Curs 4

Analiză

Șiruri de nr reale - continuare

Reamintim: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(\ell)$,

$\exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V$, $x_n \in V$

$\ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - \ell| < \varepsilon$

$\ell = \infty$ — " — , $\varepsilon < x_n$

$\ell = -\infty$ — " — $x_n < -\varepsilon$

Exemple: Fie $a \in \mathbb{R}$ o constantă

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (-1,1) \\ \nexists, & a \leq -1 \end{cases}$$

Dem:

(CI) $\boxed{a > 1}$ Alegem $a > 1$ arbitrar

Dem că:

① $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{1}$, $\underbrace{\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{3}$ a.î. $\underbrace{\forall n \geq n_\varepsilon, \underbrace{x_n > \varepsilon}_{2}}_{4}$

(Pas 1) Fie $\boxed{\varepsilon > 0}$ arbitrar ales

(Pas 2) ? $x_n > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < a^n \,|\, \ln \Leftrightarrow \ln \varepsilon < n \ln a \,|\, : \ln a$

$a > 1 \Rightarrow \ln a > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln a} < n$

$\xrightarrow[\text{Arhimede}]{\text{Ax}}$ $\boxed{\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}}$ a.î. $\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} < n_\varepsilon$

$\boxed{\text{Pas 3}}$ Fie $\boxed{n \geq n_\varepsilon}$

$$\boxed{x_n} = a^n \geq a^{n_\varepsilon} = x_{n_\varepsilon} \overset{(\text{Pas 2})}{\boxed{> \varepsilon}}$$

Pt $\varepsilon > 0$, am arătat că $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n_\varepsilon$, $\varepsilon < x_n$

ε-arbitrar $\Rightarrow$ ① adevărat

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

C_{II} $\boxed{a = 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1^n = 1$

$\Rightarrow (x_n)$ este șirul constant 1, care are limita 1.

deoarece $\forall\, \varepsilon > 0$, $\boxed{\exists\, n_\varepsilon = 1} \in \mathbb{N}$. a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$|x_n - 1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |1 - 1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon$

Obs! : Atenție la cazul de nedeterminare 1^∞

El este generat cu 2 șiruri (a_n), (b_n) cu $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 1$ și $\lim_{n\to\infty} (b_n) = \infty$, ~~dar~~ doar dacă șirul (a_n) nu este constant

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n}{}^{n \sim b_n}$$

(C_{III}) $|a|<1 \Leftrightarrow a\in(-1,1)$

Subcaz A: $a=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n=0^n=0$

$\Rightarrow$ șirul constant 0, cu limita 0

$(n_\varepsilon=1)$

Subcaz B: $a\neq 0$ deci $0<|a|<1$

Dem că: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$

$\Leftrightarrow$ (2) $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq n_\varepsilon,$

$|x_n-0|<\varepsilon$

(Pas 1) Fie $\boxed{\varepsilon>0}$ arbitrar des

(Pas 2) ? $|x_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |a^n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a|^n<\varepsilon \;|\cdot \ln$

$\Leftrightarrow n\ln|a|<\ln\varepsilon \;|\cdot \ln|a|$

$\boxed{0<|a|<1 \Rightarrow \ln|a|<0}$

$\Rightarrow n>\underbrace{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}}_{\text{const}} \xrightarrow{\text{Arhimede}} \boxed{\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}}$ a.î.

$n_\varepsilon>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|} \Rightarrow$

$\Rightarrow |a|^{n_\varepsilon}<\varepsilon$

(Pas 3) ? $\boxed{n\geq n_\varepsilon}$

$\boxed{|x_n-0|=|a|^n} \underset{|a|\in(0,1)}{\leq} |a|^{n_\varepsilon} \boxed{<\varepsilon}$

Pt $\varepsilon>0$ arbitrar $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $n\geq n_\varepsilon$, $|x_n-0|<\varepsilon$
ε arb $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2) adevărat

astfel $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

C IV $a \le -1$

Subcaz A: $\boxed{a=-1}$

$\boxed{\text{MRA}}$ Pp $\exists \ell \in \mathbb{R}, \ell = \lim_{n\to\infty} x_n$

$\Leftrightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$,

$|x_n - \ell| < \varepsilon$

$\boxed{?}$ $|x_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - \ell < \varepsilon \mid +\ell$

$\ell - \varepsilon < x_n < \varepsilon + \ell$

I $\ell > 0$

$\varepsilon := \ell \overset{(3)}{\Longrightarrow} \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{\forall n \ge n_\varepsilon}$

$\ell - \ell < x_n < \ell + \ell$

$0 < x_n < 2\ell$

toți term poz de la un indice oarecare

dar pt $n' = 2n_\varepsilon + 1$

$x_{n'} = -1$

$\Rightarrow 0 < -1$ contradicție

II $\ell < 0$

$\varepsilon = -\ell \overset{(3)}{\Longrightarrow} \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$

$2\ell < x_n < 0$

$n'' = 2n_\varepsilon$

$x_{n''} = 1$

$\Rightarrow 1 < 0$ contradicție

III $\ell = 0$ $\quad |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon = \frac{1}{2} \\ n = 2n_\varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2} \\ x_n = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 < \frac{1}{2}$ Contradicție

Subcaz B : $a < -1$

MRA temă $\quad \ell = \infty$

$\ell = -\infty$

Pp că $\exists\ \ell = \lim_{n \to \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V, x_n \in V$

$\rightarrow \boxed{\ell \in \mathbb{R}}$

$\rightarrow \ell > 0 \rightarrow \exists \boxed{V = (0, \ell+1)}$ fals

$x_{2n+1} \notin V$

$\rightarrow \ell = 0 \rightarrow \exists \boxed{V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ fals

$x_1 \notin V$

$\rightarrow \ell < 0 \rightarrow \exists \boxed{V = (-\ell-1, 0)}$ fals

$x_{2n} \notin V$

$\rightarrow \boxed{\ell = \infty}$, $\exists V = (2, \infty] \in \mathcal{V}(\infty)$, $x_{2n+1} \notin V$ fals

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \ell = -\infty$, $\exists V = [-\infty, -2) \in \mathcal{V}(-\infty)$, $x_{2n} \notin V$ fals

$\forall n \in \mathbb{N}$

(Obs:) • Din dem de mai sus se observă că ∃ unei limite finite nu este condiționată de monotonia șirului.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

• În schimb limita finită este condiționată prin necesitate de mărginire.

• lipsa monotoniei implică $\begin{cases} \text{uneori } \exists \text{ limita } \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \\ \text{alteori } \nexists \text{ limita } (-n)^n \nrightarrow \end{cases}$

nimic

T lui Weierstrass:

Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir de nr reale

a) Dacă (x_n) crescător $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}^*$

b) Dacă (x_n) este descrescător $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}$

(Dem:) Notăm cu $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ mulțimea termenilor șirului, $A \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$

a) I A este mărginită $\xrightarrow[\text{Ax Sup}]{}$ $\boxed{\sup A \in \mathbb{R}}$

Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$

① $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, |x_n - \sup A| <$

Pas 1) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar dat

Pas 2) ? $|x_n - \sup A| < \varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} &x_n \in A \Rightarrow x_n \le \sup A \Rightarrow \sup A - x_n \ge 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = |x_n - \sup A| \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sup A - x_n < \varepsilon}$$

HRA) Pp că $\forall n \in \mathbb{N}_k$, $\sup A - x_n \ge \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sup A - \varepsilon}_{\in \text{Majo } A} \ge x_n, \forall n \in \mathbb{N}_k$$

$$\Rightarrow \sup A - \varepsilon \ge \underbrace{\sup A}_{\hookrightarrow \text{cel mai mic majorant}}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \ge 0 \Leftrightarrow \varepsilon \le 0 \ \lightning$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \left(\sup A - x_{n_\varepsilon} < \varepsilon \right)$$

! Obs: pt a simplifica scrierea $\mathbb{N}_k = \mathbb{N}$

Pas 3)
$$\left.\begin{aligned} &\forall n \ge n_\varepsilon \\ &(x_n) \text{ crescător} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n \ge x_{n_\varepsilon} \ | \cdot (-1)$$

$$-x_n \le -x_{n_\varepsilon} \ | + \sup A$$

$$\sup A - x_n \le \sup A - x_{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

$$\boxed{|x_n - \sup A| < \varepsilon}$$

Pt $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - \sup| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

ε arbitrar

$\Rightarrow$ (1) adevărat

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup A$

II A - nemărginită superior $\xRightarrow{def} \sup A = +\infty$

Dem că: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

$\Leftrightarrow$ (2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î $\forall n \geq n_\varepsilon$, $x_n > \varepsilon$

(Pas 1) Fie $\boxed{\varepsilon > 0}$ arbitrar dar

(Pas 2) ? $x_n > \varepsilon$

(MRA) Pp $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \in \text{Major} A \neq \emptyset \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$ ↯

$\Rightarrow \boxed{\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}}$ a.î $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$

(Pas 3) $\boxed{\forall n \geq n_\varepsilon}$, (x_n) crescător $\Rightarrow \boxed{x_n} \geq x_{n_\varepsilon} \overset{(Pas 2)}{\boxed{> \varepsilon}}$

Astfel, pt $\varepsilon > 0$ arbitrar, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $x_n > \varepsilon$

ε arb

② $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

b) $\boxed{\text{temă}}$

Obs: Această variantă a T lui Weierstrass conține și formularea cunoscută din liceu:

a) $\forall$ șir monoton + mărginit este convergent

b) $\forall$ șir crescător și nemărginit (superior) are limita ∞

c) $\forall$ șir descrescător și nemărginit (inferior) are lim $-\infty$

Obs: În practică se folosesc $\boxed{\text{consecințe}}$ ale T lui Weierstrass

Fie $(x_n), (a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$

a) $\left.\begin{array}{l} \exists\, n' \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n',\ |x_n - l| \leq a_n \\ \exists\, l \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l$

b) $\left.\begin{array}{l} \exists\, n' \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n',\ a_n \leq x_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

c) $\left.\begin{array}{l} \exists\, n' \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n',\ x_n \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

d) $\exists\, n' \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \le x_n \le b_n$

$\left.\begin{array}{l} a_n \le x_n \le b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$

(Cleștele = consecință a lui Weierstrass)

Atunci când analizăm limita unui șir arbitrar de regulă este mai facil să introducem niște șiruri auxiliare. Candidați buni în astfel de cazuri sunt:

• pt limita 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0 \\[2ex] \dfrac{c}{n^\alpha},\ \alpha > 0 \\[2ex] a^n,\ |a| < 1 \end{array}\right\}$$

(consecința a)

$|x_n - \ell| < \varepsilon$

• pt limita ∞ :

$$\left.\begin{array}{l} n \\ c n^\alpha,\ \alpha, c > 0 \\ a^n,\ a > 1 \end{array}\right\}$$

$x_n > \varepsilon$

Examen = {
- ex ca în liceu
- ex teoretice (subcazuri de la Weierstrass)
- teoreme (enunț + demonstrații (ex))
- 6 condiții / 2 condiții

Moștenirea operațiilor din $\mathbb{R}$ pentru șiruri

→ Dacă nu întâlnim un caz de nedeterminare ($\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{∞}) atunci op uzuale pe $\mathbb{R}$ ($+, -, \cdot, :, (\ )^{n}$) se transmit către limite.

→ Dacă suntem într-un caz de nedeterminare atunci valoarea limitei este det prin proceduri specifice

Exemplu: 1. c) T3

$$x_{n+1} = \frac{9}{n+1}\cdot x_n$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = l \ (\in\mathbb{R})$$

$$! \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow$$

$l\cdot 0$ nu e nedeterminare

$$\boxed{l = 0\cdot l = 0}$$

Contraexemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^2-1}} =$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} = \infty \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n+3 = \infty$$

$$\exists \ \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{n^3+1}{n^2} \to \infty$$

$$\exists \ \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{n}{n^2+1} \to 0$$

Def: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un şir de nr reale

El s.n:

a) CONVERGENT dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$

b) DIVERGENT în rest

Obs: Un şir este divergent într-unul din cazurile

↗ fie $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \{\pm\infty\}$, n, a^n cu $a>1$

↘ fie $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$, $(-1)^n$, a^n cu $a \le -1$

ŞIRURI CAUCHY

* verifică dacă termenii sunt foarte apropiaţi / depărtaţi

Def: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un şir de nr reale.

El s.n. ŞIR CAUCHY dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ (distanţa dintre 2 term $< \varepsilon$)

Obs: Pe $\mathbb{R}$, (x_n) este şir CAUCHY $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (x_n) este un şir CONVERGENT

Exemplu: Fie $n \in \mathbb{N}$ și $x_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$

Studiem dacă (x_n) este un șir CAUCHY

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

(Pas 1) Fie $\boxed{\varepsilon > 0}$ arbitrar ales

(Pas 2) ? $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

! $|\sin n| \leq 1$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{n+1} \boxed{< \varepsilon}$? $\boxed{\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}}$ a.î. $\frac{1}{n_\varepsilon + 1} < \varepsilon$

(Pas 3) ? $\boxed{n \geq n_\varepsilon}$, $\boxed{p \in \mathbb{N}}$

$\boxed{|x_{n+p} - x_n|} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon + 1} \overset{\text{(Pas 2)}}{\boxed{< \varepsilon}}$

Pt $\varepsilon > 0$ arbitrar, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|x_{n+p} - x_n| <$
$\forall p \in \mathbb{N}$ ε - arb

$\overset{def}{\Rightarrow}$ (x_n) șir Cauchy $\Leftrightarrow$ (x_n) convergent