**Analiză pe $\mathbb{R}$** Lect. dr. ANCA GRAD
**Tema nr. 8**

# Funcţii continue

**Exerciţiul 1:** Folosind definiţia, verificaţi dacă funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

este continuă.

**Exerciţiul 2:**
**a)** Folosind teorema de caracterizare cu $\varepsilon$ şi $\delta$ demonstraţi că funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \\ -x & : x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

este continuă în 0.

**b)** Folosind definiţia demonstraţi că funcţia de la **a)** nu are alte puncte de continuitate în afară de 0, deci $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $f$ este discontinuă în $x$.

**Exerciţiul 3:** Studiaţi continuitatea funcţiei

**a)** $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : x \in (-\infty, 0) \\ 7 & : x = 0, \end{cases}$$

**b)** $f : [-1, 2] \cup \{4\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & : x \in [-1, 2] \\ 0 & : x = 4. \end{cases}$$

**Exerciţiul 4:** Studiaţi continuitatea funcţiilor:

**a)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{|x|} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases} .$$

**b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^{-1}} & : x \in (0, \infty) \\ 0 & : x = 0, \\ x^2 + 2x + \sin x & : x \in (-\infty, 0). \end{cases} .$$

**c)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & : x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases} .$$

**d)** $f : [-2,1] \cup \{3\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & : x \in [-2,0] \\ 1 + \sin x & : x = (0,1] \\ 2 & : x = 3. \end{cases}$$

**Exercițiul 5:** Discutați în funcție de valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$, continuitatea următoarelor funcții:

**a)** $f : [1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} & : x \in [1,2] \\ \\ 3a + 2x & : x \in (2,3]. \end{cases}$$

**b)** $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & : x \in (0,1] \\ \\ a\dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} & : x \in (1,\pi). \end{cases}$$

**Exercițiul 6:** Fie $0 < a < b \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \left(\frac{b^x - a^x}{x(b-a)}\right)^{\frac{1}{x-1}}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

- a) Arătați că $f$ este o funcție continuă.
- b) Arătacți că există o funcție coninuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asfel încât $F(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
- c) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

# Considerații teoretice

**Ipoteze generale**

$$\begin{cases} \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \\ f : D \to \mathbb{R} \\ x_0 \in D. \end{cases}$$

**Definiție**:

Funcția $f$ este **continuă** în $x_0$ dacă

$$\forall (x_n) \subseteq D \quad \text{cu} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

**Teorema de caracterizare cu vecinătăţi**:

f este continuă în $x_0$ dacă şi numai dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \quad \text{astfel încât} \quad f(x) \in V,$$

**Teorema de caracterizare cu $\varepsilon$ şi $\delta$**:

f este continuă în $x_0$ dacă şi numai dacă

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$ astfel încât $\quad \forall x \in D \quad$ cu $\quad |x - x_0| < \delta, \quad$ avem $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

**Teorema de legătură între limitele de funcţii şi continuiutate**:

Dacă $x_0 \in D \cap D' = D \backslash IzoD$, atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. f este continuă în $x_0 \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

2. Dacă $\begin{cases} \exists f(x_0 - 0) \\ \exists f(x_0 + 0) \\ f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \end{cases} \Longrightarrow f$ este continuă în $x_0$.

**Observaţie:** Se poate demonstra uşor, cu ajutorul definiţiei, că toate funcţiile elementare sunt continue pe mulţimea maximă de definiţie. De aceea, dacă nu vi se cere în mod explicit demonstrarea continuităţii unor astfel de funcţii, ele se pot considera automat continue.