

Geometrie afină

Conf. Univ. Dr. Cornel Pintea

E-mail: cpintea math.ubbcluj.ro

Cuprins

Motivație	1
1 Structura afină a unui spațiu vectorial	3
1.1 Varietăți liniare	3
1.2 Spațiul director și dimensiunea unei varietăți liniare	4
1.3 Intersecția unei familii de varietăți liniare	9
1.4 Probleme	10
Apendici	
A Varietăți liniare în spații infinit dimensionale	19
A.1 Ecuații liniare ordinare cu coeficienți constanti	19
A.2 Relații de recurență liniare	19
A.3 Probleme	23
2 Învelitori și combinații affine. Dreptele unui spațiu vectorial	29
2.1 Învelitori și combinații affine	29
2.2 Dreptele unui spațiu afin	32
2.3 Probleme	35
3 Sirul ascendent dintre M și $\text{af}(M)$	41
3.1 Teorema afină a lui Carathéodory	41
3.2 Teorema dimensiunii. Aplicații	44
3.3 Probleme	46
4 Proprietăți laticeale. Multimi convexe	57
4.1 Proprietăți laticeale ale structurii afine.	57
4.2 Structura afină a spațiului vectorial K^n	57
4.3 Submulțimile convexe ale unui spațiu vectorial real	58
4.4 Probleme	61
5 Teoremele lui Radon, Helly, Minkowsky, Krein-Milman și Motzkin	65
5.1 Teorema lui Radon	65
5.2 Teorema lui Helly	65
5.3 Teoremele lui Minkowski, Krein-Milman și Motzkin	66
5.4 Probleme	66

Motivație

1. Geometria afină este o generalizare a geometriei analitice 2 și 3 dimensionale.

Ecuația dreptei în plan $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$	Ecuațiile dreptei în spațiu $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$	Ecuațiile dreptei în spațiul n -dimensional $\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{p_n}$
Ecuația generală a dreptei în plan $ax + by + c = 0$	Ecuația generală a planului în spațiu $Ax + By + Cz + D = 0$	Ecuația generală hiperplanului în spațiul n -dimensional $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$
Formula distanței de la punctul $P(x_P, y_P)$ la dreapta $d : ax + by + c = 0$ $\frac{ ax_P + by_P + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	Formula distanței de la punctul $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ la planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ $\frac{ Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	Formula distanței de la punctul $R(x_1^R, \dots, x_n^R)$ la hiperplanul $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ $\frac{ a_1x_1^R + \dots + a_nx_n^R + b }{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$

2. Geometria afină este o puncte de legatură între algebra liniară și geometria clasică.

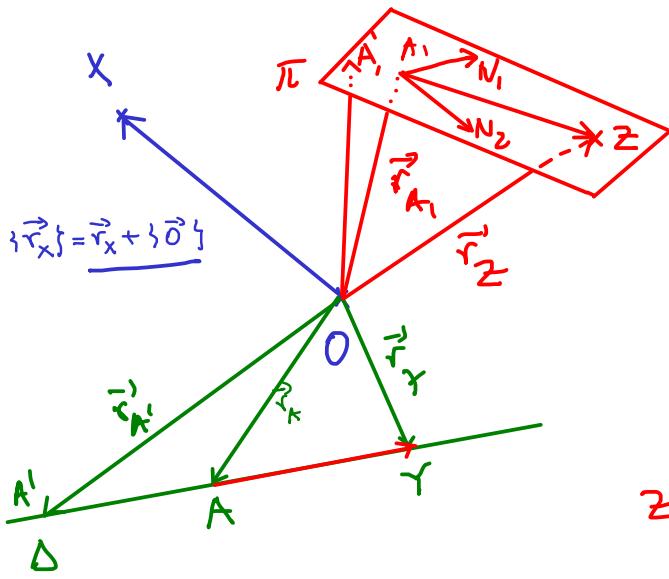
Soluția ecuației liniare $ax + by + c = 0$ este o dreaptă în plan	Soluția sistemului liniar $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ este o dreaptă în spațiu	Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$ este un $(n - k)$ -plan dacă $\text{rang}(a_{ij}) = k$
--	---	--

3. Variațile liniare stau la baza teoriei recurențelor liniare și a ecuațiilor diferențiale liniare.
A se vedea apendicii A.1 și A.2.

Capitolul 1

Structura afină a unui spațiu vectorial

1.1 Varietăți liniare



Fie V un spațiu vectorial cu scalari într-un corp K .

Definiția 1.1.1. O varietate liniară în V este o submulțime a lui V de forma

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\},$$

unde $a \in V$ și U este un subspațiu vectorial al lui V , sau mulțimea vidă. Mulțimea $\mathcal{A}(V)$ a varietăților liniare ale lui V ordonată de incluziune se numește *structura afină* a lui V .

Propoziția 1.1.1. Dacă $A = a + U \in \mathcal{A}(V)$ și $b \in A$, atunci $A = b + U$.

Demonstrație. $b \in A = a + U \Rightarrow \exists u \in U \text{ a.s.t. } b = a + u$

$$\underline{b + U} = (a + u) + U = a + (u + U) = a + U = \underline{A}$$

□

Corolarul 1.1.2. O varietate liniară A este subspațiu vectorial dacă și numai dacă $0 \in A$.

$\vec{\Delta} = \{\vec{AM} \mid M \in \Delta\} \subseteq V$ - s.r. al vectorilor liberi

$$\dim \vec{\Delta} = 1$$

$\vec{\Delta}$ - nu depinde de $A \in \Delta$

$\vec{\Delta}$ - subspațiu director al lui Δ .

$$Y \in \Delta \Leftrightarrow \vec{AY} \in \vec{\Delta} \Leftrightarrow \vec{OY} - \vec{OA} \in \vec{\Delta}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_Y - \vec{r}_A \in \vec{\Delta} \Leftrightarrow \vec{r}_Y \in \vec{r}_A + \vec{\Delta}$$

$$\vec{\pi} := \{A_i N \mid N \in \vec{\Delta}\} \subseteq V, \dim \vec{\pi} = 2$$

$\vec{\pi}$ - nu depinde de $A_i \in \vec{\Delta}$.

$\vec{\pi}$ - subspațiu director al lui π .

$$Z \in \pi \Leftrightarrow A_i Z \in \vec{\pi} \Leftrightarrow \vec{OZ} - \vec{OA_i} \in \vec{\pi} \Leftrightarrow \vec{r}_Z - \vec{r}_{A_i} \in \vec{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_Z \in \vec{r}_{A_i} + \vec{\pi} (= \vec{r}_{A_i} + \vec{\pi})$$

Demonstrație. $A \subseteq V \Rightarrow o_v \in A$
 $o_v \in A \in \mathcal{A}(V) \Rightarrow A = o + U = U \subseteq V.$

□

1.2 Spațiul director și dimensiunea unei varietăți liniare

Propoziția 1.2.1. Dacă $a + U = a' + U' \in \mathcal{A}(V)$, atunci $U = U'$.

Demonstrație. $a' \in a' + U' = a + U$; $a' \in a + U \Rightarrow a + U = a' + U$
 $a + U = a' + U' \Leftrightarrow a' + U = a' + U' \Leftrightarrow U = U'.$

□

Așadar, în reprezentarea unei varietăți liniare nevide A sub forma $a + U$, subspațiul vectorial U este unic determinat de A . Acesta va fi notat cu $D(A)$ și se va numi (sub)spațiu (vectorial) director al varietății liniare A .

Definiția 1.2.1. Spunem că varietățile liniare $A, B \in \mathcal{A}(V)$ sunt paralele, și scriem $A \parallel B$, dacă $D(A) \subseteq D(B)$ sau $D(B) \subseteq D(A)$.

Problema 1.2.1. ([4, Problema 2, p. 91]) În spațiul \mathbb{R}^4 se dau varietățile liniare

$$\begin{aligned} a &= (2, 1, 2, 1), D = (1, 3, 0, 0) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle \\ \alpha &= (1, 0, 1, 0) + \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle \\ H &= \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Care dintre următoarele relații au loc?

$$\triangleright a \in D, \triangleright a \in \alpha, \triangleright a \in H, \triangleright D \parallel \alpha, \triangleright D \parallel H, \triangleright \alpha \parallel H, \triangleright D \subseteq \alpha, \triangleright \alpha \subseteq H.$$

SOLUȚIE. $a \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ a.t. } a = (1, 3, 0, 0) + t(1, 1, 1, 1)$

$$(2, 1, 2, 1) = (1, 3, 0, 0) + (t, t, t, t)$$

$$\begin{cases} 2 = 1+t \\ 1 = 3+t \\ 2 = t \\ 1 = t \end{cases} \text{ -imposibil. Așadar } a \notin D.$$

$$a \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R} \text{ a.t. } a = (1, 0, 1, 0) + s(2, 1, 3, -1) + t(1, 0, 2, -2)$$

$$(2, 1, 2, 1) = (1, 0, 1, 0) + (2s+t, s, 3s+2t, -s-2t)$$

$$(2, 1, 2, 1) = (2s+t+1, s, 3s+2t+1, -s-2t)$$

$$\begin{cases} 2s+t = 1 \\ s = 1 \\ 3s+2t = 1 \\ s+2t = -1 \end{cases} \quad s = 1, t = -1. \text{ Așadar } a \in \alpha.$$

Problema 1.2.1. ([4, Problema 2, p. 91]) În spațiul \mathbb{R}^4 se dă varietățile liniare

$$\begin{aligned} a &= (2, 1, 2, 1), D = (1, 3, 0, 0) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle \\ \alpha &= (1, 0, 1, 0) + \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle \\ H &= \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Care dintre următoarele relații au loc?

$$\bullet a \in D, \bullet a \in \alpha, \bullet a \in H, \bullet D \parallel \alpha, \bullet D \parallel H, \bullet D \subseteq \alpha, \bullet \alpha \subseteq H.$$

$$\begin{aligned} \alpha \parallel H \Leftrightarrow D(\alpha) &\subseteq D(H) \text{ sau } D(H) \subseteq D(\alpha) \\ \text{I} &\quad \text{imposibil deoarece } \dim D(H) = 3 > 2 = \dim D(\alpha) \\ \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle &\subseteq \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle \\ \text{II} &\quad \uparrow \\ (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) &\in \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle \\ \text{FALS} &\quad \text{Așadar } \alpha \nparallel H. \end{aligned}$$

Lemă $A, B \in \mathcal{D}(V)$, $A = a + D(A)$, $B = b + D(B)$

$$\underbrace{a + D(A)}_A \subseteq \underbrace{b + D(B)}_B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in b + D(B) = B \\ D(A) \subseteq D(B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow a + D(A) \subseteq b + D(B) \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow a \in b + D(B) = B. \text{ Așadar } B = a + D(B) \\ a \in a + D(A) \end{array} \right\} \quad A \subseteq B \Leftrightarrow a + D(A) \subseteq a + D(B) \Leftrightarrow D(A) \subseteq D(B).$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad a \in B &= b + D(B) \rightarrow B = a + D(B) \\ D(A) \subseteq D(B) &\Rightarrow a + D(A) \subseteq a + D(B) \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

$$D = (1, 3, 0, 0) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle \stackrel{?}{\subseteq} \alpha = (1, 0, 1, 0) + \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle$$

$$\begin{aligned} D \subseteq \alpha &\Leftrightarrow (1, 3, 0, 0) \in \alpha \text{ și } D(0) \subseteq D(\alpha) \Leftrightarrow (1, 3, 0, 0) \in \alpha \text{ și } \langle (1, 1, 1, 1) \rangle \subseteq \\ &\subseteq \underbrace{\langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle}_{D(\alpha)} \Leftrightarrow (1, 3, 0, 0) - (1, 0, 1, 0) \in D(\alpha) \text{ și } (1, 1, 1, 1) \in D(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (0, 3, -1, 0) &\in D(\alpha) \text{ și } (1, 1, 1, 1) \in D(\alpha) \Leftrightarrow \exists r, s, t, u \in \mathbb{R} \text{ a.s.} \\ (0, 3, -1, 0) &= r(2, 1, 3, -1) + s(1, 0, 2, -2) \text{ și } (1, 1, 1, 1) = t(2, 1, 3, -1) + u(1, 0, 2, -2) \\ \Leftrightarrow \exists r, s, t, u \in \mathbb{R} \text{ a.s.} \quad \begin{cases} 2r + s = 0 \\ r = 3 \\ 3r + 2s = -1 \\ -r - 2s = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + u = 1 \\ t = 1 \\ 3t + 2u = 1 \\ -t - 2u = 1 \end{cases} \text{ Așadar } D \not\subseteq \alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = (1, 0, 1, 0) + \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle$$

$$H = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle.$$

$\alpha \subseteq H \Leftrightarrow \forall (1, 0, 1, 0) \in H \exists i \langle (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle \subseteq H \Leftrightarrow \langle (1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, -1), (1, 0, 2, -2) \rangle \subseteq H$

Ansatz $\alpha \not\subseteq H$.

FALS.

Definiția 1.2.2. Definim *dimensiunea unei varietăți liniare* A astfel:

$$\dim(A) := \begin{cases} \dim(D(A)) & \text{dacă } A \neq \emptyset \\ -1 & \text{dacă } A = \emptyset. \end{cases}$$

Definiția 1.2.3. ▶ Dacă $\dim(A) = 1, 2$ sau p , atunci A se numește *dreaptă, plan* sau *p-plan*.

- ▶ Dacă $\dim(A) = 0$, atunci A este formată dintr-un singur element numit *punct*.
- ▶ Dacă $0 \in A$, atunci A se numește *dreaptă vectorială, plan vectorial* sau *p-plan vectorial*.
- ▶ Dacă $D(A)$ este un hiperplan vectorial, atunci $A = a + D(A)$ se numește *hiperplan*.
- ▶ Dacă V este un spațiu vectorial n -dimensional, atunci orice hiperplan al lui V are dimensiunea $n - 1$.

Propoziția 1.2.2. Fie V, W două spații vectoriale peste corpul K și $f : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Dacă B este o varietate liniară a lui W , adică $B \in \mathcal{A}(W)$, atunci $f^{-1}(B) := \{a \in V | f(a) \in B\}$ este o varietate liniară a lui V , adică $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}(V)$.

Demonstrație. $B \in \mathcal{A}(W)$

$$\textcircled{I} \quad f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{A}(V)$$

$$\textcircled{II} \quad f^{-1}(B) \neq \emptyset ; \quad a \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(a) \in B \Rightarrow B = f(a) + D(B)$$

$$a' \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(a') \in B = f(a) + D(B) \Leftrightarrow f(a') - f(a) \in D(B)$$

$$\Leftrightarrow f(a' - a) \in D(B) \Leftrightarrow a' - a \in f^{-1}(D(B))$$

$$\Leftrightarrow a' \in a + f^{-1}(D(B))$$

$$\text{Așadar } f^{-1}(B) = a + f^{-1}(D(B)) \in \mathcal{A}(V) \text{ deoarece } f^{-1}(D(B)) \subseteq V \quad \square$$

Corolarul 1.2.3. Fie V și W două spații vectoriale peste corpul K și $f : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Dacă $B \in \mathcal{A}(W)$ este astfel încât $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ și $a \in f^{-1}(B)$, atunci $f^{-1}(B) = a + f^{-1}(D(B))$, fapt care arată că $D(f^{-1}(B)) = f^{-1}(D(B))$. În particular, dacă pentru un element $b \in W$ avem $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ și $a \in f^{-1}(b)$, atunci $D(f^{-1}(b)) = f^{-1}(0_W) = \ker(f)$, adică $f^{-1}(b) = a + \ker(f)$. Așadar soluția generală a ecuației neomogene $f(x) = b$ este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene $f(x) = b$ cu soluția generală a ecuației omogene $f(x) = 0_W$.

Problema 1.2.2. (A se vedea și [4, Problema 1, p. 91]) Care dintre următoarele submulțimi sunt varietăți liniare ale spațiilor lor ambiente?

1. $A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0\}$
2. $B := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, x_3 - 2x_1) \in A\}$
3. $C := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0\}$
4. $D := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^4 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$

SOLUȚIE.

Sol. 1

$$1. A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0\} = f^{-1}(2),$$

unde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3 = [2 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$f(p) = u \cdot p^T, \text{ unde } u = [2 \ -1 \ 1], p = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

$$f\text{-liniară} \Rightarrow f^{-1}(2) = A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \quad (u, zu, 0) + (0, v, v) + (0, -z, 0)$$

Sol. 2

$$1. A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0\} = \{(u, zu + v - 2, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{u(1, 2, 0) + v(0, 1, 1) + (0, -2, 0) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

$$= (0, -2, 0) + \{u(1, 2, 0) + v(0, 1, 1) \mid u, v \in \mathbb{R}\} = (0, -2, 0) + \langle (1, 2, 0), (0, 1, 1) \rangle$$

$$2. B := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, x_3 - 2x_1) \in A\} = g^{-1}(A), \text{ unde}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$g(X) = P X^T$. Astăzi g -liniară

$$B = g^{-1}(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow B = g^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \\ g\text{-liniară} \\ A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \end{array} \right.$$

$$2. B := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, x_3 - 2x_1) \in A\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x_1 + x_2) - (2x_2 + x_3) + x_3 - 2x_1 - 2 = 0\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 2x_2 - 2x_2 - x_3 + x_3 - 2x_1 - 2 = 0\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 = 0\} = \emptyset \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$$

$$3. C := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (-x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$= \ker q, \text{ unde } q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q(X) &= U X^T, \quad q\text{-liniară} \quad C = \{(u+v, u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} = \{(u, u, 0), (v, 0, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} \\ C &= \ker q \leq \mathbb{R}^3 \text{ și deci } C \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \quad = \{u(1, 1, 0) + v(1, 0, 1) \mid u, v \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$$4. D := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^4 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\} \notin \mathcal{A}(\mathbb{R}^4)$$

$$\begin{aligned} \text{Intr-aderăr, docă } D &\in \mathcal{A}(\mathbb{R}^4) \quad \Rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^4 \\ 0_{\mathbb{R}^4} &\in \mathbb{R}^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 2(1, 0, 0, -1) = (2, 0, 0, -2) \in D \\ (1, 0, 0, -1) \in D \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemplul 1.2.1. Exemplele de aplicații liniare pe care le avem în vedere în aceste lecții sunt:

1. $F : K^n \rightarrow K^m$, $F(x) = Ax^T$, unde $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, unde K este un corp dat, iar vectorul $y = (y_1, \dots, y_p) \in K^p$ este identificat cu matricea linie $(y_1 \cdots y_p) \in K^{1 \times p}$. Astfel spațiul K^p se identifică algebric (și topologic de altfel) cu spațiul matricelor cu o linie și p coloane. Corespondența $K^p \rightarrow K^{p \times 1}$, $y \mapsto y^T$ identifică K^p cu $K^{p \times 1}$ algebric (și topologic de altfel). Liniaritatea lui F se demonstrează ușor folosind proprietățile operațiilor cu matrici, iar $F^{-1}(b)$, unde $b = (b_1, \dots, b_m) \in K^m$, este mulțimea soluțiilor sistemului liniar

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

Conform corolarului 1.2.3, mulțimea $F^{-1}(b)$ a soluțiilor sistemului liniar neomogen (1.2.1) este suma dintre o soluție particulară a sa și soluția generală $\ker F$ a sistemului liniar omogen

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{array} \right.$$

Reprezentarea mulțimii soluțiilor sistemului (1.2.1) în forma $a + \ker F$ se face găsind o soluție particulară a a sistemului liniar (1.2.1).

2. $L : C^\infty(I, \mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{F})$, $L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n$, unde \mathbb{F} este corpul \mathbb{R} sau corpul \mathbb{C} , iar $a_1, \dots, a_n \in C^\infty(I, \mathbb{F})$. Amintim că

$$C(I, \mathbb{F}) \supset C^1(I, \mathbb{F}) \supset C^2(I, \mathbb{F}) \supset \cdots \supset C^n(I, \mathbb{F}) \supset \cdots \supset C^\infty(I, \mathbb{F}), \quad (1.2.2)$$

unde

$$\begin{aligned} C(I, \mathbb{F}) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ este continuă}\} \\ C^k(I, \mathbb{F}) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ este de } k \text{ ori derivabilă și } f^{(k)} \text{ este continuă}\} \\ C^\infty(I, \mathbb{F}) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ este indefinit derivabilă}\}. \end{aligned}$$

Mulțimea $C(I, \mathbb{F})$ este spațiu vectorial peste \mathbb{F} față de operațiile

$$\begin{aligned} C(I, \mathbb{F}) \times C(I, \mathbb{F}) &\longrightarrow C(I, \mathbb{F}), (f, g) \mapsto f + g \\ \mathbb{F} \times C(I, \mathbb{F}) &\longrightarrow C(I, \mathbb{F}), (c, f) \mapsto cf, \end{aligned}$$

unde $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ și $(cf)(x) := cf(x)$, pentru orice $x \in I$. Mai mult, $C^k(I, \mathbb{F})$ este subspațiu vectorial al lui $C(I, \mathbb{F})$ și deci sirul descendant (1.2.2) este unul de subspații vectoriale. Liniaritatea lui L se demonstrează ușor folosind proprietățile de liniaritate a operatorilor de derivare, iar $L^{-1}(g)$ este mulțimea soluțiilor ecuației liniare neomogene $L(y) = g$. Conform corolarului 1.2.3, mulțimea $L^{-1}(g)$ a soluțiilor ecuației liniare neomogene $L(y) = g$ este suma dintre o soluție particulară a sa și soluția generală $\ker L$ a ecuației liniare omogene $L(y) = 0$. Reprezentarea mulțimii soluțiilor ecuației liniare neomogene $L(y) = g$ în forma $f + \ker L$ se face găsind o soluție particulară f a ecuației liniare neomogenă $L(y) = g$.

3. Aplicația liniară $R : K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}$, unde K este un corp dat, definită prin

$$R(a_n)_{n \geq 0} = (c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n)_{n \geq 0},$$

unde $c_0, \dots, c_r \in K^{\mathbb{N}}$ sunt r siruri date, va fi tratată în detaliu în Appendixul (A.2).

Observația 1.2.1. Transformarea liniară $f : V \rightarrow W$ definește operatorul

$$\mathcal{A}(W) \rightarrow \mathcal{A}(V), B \mapsto f^{-1}(B)$$

notat cu f^{-1} . Amintim că acest operator este monoton, adică

$$B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

1.3 Intersecția unei familii de varietăți liniare

Propoziția 1.3.1. Dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o familie de varietăți liniare ale spațiului vectorial V , atunci $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}(V)$.

Demonstrație. (I) $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset \in \mathcal{A}(V)$

(II) $\emptyset \neq \bigcap_{i \in I} A_i \ni a$. Vom arăta că $\bigcap_{i \in I} A_i = a + \bigcap_{i \in I} D(A_i)$

$a \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow a \in A_i, \forall i \in I \Leftrightarrow A_i = a + D(A_i), \forall i \in I$.

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in A_i = a + D(A_i), \forall i \in I \Leftrightarrow x - a \in D(A_i), \forall i \in I \Leftrightarrow x - a \in \bigcap_{i \in I} D(A_i)$

$\Leftrightarrow x \in a + \bigcap_{i \in I} D(A_i)$.

□

Corolarul 1.3.2. Dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o familie de varietăți liniare ale spațiului vectorial V astfel încât $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, atunci $D\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} D(A_i)$. În acest caz $\dim\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \dim\left(\bigcap_{i \in I} D(A_i)\right)$.

Propoziția 1.3.3. Dacă a și b sunt puncte distincte în V , atunci există o singură dreaptă, notată cu ab , care conține pe a și b .

Demonstrație. Presupunem că $L \in \mathcal{A}(V)$ este o dreaptă cu proprietatea că $a, b \in L$, adică $b \in L = a + D(L) \Rightarrow b - a \in D(L)$

$$\Leftrightarrow \langle b - a \rangle \subseteq D(L) \quad \begin{cases} \Rightarrow D(L) = \langle b - a \rangle \\ \dim \langle b - a \rangle = \dim D(L) = 1 \end{cases}$$

Așadar $L = a + \langle b - a \rangle$ - unică dreaptă care conține a și b și se notează cu ab , adică $ab = a + \langle b - a \rangle = b + \langle a - b \rangle$.

□

Problema 1.3.1. În \mathbb{R}^4 se dau planul $\alpha = (2, 4, 1, 2) + \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$ și dreapta $D = (2, 3, -1, 1) + \langle (1, 1, -1, 1) \rangle$. Să se determine $D \cap \alpha$.

SOLUȚIE. Intersecția $D \cap \alpha$ este dată de mulțimea soluțiilor ecuației

$$(2, 3, -1, 1) + r(1, 1, -1, 1) = (2, 4, 1, 2) + s(1, 1, 1, 1) + t(0, 1, 0, 1) \quad (1.3.1)$$

cu necunoscutele r, s, t . Ecuația (1.3.1) este echivalentă cu sistemul liniar

$$\begin{aligned} 2 + r &= 2 + s \\ 3 + r &= 4 + s + t \\ -1 - r &= 1 + s \\ 1 + r &= 2 + s + t \end{aligned}$$

care are soluția unică $r = s = t = -1$. Prin urmare $D \cap \alpha = \{(1, 2, 0, 0)\}$.

Problema 1.3.2. Se consideră un corp finit K cu $\text{card}(K) = q$.

1. Determinați numărul punctelor unei drepte a lui K^n .
2. Determinați numărul punctelor unui plan a lui K^n .
3. Determinați numărul punctelor unei varietăți p -dimensionale ale lui K^n .
4. Determinați numărul varietăților zero dimensionale (punctelor) ale lui K^n .
5. Determinați numărul dreptelor lui K^n care trec printr-un punct fixat.

Soluție. Vom arăta că o varietate p -dimensională a lui K^n are q^p elemente. Considerăm în acest scop o varietate p -dimensională $A = a + \langle d_1, \dots, d_p \rangle$, where d_1, \dots, d_p sunt LI. Se poate ușor arăta că aplicația

$$F : K^p \rightarrow A, F(x_1, \dots, x_p) = a + x_1 d_1 + \dots + x_p d_p$$

este bijectivă. Prin urmare numărul punctelor unei drepte a lui K^n este q , numărul punctelor unui plan a lui K^n este q^2 , iar numărul punctelor unui p -plan a lui K^n este q^p . În sfârșit, numărul punctelor lui K^n este evident q^n și astfel am răspuns întrebărilor (1), (2), (3) și (4).

(5) Numărul dreptelor lui K^n care trec printr-un punct fixat este egal cu numărul subspațiilor unu dimensionale ale lui K^n . Pentru a determina numărul subspațiilor unu dimensionale ale lui K^n observăm că acestea sunt puncte (adică subspațiile unu dimensionale din care a fost exclusă originea lui K^n) sunt clasele de $[x]$ echivalență ale lui $K^n \setminus \{0\}$ față de următorare relație de echivalență

$$x \sim y \text{ dacă există } \lambda \in K \text{ astfel încât } y = \lambda x.$$

Dacă notăm cu r cardinalul mulțimii subspațiilor unu dimensionale ale lui K^n și cu x_1, \dots, x_r un sistem de reprezentanți ai partitiei $K^n \setminus \{0\} / \sim$ observăm că $K^n \setminus \{0\} = [x_1] \cup \dots \cup [x_r]$ precum și că

$[x_i] = q - 1$ pentru orice $i = 1, \dots, r$. Așadar $q^n - 1 = r(q - 1)$, fapt care arată că $r = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$q^n - 1 = \text{card}(K^n \setminus \{0\}) = \text{card}(K^n \setminus \{0\} / \sim) \cdot \underbrace{\text{card} \{x_i\}}_{\text{nu depinde de } i} = (q - 1) \text{card}[(K^n \setminus \{0\}) / \sim]$$

1.4 Probleme

1. Arătați că dreapta $\Delta := (1, 2, -1, 0) + \langle (1, m, n, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ și hiperplanul $H : x + py + qz + w = 1$ sunt concurente și determinați intersecția $\Delta \cap H$, unde $mnpq$ este numărul dumneavoastră matricol.

SOLUȚIE. $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + mt \\ z = -1 + nt \\ w = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &x + py + qz + w = 1 \\ &1 + t + p(2 + mt) + q(-1 + nt) + t = 1 \\ &1 + t + 2p - q + t + mp t + nq t = 1 \end{aligned}$$

2. Fie \overline{mnpq} numărul dumneavoastră maticol. Care dintre următoarele submulțimi sunt varietăți liniare ale spațiilor lor ambiente?

- (a) $A := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | (m+1)x + (n+2)y + (p+3)z + (q+4)w = m+n+p+q+10\}$.
- (b) $B := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | (x+y, y+z, z+w, w+x) \in A\}$.
- (c) $C := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | mx^2 + n^2y + pz + mw = 0\}$.

SOLUȚIE. (c) $f = f^{-1}(m+n+p+q+10)$, unde

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z, w) = [m+1 \ n+2 \ p+3 \ q+4] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ - liniară}$$

$$A = f^{-1}(m+n+p+q+10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow A \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4) \\ f \text{-liniară} \end{array} \right.$$

$$(b) B = g^{-1}(A), \text{ unde } g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, g \text{-liniară}$$

$$B = g^{-1}(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow B \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4) \\ g \text{-liniară} \end{array} \right.$$

$$A \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4)$$

$$(c) C \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4) \text{ dacă } m=0$$

$C = \text{ker } h$, unde $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x, y, z, w) = [0 \ n^2 \ p \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$h \text{-liniară} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^4 \text{ și deoarece} \\ C = \text{ker } h \end{array} \right.$

$C \subseteq \mathbb{R}^4 \text{ și deoarece } C \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4)$

$$\bullet \quad m \neq 0 \quad C := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | mx^2 + n^2y + pz + mw = 0\}$$

$$\text{Dacă } C \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^4 \quad (1, 0, 0, -1) \in C \\ 0_{\mathbb{R}^4} \in C \end{array} \right.$$

$$C \not\ni 2(1, 0, 0, -1) = (2, 0, 0, -2)$$

$$\underline{m \cdot 2^2 + m(-2) = 4m - 2m = 2m \neq 0}$$

Asadar $C \not\subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^4)$.

3. Fie \overline{mnpq} numărul dumneavoastră maticol. Sunt paralele următoarele două varietăți liniare?

$$D = (-m, -n, -p, -q) + \langle ((m+n)^2, (n+p)^2, (p+q)^2, (q+m)^2) \rangle$$

$$\pi = (m, n, p, q) + \underbrace{\langle (m^2 + n^2, n^2 + p^2, p^2 + q^2, q^2 + m^2), (mn, np, pq, qm) \rangle}_{\mathcal{U} \quad \mathcal{N}}$$

Justificați răspunsul dat.

SOLUȚIE. $\left((m+n)^2, (n+p)^2, (p+q)^2, (q+m)^2 \right) = u + zv \in D(\pi) \Rightarrow$

$$D(D) \prec \left((m+n)^2, (n+p)^2, (p+q)^2, (q+m)^2 \right) \subseteq \langle u, v \rangle = D(\pi)$$

$$D(D) \subseteq D(\pi) \Rightarrow D \parallel \pi.$$

4. ([4, Problema 11, p. 94]) În spațiul vectorial V ($\dim V > 4$) se dau trei puncte distincte a, b, c și un plan $\alpha = a + \langle d_1, d_2 \rangle$. Să se determine o varietate liniară 4-dimensională $A \in \mathcal{A}(V)$ care conține punctele a, b și c și este paralel cu α .

SOLUȚIE. $A = \alpha + D(A) \ni b, c$, $A \parallel \alpha \Leftrightarrow D(\alpha) \subseteq D(A)$, $\dim D(A) = 4$

$$b, c \in A = a + D(A) \Rightarrow b - a, c - a \in D(A)$$

$$b - a, c - a, d_1, d_2 \in D(A)$$

$$\text{Dacă } b - a, c - a, d_1, d_2 - L.D. \text{ atunci } A = a + \langle d_1, d_2, b - a, c - a \rangle$$

Dacă $b - a, c - a, d_1, d_2 - L.D.$ - TEMĂ

5. ([4, Problema 13, p. 95]) Considerăm un spațiu vectorial V , o varietate liniară r -dimensională $A \in \mathcal{A}(V)$ și un punct $b \in V$. Să se arate că există o singură varietate liniară r -dimensională $B \in \mathcal{A}(V)$ astfel încât $b \in B$ și $B \parallel A$.

SOLUȚIE. $B = b + D(A)$ - existență

$$B \ni b, B \parallel A, \dim B = r$$

$$B = b + D(B) \left\{ \begin{array}{l} \Downarrow \\ D(B) \subseteq D(A) \text{ sau } D(A) \subseteq D(B) \end{array} \right\} \Rightarrow D(B) = D(A)$$

$$\dim D(A) = \dim D(B) = r$$

$B = b + D(B) = b + D(A)$ - unicitatea.

6. Să se arate că un hiperplan $H = a + \langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$ a lui \mathbb{R}^n este caracterizat de ecuația

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n - a_n \\ d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-1}^1 & d_{n-1}^2 & \cdots & d_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0,$$

unde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $d_i = (d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^n)$ pentru $1 \leq i \leq n-1$.

SOLUȚIE. $X = (x_1, \dots, x_n) \in t = (a_1, \dots, a_n) + \underbrace{\langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle}_{L \cdot \Sigma} \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\text{a. i. } (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + t_1(d_1^1, d_1^2, \dots, d_1^n) + \dots + t_{n-1}(d_{n-1}^1, d_{n-1}^2, \dots, d_{n-1}^n)$$

$$\Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ a. i. } (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} t_i(d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^n)$$

$$\Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ a. i. } (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^1, \sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^n \right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^1 = x_1 - a_1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^2 = x_2 - a_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} t_i d_i^n = x_n - a_n \end{cases} \xrightarrow{\text{Kronecker-Cappelli}}$$

$$\text{rang } \frac{n}{n-1} \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_{n-1}^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_{n-1}^n \end{pmatrix} = \text{rang } \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_{n-1}^1 & x_1 - a_1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_{n-1}^2 & x_2 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_{n-1}^n & x_n - a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_{n-1}^1 & x_1 - a_1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_{n-1}^2 & x_2 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_{n-1}^n & x_n - a_n \end{vmatrix} = 0$$

7. Să se arate că două varietăți liniare r -dimensionale A și B ale unui spațiu vectorial V sunt paralele dacă și numai dacă $D(A) = D(B)$.

SOLUȚIE. $\dim A = \dim B \Leftrightarrow \dim D(A) = \dim D(B)$

$$A \parallel B \Leftrightarrow D(A) \subseteq D(B) \text{ sau } D(B) \subseteq D(A) \quad \left\{ \Rightarrow D(A) = D(B) \right.$$

$$\dim D(A) = \dim D(B) \quad \left. \right\}$$

8. În \mathbb{R}^4 considerăm următoarele varietăți liniare

$$(L_1) \begin{cases} x_1 + x_3 - 2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(L_2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

(a) Să se determine dimensiunile lui L_1 și L_2 și să se scrie ecuațiile lor parametrice și vectoriale.

(b) Să se arate că $L_1 \parallel L_2$.

Soluție. (L_1) $\begin{cases} x_1 = 2 - \alpha \\ x_2 = 3 - \alpha + 3\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L_1 = \{(2 - \alpha, 3 - \alpha + 3\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(2, 3, 0, 0) + (-\alpha, -\alpha + 3\beta, 0, 0) + (0, 3\beta, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= (2, 3, 0, 0) + \{\alpha(-1, -1, 1, 0) + \beta(0, 3, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= (2, 3, 0, 0) + \underbrace{\langle (-1, -1, 1, 0), (0, 3, 0, 1) \rangle}_{D(L_1)}$$

$$u, v \in L \cdot I. \quad \dim L_1 = \dim D(L_1) = 2 = \dim D(L_2)$$

(L_2) $\begin{cases} x_1 = 2 - s \\ x_2 = -1 - s + 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}^2$

$$L_2 = \{(2 - s, -1 - s + 3t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{(2, -1, 0, 0) + (-s, -s, s, 0) + (0, 3t, 0, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= (2, -1, 0, 0) + \{s(-1, -1, 1, 0) + t(0, 3, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = (2, -1, 0, 0) + \underbrace{\langle (-1, -1, 1, 0), (0, 3, 0, 1) \rangle}_{D(L_2)} = D(L_1)$$

$L_1 \parallel L_2$

9. În structura afină a spațiului vectorial \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) se dau dreapta

$$\Delta = (a_1, \dots, a_n) + \langle (p_1, \dots, p_n) \rangle, (p_1^2 + \dots + p_n^2 > 0)$$

și hiperplanul $H : \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta = 0$, ($\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$). Să se arate că $\Delta \parallel H$ dacă și numai dacă $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n = 0$.

Soluție. Mai întâi observăm că H este un hiperplan (afin), adică o varietate liniară $(n - 1)$ -dimensională. Într-adevăr $H = f^{-1}(-\beta)$, unde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este funcționala liniară și nenulă dată prin $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Așadar H este o varietate liniară, care este nevidă întrucât f este surjectivă, și

$$D(H) = \ker f = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}.$$

Mai mult,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\ker f) + \dim(Im f) = \dim(\ker f) + 1,$$

adică $\dim H = \dim D(H) = \dim(\ker f) = n - 1$. Întrucât $n \geq 2$, paralelismul dintre D și H revine la $D(\Delta) \subseteq D(H) \iff (p_1, \dots, p_n) \in D(H) \iff \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n = 0$.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Sol. }} H &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta = 0\} \stackrel{\alpha_n \neq 0}{=} \{(x_1, \dots, x_{n-1}) - \frac{\beta}{\alpha_n} - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, \dots, 0, -\frac{\beta}{\alpha_n}) + (x_1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1) + (\alpha_1 x_1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} x_2) + \dots + (0, 0, \dots, x_{n-1}, -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \\ &= \left(0, \dots, 0, -\frac{\beta}{\alpha_n}\right) + \{x_1 (1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}) + x_2 (0, 1, \dots, 0, -\frac{\alpha_2}{\alpha_n}) + \dots + x_{n-1} (0, 0, \dots, 1, -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \\ &\stackrel{\dim H = n-1, \text{ adică } H \text{-hiperplan}}{=} \left(0, \dots, 0, -\frac{\beta}{\alpha_n}\right) + \underbrace{\left\langle (1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}), (0, 1, \dots, 0, -\frac{\alpha_2}{\alpha_n}), \dots, (0, 0, \dots, 1, -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}) \right\rangle}_{L.I.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P_1, \dots, P_n \in D(H) = \left\langle (1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}), (0, 1, \dots, 0, -\frac{\alpha_2}{\alpha_n}), \dots, (0, 0, \dots, 1, -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}) \right\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0$$

10. Se consideră în \mathbb{R}^5 vectorii $a = (1, 0, 0, 2, 0)$, $b = (0, 2, 0, 0, 1)$, $c = (1, 2, 0, 0, 0)$ și $d = (0, 0, 0, 2, 1)$ și varietățile liniare $A = a + \langle b, c \rangle$, $B = c + \langle b, d \rangle$. Să se afle $A \cap B$ și $\text{af}(A \cup B)$.

Soluție. Observăm că $a + b = (1, 2, 0, 2, 1) = c + d$, adică $a = c + (-b) + d \in c + \langle b, d \rangle = B$, și deci $a \in A \cap B$. Prin urmare $A \cap B = a + D(A) \cap D(B) = a + \langle b, c \rangle \cap \langle b, d \rangle \supseteq a + \langle b \rangle$. Ultima inclusiune este de fapt egalitate deoarece vectorii b, c, d sunt liniar independenți. Într-adevăr

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Așadar $A \cap B = a + \langle b \rangle$. Mai mult $\text{af}(A \cup B) = a + D(A) + D(B) = a + \langle b, c \rangle + \langle b, d \rangle = a + \langle b, c, d \rangle$.

Appendices

Appendix A

Varietăți liniare în spații infinit dimensionale

A.1 Ecuații liniare ordinare cu coeficienți constanți

Considerăm operatorul diferențial

$$L : C^\infty(I, \mathbb{F}) \longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{F}), \quad L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n,$$

și polinomul caracteristic asociat $p = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, unde $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ și $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.

Teorema A.1.1. *Dacă descompunerea in factori a lui p este $p = (z - c_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (z - c_k)^{r_k}$, atunci funcțiile $t^m e^{c_i t}$, $0 \leq m \leq r_i - 1$, $1 \leq k \leq k$ formează o bază pentru $\ker L$.*

Corolarul A.1.2. *Mulțimea soluțiilor ecuației neomogene $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n = g$ are forma*

$$f_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^{r_i-1} \alpha_{m,i} t^m e^{c_i t},$$

unde f_0 este o soluție particulară a ecuației $Lf = g$ și $\alpha_{m,i}$ sunt constante.

A.2 Relații de recurență liniare

Fie K este un corp. Notăm prin $K^{\mathbb{N}}$ mulțimea tuturor sirurilor de elemente din K , adică mulțimea tuturor funcțiilor $a : \mathbb{N} \longrightarrow K$. Vom nota cu $a(n)$ sau cu a_n valoarea funcției a pe numărul natural n . În cazul al doilea, vom nota cu $(a_n)_{n \geq 0}$ sau, simplu, cu (a_n) sirul/funcția a . Dacă $\alpha \in K$ și $a, b \in K^{\mathbb{N}}$, definim sirurile $a + b$, $a \cdot b$ și $\alpha \cdot a$ prin $(a + b)(n) := a(n) + b(n)$, $(a \cdot b)(n) := a(n)b(n)$ și $(\alpha \cdot a)(n) = \alpha a(n)$, sau, echivalent, $(a + b)_n = a_n + b_n$ și $(\alpha \cdot a)_n = \alpha a_n$, for all $n \in \mathbb{N}$. Mulțimea $K^{\mathbb{N}}$ este evident un K -spațiu vectorial față de operațiile:

$$K^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, \quad (a, b) \mapsto a + b \tag{A.2.1}$$

$$K \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, \quad (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a. \tag{A.2.2}$$

Putem scrie aceste operații astfel:

$$K^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, ((a_n), (b_n)) \mapsto (a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \quad (\text{A.2.3})$$

$$K \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, (\alpha, (a_n)) \mapsto \alpha \cdot (a_n) := (\alpha a_n). \quad (\text{A.2.4})$$

De fapt $K^{\mathbb{N}}$ este chiar o K -algebră față de operațiile (A.2.1), (A.2.2) și

$$K^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, (a, b) \mapsto a \cdot b \text{ sau} \quad (\text{A.2.5})$$

$$K^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, ((a_n), (b_n)) \mapsto (a_n) \cdot (b_n) := (a_n b_n). \quad (\text{A.2.6})$$

De altfel operația externă (A.2.2) (sau (A.2.4)) poate fi obținută din operația binară (A.2.5) (sau (A.2.6)) prin restricția scalarilor de la $K^{\mathbb{N}}$ la $K \subseteq K^{\mathbb{N}}$. Într-adevăr K se scufundă în $K^{\mathbb{N}}$ prin incluziunea care asociază scalarului $k \in K$ sirul constant (k_n) , adică $k_n = k$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Observăm că spațiul vectorial $K^{\mathbb{N}}$ este infinit dimensional deoarece submulțimea sa infinită $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, unde

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots), e_2 := (0, 1, 0, \dots), e_3 := (0, 0, 1, \dots),$$

este liberă (liniar independentă). De asemenea orice funcție $R : K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}$ de tipul

$$R(a_n)_{n \geq 0} = (c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n)_{n \geq 0},$$

unde $c_0, \dots, c_r \in K^{\mathbb{N}}$ sunt r siruri date, este liniară. Așadar imaginea inversă

$$R^{-1}(f) := \left\{ a \in K^{\mathbb{N}} : c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n = f(n), \forall n \geq 0 \right\}$$

a unui sir $f \in K^{\mathbb{N}}$ este o varietate liniară a lui $K^{\mathbb{N}}$ a cărui direcție este subspațiul

$$\ker R = R^{-1}(0) = \left\{ a \in K^{\mathbb{N}} : c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n = 0, \forall n \geq 0 \right\}.$$

Ecuația

$$c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n = f(n), \forall n \geq 0, \quad (\text{A.2.7})$$

care definește varietatea liniară $R^{-1}(f)$, se numește *relație de recurență liniară neomogenă de ordin r*, iar ecuația

$$c_r(n)a_{n+r} + c_{r-1}(n)a_{n+r-1} + \dots + c_0(n)a_n = 0, \forall n \geq 0, \quad (\text{A.2.8})$$

care definește subspațiul $\ker R$ al lui $K^{\mathbb{N}}$, se numește *relație de recurență liniară omogenă de ordin r*. Dacă sirurile $c_0, \dots, c_r \in K^{\mathbb{N}}$ sunt constante, atunci (A.2.7) și (A.2.8) devin

$$c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \dots + c_0 a_n = f(n), \forall n \geq 0 \quad (\text{A.2.9})$$

$$c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \dots + c_0 a_n = 0, \forall n \geq 0 \quad (\text{A.2.10})$$

și se numesc *relație de recurență liniară neomogenă de ordin r cu coeficienți constanți* respectiv *relație de recurență liniară omogenă de ordin r cu coeficienți constanți*.

Exemplul A.2.1. ([3, p.62]) Relația de recurență liniară neomogenă de ordin 1

$$a_{n+1} = c(n)a_n + f(n) \quad (\text{A.2.11})$$

are soluția generală

$$a_n = a_0 c(0) \cdots c(n-1) + c(1) \cdots c(n-1)f(0) + c(2) \cdots c(n-1)f(1) + \cdots + c(n-1)f(n-2) + f(n-1). \quad (\text{A.2.12})$$

Într-adevăr, luând $n = p$ în relația de recurență (A.2.11) și împărțind-o cu produsul $c(0) \cdots c(p)$ obținem

$$\frac{a_{p+1}}{c(0) \cdots c(p)} - \frac{a_p}{c(0) \cdots c(p-1)} = \frac{f(p)}{c(0) \cdots c(p)}. \quad (\text{A.2.13})$$

Dând acum lui p succesiv valorile $1, 2, \dots, n-1$ obținem

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{a_2}{c(0)c(1)} - \frac{a_1}{c(0)}} &= \frac{f(1)}{c(0)c(1)} \\ \cancel{\frac{a_3}{c(0)c(1)c(2)} - \frac{a_2}{c(0)c(1)}} &= \frac{f(2)}{c(0)c(1)c(2)} \\ &\vdots \\ \cancel{\frac{a_n}{c(0) \cdots c(n-1)} - \frac{a_{n-1}}{c(0) \cdots c(n-2)}} &= \frac{f(n-1)}{c(0) \cdots c(n-1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

Adunând relațiile (A.2.14) obținem

$$\frac{a_n}{c(0) \cdots c(n-1)} - \frac{a_1}{c(0)} = \frac{f(1)}{c(0)c(1)} + \frac{f(2)}{c(0)c(1)c(2)} + \cdots + \frac{f(n-1)}{c(0) \cdots c(n-1)},$$

adică tocmai relația (A.2.12).

Observăm acum că soluția generală (A.2.12) a relației de recurență liniară neomogenă de ordinul 1 (A.2.11) are componenta $a_0 c(0) \cdots c(n-1)$ care, atunci când a_0 parcurge întregul corp K , generează nucleul $\ker R$ a funcției liniare

$$R : K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, \quad R(a_n)_{n \geq 0} = (a_{n+1} - c(n)a_n)_{n \geq 0},$$

iar sirul $(\xi_n)_{n \geq 0}$, unde $\xi_0 = 0$ și

$$\xi_n := c(1) \cdots c(n-1)f(0) + c(2) \cdots c(n-1)f(1) + \cdots + c(n-1)f(n-2) + f(n-1), \quad \forall n \geq 1,$$

este o soluție particulară a ecuației $R(a_n) = f(n)$, $\forall n \geq 0$. În termenii aplicației liniare soluția generală a recurenței liniare (A.2.11) este

$$\ker R + (\xi_n)_{n \geq 0} = \langle (\phi_n)_{n \geq 0} \rangle + (\xi_n)_{n \geq 0},$$

unde $\phi_0 = 1$, iar $\phi_n = c(0) \cdots c(n-1)$ pentru $n \geq 1$.

Dacă sirul $(c(n))$ este constant și are termenii egali cu c , atunci relația de recurență liniară neomogenă de ordin 1 cu coeficienți constanți

$$a_{n+1} = ca_n + f(n)$$

are soluția generală

$$a_n = a_0 c^n + \sum_{k=0}^{n-1} c^k f(n-k-1).$$

Demonstrația lui A.2.12 se poate face și prin inducție, dar argumentul prezentat, deși presupune că $c(n) \neq 0$, $\forall n \geq 0$, are avantajul că oferă o modalitate de a determina sirul (a_n) fără a cunoaște forma sa A.2.12.

Teorema A.2.1. ([3, p.68]) Dacă s este o rădăcină de ordin m a polinomului

$$\underline{c_r X^r + c_{r-1} X^{n+r-1} + \cdots + c_1 X + c_0 \in \mathbb{C}[X]}, \quad (\text{A.2.15})$$

atunci sirurile $(n^k s^n)_{n \geq 0}$, $0 \leq k \leq m-1$ sunt soluții ale relației de recurență liniară omogenă de ordin r cu coeficienți constanți (A.2.10) (adică a recurenței $\underline{c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \cdots + c_0 a_n = 0}$). Dacă

$$c_r X^r + c_{r-1} X^{n+r-1} + \cdots + c_1 X + c_0 = \underline{c_r (X - s_1)^{m_1} \cdots (X - s_p)^{m_p}}, \quad \text{dacă } s_i \neq s_j \text{ pentru } i \neq j,$$

atunci soluția generală a recurenței liniare omogene de ordin r cu coeficienți constanți (A.2.10) este mulțimea combinațiilor liniare a sirurilor $(n^k s_j^n)_{n \geq 0}$, $0 \leq k \leq m_j - 1$, $1 \leq j \leq p$.

Așadar

$$\ker R = \langle (s_1^n), (ns_1^n), \dots, (n^{m_1-1}s_1^n), (s_2^n), (ns_2^n), \dots, (n^{m_1-1}s_2^n), \dots, (s_p^n), (ns_p^n), \dots, (n^{m_p-1}s_p^n) \rangle,$$

unde

$$R : K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}, \quad R(a_n)_{n \geq 0} = (c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \cdots + c_0 a_n)_{n \geq 0},$$

iar s_1, \dots, s_p sunt rădăcinile polinomului (A.2.15), numit *polinomul caracteristic* al recurenței liniare omogene de ordin r cu coeficienți constanți (A.2.10). Prin urmare $\ker R$ este un subspațiu finit dimensional al lui $K^{\mathbb{R}}$ și $\dim \ker R \leq m_1 + \cdots + m_p = r$.

Exemplul A.2.2. Vom determina sirul lui Fibonacci definit de relația de recurență

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$\text{și condițiile initiale } F_0 = 0 \text{ și } F_1 = 1. \quad \underline{F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0} \quad \underline{r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0}$$

$$\text{Soluție. Ecuația caracteristică este } r^2 - r - 1 = 0 \text{ și ea are rădăcinile } \underline{r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0}$$

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad \underline{r_1^n, r_2^n}$$

Prin urmare sirul (a_n) are forma

$$F_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

iar constantele reale λ și μ se determină din condițiile initiale

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Așadar

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

1.3 Probleme

11. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ două şiruri finite de numere reale. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^∞ . Care dintre următoarele submulțimi sunt varietăți liniare ale spațiului $C^\infty(I, \mathbb{R})$?
- (a) $A := \{f \in C^\infty(I, \mathbb{R}) : f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} f' + a_n f + g = 0\}$;
 - (b) $B := \{h \in C^\infty(I, \mathbb{R}) : h^{(n)} + b_1 h^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} h' + b_n h \in A\}$;
 - (c) $C := \{\varphi \in C^\infty(I, \mathbb{R}) : \varphi^3 - 5\varphi^2 + 6\varphi = 0\}$.

SOLUȚIE.

12. Găsiți soluția generală a recurenței liniare neomogene de ordinul 1 cu coeficienți constanți

$$a_{n+1} = ca_n + d^n. \quad !: c^{n+1}$$

SOLUȚIE.

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} - \frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c} \left(\frac{d}{c}\right)^n$$

13. Let Δ_m denote the determinant of the following $m \times m$ matrix

$$A_m = \begin{bmatrix} a + \xi_1\eta^1 & \xi_1\eta^2 & \cdots & \xi_1\eta^m \\ \xi_2\eta^1 & a + \xi_2\eta^2 & \cdots & \xi_2\eta^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_m\eta^1 & \xi_m\eta^2 & \cdots & a + \xi_m\eta^m \end{bmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Show that $\Delta_m = \det(A_m)$ satisfies the recurrence relation $\Delta_m = a\Delta_{m-1} + \xi_m\eta^m a^{m-1}$ and prove that $\Delta_m = a^{m-1}(a + \xi_1\eta^1 + \cdots + \xi_m\eta^m)$.

SOLUȚIE. Indeed, we have successively:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \begin{vmatrix} a + \xi_1\eta^1 & \xi_1\eta^2 & \cdots & \xi_1\eta^m \\ \xi_2\eta^1 & a + \xi_2\eta^2 & \cdots & \xi_2\eta^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_m\eta^1 & \xi_m\eta^2 & \cdots & a + \xi_m\eta^m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a + \xi_1\eta^1 & \xi_1\eta^2 & \cdots & \xi_1\eta^{m-1} & 0 \\ \xi_2\eta^1 & a + \xi_2\eta^2 & \cdots & \xi_2\eta^{m-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \xi_m\eta^1 & \xi_m\eta^2 & \cdots & \xi_m\eta^{m-1} & a \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a + \xi_1\eta^1 & \xi_1\eta^2 & \cdots & \xi_1\eta^{m-1} & \xi_1\eta^m \\ \xi_2\eta^1 & a + \xi_2\eta^2 & \cdots & \xi_2\eta^{m-1} & \xi_2\eta^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \xi_{m-1}\eta^1 & \xi_{m-1}\eta^2 & \cdots & a + \xi_{m-1}\eta^{m-1} & \xi_{m-1}\eta^m \\ \xi_m\eta^1 & \xi_m\eta^2 & \cdots & \xi_m\eta^{m-1} & \xi_m\eta^m \end{vmatrix} \\ &= a\Delta_{m-1} + \xi_m\eta^m \begin{vmatrix} a + \xi_1\eta^1 & \xi_1\eta^2 & \cdots & \xi_1\eta^{m-1} & \xi_1 \\ \xi_2\eta^1 & a + \xi_2\eta^2 & \cdots & \xi_2\eta^{m-1} & \xi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_{m-1}\eta^1 & \xi_{m-1}\eta^2 & \cdots & a + \xi_{m-1}\eta^{m-1} & \xi_{m-1} \\ \eta^1 & \eta^2 & \cdots & \eta^{m-1} & 1 \end{vmatrix} \\ &= a\Delta_{m-1} + \xi_m\eta^m \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & \xi_1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & \xi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a\Delta_{m-1} + \xi_m\eta^m a^{m-1} \end{aligned}$$

In order to show that $\Delta_m = a^{m-1}(a + \xi_1\eta^1 + \cdots + \xi_m\eta^m)$ we assume that $a \neq 0$, as the stated equality is trivially satisfied for $a = 0$. The recurrence relation $\Delta_k = a\Delta_{k-1} + \xi_k\eta^k a^{k-1}$ is equivalent in this case with:

$$\frac{\Delta_k}{a^k} - \frac{\Delta_{k-1}}{a^{k-1}} = \frac{\xi_k\eta^k}{a}.$$

By assigning to k the values $2, 3, \dots, m$ one gets

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_2}{a^2} - \frac{\Delta_1}{a} &= \frac{\xi_2\eta^2}{a} \\ \frac{\Delta_3}{a^3} - \frac{\Delta_2}{a^2} &= \frac{\xi_3\eta^3}{a} \\ &\vdots \\ \frac{\Delta_{m-1}}{a^{m-1}} - \frac{\Delta_{m-2}}{a^{m-2}} &= \frac{\xi_{m-1}\eta^{m-1}}{a} \\ \frac{\Delta_m}{a^m} - \frac{\Delta_{m-1}}{a^{m-1}} &= \frac{\xi_m\eta^m}{a}.\end{aligned}$$

By summing up the above relations one gets that

$$\Delta_m = a^{m-1} \left(\Delta_1 + \xi_2\eta^2 + \dots + \xi_m\eta^m \right) = a^{m-1}(a + \xi_1\eta^1 + \dots + \xi_m\eta^m).$$

14. Determinați sirul (a_n) dat prin relația de recurență $a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n)$ și prin condițiile inițiale $a_0 = a_1 = 1$.

SOLUȚIE.

15. Determinați, în funcție de a_0 și a_1 sirul dat prin relația de recurență liniară

$$a_{n+2} - (s_1 + s_2)a_{n+1} + s_1s_2a_n = 0.$$

SOLUȚIE.

16. Dacă (F_n) notează sirul lui Fibonacci (definit de relația de recurență $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ și condițiile inițiale $F_0 = 0$ și $F_1 = 1$), arătați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

SOLUȚIE.

Capitolul 2

Învelitori și combinații afine. Dreptele unui spațiu vectorial

2.1 Învelitori și combinații afine

Definiția 2.1.1. Dacă M este o submulțime a lui V , atunci varietatea liniară

$$\underline{\text{af}(M) := \bigcap \{A \mid M \subseteq A, A \in \mathcal{A}(V)\}}$$

se numește învelitoarea sau înfășurătoarea sau anvelopa sau închiderea afină a lui M .

Propoziția 2.1.1. (Proprietățile operatorului af) Fie $M, N \in \mathcal{P}(V)$ și $A \in \mathcal{A}(V)$.

1. $M \subseteq \text{af}(M)$ și $\text{af}(M) \in \mathcal{A}(V)$.
2. Dacă $M \subseteq A$ și $A \in \mathcal{A}(V)$, atunci $\text{af}(M) \subseteq A$.¹
3. $M \subseteq N \implies \text{af}(M) \subseteq \text{af}(N)$.²
4. $\text{af}(M) = M \iff M \in \mathcal{A}(V)$.
• \Rightarrow $M = \text{af}(M) \in \mathcal{A}(V)$
 \Leftarrow $M \in \mathcal{A}(V) \rightarrow \text{af}(M) \subseteq M$, dar $M \subseteq \text{af}(M)$ (1)
(2)
5. $\text{af}(\text{af}(M)) = \text{af}(M)$.³ ~rezultă din (4).

¹ $\text{af}(M)$ este cea mai mică varietate liniară ce conține mulțimea M .

² Operatorul "af" este crescător.

³ Operatorul "af" este idempotent.

- Demonstrație.
1. $M \subseteq af(M)$ deoarece $af(M)$ este intersecția unor multimi corecte.
 2. $M \subseteq A_0, A_0 \in \mathcal{A}(V) \Rightarrow \bigcap \{A \mid M \subseteq A, A \in \mathcal{A}(V)\} \subseteq A_0$, adică $af(M) \subseteq A_0$.
 3. $M \subseteq N \subseteq af(N) \in \mathcal{A}(V) \xrightarrow{(2)} af(M) \subseteq af(N)$
 4. $M = af(M) \in \mathcal{A}(V) \Rightarrow M \in \mathcal{A}(V)$
 $M \in \mathcal{A}(V) \xrightarrow{(2)} af(M) \subseteq M \quad \left| \begin{array}{l} af(M) = M \\ M \subseteq af(M) \end{array} \right.$
 5. Rezultă din (4) cu $af(M)$ jucând rolul lui M .

□

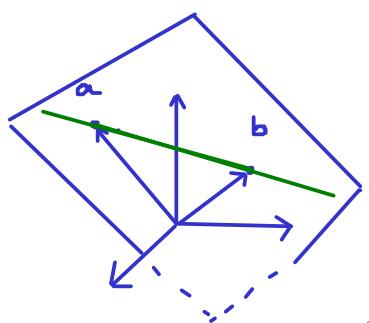
Problema 2.1.1. Să se arate că pentru orice submulțimi M și N ale spațiului vectorial V are loc relația

$$af(af(M) \cup af(N)) \stackrel{\leq}{\subseteq} af(M \cup N). \quad (2.1.1)$$

Soluție.

$$\begin{aligned} M, N \subseteq M \cup N &\Rightarrow af(M), af(N) \subseteq af(M \cup N) \Leftrightarrow af(M) \cup af(N) \subseteq af(M \cup N) \\ &\Rightarrow af(af(M) \cup af(N)) \subseteq af(af(M \cup N)) = af(M \cup N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \subseteq af(M) \quad \left| \begin{array}{l} \\ N \subseteq af(N) \end{array} \right. &\Rightarrow M \cup N \subseteq af(M) \cup af(N) \Rightarrow af(M \cup N) \subseteq af(af(M) \cup af(N)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \\ &= \text{planul determinat de } O_{\mathbb{R}^2}, a, b \\ af\{a, b\} &= ab = a + \langle b - a \rangle \subseteq \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Definiția 2.1.2. O combinație liniară $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ a.î. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, se numește *combinație afină*.

În secțiunea următoare vom arăta că învelitoarea afină a mulțimii M este mulțimea combinațiilor affine de elemente din M .

Propoziția 2.1.2. O submulțime L a lui V este varietate liniară a lui V dacă și numai dacă

$$\left(x_1, \dots, x_m \in L \text{ și } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in L. \quad (2.1.2)$$

Demonstrație. \Rightarrow $L \in \mathcal{A}(V)$ $L = a + D(L)$

$$x_1, \dots, x_m \in L = a + D(L) \Leftrightarrow x_1 - a, \dots, x_m - a \in D(L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i - a) \in D(L)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (\lambda_i x_i - \lambda_i a) \in D(L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) a \in D(L) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - a \in D(L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in a + D(L) = L$$

$$\Leftarrow L = \emptyset \in \mathcal{A}(V) \quad \emptyset \neq L \exists a \quad U = L - a \subseteq V \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1, \dots, u_m \in U, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \\ \exists l_1, \dots, l_m \in L \text{ a.t. } u_i = l_i - a, \dots, u_m = l_m - a \end{array} \right.$$

$$U \neq \emptyset, 0_V \in U$$

$$u_1, u_2 \in U, \lambda_1, \lambda_2 \in K$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i (l_i - a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i l_i - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) a$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i l_i - a \in L - a = U$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) 0_V \in U$$

Asadar $U = L - a \subseteq V$ și deci $L = a + U \in \mathcal{A}(V)$

□

$\mathcal{P}(V)$ - mulțimea părților lui V

Propoziția 2.1.3. Dacă $M \in \mathcal{P}(V)$, atunci

$$\text{af}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid m \in \mathbb{N}, x_i \in M, \lambda_i \in K, i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Demonstrație. $M \subseteq \text{af}(M) \xrightarrow{X} X \subseteq \text{af}(M)$

$M \subseteq X$. Arătăm, folosind Prop. 2.1.2, că $X \in \mathcal{A}(V)$. În acest scop

considerăm $x_1, \dots, x_m \in M$ și scării $\lambda_j^i \in K$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a

$$\sum_{i=1}^m \lambda_j^i = 1 \text{ pentru orice } j \in \{1, \dots, n\} \text{ și considerăm elementele}$$

$X \ni y_j := \sum_{i=1}^m \lambda_j^i x_i$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Dacă $\mu^1, \dots, \mu^n \in K$ a.s. $\sum_{j=1}^n \mu^j = 1$,

$$\text{atunci } \sum_{j=1}^n \mu^j y_j = \sum_{j=1}^n \mu^j \sum_{i=1}^m \lambda_j^i x_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu^j \lambda_j^i x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \mu^j \lambda_j^i \right) x_i \in X$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \mu^j \lambda_j^i \right) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_j^i \right)}_{=1} \mu^j = \sum_{j=1}^n \mu^j = 1$$

Așadar $X \in \mathcal{A}(V) \xrightarrow{M \subseteq X} \text{af}(M) \subseteq X$. Prin urmare $\text{af}(M) = X$ \square

2.2 Dreptele unui spațiu afin

Dacă a și b sunt puncte distincte în V , atunci există o singură dreaptă, notată cu ab , care conține pe a și b . Mai precis $ab = a + \{b-a\} = a + \{t(b-a) \mid t \in K\} = \{(1-t)a + tb \mid t \in K\}$

Observația 2.2.1. Fie V este un spațiu vectorial peste corpul K .

1. Dacă $K = \mathbb{Z}_2$ și $a, b \in V$, atunci dreapta ab se reduce la mulțimea $\{a, b\}$.
2. Dacă $a, b \in V$, atunci $\text{af}\{a, b\}$ se mai notează și cu $\text{af}(a, b)$ și este este $\{a\} = \{b\}$ dacă $a = b$ și ab dacă $a \neq b$.

Pt $\text{af}(M \cup N)$ se mai folosește sinonimia $\text{af}(M, N)$

LA CONCURENTA CU O PROBLEMA TEORETICĂ
CARACTERIZAREA VARIETĂȚILOR LINIARE CU AJUTORUL DREPTELOA

Propoziția 2.2.1. Fie V un spațiu vectorial cu scalari într-un corp K cu cel puțin 3 elemente. O submulțime L a lui V este varietate liniară dacă și numai dacă, odată cu două puncte distincte $a, b \in L$, mulțimea L conține întreaga dreaptă ab .

Demonstrație. Avem de orătător că

$$L \in \mathcal{A}(V) \Leftrightarrow (\forall x, y \in L, t \in K \Rightarrow (1-t)x + ty \in L)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L \in \mathcal{A}(V), x, y \in L \Leftrightarrow y \in x + D(L) = L \Leftrightarrow y - x \in D(L) \\ \Rightarrow \langle y - x \rangle \subseteq D(L) \Rightarrow x + \langle y - x \rangle \subseteq x + D(L) = L \\ \Leftrightarrow (1-t)x + ty \in L, \forall t \in K \end{aligned}$$

\Leftarrow Presupunem că $(\forall x, y \in L, t \in K \Rightarrow (1-t)x + ty \in L)$ și arătăm că $L \in \mathcal{A}(V)$

I) $L = \emptyset \in \mathcal{A}(V)$

II) $L \neq \emptyset$ și $a \in L$ arătăm că $\gamma := L - a \subseteq V$, $0_V = a - a \in L - a = \gamma$
Observăm $\forall y_1, y_2 \in \gamma, t \in K$ avem $(1-t)y_1 + ty_2 \in \gamma$ ($y_1 = 0, y_2 = y$)

$$\exists l_1, l_2 \in L \text{ a.s.t. } y_1 = l_1 - a, y_2 = l_2 - a.$$

$$\begin{aligned} (1-t)y_1 + ty_2 &= (1-t)(l_1 - a) + t(l_2 - a) = (1-t)l_1 + tl_2 - (1-t)a - ta \\ &= \underbrace{(1-t)l_1 + tl_2}_{\in L} - a \in L - a = \gamma \end{aligned}$$

Asadar $t \in K, y \in \gamma$ avem $ty \in \gamma$.

Fie $y_1, y_2 \in \gamma$ și $\alpha \in K \setminus \{0, 1\} \Rightarrow \exists \alpha^{-1}$ s.i. $(1-\alpha)^{-1}$,

$$y_1 + y_2 = (1-\alpha) \left[\underbrace{(1-\alpha)^{-1} y_1}_{\in \gamma} \right] + \alpha \left[\underbrace{\alpha^{-1} y_2}_{\in \gamma} \right] \in \gamma. \text{ Asadar } \gamma \subseteq V \text{ și deci } L = a + \gamma \in \mathcal{A}(V)$$

□

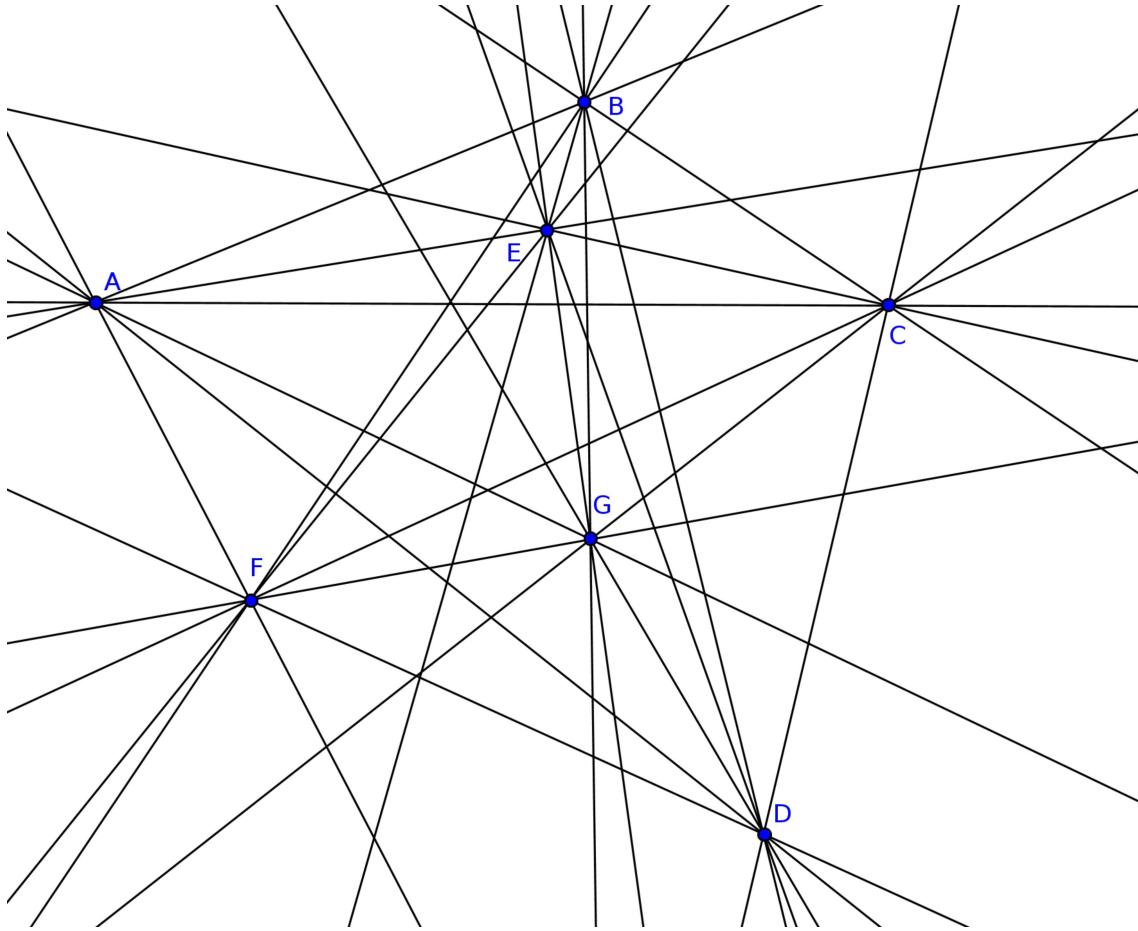
Exemplul 2.2.1. Dacă corpul K al scalarilor lui V are doar două elemente, atunci propoziția 2.2.1 nu are loc. Într-adevăr, dacă $K = \mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, atunci submulțimea $M := \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{0})\}$ a planului $V = \mathbb{Z}_2^2$ conține toate dreptele care trec prin câte două puncte din M , însă dreptele planului \mathbb{Z}_2^2 sunt formate din doar două puncte, și totuși M nu este varietate liniară. Într-adevăr, dacă M ar fi varietate liniară a lui V , atunci M ar fi chiar subspațiu vectorial al lui V deoarece $0 \in M$. Dar atunci $(\hat{1}, \hat{1}) = (\hat{0}, \hat{1}) + (\hat{1}, \hat{0})$ ar aparține lui M , ceea ce nu este adevărat.

Observația 2.2.2. Propoziția (2.2.1) poate fi rescrisă în termenii aplicației

$$\alpha : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \alpha(M) = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, t \in K\} = \bigcup_{m, n \in M} af(m, n) \quad (2.2.1)$$

astfel:

Fie V un spațiu vectorial cu scalari într-un corp K cu cel puțin 3 elemente. O submulțime L a lui V este varietate liniară dacă și numai dacă $\alpha(L) \subseteq L$. Multimea $\alpha(\{A, B, C, D, E, F, G\})$ este ilustrată în figura de mai jos.



Observația 2.2.3. Fie V este un spațiu vectorial peste corpul K . Dacă $A, B \in \mathcal{A}(V)$, atunci

$$\alpha(A \cup B) = \bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b).$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} \alpha(A \cup B) &= \bigcup_{a,b \in A \cup B} \text{af}(a, b) = \bigcup_{a,b \in A} \text{af}(a, b) \cup \bigcup_{a,b \in B} \text{af}(a, b) \cup \bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b) \\ &= A \cup B \cup \bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b) = \bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b), \end{aligned}$$

deoarece $A, B \subseteq \bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b)$

Observația 2.2.4. Fie V un spațiu vectorial cu scalari într-un corp K . Dacă $M \subseteq V$, atunci

$$M \subseteq \alpha(M) \subseteq \alpha^2(M) \subseteq \cdots \subseteq \text{af}(M).$$

Într-adevăr, inclusiunea $M \subseteq \alpha(M)$ este evidentă, fapt care arată că

$$M \subseteq \alpha(M) \subseteq \alpha^2(M) \subseteq \cdots \subseteq \alpha^k(M) \subseteq \cdots . \quad (2.2.2)$$

Din relația $M \subseteq \text{af}(M)$ deducem $\alpha(M) \subseteq \alpha(\text{af}(M)) \subseteq \text{af}(M)$, precum și că $\alpha^k(M) \subseteq \text{af}(M)$, pentru orice $k \geq 1$. Incluziunea $\alpha(\text{af}(M)) \subseteq \text{af}(M)$ rezultă din Propoziția 2.2.1 reformulată prin Observația 2.2.2.

O întrebare naturală care apare în legătură cu sirul (2.2.2) este dacă termenii acestuia acoperă întrega învelitoare afină a lui M începând cu un anumit rang. Dacă spațiul ambiant V a lui M este finit-dimensional, atunci răspunsul este afirmativ, aşa cum rezultă din problema (3.1.1).

2.3 Probleme

1. Fie V și W două spații vectoriale peste corpul K și $f : V \rightarrow W$ o aplicație liniară. Arătați că
 - (a) $f(A) \in \mathcal{A}(W)$ și $D(f(A)) = f(D(A))$ pentru orice varietate liniară $A \in \mathcal{A}(V)$.
 - (b) aplicația $\mathcal{A}_f : (\mathcal{A}(V), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{A}(W), \subseteq)$, $\mathcal{A}_f(A) = f(A)$ este un morfism crescător de mulțimi parțial ordonate.
 - (c) aplicația $\mathcal{A}_{f^{-1}} : (\mathcal{A}(W), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{A}(V), \subseteq)$, $\mathcal{A}_{f^{-1}}(B) = f^{-1}(B)$ este un morfism crescător de mulțimi parțial ordonate.
 - (d) $f(\text{af}(X)) = \text{af}(f(X))$ pentru orice $X \subseteq V$.

SOLUȚIE.

2. Dacă $f : V \rightarrow W$ este o transformare liniară și $\{A_i\}_{i \in I}$, $\{B_i\}_{i \in I}$ sunt două familii de varietăți liniare ale lui V respectiv W , arătați că:

- (a) $f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i)) = \text{af}(\bigcup_{i \in I} f(A_i))$;
- (b) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
- (c) $\text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)) \subseteq f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i))$;
- (d) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;
- (e) dacă f este injectivă, atunci $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
- (f) dacă f este surjectivă, atunci $\text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)) = f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i))$

SOLUȚIE. (2a) Observăm că $f(A_j) \subseteq f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i))$, for all $j \in I$, which implies that $\bigcup_{j \in I} f(A_j) \subseteq f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i))$. Deoarece $f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i))$ este o varietate liniară a lui W deducem că

$$\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f(A_i)\right) \subseteq f\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right).$$

Pentru incluziunea opusă considerăm o varietate liniară B a lui W astfel încât $\bigcup_{i \in I} f(A_i) \subseteq B$. Așadar $A_i \subseteq f^{-1}(f(A_i)) \subseteq f^{-1}(B)$ pentru orice $i \in I$ și deci $\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq f^{-1}(B)$ întrucât $f^{-1}(B)$ este varietate liniară a lui V . Prin urmare $f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i)) \subseteq f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pentru orice varietate liniară B a lui W care conține $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$, adică

$$f(\text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i)) \subseteq \bigcap \{B \mid B \in \mathcal{A}(W) \text{ și } \bigcup_{i \in I} f(A_i) \subseteq B\} = \text{af}(\bigcup_{i \in I} f(A_i)).$$

(2b) Evidență.

(2c) Observăm că $f^{-1}(B_j) \subseteq f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i))$ pentru orice $j \in I$, adică

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right).$$

Tinând seama de faptul că $f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i)) \in \mathcal{A}(V)$, deducem

$$\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right) \subseteq f^{-1}\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right).$$

Pentru incluziunea inversă considerăm o varietate liniară A a lui V astfel încât

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq A, \text{ i.e. } B_i \subseteq f(f^{-1}(B_i)) \subseteq f(A), \forall i \in I$$

(2d)

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(a) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow f(a) \in B_i, \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_i), \forall i \in I \Leftrightarrow a \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

(2e) Mai avem de demonstrat incluziunea $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i \in I} A_i)$. În acest scop considerăm $b \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, adică $b = f(a_i)$, unde $a_i \in A_i$ pentru orice $i \in I$. Deoarece f este injectivă,

deducem că $a_i = a_j =: a$ pentru orice $i, j \in I$. Așadar $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ și $b = f(a) \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$.

(2f) Mai avem de demonstrat inclusiunea $f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i)) \subseteq \text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i))$. În acest scop considerăm o varietate liniară A a lui V astfel încât $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq A$, adică

$$B_i = f(f^{-1}(B_i)) \subseteq f(A), \forall i \in I \implies \text{af}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subseteq f(A), \text{ deoarece } f(A) \in \mathcal{A}(W).$$

Prin urmare $f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i)) \subseteq f^{-1}(f(A))$, $\forall A \in \mathcal{A}(V)$ astfel încât $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq A$. În particular

$$\begin{aligned} f^{-1}(\text{af}(\bigcup_{i \in I} B_i)) &\subseteq f^{-1}\left(f\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right) \\ &= f(a) + D\left(f^{-1}\left(f\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right) \\ &= f(a) + f^{-1}\left(D\left(f\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right) \\ &= f(a) + f^{-1}\left(f\left(D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right), \quad a \in \text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right). \end{aligned}$$

Mai avem de demonstrat că

$$f^{-1}\left(f\left(D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right) = D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right),$$

adică

$$f^{-1}\left(f\left(D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right) \subseteq D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right),$$

deoarece inclusiunea opusă este evidentă. În acest scop considerăm

$$u \in f^{-1}\left(f\left(D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right)\right) \iff f(u) \in f\left(D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)\right),$$

adică $u \in D(\text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i))) + \ker f$. Cum însă $f^{-1}(B_j) \subseteq \text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i))$ deducem

$$\ker f \subseteq f^{-1}(D(B_j)) = D(f^{-1}(B_j)) \subseteq D\left(\text{af}\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)\right)$$

și deci $u \in D(\text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i))) + \ker f = D(\text{af}(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)))$.

3. Dacă $f : V \rightarrow W$ este un izomorfism liniar, atunci

$$f : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(W) \text{ și } f^{-1} : \mathcal{A}(W) \rightarrow \mathcal{A}(V)$$

sunt izomorfisme laticeale.

4. Arătați că mulțimea $H := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : mx + ny + pz + qw + a = 0\}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un scalar dat, iar \overline{mnpq} este numărul dumneavoastră matricol, este o varietate liniară 3-dimensională a lui \mathbb{R}^4 , adică un hiperplan.

SOLUȚIE. $P_p \cdot q \neq 0$

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = -\frac{a}{q} - \frac{m}{q}x - \frac{n}{q}y - \frac{p}{q}z\} \\ &= \{(x, y, z, -\frac{a}{q} - \frac{m}{q}x - \frac{n}{q}y - \frac{p}{q}z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 0, 0, -\frac{a}{q}) + (x, 0, 0, -\frac{m}{q}x) + (0, y, 0, -\frac{n}{q}y) + (0, 0, z, -\frac{p}{q}z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, 0, 0, -\frac{a}{q}) + \underbrace{\{x(1, 0, 0, -\frac{m}{q}) + y(0, 1, 0, -\frac{n}{q}) + z(0, 0, 1, -\frac{p}{q}) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}}_{L.I.} \\ &= (0, 0, 0, -\frac{a}{q}) + \langle (1, 0, 0, -\frac{m}{q}), (0, 1, 0, -\frac{n}{q}), (0, 0, 1, -\frac{p}{q}) \rangle \end{aligned}$$

5. Considerăm, în \mathbb{R}^4 , varietățile liniare $H : mx + ny + pz + qw + \alpha = 0$ și $A = \text{af}(\{a, a_1, a_2\})$, unde $a = (m + q, n, p, q - m)$, $a_1 = (m, n + q, p, q - n)$, $a_2 = (m, n, p + q, q - p)$, iar \overline{mnpq} este numărul dumneavoastră matricol. Arătați că:

- (a) $A = a + \langle a_1 - a, a_2 - a \rangle = a + \langle d_1, d_2 \rangle$, unde $d_1 = (-q, q, 0, m - n)$, $d_2 = (-q, 0, q, m - p)$.
(b) Dacă $\alpha = 0$, atunci $A \cap H = \emptyset$ și $A \parallel H$.

SOLUȚIE. $A = \text{af} \{a, a_1, a_2\} = \{r a + s a_1 + t a_2 \mid r, s, t \in \mathbb{R}, r+s+t=1\}$

$$\begin{aligned} \dim A \leq 2 \\ &= \{(1-s-t)a + s a_1 + t a_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= a + \{s(a_1 - a) + t(a_2 - a) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= a + \underbrace{\langle a_1 - a, a_2 - a \rangle}_{D(A)} = a + D(A) \end{aligned}$$

$$D(H) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid mx + ny + pz + qw = 0\} \stackrel{q \neq 0}{=} \langle (1, 0, 0, -\frac{a}{q}), (0, 1, 0, -\frac{m}{q}), (0, 0, 1, -\frac{p}{q}) \rangle$$

$\dim D(H) = 3$, adică H este un hiperplan. Asadar $A \parallel H \iff D(A) \subseteq D(H) \iff$

$$\langle d_1, d_2 \rangle \subseteq D(H) \iff d_1, d_2 \in D(H) \iff \begin{cases} m(-q) + nq + p \cdot 0 + q(m-n) = 0 \\ m(-q) + n \cdot 0 + pq + q(m-p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Asadar $A \parallel H$, dar $a \notin H = D(H)$ (adică $\alpha \neq 0$). Într-adevăr

$$m(w+q) + n \cdot n + p \cdot p + q(q-m) = m^2 + mq + n^2 + p^2 + q^2 - mq = m^2 + n^2 + p^2 + q^2 > 0.$$

Prin urmare $A \cap H = \emptyset$ în acest caz, decorece altfel $x \in A \cap H \Rightarrow A \cap H = x + D(A) \cap D(H) = x + D(A) = A$ adică $\alpha \in A \subseteq H$.

6. Găsiți dimensiunea varietății liniare

$$\begin{cases} mx + ny + pz + qw = m + n + p + q \\ nx + py + qz + mw = m + n + p + q \\ px + qy + mz + nw = m + n + p + q \end{cases}$$

unde $mnpq$ este numărul dumneavoastră matricol.

SOLUȚIE.

Capitolul 3

Şirul ascendent dintre M şi $\text{af}(M)$

3.1 Teorema afină a lui Carathéodory

Teorema 3.1.1. Dacă V este un spațiu vectorial n -dimensional și $M \subseteq V$ este o mulțime nevidă, atunci

$$\text{af}(M) \stackrel{\text{Evidență}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid 1 \leq m \leq n+1, \lambda_i \in K, x_i \in M, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra că $\text{af}(M) \subseteq X$ considerăm $x \in \text{af}(M)$.
 Si $x_1, \dots, x_m \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ a.s. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ și $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.
 Dacă $m \leq n+1$, atunci nu avem nimic de demonstrat. Altfel, vectorii
 $x_2 - x, \dots, x_m - x_1$ sunt liniar dependenți, adică există scalari v_2, \dots, v_m ,
 nu toți nuli, astfel încât $\sum_{i=2}^m v_i (x_i - x_1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^m v_i x_i - \left(\sum_{i=2}^m v_i \right) x_1 = 0$
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m v_i x_i = 0$, unde $v_1 = -v_2 - \dots - v_m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m v_i = 0$. Considerăm $r \in \{2, \dots, m\}$
 a.s. $v_r \neq 0$ și observăm că

$$K = \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{v_r}{v_r} v_i \right) x_i$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{v_r}{v_r} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i - \frac{v_r}{v_r} \sum_{i=1}^m v_i = 1.$$

Cu alte cuvinte x este o combinație afină a vectorilor $x_1, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_m$
 din M , adică x este o combinație afină a $m-1$ vectori din M , decareu

$\lambda_r - \frac{v_r}{v_r} v_r = 0$. Dacă $m-1 \leq n+1$, atunci demonstrația este încheiată.
 Altfel repetăm acestă reducere până când numărul termenilor combinației
 affine care-l reprezintă pe x devine $\leq n+1$.

□

Problema 3.1.1. Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste corpul K , unde $K \neq \mathbb{Z}_2$. Se consideră aplicația

$$\alpha : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \quad \alpha(M) = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, t \in K\}$$

și iteratele $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha, \dots$. Să se arate că pentru orice $M \in \mathcal{P}(V)$ există un număr natural r astfel încât

$$\text{af}(M) = \alpha^r(M).$$

Să se arate că ipoteza $K \neq \mathbb{Z}_2$ este esențială.

Soluție. Mai întâi observăm că $A \in \mathcal{A}(V) \iff \alpha(A) \subseteq A$. În particular $\alpha(\text{af}(M)) \subseteq \text{af}(M)$. Așadar, incluziunea evidentă $M \subseteq \text{af}(M)$ ne arată că $\alpha(M) \subseteq \alpha(\text{af}(M)) \subseteq \text{af}(M)$, pentru orice mulțime $M \in \mathcal{P}(V)$.

Prin urmare avem

$$M \subseteq \alpha(M) \subseteq \alpha^2(M) \subseteq \dots \subseteq \alpha^k(M) \subseteq \dots \subseteq \text{af}(M)$$

pentru orice mulțime $M \in \mathcal{P}(V)$. În continuare vom arăta că pentru orice $M \in \mathcal{P}(V)$

$$\text{af}(M) \subseteq \alpha^{n-1}(M), \quad \text{unde } n = \dim(V).$$

In acest scop tratăm problema în două cazuri diferite, după cum caracteristica

$$\text{char}(K) := \text{ordinul elementului unitate } 1 \in K \text{ în grupul aditiv } (K, +)$$

a corpului K este doi sau diferită de doi.

Fie $x \in \text{af}(M)$ și $x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ astfel încât $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ și $x = \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_mx_m$. Folosind un argument de tip Carathéodory deducem că m poate fi ales $\leq n+1$.

Cazul I. $\text{char}(K) \neq 2$. Dacă $m \geq 3$, atunci există doi coeficienți, să spunem λ_1, λ_2 , astfel încât $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Într-adevăr, orice sistem liniar de forma

$$\begin{cases} \lambda_i + \lambda_j = 0 \\ \lambda_i + \lambda_k = 0 \\ \lambda_j + \lambda_k = 0 \end{cases}$$

are doar soluția trivială deoarece determinantul matricii sistemului este $-2 \neq 0$, iar dacă toate sumele $\lambda_i + \lambda_j$ ar fi zero, atunci ar rezulta că toți coeficienții $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ar fi zero, ceea ce ar contrazice faptul că $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Așadar avem

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_mx_m \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3x_3 + \dots + \lambda_mx_m \\ &= \mu_1y_1 + \lambda_3x_3 + \dots + \lambda_mx_m, \end{aligned}$$

unde $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ și $\mu_1 = \frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \in \alpha(M)$ și $x_3, \dots, x_m \in M \subseteq \alpha(M)$. Așadar x este o combinație afină de $m-1$ elemente din $\alpha(M)$ cu ponderile $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$. Dacă $m = 3$, atunci $x \in \alpha(M) \subseteq \alpha^{n-1}(M)$. Altfel continuăm procedeul de mai sus de reducere succesivă cu o unitate a lungimii combinațiilor affine și creșterea simultană cu o unitate a ordinului iteratelor lui α din care sunt luați vectorii combinației affine. După cel mult $m-2$ pași vom obține că $x \in \alpha^{m-2}(M) \subseteq \alpha^{n-1}(M)$.

Cazul II. $\text{char}(K) = 2$. Dacă există doi coeficienți având suma nenulă, atunci procedeul de reducere a lungimii combinației afine este același cu cel din primul caz. Altfel, suma oricărora doi coeficienți este nulă și deducem că $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$, adică $x = x_1 + \dots + x_m$, întrucât are loc și egalitatea $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Considerăm în continuare un scalar $r \in K \setminus \{0, 1\}$ și observăm că pentru $m \geq 3$ avem:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_m \\ &= r \frac{(1+r)x_1 + x_2}{r} + (1-r) \frac{x_3 - rx_1}{1-r} + x_4 + \dots + x_m \\ &= ry_1 + (1-r)y_2 + x_4 + \dots + x_m, \end{aligned}$$

unde $y_1 = \frac{(1+r)x_1 + x_2}{r} \in \alpha(M)$ și $y_2 = \frac{x_3 - rx_1}{1-r} \in \alpha(M)$. Așadar x este, și în acest caz, o combinație afină de $m-1$ elemente din $\alpha(M)$ cu ponderile $r, 1-r, 1, \dots, 1$. Din acest punct, argumentul continuă precum în cazul precedent.

În sfârșit, observăm că $\alpha'(M) = M \neq \text{af}(M) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pentru orice $r \in \mathbb{N}^*$, unde $M = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1})\} \subseteq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3.2 Teorema dimensiunii. Aplicații

Propoziția 3.2.1. Dacă $A, B \in \mathcal{A}(V)$, $a \in A$, $b \in B$, atunci $\text{af}(A \cup B) = a + D(A) + D(B) + \langle b - a \rangle$.

Demonstrație.

□

Observația 3.2.1. Invelitoarea afină $\text{af}(A \cup B)$ a reuniunii $A \cup B$ a două varietăți liniare A, B se mai notează și cu $\text{af}(A, B)$.

Propoziția 3.2.2. Fie $A, B \in \mathcal{A}(V)$, $a \in A$, $b \in B$. Atunci $A \cap B \neq \emptyset \iff \langle b - a \rangle \subseteq D(A) + D(B)$.

Demonstrație.

□

Propoziția 3.2.3. Dacă varietățile liniare A și B au un punct comun a , atunci

$$\text{af}(A \cup B) = a + D(A) + D(B) \text{ și } A \cap B = a + D(A) \cap D(B).$$

Demonstrație.

□

Exemplul 3.2.1. Dacă A, B sunt varietăți liniare într-un spațiu vectorial peste $K \neq \mathbb{Z}_2$ și $A \cap B \neq \emptyset$, atunci

$$\text{af}(A \cup B) = \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, t \in K\}. \quad (3.2.1)$$

Ipotezele $A \cap B \neq \emptyset$ și $K \neq \mathbb{Z}_2$ sunt esențiale.

Soluție. Fie $x \in A \cap B$ și $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$. Atunci $A = x + D(A)$, $B = x + D(B)$ și avem succesiv:

$$\begin{aligned} \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, t \in K\} &= \{t(x+u) + (1-t)(x+v) \mid u \in D(A), v \in D(B), t \in K\} \\ &= x + \{tu + (1-t)v \mid u \in D(A), v \in D(B), t \in K\} \\ &\stackrel{*}{=} x + D(A) + D(B) = \text{af}(A \cup B). \end{aligned}$$

În egalitatea '*', incuziunea " \subseteq " este evidentă. Pentru incluziunea opusă " \supseteq " observăm că

$$x + u + v = x + \alpha(\alpha^{-1}u) + (1-\alpha)((1-\alpha)^{-1}v),$$

pentru orice $u \in D(A)$, $v \in D(B)$. Dacă corpul K al scalarilor lui V are doar două elemente, atunci egalitatea (3.2.1) nu are loc în general. Într-adevăr, dacă $K = \mathbb{Z}_2$, atunci $A = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1})\}$, $B = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0})\}$ sunt subspații vectoriale ale lui $V = \mathbb{Z}_2^2$ și deci $\text{af}(A, B)$ este un subspațiu al lui $V = \mathbb{Z}_2^2$. Pe de altă parte

$$\{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, t \in K\} = A \cup B = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{0})\}$$

nu este varietate liniară tocmai pentru că elementul nul aparține mulțimii, iar aceasta nu este subspațiu vectorial. Faptul că și ipoteza $A \cap B \neq \emptyset$ este esențială va rezulta din următorul exemplu.

Observația 3.2.2. Fie V un spațiu vectorial peste corpul K .

1. Dacă $A, B \in \mathcal{A}(V)$ sunt varietăți liniare astfel încât $A \cap B \neq \emptyset$, atunci se poate ușor arăta că $\alpha(A \cup B) = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid a \in A, b \in B, \lambda \in K\}$ unde α este funcția (2.2.1). Egalitatea 3.2.1 ne arată că pentru $M = A \cup B$ învelitoarea afină $\text{af}(M) = \text{af}(A \cup B)$ este acoperită de $\alpha(M)$, adică egalitatea $\text{af}(M) = \alpha^r(M)$ are loc pentru $r = 1$.

2. Dacă A este o varietate liniară a spațiului vectorial V de dimensiune cel puțin unu și $c \in V \setminus A$ un punct dat, atunci $\alpha(\{c\} \cup A) = \bigcup_{a \in A} \text{af}(a, c)$. Faptul că $\alpha(\{c\} \cup A) = \bigcup_{a \in A} \text{af}(a, c)$ nu este o varietate liniară (a se vedea problema 3.3(1)) arată că egalitatea $\alpha^r(\{c\} \cup A) = \text{af}(\{c\} \cup A)$ are loc pentru un $r \geq 2$. Dacă $K \not\cong \mathbb{Z}_2$, se poate arăta că

$$\alpha^2(\{c\} \cup A) = \text{af}(\{c\} \cup A).$$

Teorema 3.2.4. (Teorema dimensiunii) Fie A, B varietăți liniare nevide finit dimensionale.

1. Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, atunci $\dim \text{af}(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.
2. Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $\dim \text{af}(A \cup B) = \dim(D(A) + D(B)) + 1$.

Propoziția 3.2.5. Presupunem că $\dim(V) = n$. Dacă varietatea afină $A \in \mathcal{A}(V)$ nu are niciun punct comun cu hiperplanul H , atunci $A \parallel H$.

Demonstrație.

□

Observația 3.2.3. Dacă dreapta L intersectează hiperplanul H într-un punct, atunci orice dreaptă paralelă L' la L intersectează H tot într-un punct. Într-adevăr, altfel am avea $L' \parallel H$, adică $L \parallel H$ și deci $L \subseteq H$ sau $L \cap H = \emptyset$.

3.3 Probleme

1. Fie A o varietate liniară de dimensiune cel puțin unu a unui spațiu vectorial V și $c \in V \setminus A$ un punct dat. Este mulțimea

$$\bigcup_{a \in A} \text{af}(a, c)$$

o varietate liniară?

Soluție.

□

2. În structura afină a spațiului \mathbb{R}^4 considerăm punctul $x = (m, n, p, q)$ și hiperplanul

$$(H)(m+1)x - ny + pz - qw = 0,$$

unde \overline{mnpq} este numărul dumneavoastră matricol. Decideți dacă mulțimea

$$\bigcup_{a \in H} \text{af}(a, x)$$

este sau nu varietate liniară și justificați răspunsul dat.

SOLUȚIE.

3. În structura afină a unui spațiu vectorial peste un corp $K \neq \mathbb{Z}_2$ considerăm două varietăți liniare A și B nevide și de dimensiuni diferite. Arătați că mulțimea

$$\bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b)$$

este varietate liniară dacă și numai dacă $A \cap B \neq \emptyset$.

Soluție.

□

4. Considerăm, în \mathbb{R}^4 , varietățile liniare

$$A = (m + q, n, p, q - m) + \langle (-q, q, 0, m - n), (-q, q, 0, m - n) \rangle \text{ și } H : mx + ny + pz + qw = 0,$$

unde \overline{mnpq} este numărul dumneavoastră matricol. Este mulțimea

$$\bigcup_{a \in A, h \in H} \text{af}(a, h)$$

o varietate liniară. Argumentați răspunsul dat.

Soluție.

□

5. În structura afină a unui spațiu vectorial peste un corp $K \not\simeq \mathbb{Z}_2$ considerăm două varietăți liniare A și B nevide și de dimensiuni egale. Arătați că mulțimea

$$\bigcup_{a \in A, b \in B} \text{af}(a, b)$$

este varietate liniară dacă și numai dacă $A \parallel B$ sau $A \cap B \neq \emptyset$.

Soluție.

□

6. Să se arate că dacă în structura afină a unui spațiu vectorial V 4-dimensional două hiperplane au un punct comun, atunci ele au un plan comun.

Soluție.

□

7. Se consideră varietățile liniare A și B astfel încât $A \cap B = \emptyset$ și $\dim A = \dim B = p$. Să se arate că $A \parallel B$ dacă și numai dacă A și B sunt incluse într-o varietate de dimensiune $p + 1$.

Soluție.

□

8. Se consideră în \mathbb{R}^5 vectorii $a = (1, 0, 0, 2, 0)$, $b = (0, 2, 0, 0, 1)$, $c = (1, 2, 0, 0, 0)$ și $d = (0, 0, 0, 2, 1)$ și varietățile liniare $A = a + \langle b, c \rangle$, $B = c + \langle b, d \rangle$. Să se afle $A \cap B$ și $\text{af}(A \cup B)$.

Soluție.

□

9. Să se determine toate pozițiile reciproce posibile a două plane α și β dintr-un spațiu vectorial 4-dimensional precizând în fiecare caz și $\dim(\text{af}(\alpha \cup \beta))$.

Soluție.

□

10. Într-un spațiu vectorial n -dimensional fie L_1 și L_2 două varietăți liniare de dimensiune p respectiv q ($p > q$, $p + q \leq n - 1$), astfel încât $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ și $L_1 \not\parallel L_2$. Să se determine multimea valorilor posibile pentru $\dim \text{af}(L_1 \cup L_2)$.

Soluție.

□

11. Într-un spațiu vectorial $(m + n + p + q + 2)$ -dimensional fie L_1 și L_2 două varietăți liniare de dimensiune $p + 1$ respectiv $q + 1$ astfel încât $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ și $L_1 \not\parallel L_2$. Să se arate că multimea valorilor posibile pentru $\dim \text{af}(L_1 \cup L_2)$ este

$$\{\max(p + 1, q + 1) + 2, \dots, p + q + 3\},$$

unde \overline{mnpq} este numărul dumneavoastră matricol.

Soluție.

□

12. În structura afină a unui spațiu vectorial n -dimensional considerăm două hiperplane. Care sunt valorile posibile pentru $\dim(H_1 \cap H_2)$ și $\dim \text{af}(H_1 \cup H_2)$?

Soluție.

□

13. În structura afină a unui spațiu vectorial n -dimensional se consideră un hiperplan H și o varietate lininară p -dimensională ($p < n - 1$). Să se arate că atunci are loc una dintre relațiile:
- (a) $\dim(H \cap A_p) = p - 1$;
 - (b) $H \parallel A_p$.

Soluție.

□

Capitolul 4

Proprietăți laticeale. Multimi convexe

4.1 Proprietăți laticeale ale structurii affine.

Teorema 4.1.1. Structura afină $\mathcal{A}(V)$ este o latice completă. Pentru o familie oarecare $\{A_i\}_{i \in I}$ de varietăți liniare ale lui V avem:

$$\inf_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ și } \sup_{i \in I} A_i = \text{af}(\bigcup_{i \in I} A_i).$$

Observația 4.1.1. 1. Dacă $A, B \in \mathcal{A}(V)$ și $a \in A, b \in B$, atunci $A \vee B = a + D(A) + D(B) + \langle b - a \rangle$ și $A \wedge B = A \cap B$.

2. Dacă $A \cap B \neq \emptyset$ și $a \in A \cap B$, atunci $A \vee B = a + D(A) + D(B)$ și $A \wedge B = A \cap B = a + D(A) \cap D(B)$.

Propoziția 4.1.2. Dacă spațiile vectoriale V și W , având scalarii în același corp K , sunt izomorfe, atunci laticele $\mathcal{A}(V)$ și $\mathcal{A}(W)$ sunt izomorfe. Dacă $f : V \rightarrow W$ este un izomorfism liniar, atunci aplicația $\bar{f} : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(W)$, $\bar{f}(A) := \{f(a) \mid a \in A\} = f(A)$ este un izomorfism laticeal.

Pentru demonstrația propoziției 4.1.2 se pot folosi problemele 2.3(1) și 2.3(2).

4.2 Structura afină a spațiului vectorial K^n

Din Propoziția 4.1.2 reiese importanța structurii affine $\mathcal{A}(K^n)$ a lui K^n . Într-adevăr, orice spațiu vectorial n -dimensional peste K este izomorf cu K^n , structurile affine ale spațiilor vectoriale n -dimensionale fiind laticeal izomorfe cu $\mathcal{A}(K^n)$. Fie $A = x^0 + D(A) \in \mathcal{A}(K^n)$, iar $\{d_1, \dots, d_r\}$ o bază a lui $D(A)$, $x^0 = (x_1, \dots, x_n)$ și $d_j = (d_{1j}, \dots, d_{nj})$, $j = 1, 2, \dots, r$. Așadar

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^r d_{ij} \lambda_j, \lambda_j \in K \right\}.$$

Relațiile

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^r d_{ij} \lambda_j, i = 1, \dots, n \quad (4.2.1)$$

se numesc *ecuațiile parametrice* ale varietății liniare A .

Exemplul 4.2.1. Ecuațiile parametrice ale dreptei $\Delta = (a_1, \dots, a_n) + \langle (p_1, \dots, p_n) \rangle$ sunt

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tp_1 \\ x_2 = a_2 + tp_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tp_n \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.2)$$

Prin eliminarea parametrului t din ecuațiile parametrice (4.2.2) obținem ecuațiile canonice ale dreptei Δ , adică

$$(\Delta) \frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{p_n}.$$

Pe de altă parte, soluțiile sistemelor liniare sunt varietăți liniare care de fapt epuizează întreaga structură afină a lui K^n , adică orice varietate liniară a lui K^n este soluția unui sistem de ecuații liniare [1, pp. 37, 93]. Cu alte cuvinte, orice varietate liniară $A \in \mathcal{A}(K^n)$ poate fi reprezentată și astfel:

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Condițiile care figurează aici, adică

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, m,$$

se numesc *ecuațiile implicate* ale varietății liniare A . Intersecția a două varietăți liniare $A, B \in \mathcal{A}(K^n)$ se caracterizează ușor dacă A și B sunt date prin sisteme de ecuații. Mai precis sistemul de ecuații a lui $A \cap B$ se obține luând ecuațiile lui A și B . Varietatea liniară $A \vee B$, subîntinsă de varietățile liniare A și B , se caracterizează însă mai ușor dacă avem reprezentările parametrice ale varietăților A și B .

Exemplul 4.2.2. Multimea $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n + \beta = 0\}$, unde $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$ este un hiperplan al lui \mathbb{R}^n care este notat prin $H : \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n + \beta = 0$ (Vezi Problema 9/Lista 1).

4.3 Submulțimile convexe ale unui spațiu vectorial real

Definiția 4.3.1. Fie V un spațiu vectorial real. O mulțime $C \subseteq V$ se numește *convexă* dacă pentru orice $x, y \in C$ segmentul $[xy] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$ este conținut în C .

Observația 4.3.1. 1. (**Temă de casă**) Dacă $\{C_i\}_{i \in I}$ este o familie de submulțimi convexe ale spațiului vectorial real V , atunci intersecția $\bigcap_{i \in I} C_i$ este de asemenea o mulțime convexă.

2. (**Temă de casă**) Submulțimea X a spațiului vectorial real V este convexă dacă și numai dacă

$$\forall m \geq 1, x_1, \dots, x_m \in X, t_1, \dots, t_m \in [0, 1], t_1 + \dots + t_m = 1 \Rightarrow t_1x_1 + \dots + t_mx_m \in X.$$

Definiția 4.3.2. O combinație liniară $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ a.î. $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$ și $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, se numește *combinație convexă*.

Definiția 4.3.3. Dacă M este o submulțime a lui V , atunci mulțimea

$$\text{conv}(M) := \bigcap \{C \mid M \subseteq C \text{ și } C \text{ - convexă}\}$$

se numește *învelitoarea convexă* sau *închiderea convexă* a lui M .

Propoziția 4.3.1. (*Proprietățile operatorului conv*)

1. $M \subseteq \text{conv}(M)$ și $\text{conv}(M)$ este o mulțime convexă pentru orice $M \in \mathcal{P}(V)$.
2. Dacă $M \subseteq C$ și C este convexă, atunci $\text{conv}(M) \subseteq C$.¹
3. $M \subseteq N \implies \text{conv}(M) \subseteq \text{conv}(N)$.²
4. $\text{conv}(M) = M$ dacă și numai dacă M este convexă.
5. $\text{conv}(\text{conv}(M)) = \text{conv}(M)$ pentru orice $M \in \mathcal{P}(V)$.³

DEMONSTRAȚIE. ([Temă de casă](#))

¹ $\text{conv}(M)$ este cea mai mică mulțime convexă ce conține mulțimea M .

²Operatorul "conv" este cresător.

³Operatorul "conv" este idempotent.

Propoziția 4.3.2. Dacă V este un spațiu vectorial real și $M \subseteq V$ este o mulțime nevidă, atunci

$$\text{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid m \geq 1, x_i \in M, \lambda_i \in [0, 1], i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

DEMONSTRAȚIE. (Temă de casă)

Teorema lui Carathéodory

Teorema 4.3.3. (Carathéodory) Dacă V este un spațiu vectorial real n -dimensional și $M \subseteq V$ este o mulțime nevidă, atunci

$$\text{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid 1 \leq m \leq n+1, x_i \in M, \lambda_i \in [0, 1], i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Demonstrație. Pentru a justifica această egalitate observăm în primul rând că

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid 1 \leq m \leq n+1, \lambda_i \in K, x_i \in M, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \subseteq \text{conv}(M).$$

Pentru incluziunea opusă considerăm un element $x =$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \text{conv}(M), \text{ adică } x_1, \dots, x_m \in M \text{ și } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

și arătăm că m poate fi ales $\leq n+1$. Dacă $m \leq n+1$, atunci nu mai avem ce demonstra. Altfel vectorii $x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1$ sunt liniar dependenți, adică există scalarii v_2, \dots, v_m , nu toți nuli, astfel încât

$$\sum_{k=2}^m v_k (x_k - x_1) = 0, \text{ sau, echivalent, } \sum_{k=1}^m v_k x_k = 0, \text{ unde}$$

$$v_1 = -v_2 - \dots - v_m. \text{ Așadar } \sum_{k=1}^m v_k x_k = 0 \text{ și } \sum_{k=1}^m v_k = 0$$

și nu toți scalarii v_1, v_2, \dots, v_m sunt nuli. Mai departe observăm că

$$x = \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{v_r} v_i \right) x_i, \quad \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{v_r} v_i \right) = 1,,$$

unde

$$\frac{\lambda_r}{v_r} := \min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\lambda_j}{v_j} : v_j > 0, \right\}$$

și deci $\lambda_i - \frac{\lambda_r}{v_r} v_i \geq 0$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$. Prin urmare x este combinație convexă de $m-1$ elemente din M , deoarece $\lambda_r - \frac{\lambda_r}{v_r} v_r = 0$. Dacă $m-1 > n+1$ continuăm procedeul până când 'lungimea' combinației afine devine $\leq n+1$. \square

4.4 Probleme

1. Dacă C_1, C_2 sunt două submulțimi convexe ale lui \mathbb{R}^n , arătați că $C_1 + C_2$ este de asemenea convexă.

SOLUȚIE. Într-adevăr, dacă $x_1, y_1 \in C_1, x_2, y_2 \in C_2$ și $t \in [0, 1]$, atunci avem

$$(1-t)(x_1 + x_2) + t(y_1 + y_2) = \underbrace{(1-t)x_1 + ty_1}_{\in C_1} + \underbrace{(1-t)x_2 + ty_2}_{\in C_2} \in C_1 + C_2.$$

2. În spațiul vectorial \mathbb{R}^2 vârfurile unui triunghi sunt $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$. Să se arate că punctul $M(x, y)$ este în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} S_{12}(x, y)S_{12}(x_3, y_3) &> 0, \\ S_{23}(x, y)S_{23}(x_1, y_1) &> 0, \\ S_{31}(x, y)S_{31}(x_2, y_2) &> 0, \end{aligned}$$

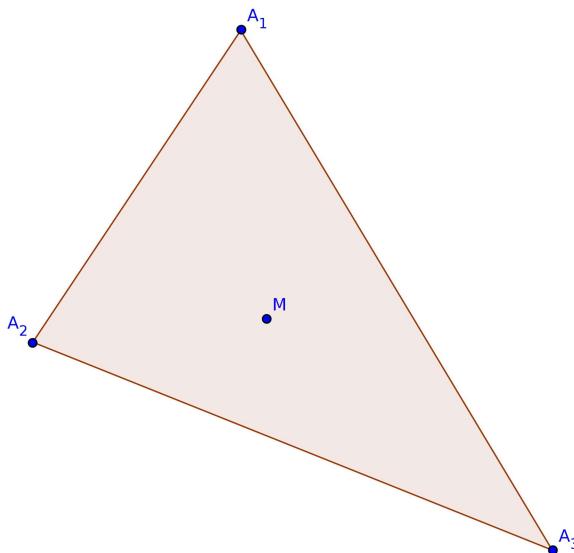
unde

$$S_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}.$$

SOLUȚIE. Observăm mai întâi că ecuația dreptei A_iA_j este $S_{ij}(x, y) = 1$ și amintim că două puncte $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ sunt de aceeași parte a dreptei de ecuație $F(x, y) := ax + by + c = 0$ dacă și numai dacă $F(x_P, y_P)$ și $F(x_Q, y_Q)$ au același semn, adică $F(x_P, y_P) \cdot F(x_Q, y_Q) > 0$. Într-adevăr, unul dintre cele două semiplane determinate de dreapta d este caracterizat de inegalitate $F(x, y) > 0$, iar celălalt semiplan este caracterizat de inegalitate $F(x, y) < 0$. Așadar avem

$$M(x, y) \in \text{int}(\Delta A_1A_2A_3) \text{ dacă și numai dacă}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{punctele } M, A_1 \text{ sunt de aceeași parte a dreptei } A_2A_3 \text{ adică } S_{23}(x, y)S_{23}(x_1, y_1) > 0 \\ \text{punctele } M, A_2 \text{ sunt de aceeași parte a dreptei } A_1A_3 \text{ adică } S_{31}(x, y)S_{31}(x_2, y_2) > 0 \\ \text{punctele } M, A_3 \text{ sunt de aceeași parte a dreptei } A_1A_2 \text{ adică } S_{12}(x, y)S_{12}(x_3, y_3) > 0. \end{array} \right.$$



3. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi convexe disjuncte și nevide, iar x un punct din \mathbb{R}^n . Arătați că

$$\text{conv}(\{x\} \cup A) = \{ta + (1-t)x \mid a \in A, t \in [0, 1]\}.$$

Arătați că $A \cap \text{conv}(\{x\} \cup B) = \emptyset$ sau $B \cap \text{conv}(\{x\} \cup A) = \emptyset$.

SOLUȚIE. Incluziunea $\{ta + (1-t)x \mid a \in A, t \in [0, 1]\} \subseteq \text{conv}(\{x\} \cup A)$ este evidentă. Invers, dacă $y = t_0x + t_1a_1 + \dots + t_ma_m \in \text{conv}(\{x\} \cup A)$, adică $a_1, \dots, a_m \in A$ și $t_0, t_1, \dots, t_m \in [0, 1]$

sunt astfel încât $t_0 + t_1 + \dots + t_m = 1$, atunci

$$y = t_0x + (\underbrace{t_1 + \dots + t_m}_{:=t \in [0,1]}) \underbrace{\frac{t_1a_1 + \dots + t_ma_m}{t_1 + \dots + t_m}}_{:=a \in A} \in \{ta + (1-t)x \mid a \in A, t \in [0,1]\}.$$

Presupunem că $A \cap \text{conv}(\{x\} \cup B) \neq \emptyset$ și $B \cap \text{conv}(\{x\} \cup A) \neq \emptyset$, adică există $t_1, t_2 \in [0,1]$ și $a \in A, b \in B$ astfel încât

$$a_1 := t_1b + (1-t_1)x \in A \text{ și } b_1 := t_2a + (1-t_2)x \in B.$$

Așadar

$$\begin{aligned} (1-t_2)a_1 - (1-t_1)b_1 &= (1-t_2)t_1b - (1-t_1)t_2a \\ \Leftrightarrow (1-t_2)a_1 + (1-t_1)t_2a &= (1-t_1)b_1 + (1-t_2)t_1b. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Dacă $t_1 = 1$ sau $t_2 = 1$, atunci $A \ni a_1 = b \in B$ sau $B \ni b_1 = a \in A$, imposibil deoarece A și B au fost presupuse a fi disjuncte. Așadar, $0 \leq t_1, t_2 < 1$ și deci $0 \geq 1 - t_1t_2 > 0$. Prin urmare, înținând cont de faptul că

$$(1-t_2) + (1-t_1)t_2 = (1-t_1) + (1-t_2)t_1 = 1 - t_1t_2$$

și de egalitatea (4.4.1) deducem că

$$A \ni \frac{(1-t_2)a_1 + (1-t_1)t_2a}{1 - t_1t_2} = \frac{(1-t_1)b_1 + (1-t_2)t_1b}{1 - t_1t_2} \in B,$$

adică $A \cap B \neq \emptyset$, imposibil deoarece A și B au fost presupuse a fi disjuncte.

4. Să se arate că pentru două submulțimi oarecare A și B ale lui \mathbb{R}^n are loc egalitatea:

$$\text{conv}(A) + \text{conv}(B) = \text{conv}(A + B).$$

SOLUȚIE. Deoarece $A \subseteq \text{conv}(A)$, $B \subseteq \text{conv}(B)$ deducem

$$\begin{aligned} A + B \subseteq \text{conv}(A) + \text{conv}(B) &\implies \text{conv}(A + B) \subseteq \text{conv}(\text{conv}(A) + \text{conv}(B)) \\ &= \text{conv}(A) + \text{conv}(B), \end{aligned}$$

ultima egalitate având loc deoarece suma $\text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ a mulțimilor convexe $\text{conv}(A)$, $\text{conv}(B)$ este, conform problemei 1, convexă.

Pentru a demonstra inclusiunea opusă, considerăm $x = \sum_{i=1}^n s_i a_i \in \text{conv}(A)$, $y = \sum_{j=1}^n t_j b_j \in \text{conv}(B)$, unde $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^n t_j = 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$.

Prin urmare

$$\begin{aligned} x + y &= \sum_{i=1}^n s_i a_i + \sum_{j=1}^n t_j b_j = \left(\sum_{j=1}^n t_j \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) \left(\sum_{j=1}^n t_j b_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n t_j s_i a_i + \sum_{i,j=1}^n s_i t_j b_j = \sum_{i,j=1}^n t_j s_i (a_i + b_j) \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B), \end{aligned}$$

ultima relație având loc deoarece $s_i t_j \in [0,1]$ și $\sum_{i,j=1}^n t_j s_i = \left(\sum_{j=1}^n t_j \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

5. Să se arate că rădăcinile polinomului derivat al unui polinom neconstant cu coeficienți complecși aparțin învelitorii convexe a rădăcinilor polinomului dat.
(Teorema Gauss-Lucas)

SOLUȚIE. Presupunem că z_1, \dots, z_n sunt rădăcinile polinomului $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, adică $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ și deci

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}.$$

Fie z o soluție a polinomului P' , adică $P'(z) = 0$. Din acest punct separăm soluția în două cazuri:

(I) $z \in \{z_1, \dots, z_n\} \subset \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$.

(II) $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. În acest caz avem

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{\bar{z} - \bar{z}_i}{|z - z_i|^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{z - z_i}{|z - z_i|^2} = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n \frac{z}{|z - z_i|^2} - \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{|z - z_j|^2} = 0 \iff z \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - z_i|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z - z_j|^2} z_j = 0 \\ &\iff z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - z_i|^2}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z - z_j|^2} z_j \\ &\iff z = \sum_{j=1}^n \frac{\frac{1}{|z - z_j|^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - z_i|^2}} z_j \in \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}, \end{aligned}$$

deoarece

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - z_i|^2}} \in [0, 1], \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \text{ și } \sum_{j=1}^n \frac{\frac{1}{|z - z_j|^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - z_i|^2}} = 1.$$

Capitolul 5

Teoremele lui Radon, Helly, Minkowsky, Krein-Milman și Motzkin

5.1 Teorema lui Radon

Teorema 5.1.1. (Radon) Dacă M este submulțime finită a unui spațiu vectorial real n -dimensional formată din $m \geq n + 2$ puncte, atunci există submulțimile disjuncte M_1, M_2 ale lui M astfel încât $M = M_1 \cup M_2$ și $\text{conv}(M_1) \cap \text{conv}(M_2) \neq \emptyset$.

Demonstrație. Dacă $M = \{a_1, \dots, a_m\}$, atunci $a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ sunt liniar dependente deoarece $m - 1 \geq n + 1$. Așadar există scalarii $\alpha_2, \dots, \alpha_m$, nu toți nuli, astfel încât

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i(a_i - a_1) = 0 \text{ adică } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = 0,$$

unde $\alpha_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_m$, sau, echivalent $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 0$. Prin urmare, o parte dintre scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sunt pozitivi sau nuli, iar restul sunt negativi. Renumerotând la nevoie, putem presupune că $\alpha_i \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, h$, $\alpha_i < 0$ pentru $j = h+1, \dots, m$, adică $\lambda := \alpha_1 + \dots + \alpha_h = -\alpha_{h+1} - \dots - \alpha_m > 0$. Egalitatea $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = 0$ arată că $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_h a_h = -\alpha_{h+1} a_{h+1} - \dots - \alpha_m a_m$, adică

$$\text{conv}(\{a_1, \dots, a_h\}) \ni \frac{\alpha_1}{\lambda} a_1 + \dots + \frac{\alpha_h}{\lambda} a_h = -\frac{\alpha_{h+1}}{\lambda} a_{h+1} - \dots - \frac{\alpha_m}{\lambda} a_m \in \text{conv}(\{a_{h+1}, \dots, a_m\}).$$

Alegem $M_1 = \{a_1, \dots, a_h\}$, $M_2 = \{a_{h+1}, \dots, a_m\}$. \square

5.2 Teorema lui Helly

Teorema 5.2.1. (Helly) Dacă submulțimile convexe M_1, \dots, M_r ale spațiului afin \mathbb{R}^n sunt astfel încât $r \geq n + 1$ și, luate câte $n + 1$ în toate modurile posibile, au intersecția nevidă, atunci

$$M_1 \cap \dots \cap M_r \neq \emptyset.$$

Demonstrație. Pentru $r = n + 1$ nu avem nimic de demonstrat. Presupunem că $r > n + 1$ și că afirmația este adevărată pentru orice sistem de $r - 1$ mulțimi care satisfac condițiile din enunț. Rezultă că mulțimea $B_i := M_1 \cap \dots \cap \widehat{M}_i \cap \dots \cap M_r$ este nevidă pentru orice $i \in \{1, \dots, r\}$, unde accentul circumflex indică omisiunea, și considerăm $x_i \in B_i$ pentru fiecare $i \in \{1, \dots, r\}$. Renumerotând la nevoie, există $h < r$ astfel încât

$$\text{conv}(\{x_1, \dots, x_h\}) \cap \text{conv}(\{x_{h+1}, \dots, x_r\}) \neq \emptyset.$$

Dar

$$\text{conv}(\{x_1, \dots, x_h\}) \subseteq \text{conv}(B_1 \cup \dots \cup B_h) \subseteq M_{h+1} \cap \dots \cap M_r$$

și

$$\text{conv}(\{x_{h+1}, \dots, x_r\}) \subseteq \text{conv}(B_{h+1} \cup \dots \cup B_r) \subseteq M_1 \cap \dots \cap M_h$$

deoarece $B_1 \cup \dots \cup B_h \subseteq M_{h+1} \cap \dots \cap M_r$ și $B_{h+1} \cup \dots \cup B_r \subseteq M_1 \cap \dots \cap M_h$, adică

$$\emptyset \neq \text{conv}(\{x_1, \dots, x_h\}) \cap \text{conv}(\{x_{h+1}, \dots, x_r\}) \subseteq M_1 \cap \dots \cap M_h \cap M_{h+1} \cap \dots \cap M'_r.$$

□

5.3 Teoremele lui Minkowski, Krein-Milman și Motzkin

Definiția 5.3.1. Un punct extremal al mulțimii convexe C este un punct $x \in C$ cu următoarea proprietate

$$\lambda y + (1 - \lambda)z = x, y, z \in C, \lambda \in (0, 1) \implies y = z = x.$$

Teorema 5.3.1. (Minkowski) Orice submulțime convexă și compactă a lui \mathbb{R}^n este închiderea convexă a mulțimii punctelor sale extreme.

Teorema 5.3.2. (Krein-Milman) Orice submulțime convexă și compactă K a unui spațiu local convex poate fi reprezentată sub forma $K = \text{cl conv ext } K$, unde $\text{ext } K$ este mulțimea punctelor extreme ale lui K .

Teorema 5.3.3. (Motzkin) Orice mulțime poliedrală este suma (Minkowski) dintre un politop și un con convex.

5.4 Probleme

1. Găsiți o familie (infinită) de mulțimi convexe din plan având intersecția vidă, iar intersecția oricărora 3 mulțimi din familie este nevidă.

SOLUȚIE.

2. Se consideră în plan o mulțime finită cu proprietatea că oricare trei puncte ale mulțimii sunt conținute într-un disc de rază 1. Să se arate că există un disc de rază 1 care conține toate punctele mulțimii date.

SOLUȚIE.

3. Considerăm în plan n segmente paralele astfel încât pentru oricare 3 dintre ele există o dreaptă care le intersectează. Să se arate că există o dreaptă care intersectează toate segmentele.

SOLUȚIE.

4. Considerăm în plan n segmente paralele astfel încât pentru oricare 4 dintre ele există o parabolă, cu axa paralelă cu dreptele lor suport, care le intersectează. Să se arate că există o parabolă care intersectează toate segmentele.

SOLUȚIE.

5. (Jung) Să se arate că orice mulțime finită din plan de diametru 1 poate fi acoperită de un disc de rază $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

SOLUȚIE.

