CURS 11

Dimensiune

Fie K un corp comutativ.

Teorema 1. (Teorema schimbului (Steinitz))
Fie V un K-spaţiu vectorial. Dacă $x_1, \ldots, x_m \in V$ sunt vectori liniar independenţi şi $V = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$, atunci $m \leq n$ şi după o reindexare convenabilă avem

$$V = \langle x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n \rangle.$$

Corolarul 2. Toate bazele unui spaţiu vectorial V de tip finit (finit generat) sunt finite şi au acelaşi număr de vectori.

Din Corolarul 2 rezultă că pentru orice K-spaţiu vectorial V de tip finit toate bazele lui V au acelaşi număr de elemente. Acest număr se numeşte **dimensiunea** lui V şi se notează cu $\dim V$ sau $\dim_K V$. Deci $\dim V$ este cardinalul unei baze a lui V.

Observaţiile 3. a) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită, atunci $\dim V = n$ dacă şi numai dacă există n vectori liniar independenţi şi orice $n+1$ vectori din V sunt liniar dependenţi.

Această afirmaţie rezultă din definiţia $\dim V$ şi din faptul că bazele lui V coincid cu submulţimile independente maximale ale lui V.
b) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci orice n vectori liniar independenţi din V formează o bază a lui V.
c) Dacă V este un spaţiu vectorial de tip finit şi A este un subspaţiu al lui V, atunci $\dim A \leq \dim V$. Mai mult, $A \neq V$ dacă şi numai dacă $\dim A < \dim V$.

Exemplele 4. a) Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\dim K^n = n$ pentru că $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ formează o bază a lui K^n.
b) Luând $n = 1$ în a) deducem că $\dim_K K = 1$. În particular, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Totuşi, cum

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ unic determinate } : \ z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i\,,$$

se deduce că $\{1, i\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{C}$, prin urmare, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
c) Dacă K este un corp comutativ, atunci $\dim P_n(K) = n + 1$ pentru că $1, X, X^2, \ldots, X^n$ formează o bază a K-spaţiului $P_n(K) = \{f \in K[X] \mid \operatorname{grad} f \leq n\}$.
d) Dacă V_1 şi V_2 sunt K-spaţii vectoriale şi X, respectiv Y este o bază a lui V_1, respectiv V_2, atunci se verifică uşor că $\{(x, 0) \mid x \in X\} \cup \{(0, y) \mid y \in Y\}$ este o bază a produsului direct $V_1 \times V_2$, de unde ţinând seama că $|X| = |\{(x, 0) \mid x \in X\}|$, $|Y| = |\{(0, y) \mid y \in Y\}|$ şi $\{(x, 0) \mid x \in X\} \cap \{(0, y) \mid y \in Y\} = \emptyset$ rezultă

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Teorema 5. Două K-spaţii vectoriale V şi V' sunt izomorfe dacă şi numai dacă $\dim V = \dim V'$.

Demonstrație. $V \simeq V'$ ($\Longleftrightarrow \exists\, \varphi : V \to V'$ izom. de K-s.v.).

$V \simeq V' \Longleftrightarrow \dim V = \dim V'$

„$\Longrightarrow$" $\exists\, \varphi : V \to V'$ izom. de K-s.v. | $\xRightarrow[\text{a sp. vect.}]{\text{P. univ.}}$ $\varphi(X)$ bază în V'

Fie X bază în ${}_K V$

Dar $|X| = |\varphi(X)| \Longrightarrow \dim V = |X| = |\varphi(X)| = \dim V'$.

„$\Longleftarrow$" X bază în V, Y bază în V' cu $|X| = |Y| \Longleftrightarrow \exists\, f : X \to Y$ fcție bijectivă

$\xRightarrow{\text{P. univ. a s.v.}} \exists!\, \bar{f} : V \to V'$ transf. liniară a.î. $\bar{f}|_X = f$

$f : X \to V'$ inj., $f(X) = Y$ bază în V' | $\Longrightarrow \bar{f}$ izom. $\Longrightarrow V \simeq V'$.

Corolarul 6. Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci V este izomorf cu K^n. Dacă $\{x_1, \ldots, x_n\}$ este o bază a lui V, atunci

$$f : K^n \to V,\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

este un izomorfism ce aplică baza canonică a lui K^n pe baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Într-adevăr, fcția $\{e_1, \ldots, e_n\} \to \{x_1, \ldots, x_n\}$, $e_i \mapsto x_i$, $i = \overline{1,n}$ este bijectivă și folosind (2) din dem. pr. de univ. a sp. vectoriale, izom. f care rezultă este def.

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Apendice

Def: Fie V un K-sp. vectorial, $v_1, \ldots, v_m \in V$. S.n. rangul sistemului de vectori $(v_1, \ldots, v_m)$, notat $\text{rang}(v_1, \ldots, v_m)$, numărul

$$\text{rang}(v_1, \ldots, v_m) = \dim \langle v_1, \ldots, v_m \rangle.$$

Obs: a) $\text{rang}(v_1, \ldots, v_m)$ = nr. maxim de vectori l. indep. ce pot fi aleși dintre $v_1, \ldots, v_m$

b) Dacă $V = K^n$, $v_1, \ldots, v_m \in K^n$

$\text{rang}(v_1, \ldots, v_m)$ = nr. maxim de n-uple ce pot fi alese dintre $v_1, \ldots, v_m$ a.î. nici unul dintre n-uplele alese nu poate fi scris ca o comb. liniară de celelalte =

= rangul matricii de tipul (m, n) ce poate fi formată cu aceste n-uple ca și ~~coloane~~ linii = rangul matricii de tip (n, m) care are aceste n-uple ca ~~linii~~ coloane.

c) Fie $f : K^n \to V$ izomorfism care duce baza canonică a lui ${}_K K^n$ în baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a lui ${}_K V$

$\Longrightarrow f^{-1} : V \to K^n$ izom.; $v = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ | $\Longrightarrow f^{-1}(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Fie $v_1, \ldots, v_m \in V$.

$\text{rang}(v_1, \ldots, v_m) = \dim \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \dim f^{-1}(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) = \dim \langle \underbrace{f^{-1}(v_1)}_{\in K^n}, \ldots, \underbrace{f^{-1}(v_m)}_{\in K^n} \rangle =$

$= \text{rang}(f^{-1}(v_1), \ldots, f^{-1}(v_m))$ = rangul matricii formate cu aceste n-uple = rangul matricii formate cu coord. vectorilor $v_1, \ldots, v_m$ în baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Teorema 7. Dacă V şi V' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V). \tag{4}$$

Demonstraţie. *(facultativă)*

Fie X o bază în $\operatorname{Ker} f$ şi $X \cup X'$ cu $X \cap X' = \emptyset$ o completare a lui X la o bază a lui V. Din $X \cap X' = \emptyset$ şi unicitatea scrierii unui vector ca şi combinaţie liniară de vectori dintr-o bază rezultă $\langle X\rangle \cap \langle X'\rangle = \{0\}$. Dacă $x'_1, x'_2 \in X'$ şi $f(x'_1) = f(x'_2)$ atunci

$$f(x'_1 - x'_2) = 0 \Rightarrow x'_1 - x'_2 \in \langle X'\rangle \cap \operatorname{Ker} f = \langle X'\rangle \cap \langle X\rangle = \{0\} \Rightarrow x'_1 - x'_2 = 0 \Rightarrow x'_1 = x'_2.$$

Deci $f|_{X'} : X' \to f(X')$ este bijecţie, ceea ce ne arată că $|X'| = |f(X')|$. Demonstrăm că $f(X')$ este o bază a lui $f(V)$. Pentru orice $y \in f(V)$ există $x \in V$ astfel ca $y = f(x)$, dar $X \cup X'$ fiind o bază a lui V, există $x_1, \dots, x_m \in X$, $x'_{m+1}, \dots, x'_n \in X'$ astfel ca

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x'_{m+1} + \cdots + \alpha_n x'_n,$$

de unde ţinând seama de $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in \operatorname{Ker} f$ deducem

$$y = f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) + \alpha_{m+1} f(x'_{m+1}) + \cdots + \alpha_n f(x'_n) =$$

$$= \alpha_{m+1} f(x'_{m+1}) + \cdots + \alpha_n f(x'_n) \in \langle f(X')\rangle$$

ceea ce ne arată că $f(V) = \langle f(X')\rangle$. Dacă $y_1, \dots, y_l \in f(X')$ atunci există $x'_i \in X'$ astfel încât $y_i = f(x'_i)$ $(i = 1, \dots, l)$. Pentru $\beta_1, \dots, \beta_l \in K$ cu $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_l y_l = 0$ avem

$$f(\beta_1 x'_1 + \cdots + \beta_l x'_l) = 0 \Rightarrow \beta_1 x'_1 + \cdots + \beta_l x'_l \in \langle X'\rangle \cap \operatorname{Ker} f = \langle X'\rangle \cap \langle X\rangle = \{0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 x'_1 + \cdots + \beta_1 x'_l = 0 \Rightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$$

ceea ce arată că $f(X')$ este liberă. Deci $f(X')$ este o bază a lui $f(V)$ şi $|X'| = |f(X')|$ de unde rezultă că $\dim f(V) = |X'|$ ceea ce împreună cu faptul că $X \cup X'$ este bază pentru V, iar X este bază pentru $\operatorname{Ker} f$ şi $X \cap X' = \emptyset$ implică pe (4).

Cu notaţiile din Teorema 7, $\dim \operatorname{Ker} f$ se numeşte **defectul** lui f, iar $\dim f(V)$, **rangul** lui f.

Corolarul 8. a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi A, B subspaţii ale lui V. Atunci

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A + B). \tag{5}$$

Într-adevăr, funcţia $f : A \times B \to A + B$, $f(a, b) = a - b$ este o transformare liniară surjectivă şi $\operatorname{Ker} f = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$. Din (4) rezultă

$$\dim(A \times B) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(A + B). \tag{6}$$

Dar cum $g : A \cap B \to \operatorname{Ker} f$, $g(x) = (x, x)$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, urmează

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(A \cap B), \tag{7}$$

iar într-un exemplu din cursul anterior am văzut că

$$\dim(A \times B) = \dim A + \dim B. \tag{8}$$

Acum din (6), (7) şi (8) se obţine (5).

b) Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, iar A şi B sunt subspaţii ale lui V, atunci

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B \Leftrightarrow A+B = A \oplus B.$$

c) Dacă V, V' sunt K-spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune finită (i.e. $\dim V = \dim V' \in \mathbb{N}$), iar $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:
i) f este injectivă;
ii) f este surjectivă;
iii) f este izomorfism.

Cum implicaţiile iii) $\Rightarrow$ i) şi iii) $\Rightarrow$ ii) sunt evidente, rămâne de demonstrat i) $\Leftrightarrow$ ii).
Din i) rezultă $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, prin urmare,

$$\dim V' = \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V) = \dim f(V).$$

Cum $f(V) \leq_K V'$, deducem că $f(V) = V'$, deci f este surjectivă.
Reciproc, din ii) rezultă că $\dim f(V) = \dim V'$, prin urmare

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim f(V) = \dim V' - \dim f(V) = 0.$$

Aşadar, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, deci f e injectivă.

Transformări liniare şi matrici

În acest paragraf vom arăta că studiul transformărilor liniare între două K-spaţii vectoriale V şi V' de tip finit se reduce la studiul matricelor de tipul (m,n) cu elemente din K, unde $m = \dim V'$ şi $n = \dim V$. Menţionăm că în această secţiune, bazele nu vor fi privite doar ca mulţimi ci ca mulţimi ordonate. Astfel, prin **bază** vom înţelege **bază ordonată**.

Fie K un corp comutativ, V şi V' K-spaţii vectoriale de dimansiune finită, $n = \dim V$, $m = \dim V'$ şi $u = (u_1, \ldots, u_n)$ respectiv $v = (v_1, \ldots, v_m)$ o bază a lui V respectiv V'. Fiecare vector $y \in V'$ are o reprezentare unică de forma

$$y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m. \tag{1}$$

Scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_m$ din (1) se numesc **coordonatele** lui y în baza v.

Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, conform proprietăţii de universalitate a spaţiilor vectoriale, f este determinată de restricţia sa la u, adică de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$, iar fiecare vector $f(u_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ este determinat de coordonatele sale în baza v.

Deci transformarea liniară f este determinată de scalarii α_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ din relaţiile

$$\begin{aligned}
&f(u_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{m1}v_m\\
&f(u_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{m2}v_m\\
&\vdots\\
&f(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{mn}v_m.
\end{aligned} \tag{2}$$

Notăm cu $[f]_{u,v}$ matricea de tipul (m, n) care are **coloanele** formate din coordonatele vectorilor $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ în baza v, adică

$$[f]_{u,v} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricea $[f]_{u,v}$ se numeşte **matricea transformării liniare** f **în perechea de baze** (u, v). Când $V = V'$ şi $v = u$, matricea $[f]_u$ se mai notează cu $[f]_u$ şi se numeşte **matricea lui** f **în baza** u.

Folosind matrice linie cu elementele vectori, relaţiile (2) se pot scrie astfel:

$$(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = (v_1, \ldots, v_m)[f]_{u,v}.$$

Dacă $x \in V$ şi x are coordonatele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ în baza u, iar $f(x)$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m$ în baza v, adică

$$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,\ f(x) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

atunci

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

de unde, folosind pe (2) obţinem

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \alpha_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i. \tag{3}$$

Din (3) şi din unicitatea coordonatelor rezultă

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \alpha_j \ (i = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

ceea ce ne arată că coordonatele lui $f(x)$ sunt combinaţii liniare ale coordonatelor lui x cu coeficienţii din **liniile** matricei $[f]_{u,v}$. Relaţiile (4) se exprimă matriceal astfel

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Menţionăm că matricea $[f]_{u,v}$ depinde de f, de bazele u, v şi de ordonările acestor baze, iar

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} [f]_{u,v}.$$

Exemplele 9. a) Pentru orice K-spaţiu vectorial V de dimensiune n şi orice bază u a lui V,

$$[1_V]_u = I_n.$$

b) Fie $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ - spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţii din $\mathbb{R}$. Funcţia

$$\varphi : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}),\ \varphi(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3) = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2$$

(adică funcţia care asociază unui polinom f derivata formală f' a sa) este o transformare liniară. Vom scrie matricea lui φ în perechile de baze ordonate $u = (1, X, X^2, X^3)$, $v = (1, X, X^2)$ şi $u = (1, X, X^2, X^3)$, $v' = (X^2, 1, X)$. Avem

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot X \\
\varphi(X) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 = 0 \cdot X^2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot X \\
\varphi(X^2) &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot X \\
\varphi(X^3) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 3 \cdot X^2 = 3 \cdot X^2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot X
\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$[\varphi]_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ şi } [\varphi]_{u,v'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Fie K un corp comutativ, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M_{m,n}(K)$ iar e baza canonică a lui K^n şi e' baza canonică a lui K^m. Scriind vectorii din K^n şi K^m sub formă de matrice coloane se verifică uşor că

$$f_A : K^n \to K^m,\ f_A(x_1, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

este o transformare liniară şi $[f_A]_{e,e'} = A$.

Teorema 10. Fie K un corp comutativ, V, V', V'' K-spaţii vectoriale, $f : V \to V'$, $f' : V \to V'$, $g : V' \to V''$ transformări liniare şi $\alpha \in K$.
1) Dacă $u = (u_1, \dots, u_n)$ şi $v = (v_1, \dots, v_m)$ sunt baze în V, respectiv V', atunci

$$[f + f']_{u,v} = [f]_{u,v} + [f']_{u,v} \text{ şi } [\alpha f]_{u,v} = \alpha [f]_{u,v}. \tag{5}$$

2) Dacă $w = (w_1, \dots, w_p)$ este o bază a lui V'', atunci

$$[g \circ f]_{u,w} = [g]_{v,w} \cdot [f]_{u,v}. \tag{6}$$

Demonstraţie. 1) Dacă $[f]_{u,v} = (\alpha_{ij})$, $[f']_{u,v} = (\alpha'_{ij})$ atunci

$$(f + f')(u_j) = f(u_j) + f'(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha'_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij}) v_i$$

şi

$$(\alpha f)(u_j) = \alpha f(u_j) = \alpha \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha \alpha_{ij}) v_i$$

ceea ce demonstrează egalităţile (5).
2) Fie $[g]_{v,w} = (b_{ij})$. Folosind comutativitatea lui K avem

$$(g \circ f)(u_j) = g(f(u_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} g(v_k) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ik} w_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} \alpha_{kj}\right) w_i,$$

de unde rezultă (6).

Corolarul 11. a) Aplicaţia

$$\varphi : Hom_K(V, V') \to M_{m,n}(K),\ \varphi(f) = [f]_{u,v}$$

este un izomorfism de K-spaţii vectoriale.

Într-adevăr din (5) urmează că φ este o transformare liniară, iar din proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale rezultă că φ este bijectivă. Deci φ este izomorfism.

b) Aplicaţia

$$\varphi : End_K(V) \to M_n(K),\ \varphi(f) = [f]_u$$

este un izomorfism de K-spaţii vectoriale şi de inele.

Într-adevăr, din a) urmează că φ este un izomorfism de K-spaţii vectoriale, iar din prima egalitate din (5) şi din (6) rezultă că φ este un izomorfism de inele.

c) Aplicaţia

$$\varphi' : Aut_K(V) \to GL_n(K),\ \varphi'(f) = [f]_u$$

este un izomorfism de grupuri.

Această afirmaţie rezultă din b) şi din faptul că un izomorfism între două inele cu unitate păstrează elementele inversabile.

d) Dacă $u = (u_1, \ldots, u_n)$ este o bază a lui V şi $u'_1, \ldots, u'_n \in V$, atunci $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ este o bază a lui V dacă şi numai dacă există o matrice inversabilă $S = (s_{ij}) \in M_n(K)$ unic determinată (numită matricea de trecere de la baza u la baza u') astfel încât

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i \ (j = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

adică

$$(u'_1, \ldots, u'_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot S.$$

Într-adevăr, dacă $f : V \to V$ este endomorfismul definit pe baza u prin $f(u_j) = u'_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, atunci din (7) rezultă $S = [f]_u$. Deci u' este o bază dacă şi numai dacă f este un izomorfism ceea ce este echivalent cu S inversabilă. Acum, unicitatea lui S rezultă din bijectivitatea lui φ.

e) Dacă S este matricea de trecere de la baza $u = (u_1, \ldots, u_n)$ la baza $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$, atunci S^{-1} este matricea de trecere de la baza u' la baza u.

f) Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ baze ordonate ale K-spaţiului vectorial V şi $S = (s_{ij})$ matricea de trecere de la u la u'. Dacă $x \in V$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectiv $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ sunt coordonatele lui x în baza u respectiv u', atunci

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \alpha'_j \ (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

Într-adevăr din (7) rezultă că S este matricea lui 1_V în perechea de baze (u', u) ceea ce conform lui (4) implică (8).

Teorema următoare ne dă legea de dependenţă a matricei $[f]_{u,v}$ de perechea de baze ordonate (u, v).

Teorema 12. Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$, respectiv $v = (v_1, \ldots, v_m)$ şi $v' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ baze ale K-spaţiului vectorial V, respectiv V'. Dacă S este matricea de trecere de la u la u' şi T este matricea de trecere de la v la v', atunci

$$[f]_{u',v'} = T^{-1} \cdot [f]_{u,v} \cdot S. \tag{9}$$

Demonstraţie. Aşa cum am văzut (în demonstraţia Corolarului 11 f)) S coincide cu matricea lui 1_V în perechea de baze (u', u). Întrucât T este matricea de trecere de la v la v' rezultă că T^{-1} coincide cu matricea lui $1_{V'}$ în (v, v'). Acum din $f = 1_{V'} \circ f \circ 1_V$ şi din (6) deducem pe (9).

Corolarul 13. Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ baze ale K-spaţiului vectorial V, S este matricea de trecere de la u la u' şi $f : V \to V$ este un endomorfism. Atunci

$$[f]_{u'} = S^{-1} \cdot [f]_u \cdot S.$$