Test algebră 19 noiembrie

$\frac{1}{4}$ notă finală

$\begin{cases} \text{exerciții + noțiuni aferente (fără dem)} \\ \text{definiții} \end{cases}$

Determinanți

Fie K corp com, $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$

(P1): Dacă B rezultă din A prin permutarea a 2 linii (sau 2 coloane) atunci $\det B = -\det A$

Dem:

$$B = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{j1} \dots a_{jn} \\ a_{i1} \dots a_{in} \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(j)} a_{j\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}$$

$\sigma \to \sigma \circ \tau$, $S_n \to S_n$ (f bijectivă cu imagine egală cu ea)

$$\underset{\Downarrow \text{permutare}}{\varepsilon(\sigma \circ \tau)} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

$$\Rightarrow \det B = \sum_{\sigma \circ \tau \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) a_{1(\sigma \circ \tau(1))} \dots a_{n((\sigma \circ \tau)(n))} = -\det A$$

$\sigma \circ \tau = \beta$

P| Dacă A are 2 linii (coloane) egale atunci $\det A = 0$

Dem: $1 \le i < j \le n$, $\det A = d$

1) Dacă în K $1+1 \neq 0$ avem

Conform prop anterioare, permutând lin i, j avem:

$$d = \det A = -\det A = -d$$

$$\Rightarrow d + d = 0 \Leftrightarrow d\underbrace{(1+1)}_{\neq 0\ (\neq \mathbb{Z}_2)} = 0 \Rightarrow d = 0$$

2) Dacă în K $1+1=0$ atunci

$$1+1=0 \Leftrightarrow 1=-1 \Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{matrix}\right) \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \\ \begin{matrix} k & l \end{matrix} \end{array} \quad 1 \le k < l \le n$$

$$\det A = \sum_{1 \le k < l \le n} (a_{ik} a_{jl} + \underbrace{a_{il} a_{jk}}_{= a_{ik} a_{jk}}) s_{i,j,k,l} =$$

not: $s_{i,j,k,l}$ suma ~~tuturor~~ produselor cu $n-2$ factori obținute luând elem care nu sunt în aceeași linie și aceeași col și nu sunt în liniile i și j și nici în coloanele k și l

$$= \sum_{1 \le k < l \le n} a_{ik} a_{jk} \underbrace{(1+1)}_{\text{ip} = 0} s_{i,j,k,l} = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

Def: Spunem că liniile i și j ale lui A sunt proporționale dacă $\exists\, \alpha \in K$ a.î. $l_j = \alpha \cdot l_i$ (sau $l_i = \alpha \cdot l_j$) adică $a_{jk} = \alpha \cdot a_{ik}$ $\forall\, k \in \overline{1,n}$

Spunem că linia i a lui A este o combinație liniară de celelalte linii ale lui A dacă $\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \dots \alpha_m \in K$ a.î.

$$l_i = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_{i-1} l_{i-1} + \alpha_i l_i + \dots \alpha_m l_m$$

adică

$$a_{ik} = \alpha_1 a_{1k} + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1k} + \dots + \alpha_m a_{m-1k}$$

(P) Dacă A are 2 linii (coloane) proporționale atunci $\det A = 0$

$1 \le i < j \le n$ $\quad l_2 = \alpha l_1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \alpha \cdot \underset{\uparrow \text{ 2 linii egale}}{0} = 0$$

(P) Dacă în A o linie (sau o col) este o combinație liniară de celelalte linii sau coloane atunci $\det A = 0$

Dem: temă $\quad \det A = 0$

(P) Dacă B rezultă din A prin înmulțirea liniei i cu α și adunarea la linia j atunci $\det B = \det A$.

Dem: $1 \le i < j \le n$

$$\begin{array}{cc} B = \begin{pmatrix} - - - - - - \\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in} \\ a_{j1} + \alpha a_{i1} \dots \uparrow \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \end{array}$$

$a_{jn} + \alpha a_{in}$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{in} \\ \\ a_{j1} \dots a_{jn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{in} \\ \\ \alpha a_{i1} \dots \alpha a_{in} \end{vmatrix}}_{0} = \det A$$

Def: Determinantul de ord $n-1$ matricii rezultate din A prin eliminarea liniei i și coloanei j s.n. minorul elementului a_{ij}. Să îl notăm cu d_{ij}:

Elementul $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ s.n. complementul algebric al elementului a_{ij}.

(T) (dezvoltarea det lui A după linia i)

$$\det A = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in} \quad \forall\, i \in \{1, \dots$$

(temă) T pt coloane

(C) Fie $i, k \in \{1, \dots, n\}$ $i \ne k$. Atunci

$$a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \dots + a_{in}\alpha_{kn} = 0$$

Dem:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}\alpha_{k1} + a_{k2}\alpha_{k2} + \dots + a_{kn}\alpha_{kn}$$

(c) Fie $j, k \in \{1, \dots, n\}$ $j \neq k$ atunci

$$a_{1j}\alpha_{1k} + a_{2j}\alpha_{2k} + \dots + a_{nj}\alpha_{nk} = 0$$

(c) Dacă $\det A \neq 0$ atunci A este inversabilă în $M_n(K)$ și $A^{-1} = d^{-1} A^*$ unde

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ (adjuncta matricei A)

Dem:
$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d \end{pmatrix} = d \cdot I_n \Rightarrow A(d^{-1} \cdot A^*) = I_n$$

temă $(d^{-1}A^*)A = I_n$

$$\Rightarrow A^{-1} = d^{-1} A^*$$

Obs: A inv $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\det A \neq 0$
(mai târziu)

(T) Cramer: Considerăm sistemul de n ec liniare cu n necunoscute

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cu $a_{ij}, b_i \in K$, $i,j = \overline{1,n}$ și $A = (a_{ij})$
$d = \det A \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Atunci:

(S) are soluție unică $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ dată de egalitățile $x_i = d^{-1} \cdot d_i$, $i = \overline{1,n}$, unde $d_i = \det$ matricei rezultate din A înlocuind coloana i cu B

Sistemul (S) poate fi rescris:

$$(S) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \;\Big|\, A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = d^{-1} \cdot A^{*}B \quad (1)$$

Fie $i = \overline{1,n}$ fixat
din (1) $\Rightarrow x_i = d^{-1}(b_1\alpha_{1i} + b_2\alpha_{2i} + \dots + b_n\alpha_{ni}) = d^{-1}d_i$

unde $d_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$ i$

Rangul unei matrice

Fie K corp com, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$

Def: Fie $1 \le i_1 \dots < i_p \le m$, $p, q \in \mathbb{N}$
$1 \le j_1 \dots < j_q \le n$

O matrice de tipul p, q de forma

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_q} \\ \vdots & & & \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_q} \end{pmatrix}$$ s.n. submatrice de tipul (p, q) a lui A

Determinantul unei matrice de tipul (r, r) a lui A s.n. minor de ord r $(1 \le r \le \min\{m, n\})$

Def: Dacă $A = O_{mn}$ atunci rang $A = 0$

Dacă $A \ne O_{mn}$ atunci:

rang $A = r (\in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow A$ are un minor nenul de ordinul r și toți minorii lui A de ord $> r$ sunt 0.

Obs: 1) $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$

2) $A \in M_n(K)$ $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

3) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$

(T) Fie $A \in M_{mn}(K)$, $A \neq O_{mn}$

$\rightarrow$ $\operatorname{rang} A = r \Leftrightarrow$ A are un minor nenul de ord r și toți minorii lui A de ord $r+1$ sunt nuli

Dem: Considerăm un minor arbitrar de ordin $r+2$ (dacă $\exists$)

~~Dezvoltând~~ acest minor după o linie (col) obț o sumă în care fiecare termen este o deoarece toți minorii de ordin $r+1$ sunt 0 . ș.a.m.d.

Def: Considerăm p linii (col) ale lui A. Dacă una dintre acestea este o combinație liniară de celelalte spunem că cele r linii (col) ale lui A sunt liniar dependente. În caz contrar, cele r linii sau coloane sunt liniar independente.

(T) $\operatorname{rang} A =$ nr. maxim de linii (col) liniar independente ale matricii A

(C) $\operatorname{rang} A = r \Leftrightarrow$ A are un minor d nenul de ord r și toate liniile (col) nu intervin în acest minor sunt combinații liniare de lin și col care intervin în d