarrow$ W

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : x_n\in\mathbb{N}\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ $(\in(0,\infty])$ (1)

Din exemplul de mai sus $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n\notin\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[0,\infty]\setminus\mathbb{R}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

CAP. 3. SERII DE NUMERE REALE



$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\to 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)=1$

! $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\infty$

Def: Se numește serie de numere reale orice pereche ordonată de două șiruri $((x_n),(s_n))_{n\geq k}$ unde:

$$s_k = x_k$$
$$s_{k+1} = x_k + x_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$s_n = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n \quad \forall\, n\geq k$$

și se notează $\sum\limits_{n\geq k} x_n$ sau $\sum x_n$

Terminologie:

- (x_n) este șirul generator al seriei
- $\forall\, n\geq k$, x_n – termenul general de rang n
- (s_n) este șirul sumelor parțiale
- $\forall\, n\geq k$, s_n – suma parțială de rang n

Def: Fie $\sum x_n$ o serie de numere reale.
Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \,(\in \overline{\mathbb{R}})$, aceasta s.n. suma seriei și se notează $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n \left(= \lim\limits_{n\to\infty} s_n\right)$

! OBS: Nu toate seriile au sumă.

Def: Fie $\sum x_n$

a) Ea s.n. convergentă dacă $\exists \sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$

b) Ea s.n. divergentă în rest

! OBS:

1) Divergența este într-unul din cazurile:

$\exists \sum_{n=k}^{\infty} x_n \in \{\pm\infty\}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\right)$

$\nexists \sum_{n=k}^{\infty} x_n$ $\left(\nexists \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n\right)$

2) Prin natura seriei înțelegem convergență sau divergenț

ex: Studiați suma și natura seriei:

a) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$= \frac{\cancel{2}}{1\cdot \cancel{2}} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{\cancel{3}}{2\cdot \cancel{3}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3} + \dots + \frac{\cancel{n+1}}{n(\cancel{n+1})} - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= 1 - \frac{1}{n+1} =$

$= \frac{n}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria este convergentă

b) seria armonică $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă și are suma

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

c) Dem că seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă și nu are sumă

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n) = (-1)^n$ – termenul general de rang n
- $s_1 = (-1)^1 = -1$

$s_2 = (-1)^1 + (-1)^2 = -1+1 = 0$

$\vdots$

$$s_n = \begin{cases} 0 & , n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ -1 & , n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Subșirurile $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ și $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ au limite $\neq$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} s_n \Rightarrow \nexists \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, deci seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă.

Exemplu fundamental: seria geometrică

Fie $q \in \mathbb{R}^*$. Seria geometrică este:

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}$$

Studiem suma și natura ei:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = q^{n-1}$

$s_1 = x_1 = q^{1-1} = q^0 = 1$

$s_2 = x_1 + x_2 = 1 + q^{2-1} = 1+q$

$\vdots$

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ $\forall n \geq 1$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{q^n - 1}{q-1} & , q \neq 1 \\ n & , q = 1 \end{cases}$$

I $q=1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

II $q \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} \left(1-q^n\right) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right)$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n =$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot \begin{cases} \infty, & q>1 \\ 0, & 0<|q|<1 \\ \nexists, & q \le -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & 0<|q|<1 \\ \nexists, & q \le -1 \end{cases}$$

În concluzie, $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, & q \ge 1 \\ \frac{1}{1-q}, & 0<|q|<1 \end{cases}$

$\nexists$ în rest $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ seria geometrică $\sum_{n\ge 1} q^{n-1}$ este $\begin{cases} \text{convergentă} \Leftrightarrow 0<|q|<1 \\ \text{divergentă} \Leftrightarrow |q| \ge 1 \end{cases}$

iar suma sa este $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \infty, & q \ge 1 \\ \frac{1}{1-q}, & 0<|q|<1 \end{cases}$

! OBS:

1) Atunci când aplicăm teoria de mai sus pentru exerci[ții] concrete, ca să folosim direct formula sumei, ne asigurăm că însumarea începe de la $n=1$, iar puterea este $n-1$.

2) În contrast cu cazul limitelor de șiruri în care indicele primului termen al șirului nu influențează valoarea limitei (ne interesează doar comportamentul „ultimei infinități al șirului"), în cazul seriilor cu sumă finită, indicele primului termen al șirului generat influențează valoarea sumei, nu natura seriei.

(P) Fie $\sum x_n$ o serie a.î. $\exists \sum_{n=k}^{\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Fie $p \in \mathbb{N}$

Atunci:

$$\sum_{n=k+p}^{\infty} x_n = \sum_{n=k}^{\infty} x_n - (x_k + \ldots + x_{k+p-1})$$

Aplicație:

Determinați $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Aceasta este suma unei serii geometrice de rație $q = -\frac{1}{2}$. Deoarece $|q| \in (0,1)$ seria este convergentă, iar suma ei este finită.

Știm: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

iar $\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (x_1+x_2+x_3) =$

$= \frac{2}{3} - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] =$

$= \frac{2}{3} - \left(\overset{4)}{1} - \overset{2)}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} =$

$= -\frac{1}{12}$

! OBS: Fie $\sum x_n$ o serie a.î. $\exists \sum_{n=k}^{\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ și fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci $\exists \sum_{n=k}^{\infty}(\alpha x_n) = \alpha \sum_{n=k}^{\infty} x_n$

ex: Determinați $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$q = -\frac{1}{2}$, $|q| \in (0,1) \Rightarrow C$ și $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$

$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{12}$

! OBS: Fie $\sum a_n$ și $\sum b_n$ două serii care au sume, iar α și $\beta \in \mathbb{R}$ a.î.

$\alpha \sum_{n=k}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ nu e un caz de nedeterminare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sum_{n=k}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=k}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=k}^{\infty} b_n$

(T1) (legătura dintre natura seriei și limita șirului general)

$\sum x_n$ convergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Dem: $\sum x_n$ C $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (s_n) C $\Leftrightarrow$ (s_n) este Cauchy $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}|<\varepsilon$

$p=1$: $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq n_\varepsilon$ $|x_{n+1}|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_{n+1}-0|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

! OBS: În practică, este cu mult mai valoroasă negația logică: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum x_n$ D

Aplicație: Studiați natura seriei:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[7]{n^6+5n^3-3n^4+2}}{\sqrt[14]{2n^{12}-8}}$$

$\forall n\geq 2$, $x_n = \dfrac{\sqrt[7]{n^6+5n^3-3n^4+2}}{\sqrt[14]{2n^{12}-8}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{6}{7}}} \sqrt[7]{1+\dots}}{\cancel{n^{\frac{6}{7}}} \sqrt[14]{2+\dots}} = \frac{1}{\sqrt[14]{2}} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum x_n \text{ este } D$$

! OBS : $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow ?$

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, seria trebuie analizată prin alte mijloace.

$\sum \frac{1}{n}$ D cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\sum \frac{1}{n(n+1)}$ C cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Serii telescopice

Fie $\sum_{n\geq k} x_n$ a.î. $\exists (a_n) \subseteq \mathbb{R}$ pt care:

$$\forall n \geq n_k,\ x_n = a_n - a_{n+1}$$

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \boxed{\exists \sum_{n=k}^{\infty} x_n = a_k - \lim_{n\to\infty} a_n}$

Dem:

$s_k = x_k = a_k - a_{k+1}$

$s_{k+1} = x_k + x_{k+1} = a_k - \cancel{a_{k+1}} + \cancel{a_{k+1}} - a_{k+2} =$

$= a_k - a_{k+2}$

$s_n = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n = a_k - a_{n+1} \quad n > k$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_k - a_{n+1}) = a_k - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} =$

ex: $\sum\limits_{n\geq 4}\Big(\underset{\substack{\downarrow \\ a_n}}{\sqrt{n^2+1}} - \underset{\substack{\downarrow \\ a_{n+1}}}{\sqrt{n^2+2n+2}}\Big)$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\sum\limits_{n=4}^{\infty} x_n = a_4 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{17} - \infty = -\infty$ D