Curs 13 – Algebră

Vectori și valori proprii

Fie K corp comutativ. V K-sp vect

Def: Fie $f: V \to V$ K-endom.

Un vector $x \in V$, $x \neq 0$ s.n. vector propriu al lui f dacă

$$\exists \lambda \in K \text{ a.î. } f(x) = \lambda x$$

În acest caz $\lambda \in K$ s.n. valoarea proprie a lui f

Mulț valorilor proprii ale lui f s.n. spectrul lui f.

Obs: 1) Unui vector propriu îi coresp. o singură val proprie

Dem: $x \in V$, $x \neq 0$ vectori proprii pt f

Fie $\lambda, \lambda' \in K$ a.î.

$$\lambda \cdot x = f(x) = \lambda' \cdot x \Rightarrow (\lambda - \lambda')x = 0 \Rightarrow \lambda - \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'$$

2) Dacă $\lambda \in K$ valoare proprie

$V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \overset{?}{\leq}_K V$ → conține toți vec proprii și pe 0

subspațiul propriu (al lui V) coresp valorii proprii λ

Dem: $V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) - (\lambda \cdot 1_V)(x) = 0\} =$

$= \{x \in V \mid (\underbrace{f - \lambda \cdot 1_V}_{\text{endom}_K V})(x) = 0\} =$

$= \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V) \leq_K V$

$(V(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V))$

3) $\dim V(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \dim V(\lambda) \geq 1$

În continuare V K-sp vect de dim n $(n \in \mathbb{N}^*)$

I) Fie V K-sp vect, $v=(v_1,\dots,v_n)$ bază în $_K V$

$f \in End_K(V)$ cu $[f]_v = (a_{ij}) \in M_n(K)$

$\hspace{8em} \| \; A$

Atunci valorile proprii $\lambda \in K$ ale lui f (ale lui A) sunt soluțiile din K ale ecuației:

$\det(A-\lambda\cdot I_n)=0$ (1) numită ec carac a matricii A.

Dacă $\lambda \in K$ este o sol a ec (1) at:

$x = x_1\cdot v_1 + \dots + x_n v_n \in V(\lambda) \iff$

$(x_1,\dots,x_n) \in K^n$ este o sol a sist omogen de ec liniare

$$(A-\lambda I_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\det(A-\lambda I_n)=0 \iff \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_{11}-\lambda x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Dem: $\lambda \in K$ val proprie pt $f \iff \exists\, x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \overset{\text{nenul}}{\in V}$ a.î.

$f(x) = \lambda x \iff$ — " — $\in V(\lambda) =$

$= Ker(f-\lambda\cdot 1_V)$ nenul

$\iff [f-\lambda\cdot 1_V]_v \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ are sol nenule

$\iff \Big(\underset{A}{[f]_v} - \lambda \underset{I_n}{[1_V]_v}\Big)\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\iff \det(A-\lambda\cdot I_n)=0$

$\iff \lambda \in K$ val prop pt f (1)

End $\Rightarrow$ formăm matricea și reexaminăm de la început

Terminologie:

$\det(A-\lambda I_n) \overset{not}{=} P_A(\lambda)$ polinomul caracteristic al lu[i]

sau pol. carac al lui f în baza [...]

$\boxed{T}$: Fie $f \in End(V)$, v, u baze în $\underset{K}{V}$, $[f]_v = A$, $[f]_u = B$

Atunci $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

Dem: Fie S matricea de trecere de la baza v la baza u

$\Rightarrow [f]_u = S^{-1} \cdot [f]_v \cdot S \Leftrightarrow B = S^{-1} \cdot A S \Rightarrow$

$\Rightarrow P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(S^{-1} \cdot AS - S^{-1}(\lambda I_n) S) =$

$= \det(S^{-1}(A - \lambda \cdot I_n) \cdot S) = \underset{\in K}{\det S^{-1}} \det(A - \lambda I_n)$

$\cdot \underset{\in K}{\det S} = \underbrace{\det S^{-1} \cdot \det S}_{=1} \cdot P_A(\lambda) = P_A(\lambda)$

$\Rightarrow P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$

Consecință: 1) Pol. carac. al lui f nu depinde de baza (într-o bază) cu care lucrăm, motiv pt care îl numim pol carac al lui f și îl not $P_f(\lambda)$

2) $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n} + \ldots + a_1\lambda + a_0$

și $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$

$a_0 = \det A$

$\Longrightarrow Tr A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (urma lui A)

$a_0 = \det A$ sunt invarianți

3) $P_f \in K[X]$ și grad $P_f = n$ $(= \dim V) \Rightarrow P_f$ are cel mu[lt] n răd în K

4) $K = \mathbb{C} \Rightarrow P_f$ are n răd în $\mathbb{C}$ nu neapărat diferite

$K = \mathbb{R} \Rightarrow$ prop nu mai este valabilă

Def: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ are formă diagonală dacă $\exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$f \in End_K(V)$, f este diagonalizabil dacă $\exists v$ bază în ${}_K V$ a.î. : $[f]_v$ diagonală

$B \in M_n(K)$ este diagonalizabilă dacă $\exists u$ bază în ${}_K V$ $\exists f \in End_K(V)$ diagonaliz a.î. $B = [f]_u$

Obs: B diagonalizabilă $\Leftrightarrow \exists S \in M_n(K)$ inv a.î. $S^{-1} \cdot S \cdot S$ diag matr

(T) $f \in End_K(V)$ diagonalizabil $\Leftrightarrow$ V are o bază formată din vectori proprii ai lui f

Dem: „$\Rightarrow$" f diag $\Leftrightarrow \exists v = (v_1, \dots, v_n)$ bază în ${}_K V$, $\exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ a.î.:

$$[f]_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases} \quad (4)$$

$(4) \Rightarrow$ v este formată din vectori proprii ai lui f

"$\Leftarrow$" Fie $v = (v_1, \dots, v_n)$ bază formată din vectori proprii
$\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ val proprii coresp lui $v_1, \dots v_n$
$\Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow f$ diagonalizabilă

Consecințe: a) f diagonalizabil $\Rightarrow P_f$ are toate răd în K

Dem: f diag $\Rightarrow \exists\ v$ bază în V a.î. $[f]_v$ are forma(3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$P_f(\lambda) = 0 \text{ are sol } \lambda_1, \dots \lambda_n \in K$$

b) $f \in End_K(V)$ și $\lambda_i \in K$ valoare proprie a lui f

m_i = multip lui λ_i în P_f = multiplicitate algebrică a lui λ_i

$n_i = \dim V(\lambda_i)$ = multiplicitate geom a lui λ_i

$$1 \leq n_i \leq m_i$$

În consecință dacă $\lambda_i \in K$ este o răd simplă a lui P_f atunci $n_i = m_i = 1$

T) Fie $f \in End_K(V)$, $v_1, \dots v_k \in V$ vectori proprii ai lui f coresp la val proprii distincte ale lui f, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$
$\dots \lambda_k$. Atunci $v_1, \dots v_k$ sunt liniar indep ($k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$)

Dem: Fie $\alpha_1, \dots \alpha_k \in K$ a.î.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Longrightarrow$$

Atunci $\alpha_1 = \dots = \alpha_k$ (?)

Inducție după $k \in \mathbb{N}^*$

$k=1$: $\alpha_1 \underset{\neq 0}{v_1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Pp prop adv pt k și considerăm $v_1, \dots v_k, v_{k+1}$ vectori proprii coresp $\lambda_1, \dots \lambda_k, \lambda_{k+1}$ care sunt val. proprii distincte și luăm $\alpha_1, \dots \alpha_k, \alpha_{k+1} \in K$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad | \cdot \lambda_{k+1} \quad (*)$$

Înm $(*)$ cu λ_{k+1} avem:

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_{k+1} \cdot v_n = 0$$

Aplicând f lui $(*)$ avem $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$

$$\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = \dots = \alpha_k \underbrace{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \alpha_{k+1} \underset{\neq 0}{v_{k+1}} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

Deci $v_1, \dots v_{k+1}$ l. independenți

Consecință: $f \in End_K(V)$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sunt ~~val.~~ proprii distincte ale lui $f \Rightarrow f$ diagonalizabil

Dem) temă

T) Fie $f \in End_K(V)$, V K-s.v. de dimensiune n ($\in \mathbb{N}^*$)

Urm afirmații sunt echiv:

a) f diagonalizabil

b) Au loc urm:

1) P_f are toate răd în K

2) dacă $\lambda_1, \dots \lambda_k \in K$ sunt răd dif (2×2) ale lui P_f

atunci $\forall\, i = \overline{1,k}$, $\underbrace{m_i}_{m\ alg\ \lambda_i} = \underbrace{n_i}_{m\ geom\ \lambda_i}$

Obs: Fie $i \in \{1, \dots, k\}$ ca în teorema ant 2)

$$n_i = \dim V(\lambda_i) = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i 1_V) =$$
$$= n - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda_i 1_V)$$

Dacă: b este o bază a lui ${}_K V$ atunci

$$n_i = n - \operatorname{rang}([f]_b - \lambda_i I_n)$$

2) $B \in M_n(K)$ diagonalizabilă $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{i) toate val proprii ale lu[i]} \\ \quad B \text{ sunt în } K \\ \text{ii) dacă } \lambda_1, \dots \lambda_k \text{ sunt} \\ \quad \text{val proprii dif } (\lambda \dots \\ \text{ale lui } B \text{ at } \forall\, i = \overline{1,k} \\ m_i = n - \operatorname{rang}(B - \lambda_i I \dots \end{cases}$