Curs 8 $\quad a\in A' \Leftrightarrow \exists a_n \subseteq A\setminus\{a\}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (a_n)\subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Limite de funcții

să ~~deem~~ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) =$

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A'$ } funcția f are limită în punctul a dacă $\forall (a_n)\subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, să $\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow$ ~~$\forall a_n \subseteq A$~~ $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U\cap A\setminus\{a\}$ $f(x)\in V$

T1 (teorema de unicitate a limitei)

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A'$ $\Leftrightarrow$ f are limită în punctul a $\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\forall (a_n) \subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$

Dem: $(\Leftarrow)$ imediată $(\exists = l)$

$(\Rightarrow)$ Știm: $\exists \lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall (a_n)\subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ (1)

Dorim (2)

Știm $a\in A' \overset{T}{\Longleftrightarrow} \exists (\alpha_n) \subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$

$\Downarrow$ (1)

$\exists \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \overset{not}{=} l \in \overline{\mathbb{R}}$

Arătăm că l satisface (2)

(MRA) Pp că $\exists (\beta_n) \subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} \beta_n = a$

pt care $\lim_{n\to\infty} f(\beta_n) \neq \ell$

$\exists \Downarrow ①$

$= T$

Pp $\boxed{\ell \neq T}$

$(\alpha_n) \subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$

$(\beta_n) \subseteq A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} \beta_n = a$

Formăm un nou șir (γ_n) a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha_n : n = 2k \\ \beta_n : n = 2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} (\gamma_{2k}) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n) = a \\ \lim_{k\to\infty} (\gamma_{2k+1}) = \lim_{n\to\infty} (\beta_n) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \gamma_n = a$$

$\Downarrow ①$

$\exists \lim_{n\to\infty} f(\gamma_n) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\shortparallel$

L

- $(f(\alpha_n))$ subșir pt $(f(\gamma_n))$

$\downarrow$ are limită $= \ell$ $\quad \downarrow L \Rightarrow \ell = L$

- $(f(\beta_n))$ subșir $(f(\gamma_n))$

$\downarrow$ are lim $= T$ $\quad \downarrow L \Rightarrow T = L$

$\Rightarrow \boxed{\ell = T}$ ↯

$\Rightarrow ②$ are loc

Obs: a) Def. limitei unei funcții într-un punct nu conține explicit afirmația referitoare la unicitatea limitei, însă ea se află ascunsă în condiția $a \in A'$.

6) Observații asupra leg. dintre limita unui șir și limita subșirurilor sale.

① Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (a_{n_k}) = a$

$\forall (a_{n_k})$ un subșir al lui (a_n)

② Doar dacă toate subșirurile unui șir au aceeași limită (condiție care se poate verifica generând subșiruri a căror reuniune e chiar șirul întreg) putem spune că șirul are limită. Există cazuri în care 2 subșiruri au aceeași lim, dar nu există lim șirului general.

ex: $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} : & n = 3k \\ -\frac{1}{n} : & n = 3k+1 \\ 1 : & n = 3k+2 \end{cases}$

$\alpha_n = \frac{1}{3n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim \alpha_n = 0$

$\beta_n = -\frac{1}{3n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim \beta_n = 0$ $\quad =$

$\gamma_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim \gamma_n = 1 \neq 0$ $\quad \neq$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$

Ex: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

a1) det mult pe care trebuie studiată existența limitei

a2) det limitele lui f, acolo unde $\exists$

Soluție: a) dom $f = \mathbb{R}$
$(\text{dom} f)' = \overline{\mathbb{R}}$

a2) Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ~~...~~ arbitrar ales

? $\lim_{x\to a} f(x)$

Fie $(a_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{a\}$ arbitrar ales a.î. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

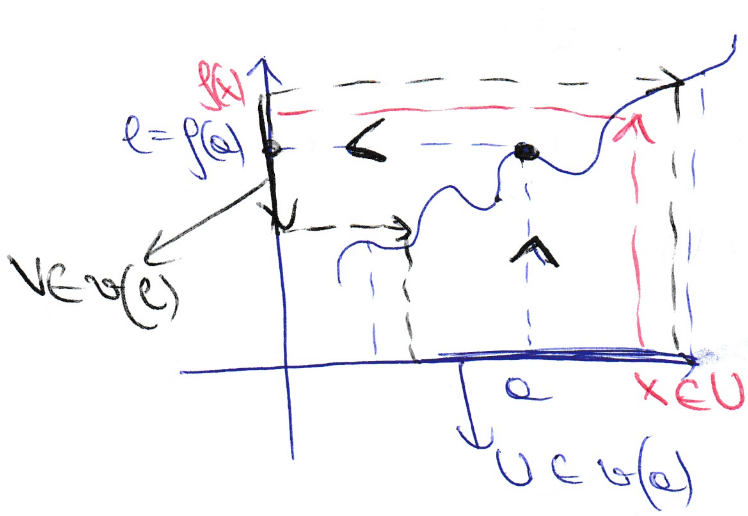
? $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n)^2 = a^2 \ \exists$

a - arbitrar $\Rightarrow f$ are limită pe $\overline{\mathbb{R}}$

(T2) (teorema de caracterizare a limitei cu ajutorul vecinătăților)

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ $\}$ f are limită l în $a \Leftrightarrow$
$a \in A'$ $(\lim_{x\to a} f(x) = l)$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l)$,
$\exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$
$f(x) \in V$



Dem: ($\Leftarrow$)

Știm (2) $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$
$f(x) \in V$

Dorim: $l = \lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underline{\forall (a_n) \subset A \setminus \{a\}}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,
să avem $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ (1)

Pas 1: Fie $(a_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ arbitrar ales

Pas 2: ? $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l \overset{\text{vecinătăți}}{\iff} \forall V \in \mathcal{V}(l)\ \exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î.
$\forall n > n_V,\ f(a_n) \in V$ (3)

Pas 1': $\boxed{\text{Fie } V \in \mathcal{V}(l)}$ arbitrar aleasă

$\Downarrow$ (2)

$\exists U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U_V \cap A \setminus \{a\},\ f(x) \in V$ (4)

$\Downarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\boxed{\exists n_{U_V} \in \mathbb{N}}$ a.î. $\forall n \geq n_{U_V},\ a_n \in U_V$

$(a_n) \subseteq A \setminus \{a\} \Rightarrow \boxed{\forall n \geq n_{U_V}}$
$a_n \in U \cap A \setminus \{a\}$

$\Downarrow$ (4)

$\boxed{f(a_n) \in V}$

Deci pt $V \in \mathcal{V}(l)\ \exists n_{U_V} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_{U_V}\ f(a_n) \in V \Rightarrow$ (3)
adică $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$
V arbitrar

$\Rightarrow$ (1) are loc, deci $\lim_{x\to a} f(x) = l$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Știm (1)
Dorim (2): $\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$
$f(x) \in V$

$\boxed{\text{MRA}}$ Pp (5): $\exists V' \in \mathcal{V}(l)$ a.î. $\forall U \in \mathcal{V}(a),\ \exists x \in U \cap A \setminus \{a\}$
a.î. $f(x) \notin V$

Cazuri:

$\boxed{C_I \; a \in \mathbb{R}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(a)$

$\Downarrow$ 5

$\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{a\}$ a.î.

$f(x_n) \notin V'$ 6

Deci am generat un șir $\boxed{(x_n) \subseteq A \setminus \{a\}}$ a.î.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \Leftrightarrow |x_n - a| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a}$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \subseteq A \setminus \{a\} \\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{T de!}]{\text{dem} \Leftarrow} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \quad (7)$$

$\Downarrow$ def

$V' \in \mathcal{V}(l)$

$\exists n' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n'$

$f(x_n) \in V'$ (8)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din } (6) \Rightarrow f(x_{n'}) \notin V' \\ (8) \Rightarrow f(x_{n'}) \in V' \end{array}\right\} \lightning \Rightarrow (5) \text{ este falsă}$$

$\Rightarrow$ (2) are loc

$\boxed{\begin{array}{l} C_{II} \; a = \infty \\ C_{III} \; a = -\infty \end{array}}$ $\begin{array}{l} U = (n, \infty] \\ U = [-\infty, n) \end{array}$ temă EXAMEN

Obs: Din carac. cu vecinătăți a limitelor se obțin ~~[illegible]~~ caracterizările cu bile centrate (9 cazuri distincte).

$V = B(l, \varepsilon)$

$U = B(a, \delta)$

(T3) (de caracterizare cu ε și δ a limitelor de funcții)

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
$f : A \to \mathbb{R}$
$a \in A'$
$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

1° $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{a\}$ cu $|x - a| < \delta$ să avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

2° $a = -\infty$, $\ell = \infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{a\}$ cu $x < -\delta$ să avem $f(x) > \varepsilon$

3° $a = \infty$, $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{a\}$ cu $x > \delta$ să avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Def: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$.
Spunem că funcția f:
a) are limită la stânga în a dacă $\forall (a_n) \subseteq A$ cu $a_n < a$ a.î. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ să $\exists \lim_{n \to \infty} f(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$

$(a_n) \subseteq A \cap (-\infty, a)$

b) Analog pt $a_n > a$

notații: $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ sau $\begin{matrix} x \to a \\ x > a \end{matrix}$ $\quad x \searrow a$

T de leg între limită și limitele laterale:

| $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$
$a \in A'$ |

a) Dacă: • $\exists \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$

• $\exists \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

și sunt egale

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = l$

b) are loc $\Leftarrow$ doar dacă ambele lim laterale sunt bine definite

Obs: Pentru mulț A de forma

• $A = [c, a]$ → noțiunea de limită la dreapta în punctul a NU este bine definită
$a \in \mathbb{R}$
(deoarece $\nexists (a_n) \subseteq A$ a.î. $a_n > a$)

• analog $A = [a, c]$ noțiunea de limită la stânga în punctul a nu este bine definită

În ambele cazuri, dacă $\exists$ limitele care sunt bine definite, ele devin automat chiar $\lim_{x\to a} f(x)$

Sunt generate cazuri atipice în care doar $\exists$ lim la stânga e suf pt a demonstra $\exists$ lim în punctul respectiv

Ex: Studiați limitele, acolo unde $\exists$ pentru funcția

$$f: (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

$A = (0, \infty)$

$\overline{A} = [0, \infty]$

I $a \in (0, \infty]$ din def

fie $(a_n) \subseteq (0,\infty) \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

? $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ $\exists$

$\rightarrow$ arbitrar $\xRightarrow{def}$ $\exists \lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{a}$

II $a = 0$

fie $(a_n) \subseteq (0,\infty)$ a.î. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

? $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$

Arătăm că $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

[illegible]

Vom arăta că $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ folosind t. de caract. cu ε și δ

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in (0,\infty)\setminus\{0\}$ cu $|x-0| < \delta$ să avem $f(x) > \varepsilon$

Fie $\boxed{\varepsilon > 0}$ arbitrar ales:

? $f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \varepsilon$, $x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < \frac{1}{\varepsilon}}$

ar trebui ca $|x-0| < \delta$
$x > 0$ $\Rightarrow \boxed{x < \delta}$

Punem $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$

$\boxed{\forall x \in (0,\infty) \text{ cu } |x-0| < \delta}$ $(\Leftrightarrow x < \delta)$

~~f(x) = ... satisface~~ $\frac{1}{x}$

$\Updownarrow$

$x < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \varepsilon < f(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x) > \varepsilon}$

$\overset{T3}{\Longrightarrow} \boxed{\exists \lim_{x\to 0} f(x) = \infty}$

În concluzie $\exists \lim_{x\to a} f(x)\ \forall a \in [0,\infty]$

b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$

$A = \mathbb{R}^*$ $\quad A' = \overline{\mathbb{R}}$

• $\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ $\quad \exists \lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} 0 : a = \pm\infty \\ \frac{1}{a} : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ ca la ex a)

! $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

pt $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = 0$

$\shortparallel$

$b_n = \frac{-1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

V FUNCȚII CONTINUE (în domeniu se studiază)

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ | funcția f este continuă în $a \in A$ dacă: $\forall (a_n) \subseteq A$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ să avem: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

(T1) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$

f este continuă în a
$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U \cap A$
$f(x) \in V$

$f(x) \in V$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu

dem → ta $\quad |x-a| < \delta$ ~~să~~ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(T2) (leg dintre limite de funcții și continuitate)

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$

f este continuă în a
$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(T3) (continuitatea în punctele izolate ale domeniului)

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in$ ~~Iz~~ A $\Longrightarrow f$ este continuă în a

Dem → temă (cu vec
folosim def inițială)

f cont în a
$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(a))\ \exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$ $f(x) \in V$