Curs 10

Polinomul lui Taylor

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
$f : A \to \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}$
$a \in A$
f este de n ori derivabilă în punctul a $\Big\} \Rightarrow$

Polinomul lui Taylor de rang n, atașat funcției f și punctului a este funcția polinomială

$$T_{n;a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(T_{n;a}f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \forall x \in \mathbb{R}$$

Obs: $\boxed{\begin{array}{l} \text{dom } f = A \\ \text{dom } T_{n;a}f = \mathbb{R} \end{array}}$ deoarece $(T_{n;a}f)(x) \to$ e un polinom de grad maxim n (pt că uneori $f^{(n)}(a) = 0$)

P1) $\to T_{n;a}f$ este indefinit deriv pe $\mathbb{R}$

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
$f : A \to \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{R}$
$a \in A$
f este de n ori derivabilă în a $\Big\}$ Restul de rang n atașat funcției f și punctului a este funcția

$R_{n;a}f : A \to \mathbb{R}$ dată de așa-numita formulă a lui Taylor

$$f(x) = (T_{n;a}f)(x) + (R_{n;a}f)(x), \forall x \in A$$

Obs: $\mathrm{dom}(R_{n;a}f) = \mathrm{dom} f$

Obs: Cf P1(Ca)

$$(T_{n;a}f)'(x) = (T_{n-1;a}f')$$

inductiv • $\forall t \in \{1, \dots, n-1\}$

$$(T_{n;a}f)^{(t)}(x) = (T_{n-t;a}f^{(t)}) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

• $\forall t > n$

$$(T_{n;a}f)^{(t)}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

în particular pentru $\boxed{x = a}$

$$(T_{n;a}f)(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\underbrace{(a-a)}_{=0} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\underbrace{(a-a)^n}_{=0}$$

$$= f(a)$$

$$(T_{n;a}f)'(a) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}\underbrace{(a-a)}_{=0} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\underbrace{(a-a)^{n-1}}_{=0}$$

$$= f'(a)$$

deci $\forall t \in \{1, \dots, n\}$

$$(T_{n;a}f)^{(t)}(a) = f^{(t)}(a)$$

P2) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

$a \in A$

$n \in \mathbb{N}$

f este de n ori derivabilă în a

Atunci:

a) funcția $R_{n;a}f$ este de n ori derivabilă în a

b) $\forall t \in \{1, \dots, n\}$

$$(R_{n;a}f)^{(t)}(a) = 0$$

c) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(R_{n;a}f)(x)}{(x-a)^n} = 0$

Dem: a) f este de n ori derivabilă în a
$T_{n;a}f$ indefinit deriv pe $\mathbb{R}$ $\Big\} \rightarrow f - T_{n;a}f$ este de n ori deriv în a

b) din observația anterioară $\forall t \in \{1, \dots, n\}$

$$(T_{n;a}f)^{(t)}(a) = f^{(t)}(a)$$

$$\Rightarrow (R_{n;a}f)^{(t)}(a) = f^{(t)}(a) - (T_{n;a}f)^{(t)}(a) =$$

$$= f^{(t)}(a) - f^{(t)}(a) = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(R_{n;a}f)(x)}{(x-a)^n} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(R_{n;a}f)'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{l'H}{=}} \dots = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(R_{n;a}f)^{(n)}(x)}{n!} =$

$$= \frac{0}{n!} = 0$$

Obs: În ipotezele de la P_2, extinse cu faptul că f este de n ori derivabilă pe un interval $I \subseteq A$, funcția
$a \in I$

$$(\lambda_{n;a}f)(x) = \begin{cases} \dfrac{(R_{n;a}f)(x)}{(x-a)^n} & : x \neq a \\ 0 & : x = a \end{cases}$$

$\lambda_{n;a}f : I \to \mathbb{R}$

este o funcție continuă. (din $P_2 c$)

Deci, $\exists \lim\limits_{x\to a} \underset{\downarrow \atop 0}{(x-a)^n} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{(\lambda_{n;a}f)(x)} = 0$

Obținem urm. formă modificată a formulei lui Taylor

$\forall x \in A$

$$f(x) = (T_{n;a}f)(x) + \theta(x)$$

$$\text{cu } \lim_{x\to a} \theta(x) = 0$$

$\theta(x) = (x-a)^n(\alpha_{n;a}f)(x) \rightarrow$ RESTUL LUI PEANO în formula lui Taylor

Acest rest se dovedește a fi util în rezolvarea unor limite în care T lui l'Hopital nu furnizează ușor o soluție.

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{\sin(x^4)} \stackrel{0}{\underset{0}{=}}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \theta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \theta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$(x = x^4)$$

$$e^{x^4} = 1 + \frac{x^4}{1!} + \frac{x^8}{2!} + \theta(x^4)$$

$$\sin x^4 = x^4 - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{20}}{5!} + \theta(x^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \theta(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim \frac{1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - 1 - \frac{x^4}{1!} - \frac{x^8}{2!} + \overset{\to 0}{(\theta - \theta)}}{x^4 - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{20}}{5!} + \underset{\to 0}{\theta(x^4)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^4\left(\frac{1}{2!}+1\right) + x^8\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\right)}{x^4 - \frac{x^{12}}{6} + \frac{x^{20}}{120}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{2} + x^4 \cdot \left(-\frac{11}{24}\right)}{1 - \frac{x^8}{6} + \frac{x^{16}}{120}} = -\frac{3}{2}$$

! Obs: $\theta(x) = (x-a)^n (\alpha_{n;a} e^x)(x)$

pt ex:

pt exemplul nostru $a=0$, $n=3$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\theta(x) = x^3(\alpha_{3;0} e^x)(x)$

$\theta(x^4) = x^{12}(\alpha_{3;0} f^x)(x$

T lui Taylor referitoare la forma restului

$\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un interval

$f: I \to \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

f de $(n+1)$ deriv pe I

$a \in I$

Atunci:

$\forall x \in I \setminus \{a\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\Big|$ $\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \text{ a.î. } f(x) = (T_{n;a} f)(x) + (x-a)^p \cdot k}$

iar $k = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!\,p}(x-c_x)^{n-p+1}$

Astfel:

$\forall x \in I \setminus \{a\}$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\exists c_x$ între x și a a.î. $f(x) = (T_{n;a} f)(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!\,p} \cdot (x-a)^p (x-c_x)^{n-p+1}$

Dem: Fie $x \in J \setminus \{a\}$ $\longrightarrow$ fixat $\Rightarrow$ constantă
$p \in \mathbb{N}$ arbitrar dese

Introducem o funcție auxiliară $g : J \to \mathbb{R}$ (de variabilă t)

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$\forall t \in J$

$f, f', \dots, f^{(n)}$ sunt derivabile pe J

$$\Rightarrow g'(t) = f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!}(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 +$$
$$+ \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2 \cdot (x-t)(-1) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \cdot n \cdot (x-t)^{n-1}(-1) =$$

$$= \cancel{f'(t)} + \cancel{\frac{f''(t)}{1!}(x-t)} - \cancel{f'(t)} + \cancel{\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2} - \cancel{\frac{f''(t)}{1}(x-t)} +$$
$$+ \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \cancel{\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2} + \dots +$$
$$+ \boxed{\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} =$$

$$\boxed{= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = g'(t)} \quad \forall t \in J$$

Încercăm să aplicăm o teoremă de punct intermediar pe intervalul ~~pe intermediul~~ pe intervalul închis cu capetele x și a

$g(x) = f(x)$ ✓

$g(a) - (T_{n;a}f)(x)$

Considerăm o nouă funcție auxiliară pt o constantă $k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{h(t) = g(t) + (x-t)^p \cdot k}$$

$\rightarrow h$ este derivabilă pe I

$$h'(t) = g'(t) + p(x-t)^{p-1} \cdot k(-1) =$$
$$= g'(t) - (x-t)^{p-1} \cdot k \cdot p$$

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = g(x) + 0 = f(x) \\ h(a) = g(a) + (x-a)^p \cdot k = (T_{n;a}f)(x) + (x-a)^p k = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\xrightarrow[\text{lui Lagrange}]{\text{T}}$ $\exists\, c_x$ între x și a a.î. $h'(c_x) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{g'(c_x) = (x-c_x)^{p-1} \cdot k \cdot p} \quad (**)$$

dar $g'(c_x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x-c_x)^n$ din $(*)$

$$\Rightarrow (x-c_x)^{p-1}\, k \cdot p = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x-c_x)^n$$

$$k = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!\, p} \cdot (x-c_x)^{n-p+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (T_{n;a}f)(x) + (x-a)^p \cdot k = T_{n;a}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!\, p} \cdot (x-c_x)^{n-p+1}$$

restul lui SCHÖLMLICH – ROCHE din formula lui Taylor

Obs: Atribuind valori particulare lui p se obțin variante simplificate ale restului.

a) $\boxed{p=1}$ $\Rightarrow$ Rest al lui Cauchy

$$(R_{n;a}^{C} f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x-c_x)^n(x-a)$$

b) $\boxed{p=n+1}$ $\Rightarrow$ restul lui Lagrange

$$(R_{n;a}^{L} f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

Def: În ipotezele teoremei lui Taylor se obține

Formula lui Maclaurin = f. lui Taylor cu $a=0$ și rest Lagrange

$\forall x \in I \setminus \{a\}$

$\exists\, c_x$ între x și 0 a.î.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Def: Fie $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă pe I

fie $x \in I$. Spunem că funcția f are o dezvoltare în serie Taylor, în jurul lui a, dacă:

$$\lim_{n\to\infty} (R_{n;a} f)(x) = 0$$

Obs: f fiind indefinit derivabilă pe J, se asociate polinoamele lui Taylor de orice rang $\Rightarrow \exists$ și resturi de orice rang / pt un x fixat:

$$n=1\ (R_{1;a}f)(x) = f(x) - (T_{1;a}f)(x) \in \mathbb{R}$$

$$n=2\ (R_{2;a}f)(x) = f(x) - (T_{2;a}f)(x) \in \mathbb{R}$$

$\vdots$

$$(R_{n;a}f)(x) = f(x) - (T_{n;a}f)(x) \in \mathbb{R}$$

avem generat un șir de numere reale

$$(\underbrace{(R_{n;a}f)(x)}_{\alpha_n}) \text{ șir} \ \Big|\ \text{pt el se studiază } \boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}$$

dacă $\exists \lim_{n\to\infty} (R_{n;a}f)(x) = 0$ atunci:

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} (f(x) - (T_{n;a}f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} (T_{n;a}f)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(Exemple:)

Formula lui Maclaurin pt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists\ c_x$ între x și 0 a.î.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{e^{c_x}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{(R_{n;a}f)(x)}$$

$\to$ fie $x \in \mathbb{R}$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} (R_{n;0}f)(x) = \lim_{n\to\infty} e^{c_x}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{c_x}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= e^{c_x}\cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ pt $x \in \mathbb{R}$ funcția are o dezvoltare în serie Taylor (Maclaurin)

și $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

x - arbitrar

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$