luni - 9:00

SDP, dem topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$

Curs 14.

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

① Șiruri de funcții

ex: Studiați convergența punctuală și uniformă a șirului de funcții (f_n) unde:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{iar } f_n(x) = \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

I Fie x arb. dar

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} = 0$$

Obs: • dacă $x=0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(0)=0$, deci șirul de nr reale $(f_n(0))$ este șirul constant 0, cu limita 0

• dacă $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} = x \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{e^{n^2x^2}} =$$

Reamintim:

① Conform (+) lui D'Alembert pt STP dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci seria $\sum x_n$ C

② $\sum x_n$ C $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\Rightarrow$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (! $x_n > 0$)

în cazul nostru: $x_n = \frac{2n^2}{e^{n^2x^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{e^{(n+1)^2x^2}} \cdot \frac{e^{n^2x^2}}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{e^{n^2x}}{e^{n^2x^2+2nx^2}}$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2nx^2+x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$

~~Astfel~~: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

x - ~~arbitrar~~ $\in \mathbb{R}$

II $\mathcal{C} = \mathbb{R}$ și definim funcția

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$

Obs: $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n continuă

f ~~este~~ continuă

III Fie $(n \in \mathbb{N})$ $(\mathrm{orb.})$ des.

$a_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \{ |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| =$

$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{2n^2|x|}{e^{n^2x^2}}$

Definim funcția auxiliară $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

și îi studiem variația cu ajutorul derivatei de ord I

! g este deriv. pe $\mathbb{R}$, fiind o compunere de f elementare!

$g'(x) = 2n^2 \frac{e^{n^2x^2} - xe^{n^2x^2} \cdot 2n^2x}{e^{2n^2x^2}} = 2n^2 \frac{\cancel{e^{n^2x^2}}(1-2n^2x^2)}{e^{2n^2x^2}} =$

$= 2n^2 \frac{(1-2n^2x^2)}{e^{n^2x^2}}$

$g'(x)=0 \iff 1-2n^2x^2=0 \iff x=\pm\frac{1}{n\sqrt{2}}$

x		$-\frac{1}{n\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{n\sqrt{2}}$	
$g'(x)$	$-\ -\ -$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-\ -\ -\ -$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$\lvert g(x)\rvert$	$\nearrow$	$\lvert g(-\frac{1}{n\sqrt{2}})\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\lvert g(\frac{1}{n\sqrt{2}})\rvert$	$\searrow$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ |g(x)| \le \max\left\{\left|g\left(-\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\right|, \left|g\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\right|\right\}$

$\left|g\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{2n^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{n}\sqrt{2}}}{e^{\cancel{n^2}\cdot\frac{1}{2\cancel{n^2}}}} = \frac{\sqrt{2}\,n}{\sqrt{e}} = \left|g\left(-\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\right|$

$\Rightarrow \boxed{a_n=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot n}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty\ (\neq 0) \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$

② Serii de funcții

Def: Orice ~~perech~~ pereche ordonată de două șiruri de funcții $((f_n),(s_n))$ unde $s_1=f_1$

$s_2=f_1+f_2$

$\vdots$

$s_n=f_1+\dots+f_n$

s.n. SERIE DE FUNCȚII și se notează cu

$\sum\limits_{n\ge1} f_n = \sum f_n$

Def: Fie $\sum f_n$ o serie de funcții cu $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Mulțimea $\mathcal{C} = \{c \in A$: seria de numere reale $\sum f_n(c)$ este convergentă$\}$

$= \{c \in A : \exists \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) \in \mathbb{R}\}$ s.n.

MULȚIMEA DE CONVERGENȚĂ A SERIEI DE FUNCȚII

$= \{c \in A : \exists \lim_{n \to \infty} s_n(c) \in \mathbb{R}\}$,

iar $s : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definită prin

$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$, $\forall x \in \mathcal{C}$ s.n. SUMA SERIEI DE FUNCȚII și are loc

$s_n \xrightarrow{\mathcal{C}} s$, care implică

CONVERGENȚA PUNCTUALĂ A SERIEI DE FUNCȚII este s. notată prin

$\sum f_n \xrightarrow{\mathcal{C}} s$

Dacă $s_n \overset{\mathcal{C}}{\rightrightarrows} s$ atunci spunem că seria de funcții este uniform convergentă și notăm $\sum f_n \rightrightarrows s$

T Weierstrass pentru serii de funcții:

Fie $\sum f_n$ o serie de funcții

$\sum a_n$ o serie de nr reale a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(x) \leq a_n$

$\forall x \in A$

Dacă $\sum a_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum f_n \overset{A}{\rightrightarrows}$

Obs: Prin uniform convergență funcția sumă moștenește prop de funcțiilor din serie cum ar fi:

- continuitate
- derivabilitate
- integrabilitate

ne permite efectuarea anumitor op asupra funcției sumă deoarece $\forall x \in \mathcal{C}$. $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$

$$\int_a^b s(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx$$

Ex: Să se det (dacă $\exists$) suma seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$$

Soluție: Obs: $\forall$ serie de puteri este o serie de funcții cu $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f_n(x) = a_n \cdot x^n \ \forall x \in$

I Analizăm clasic seria de puteri

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$$

- $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$

$$\Rightarrow (-1,1) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-1,1]$$

- Analizăm separat

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum \frac{1}{n} \ D$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ C \ (\text{Leibnitz})$$

Concluzie: $\mathcal{C} = (-1, 1] \Rightarrow \exists\, s: (-1,1]$ a.î. $\sum f_n \underset{(-1,1]}{\longrightarrow} s$

Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n este o funcție continuă $\Rightarrow$ (funcție sumă)

$\Rightarrow s$ este cont

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$= T_{n,0} f(x)$$

$$\hookrightarrow f(x) = -\ln(1+x)$$

s_n = un șir de Polinoame ale lui Taylor

Astfel putem concluziona că $\ln(1+x)$ se dezvoltă în serie Taylor doar pe $\mathcal{C} = (-1, 1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$ f_n este C și derivabilă $\Rightarrow s$ va fi C și deriv

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_n = -\ln(1+x)$$

$$s'(x) = -\frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum \left((-1)^{n+1} \cdot x^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum (-x)^{n-1}$$

serie geom $q = -x$

este C pt $|x| < 1$ și are suma $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$

$$\Rightarrow s'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow s(x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx \dots$$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{1+y}$

$\downarrow y = x^2$

Seria binomială $\simeq$ pt puteri nenaturale

T12. Ex6

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n-1}\right)^n}_{a_n} x^n$$

I $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n-1}\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ (!)

n impar

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n+1 \cancel{-n^2}+n+1}{\sqrt[3]{(n^2+n+1)^2} + \sqrt[3]{(n^2+n+1)(n^2-n-1)} + \sqrt[3]{(n^2-n-1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^{4/3}\underbrace{(\sqrt{\ } + \sqrt{\ } + \sqrt{\ })}_{\to 3}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n^{4/3}} = 0$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 1$

$R = \infty \Rightarrow (-\infty, \infty) \subseteq C \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow C = \mathbb{R}$

ex: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x(\cos x^2 - 1)}{\sin x^4} =$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\sin x = 0 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x^4 = \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{16}}{4!} + O(x^{17})$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{11})$$

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \underbrace{O(x^3)}_{\to 0}\right)\left(-\frac{x^6}{3!} + \underbrace{O(x^7)}_{\to 0}\right)}{\frac{x^8}{2!} + \underbrace{O(x^9)}_{\to 0}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}\right)\left(-\frac{x^6}{3!}\right)}{\frac{x^8}{2!}} = \lim_{x\to 0} \frac{2!}{3!\cdot 2} \frac{(2+2x+x^2)(-x^6)}{x^8}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6} \cdot \frac{2+2x+x^2}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x+2}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \infty = -\infty$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)} dx =$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+3)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B) + x(B+C) + (3A+C)}{(x+1)(x^2+3)} \Rightarrow$$

$$A+B=0$$
$$B+C=1 \qquad C = 1-B \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$
$$3A+C=0 \qquad B = \frac{1}{4}$$
$$C = \frac{3}{4}$$