Curs 6

Algebră

Sisteme de ecuații liniare

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$(K,+,\cdot)$ corp comutativ

$a_{ij}\in K$ $\quad 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

$b_i\in K$ $\quad 1\le i\le m$

$$(S)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad 1\le i\le m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(S) $\quad AX=B$, $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ matricea sist.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ matricea extinsă

Dacă $B = O_{m \times n}$ atunci sist s.m. omogen

Sistemul

(S_0) $AX = 0$ se num. sistemul (liniar) omogen

asociat sistemului liniar (S)

Obs: Un sistem omogen este întotdeauna compatibil

pt că admite sol nulă (banală) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = O_m$

(S) $A \cdot X = B$

Obs: Dacă $m = n$ și $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$A^{-1} \mid A \cdot X = B$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n} X = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$ - regula lui Cramer (format matriceal)

- prin dezvoltare se obțin formulele din liceu

$x_i = \Delta^{-1} \cdot \Delta$, $\Delta = \det A$, Δ_i = det care se obț din Δ înlocuind col i cu col term li[ber]

în $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{C}$ $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

Teorema (lui Kronecker Capelli): Un sist liniar (S) este compatibil dacă și numai dacă $rang\, A = rang\, \overline{A}$

Dem: „$\Rightarrow$" (S) este compatibil $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_n \in K$ a.î.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i = b_m, \quad 1 \le i \le m$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ deci col b este o comb liniară a coloanelor matricei A

$\Rightarrow rang\, A = rang\, \overline{A}$

„$\Leftarrow$" $rang\, A = rang\, \overline{A} \Rightarrow$ nr de col liniar independente din A = nr de col liniar independente din $\overline{A}$

$\Rightarrow$ Col term liberi b este dependentă de celelalte col din A $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots \alpha_n \in K$ sol a sist

Teorema (lui Rouché): (S) este compatibil $\Leftrightarrow$ toți determinanții caracteristici sunt nuli (dacă există)

Reamintim: Rangul lui A se obține dintr-un minor principal de dim $r \times r$ care este nenul și are prop că bordându-l cu lin. și col din A, toți det obț. sunt nuli.

Determinanții caracteristici se obțin din minorul principal bordat cu col termenilor liberi și cu altă linie (! ∃)

$\boxed{\text{nr } n_c = m - r}$ → câte lin putem adăuga

$r_{max} = m$

Obs: Nr det carac este $m - r$

Rezolvarea sist (S):

1) Stabilim compatibilitatea cu ajutorul T lui Rouché

- dacă sist e incompatibil ⇒ ∄ sol
- dacă sist e compatibil ⇒ ec ~~și~~ care apar în minor sunt principale ⇒ restul le ignorăm

→ Nec care apar în minorul principal sunt pr
→ Nec care apar în minorul secundar sunt se

⇒ tratate ca parametrii

Nec principale se găsesc cu ajutorul lui Cramer din sist ~~matrice~~ cu matricea pătratică de dim $r \times r$. (în func. de parametrii

Transformări elementare

Def: Prin transf elem înțelegem una dintre transf urm aplicate asupra unei matrice $A \in M_{mn}(K)$

(1) Permutarea a două linii (coloane)

(2) Înmulțirea unei linii (col) înmulțită cu un scalar nenul

(3) Adunarea unei linii (col) înmulțită cu un scalar $\lambda \in K$ la o altă linie (col

Def: Prin transf elem aplicată asupra unui sist (S) înțelegem o transf elem aplicată asupra liniilor matricii $\bar{A}$

Obs: Sist obținute prin transf elem ca și mai sus sunt echivalente în sensul că au aceleași soluții

Obs: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=-1 \quad | \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ -2x-4y=2 \end{cases} \oplus$

$$-3y=5$$

$$y=-\frac{5}{3}$$

$$x=\frac{13}{3}$$

<u>Calculul rangului unei matrici:</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow[L_3-L_1]{L_2-2L_1} \text{rang}A = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang } A = 3$

În general dacă prin transf elem aducem matricea A la ~~form~~ una dintre formele:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r+1} & \dots & & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

perm col toate prime trec în față

atunci rang $A = r$

Rezolvarea sist de ec prin metoda eliminării (Gauss)

Exemplu: Considerăm sistemul cu $\bar{A}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \quad |(-2)$$

$$-2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ -x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

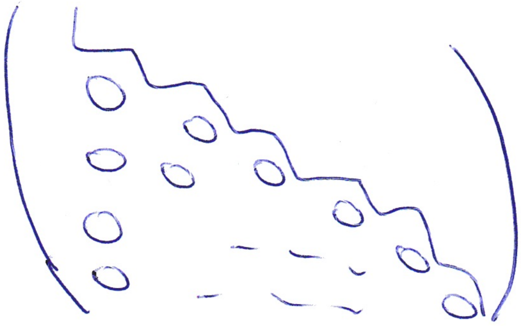
(2) $A' = \left(\boxed{\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{matrix}} \begin{matrix} \cancel{a_{1r}} \\ a_{1r} \\ a_{1n} \end{matrix} \right)$ cadran 2

Def: O matrice $A \in M_{m,n}(K)$ este de formă eșalon cu $k \le m$ linii dacă:

Notăm $n_0(i)$ nr elem nule de la începutul

(a) $0 \le n_0(1) < n_0(2) < \dots < n_0(k) < n$

(b) liniile $k+1, \dots, m$ sunt toate nule



matrice eșalon

Obs: Orice matrice poate fi adusă prin transf asupra liniilor la formă eșalon.

Obs: Prin transf elem asupra liniilor și perm de col o matrice se poate aduce la forma (1)

~~Atunci: dacă există o linie cu toți term. 0 cu excepția celor de pe col term liberi~~

Aplicăm obs de mai sus pt matricea $\bar{A}$ a unui sist

Atunci: → dacă $\exists$ o linie cu toți term. 0 cu excepția celor de pe col term liberi atunci sist e incompatibil.

→ dacă nu sist e compatibil și ~~are~~ primele r nec sunt principale $\exists$

Nec $x_{r+1} \ldots x_n$ sunt nec $\Rightarrow$ devin parametrii

Se calculează în ordine $x_r, x_{r-1}, \ldots x_1$