Elemente de topologie pe R - continuare

Reamintim:

$A \subseteq \mathbb{R}$ este deschisă $\Leftrightarrow \forall a \in A$, $A \in \mathcal{V}(a)$

$\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists r_A > 0$ a.î. $B(a, r_A) \subseteq$

$B \subseteq \mathbb{R}$ este închisă $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus B$ este deschisă

Obs:

$A \subseteq \mathbb{R}$ m. deschisă $\Leftrightarrow A = \text{int} A$

$B \subseteq \mathbb{R}$ m. închisă $\Leftrightarrow B = \text{cl} B$

Propoziția 1 (Caracterizări ale mulțimilor deschise)

1° $\mathbb{R}$ și $\emptyset$ sunt deschise

2° $\forall I \subseteq \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} \forall (G_i)_{i \in I} \text{ o familie de mulțimi deschise} \\ (\Leftrightarrow \forall i \in I, G_i \text{ este deschisă}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$ este deschisă

3° $\left.\begin{array}{l} \forall J \subseteq \mathbb{N}, \text{ cu } |J| < \infty \\ \forall (H_j)_{j \in J} \text{ o familie de mulțimi deschise} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{j \in J} H_j$ este o m. deschisă

Dem: 1° • $\mathbb{R}$ deschisă $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{R} \in \mathcal{V}(x)$

Fie $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ arbitrar ales

$\exists r_x = r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\mathbb{R} \in \mathcal{V}(x)}$

x - arbitrar $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ___ $\mathbb{R}$ - m. deschisă

- $\emptyset$ deschisă $\Leftrightarrow \forall x \in \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{V}(x)$

  M r.a.: Pp că $\emptyset$ nu e deschisă $\Leftrightarrow$

  $\underline{\exists\, t \in \emptyset}$ a.î. $\emptyset \notin \mathcal{V}(t)$

  ↯

Contradicție $\Rightarrow \emptyset$ deschisă

2° $\left.\begin{array}{l} \forall\, J \subseteq \mathbb{N} \\ \forall\, (G_i)_{i\in J} \text{ m deschise} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{i\in J} G_i$ deschisă

Fie $J \subseteq \mathbb{N}$ arbitrar ales

și

fie $(G_i)_{i\in J}$ m. deschise

? Dorim $\bigcup_{i\in J} G_i$ deschisă $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in \bigcup_{i\in J} G_i$, $\bigcup_{i\in J} G_i \in \mathcal{V}(x)$

Fie $\boxed{x \in \bigcup_{i\in J} G_i \text{ arbitrar}}$ ales

$\Rightarrow \exists\, i_0 \in J$ a.î. $x \in G_{i_0}$ $\left.\begin{array}{l} \\ G_{i_0} \text{ deschisă} \end{array}\right\} \overset{def}{\Rightarrow} G_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$

$G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$ ①

$\Leftarrow$ P curs 2 b)

$\boxed{\bigcup_{i\in J} G_i \in \mathcal{V}(x)}$

$\left.\begin{array}{l} x \text{ arbitrar} \Rightarrow \forall \Rightarrow \bigcup_{i\in J} G_i \text{ deschisă} \\ J \text{ arbitrar} \Rightarrow \forall \\ (G_i) \Rightarrow \forall \end{array}\right\} \Rightarrow 2°$ W

3° $\left.\begin{array}{l}\underline{\forall} J \in \mathbb{N}, |J| < \infty \\ \underline{\forall} (H_j)_{j\in J} \text{ m deschise}\end{array}\right\} \Rightarrow \bigcap_{j\in J} H_j$ este deschisă

Fie $\left.\begin{array}{l} J \subseteq \mathbb{N}, |J| < \infty \\ (H_j)_{j\in J} \text{ m. deschise}\end{array}\right\}$ arbitrar des

Dorim $\bigcap_{j\in J} H_j$ deschisă $\Longleftrightarrow \left(\forall x \in \bigcap_{j\in J} H_j, \bigcap_{j\in J} H_j \in \mathcal{V}(x)\right)$

Fie $\boxed{x \in \bigcap_{j\in J} H_j} \Rightarrow \forall j \in J, x \in H_j$

$\left.\begin{array}{r} \\ H_j \text{ deschise}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall j \in J, H_j \in \mathcal{V}(x)$

$\Leftrightarrow \forall j \in J, \exists r_j > 0$ a.î. $B(x, r_j) \subseteq H_j$

$\exists r := \min\{r_j : j \in J\} > 0$ și

$\forall j \in J \; B(x, r) \subseteq H_j$

$\Rightarrow B(x, r) \subseteq \bigcap_{j\in J} H_j \Rightarrow \boxed{\bigcap_{j\in J} H_j \in \mathcal{V}(x)}$

x arbitrar $\Rightarrow \forall$ ✓✓

$\left.\begin{array}{l} J \text{ arb.} \Rightarrow \forall J \\ (H_j) \text{ arb} \Rightarrow \forall \end{array}\right\} \Rightarrow 3°$ ✓

Obs: a) Dacă eliminăm condiția $|J| < \infty$ din afirmația 3°, concluzia nu este în general adevărată

Spre exemplu:

T2

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = [-1, 1]$ | $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \ldots\right.$

deschisă

Toate acestea sunt generate de faptul că mulțimea

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ nu are minim (Arhimede)

are doar $\inf = 0$

b) În $\cap$ de la prop 1.3 (nr de mulțimi) trebuie să fie finit.

Propoziția 2: (caracterizarea a mulțimilor închise)

1° $\mathbb{R}$ și $\emptyset$ sunt închise

2° $\left.\begin{array}{l} \forall J \subseteq \mathbb{N} \\ \forall (A_i)_{i \in J} \subseteq \mathbb{R} \text{ m. închise} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i$ este închisă

3° $\left.\begin{array}{l} \forall J \subseteq \mathbb{N}, |J| < \infty \\ \forall (B_j)_{j \in J} \subseteq \mathbb{R} \text{ m. închise} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} B_j$ este închisă

Dem: 1° • $\mathbb{R}$ închisă $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}}_{= \emptyset}$ deschisă din P_1, 1°

• $\emptyset$ închisă $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ deschisă din P_1, 1°

2° $\left.\begin{array}{|l|} \hline \text{Fie } J \subseteq \mathbb{N} \\ \hline \text{fie } (A_i)_{i \in J} \subseteq \mathbb{R} \\ \hline \end{array} \text{ închise}\right\}$ arbitrar alese

$\bigcap_{i \in I} A_i$ închisă $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} A_i}$ deschisă

$\overset{\text{de Morgan}}{\Longleftrightarrow}$ $\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i)$ deschisă (2)

ip: A_i închisă $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \setminus A_i$ deschisă $\forall i \in I$ $\overset{P_1, 2^\circ}{\Longrightarrow}$ $\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i)$

$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \text{ închisă}}$

$\left.\begin{array}{l} I \text{ arbitrar} \\ A_i \text{ - arb} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall$ $\boxed{V}$

3° $\boxed{\begin{array}{l} \text{Fie } J \subseteq \mathbb{N} \text{ cu } |J| < \infty \\ (B_j)_{j \in J} \text{ m. închise} \end{array}}$ $\Big\}$ arbitrare

Dem: $\bigcup_{j \in J} B_j$ închisă $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in J} B_j$ deschisă

$\overset{\text{de Morgan}}{\Longleftrightarrow}$ $\bigcap_{j \in J} (\mathbb{R} \setminus B_j)$ deschisă

$\left.\begin{array}{l} \forall j \in J \;\; B_j \text{ închisă} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall j \in J,\ \mathbb{R} \setminus B_j \text{ deschisă} \\ ! \; |J| < \infty \end{array}\right] \overset{P_1, 3^\circ}{\longrightarrow}$

$\Rightarrow$ $\bigcap_{j \in J} (\mathbb{R} \setminus B_j)$ deschisă $\overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\bigcup_{j \in J} B_j \text{ este închisă}}$

$\begin{array}{l} J \text{ - arb} \Rightarrow \forall \\ B_j \text{ arb} \Rightarrow \forall \end{array}$ 3° V

Obs: Dacă $\bigcup$ un nr infinit de m. închise $\Rightarrow$ rezultatul $\boxed{\text{nu este întotdeauna}}$ închis.

$\boxed{T_2}$ $$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (-1,1)$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = [-2,2]$$

Obs: Proprietățile de mai sus 2°, 3° sunt implicații NU echivalente, astfel reunind sau intersectând mulțimi arbitrare putem obț mulțimi închise, m. deschise sau nici închise, nici deschise.

!!! Dacă o mulțime nu este deschisă $\not\Rightarrow$ m este închisă

nu este închisă $\not\Rightarrow$ m este deschisă

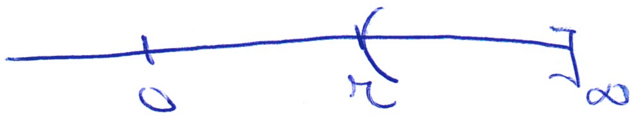
$(2,3]$

Extinderea topologiei de la $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$

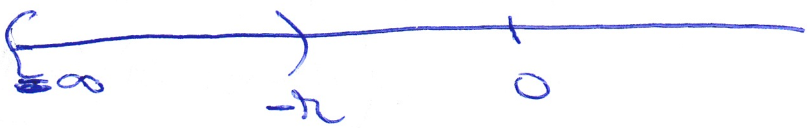
$\overline{\mathbb{R}} = \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$

Def: Fie $r>0$

$$B(\infty, r) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : y > r\} = (r, \infty]$$



$B(-\infty, r) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < -r\} = [-\infty, -r)$



Def: Fie $\underline{x \in \overline{\mathbb{R}}}$. O mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ s.n. vecinătate a lui x dacă $\exists\, r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subseteq$

Obs: $x \in \mathbb{R}$, $B(x, r_x) = (x - r_x, x + r_x)$

$x = \infty$, $B(\infty, r_x) = (r_x, \infty]$

$x = -\infty$, $B(-\infty, r_x) = [-\infty, -r_x)$

Obs: În topologia pe $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$

$\mathbb{N}' = \mathrm{cl}\,\mathbb{N} \setminus \mathrm{izo}\,\mathbb{N} =$

$= \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset$

În topologia pe $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}' = \{\infty\}$

- $\infty \in \mathbb{N}' \iff \forall\, r > 0,\ B(\infty, r) \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\} \neq \emptyset$

$\iff \forall\, r > 0\ \ (r, \infty] \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\} \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$(r, \infty) \cap \mathbb{N} \neq 0$

Arhimede $\rightarrow \exists\, n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $0 < r < n_r$

$\Rightarrow \neq \emptyset$

$\Rightarrow \infty \in \mathbb{N}'$

• $-\infty \in \mathbb{N}' \Leftrightarrow \forall r>0,\ B(-\infty, r) \cap \mathbb{N} \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall r>0,\ \underline{[-\infty, -r) \cap \mathbb{N} \setminus \{-\infty\}} \neq \emptyset$

$\boxed{(-\infty, -r) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset}$ fals

Dar $\mathbb{Z}'_{\overline{\mathbb{R}}} = \{\pm\infty\}$ $\quad \{\pm\infty\} \subseteq \mathbb{Q}'_{\overline{\mathbb{R}}}, (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_{\overline{\mathbb{R}}})', \mathbb{R}'_{\overline{\mathbb{R}}}$

Cap II Șiruri de nr reale

Def: Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid n \geq k\}$$

Orice funcție $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$ s.n. <u>șir de nr reale</u> și se not cu

$$(x_n)_{n \geq k} \overset{not}{=} (x_n)_{n \in \mathbb{N}_k} \overset{not}{=} (x_n) \subseteq \mathbb{R}$$

Asociază $\forall n \geq k$, nr real x_n

Terminologie:

• $n \in \mathbb{N}_k$, x_n s.n. termenul general (de rang n) al șirului sau termenul generator

• $f(\mathbb{N}_k) = \{x_n : n \in \mathbb{N}_k\}$ s.n. mulțimea termenilor șirului (x_n)

Def: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$

Un element $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ s.n. limită a șirului x_n (și se not $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$) dacă:

(*) $\forall\, V \in \mathcal{V}(\ell)$, $\exists\, n_V \in \mathbb{N}_k$ a.î. $\forall\, n \geq n_V$, $x_n \in V$

Obs: Această definiție permite tratarea unitară a cazurilor de limite finite și infinite.

În practică, în funcție de cazul în care ne aflăm este mai utilă exprimarea ei echivalentă prin intermediul bilelor având centrul pe ℓ.

Deoarece:

- dacă $V \in \mathcal{V}(\ell) \Rightarrow \exists\, r_V > 0$ a.î. $B(x, r_e) \subseteq V$
- dacă $r' > 0$, $B(\ell, r') \in \mathcal{V}(\ell)$

Afirmațiile $\boxed{\forall\, V \in \mathcal{V}(\ell) \Leftrightarrow \forall\, r > 0}$

Def: alternativă a limitei, folosind bilele deschise

Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ și $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$ da

$\boxed{\bullet\ \ell \in \mathbb{R}}$ $\forall\, \underset{(\text{rază})}{\varepsilon > 0}$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}_k$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$

$|x_n - \ell| < \varepsilon$

($\ell \in$ bilei de centru x_n și raza ε)

$\boxed{\cdot\ \ell = \infty}$ —— " —— $x_n > \varepsilon$

$\boxed{\cdot\ \ell = -\infty}$ —— " —— $x_n < -\varepsilon$

(vecinătăți → bile → caracterizări limite)

Def: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$. El s.n.:

- CRESCĂTOR dacă $\exists\, n' \in \mathbb{N}_k$ a.î. $\forall n \geq n'$

$$x_n \leq x_{n+1}$$

- STRICT CRESCĂTOR $<$

- DESCRESCĂTOR dacă $\geq$

- STRICT DESCRESCĂTOR $>$

$*$

increasing ≃ strict crescător
non-increasing ≃ crescător
decreasing ≃ strict descrescător
non-decreasing ≃ descrescător

positive $\mathbb{N}$ negative
non-positive non-negative

• MONOTON (crescător sau descrescător)

• STRICT MONOTON (strict crescător sau strict descrescător)

• MĂRGINIT INFERIOR dacă Mmo ($f(\mathbb{N}_k) = \emptyset$)

$\exists\, T \in \mathbb{R}$ a.î. $T \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_k$

• MĂRGINIT SUPERIOR dacă — " — $T \geq x_n$

• MĂRGINIT (inf + sup)

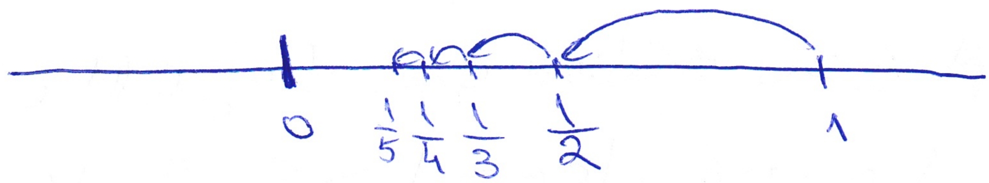
$\iff \exists\, T > 0$ a.î. $|x_n| < T \quad \forall n \in \mathbb{N}_k$

$(\iff -T < x_n < T, \; x_n \in B(0,T))$

Exemple fundamentale de șiruri de nr reale

a) $k = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$



• $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

$\Rightarrow (a_n)$ este strict descrescător $(n' = 1)$

• $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow$ mărginit $(T = 2)$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0}$$

Dem:

$\xLeftrightarrow[\text{-epsilon}]{\text{def}}$ $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{1}$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$\underbrace{|a_n - 0| < \varepsilon}_{2}$ (**)

Pasul 1 $\boxed{\text{Fie } \varepsilon > 0}$ arbitrar ales

Pasul 2 $?\ |a_n - 0| < \varepsilon$

$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

pt $\varepsilon > 0 \xRightarrow{\text{Arhimede}} \boxed{\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}}$ a.î.

$0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

Pasul 3 dacă $\boxed{n \geq n_\varepsilon}$

$\boxed{|a_n - 0|} = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \boxed{< \varepsilon}$

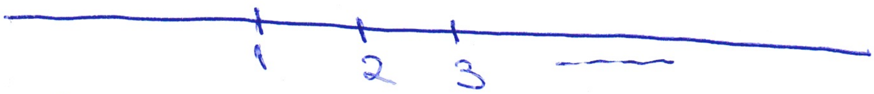
teorema de caracterizare

Deci pt $\varepsilon > 0$ arbitrar ales, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq n_\varepsilon, |a_n - 0| < \varepsilon \\ \varepsilon\text{-arb} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{def}}$

$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

b) $k = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = n$



• $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_{n+1} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ strict cresc.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \le x_n \to (x_n)$ este mărginit inferior

! nu este mărginit superior

(pp red la abs)

(Mra pp $\exists T > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n < T$

$\forall n \in \mathbb{N} \ n < T$

ARH. $\exists n_T \in \mathbb{N}$ a.î.

$T < n_T$

- $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon, x_n > \varepsilon$

Temă