Curs 9 - Analiză

Limite de funcții - continuare

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ | f este continuă în a dacă $\forall (a_n) \subseteq A$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

T: —"— | f este c în $a \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in V \cap A, f(x)$

T: —"— $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x-a| < \delta$, să avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

T: $a \in \text{iso}\, A \Rightarrow f$ este c în a

Obs: Calcul cu limite a cont este valid doar pe $A \cap A'$

Ex: Studiați limitele și continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & : x \in (-\infty, -7] \\ \sin x & : x \in (-7, -5) \\ \cos(x+2) & : x \in [-4, -2) \\ 1 & : x = -2 \\ x & : x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$A = (-\infty, -5) \cup [-4, -2] \cup \mathbb{N}$ - aici studiem c

$A' = [-\infty, -5] \cup [-4, -2] \cup \{\infty\}$ - aici studiem limitele

I $\{-\infty\}$? $\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0 \ \exists$

dacă se cere dem:

luăm $(a_n) \subseteq A\setminus\{\infty\} = A$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ arbitrar

? $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0 \ \boxed{\exists}$

(a_n) arbitrar

$\overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} f(x) = 0$

II $(-\infty, -7)$ $f(x) = e^x$

funcție elementară $\Rightarrow$ are limită a? e c.

$\lim_{x\to a} f(x) = e^a \ \forall a \in (-\infty, -7)$

dacă se cere dem:

- def

III $a = -7 \in A \cap A'$

$\lim_{\substack{x\to-7\\x<-7}} f(x) = e^{-7} = f(-7)$

$\lim_{\substack{x\to-7\\x>-7}} f(x) = \sin(-7)$

$\} \neq \Rightarrow \nexists \lim_{x\to-7} f(x)$ și f nu e cont în -7

IV $a \in (-7, -5)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a = f(a)$

$\exists \lim_{x\to a}$, f este c în a

dem $\to$ $\boxed{def}$

V $a = 5$

$a \notin A \Rightarrow$ continuitatea nu e bine def

$a \in A' \Rightarrow$ trebuie să studiem $\boxed{\text{limita}}$

! În acest caz, limita la dreapta nu e bine definită

deci limita se confundă cu limita la stânga

$\lim_{\substack{x\to-5\\x<-5}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-5\\x<-5}} \sin x = \sin(-5) \ \exists \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-5} f(x)$

VI $a=-4 \in A \cap A'$

↳ limita la stânga nu e bine def deci limita se confundă cu limita la dreapta

$\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x>-4}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x>-4}} \cos(x+2) = \cos(-2)\ \exists \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to-4} f(x)$

$\Downarrow$

$= f(-4) \Rightarrow f$ este c în -4

VII $a \in (-4,-2)$

↳ $\exists$ lim și e c fiind o f elem

VIII $a=-2$

lim la dr nu e bine def

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} f(x) = \cos 0 = 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} f(x) = 1 = f(-2) \Rightarrow f$ este cont în -2

IX $a \in \mathbb{N} \to a \notin A' \Rightarrow$ limita nu e bine def

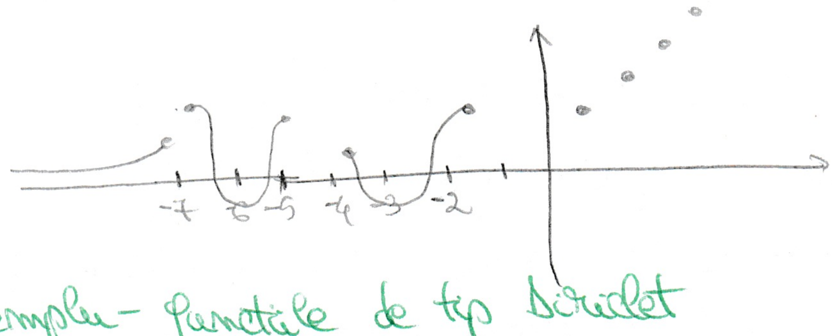
$\to a \in \text{Izo}A \Rightarrow f$ este c în a

X $a=\{\infty\}$ – $\notin A \Rightarrow$ continuitatea nu e bine def

$\in A'$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty\ \exists$

$\mathcal{L} = [-\infty,-7)\cup(-7,-5]\cup[-4,-2]\cup\{-\infty\}$

$\mathcal{C} = (-\infty,-7)\cup(-7,-5)\cup[-4,-2]\cup\mathbb{N}$



Exemplu – funcțiile de tip Dirichlet

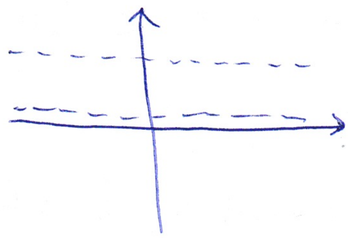
$f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

g și h continue, $f(x) = \begin{cases} g(x), & x\in\mathbb{Q} \\ h(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Ex clasice:

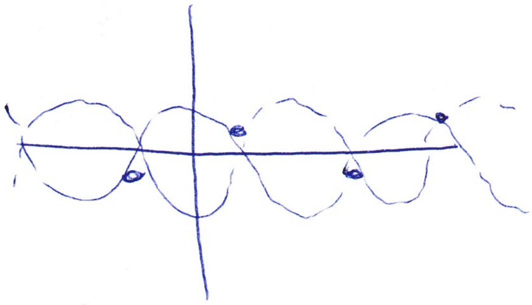
$g(x) = 1$

$h(x) = 0$



$g(x) = \sin x$

$h(x) = \cos x$



$C = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = h(x)\}$

I Dem că f nu este continuă pe $\mathbb{R} \setminus C$

- prin negarea definiției

alegem $a \in \mathbb{R} \setminus C$ arbitrar $\Rightarrow g(a) \neq h(a)$ (*)

$\Downarrow T_3$

$\exists (a_n) \subseteq \mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dar $\boxed{g \text{ cont pe } \mathbb{R}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$

$\exists (b_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ dar

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = h(a)$

$\boxed{h \text{ cont pe } \mathbb{R}}$

(*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \overset{def}{\Rightarrow} \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ și f nu e cont în a - arb

$\Rightarrow f$ nu e cont pe $\mathbb{R} \setminus C$

II Dem că f este cont pe C, cu T de caract cu ε și δ

Fie $a \in C$ arbitrar dar $\Rightarrow f(a) = g(a) = h(a)$ (**)

- dem că f este c în $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - a| < \delta$ să avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (1)

Știm că: g este c în $a \Leftrightarrow$ — " — $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ (2)

h este c în $a \Leftrightarrow$ — " — $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$ (3)

• Alegem $\varepsilon > 0$ arbitrar

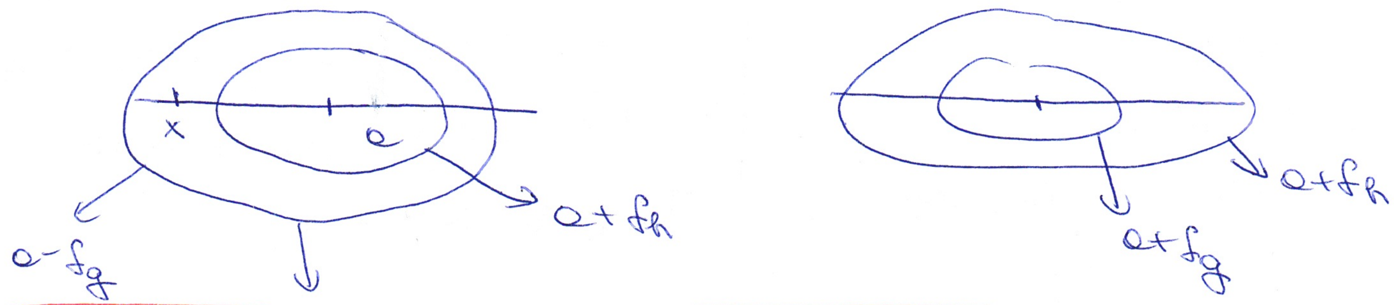
• ? $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(a)| = \begin{cases} |g(x) - f(a)| : x \in \mathbb{Q} \\ |h(x) - f(a)| : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \overset{(**)}{=} \begin{cases} |g(x) - g(a)| : x \in \mathbb{Q} \\ \quad ? < \varepsilon \\ |h(x) - h(a)| : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Pt $\boxed{\varepsilon > 0}$ arb ales:

$\overset{②}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \delta_g > 0$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - a| < \delta_g$ ~~să~~ avem $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$

$\overset{③}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \delta_h > 0$ — " — cu $|x - a| < \delta_h$ -- $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$



$\boxed{\exists\, \delta = \min\{\delta_g, \delta_h\} > 0}$ a.î. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x - a| < \delta}$ ~~să~~ avem

$$\boxed{|f(x) - f(a)| =} \begin{cases} |g(x) - g(a)| : x \in \mathbb{Q} \\ |h(x) - h(a)| : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \boxed{< \varepsilon}$$

ε arb $\Rightarrow$ ① ✓ $\Rightarrow f$ este cont în $a \in b$ arb $\Rightarrow f$ cont pe b

Exemplu: $\lim\limits_{x \to 0} \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x = 1 \ (\text{l'H}) \\ \frac{1}{x} \sin x \ - \ \cancel{\exists} \left(\text{cu def } a_n = \frac{1}{2n\pi} \quad b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right) \\ x \sin\frac{1}{x} = 0 \\ x \sin x = 0 \end{cases}$

Temă $\Bigg\{$ Dem că $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \cdot h(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \qquad g, h : A \to \mathbb{R}$

iar h este mărg $\qquad 0 \in A'$

VI Funcții derivabile

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$

· Spunem că funcția f are DERIVATĂ în punctul a, dacă:

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{not}{=} f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$$

· Sp că f este DERIVABILĂ în punctul a, dacă $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$

POLINOMUL LUI TAYLOR

Def: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in A \cap A'$, f este de n ori deriv. în a

Polinomul lui Taylor de rang n atașat funcției f și punctului a este funcția polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(T_{n,a}f)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\Rightarrow (T_{n,a}f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Obs: $\operatorname{dom} f = A$

$\operatorname{dom}(T_{n,a}f) = \mathbb{R}$ $\quad \neq$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(n)}(x) = e^x$

· pt $a \in \mathbb{R}$ arb ales $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(T_{n,a}f)(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \dots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n =$$

$$= e^a\left(1 + \frac{x-a}{1!} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

! $a=0$

$$(T_{n,0}f)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$(0! = 1)$

Ex2: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x : n = 4k \\ \cos x : n = 4k+1 \\ -\sin x : n = 4k+2 \\ -\cos x : n = 4k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$a = 0, \quad f^{(n)}(a) = \begin{cases} 0, & n = 4k \\ 1, & n = 4k+1 \\ 0, & n = 4k+2 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2t \\ (-1)^t, & n = 2t+1 \end{cases}$$

$$(T_{2t+1,0}f)(x) = \sum_{k=0}^{2t+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{t} \frac{(-1)^t}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= 0 + \frac{1}{1!} x + 0 + \frac{-1}{3!} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{(-1)^t}{(2t+1)!} \cdot x^{2t+1} =$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^t x^{2t+1}}{(2t+1)!}$$

Analog:

$$(T_{2t,0}f)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^t x^{2t}}{(2t)!}$$

$f = \cos x$

Dem prin inducție că pt $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

I $P(1)$: $\sin' x = \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$?

$(\sin x)' = \cos x$ $\Rightarrow P(1)$ „A"

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos x = \cos x$$

II Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

Pp $P(k)$ adev $\Rightarrow \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

I și II $\Rightarrow P(n)$ adev $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Similar: $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \to$ inducție

(T) Polinomul lui Taylor este indefinit derivabil pe R iar $\forall\, t > n$, $(T_{n,a}f)^{(t)}(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Dem: Fie $x \in \mathbb{R}$ arb. des

$$(T_{n,a}f)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \Big| '$$

$$(T_{n,a}f)'(x) = 0 + \frac{f'(a)}{\cancel{1}!} \cdot x + \frac{f''(a)}{\cancel{2}!}\cancel{2}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} n(x-a)^{n-1}$$

$$= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$= (T_{n-1,a}f')(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(T_{n-1,a}f')' = (T_{n-2,a}f'')(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$(T_{n,a}f)^{(k)}(x) = (T_{n-k,a}f^{(k)})(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

pt $t > n$

$$(T_{n,a}f)^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$$

$$(T_{n,a}f)^{(t)}(x) = 0 \ \forall t$$

iar $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $(T_{n,a}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

$t > n$ $(T_{n,a}f)^{t}(a) = 0$

Obs: Formula lui Leibnitz pt deriv de ord n a produsului a 2 funcții.

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$