Curs 3

Inele și corpuri

Fie $(R,+,\cdot)$, $(R',+,\cdot)$ inele cu unitățile 1, resp $1'$

$f: R \to R'$ morfism de inele s.n. unital dacă f este morfism și $f(1) = 1'$

Obs: Fie $(K,+,\cdot)$, $(K',+,\cdot)$ corpuri

$f: K \to K'$ morfism de inele $\Rightarrow f = \theta$ sau f unital (morfism nul)

Dem: Fie $f \neq \theta \ (\theta: K \to K', \theta(x) = 0')$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in K$ a.î. $f(x_0) \neq 0' \Rightarrow f(x_0)$ inversabil

$f(x_0)\cdot 1' = f(x_0) = f(x_0 \cdot 1) = f(x_0)\cdot f(1)$

$\Rightarrow 1' = f(1) \Rightarrow f$ unital

Inelul polinoamelor cu coef într-un corp com.

Fie $(K,+,\cdot)$ corp comutativ cu unitate

$$K^{\mathbb{N}} = \{ f \mid f: \mathbb{N} \to K \}$$

$\forall\, i \in \mathbb{N}$ $f(i) = a_i \in K \Rightarrow$ identificăm f cu $(a_0, a_1, \dots a_n)$

$$f = (a_0, a_1, a_2, \dots a_n)$$

Pe $K^{\mathbb{N}}$ definim $+$ și $\cdot$ astfel:

$f = (a_0, a_1, \dots, a_n \dots)$

$g = (b_0, b_1, \dots, b_n \dots)$

$f+g = (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots a_n+b_n \dots)$

$f \cdot g = (c_0, c_1, \dots c_n)$

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$\vdots$

$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n = \sum a_i b_j$

(T) $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ inel comutativ cu unitate

(Dem) (Temă)

El nul: $0 = (0, 0, \dots 0, \dots)$

El unitate: $1 = (1, 0, \dots 0, \dots)$

Obs: 1) Funcția $f : K \to K^{\mathbb{N}}$

$f(a) = (a, 0, 0 \dots 0)$ este un morfism bijectiv unital de inele

Dem: $\forall a, b \in K$ $f(a+b) = (a+b, 0, \dots) =$

$= (a, 0, 0 \dots) + (b, 0, 0 \dots) =$

$= f(a) + f(b)$

$f(1) = (1, 0, \dots 0, \dots 0)$

$a, b \in K$, $f(a) = f(b) \Leftrightarrow (a, 0, \dots 0 \dots) = (b, 0, \dots 0 \dots)$

$\Rightarrow a = b$

2) $\varphi : R \to R'$ morfism inj de inele $\Rightarrow$

$\varphi(R) = \{\varphi(r) \mid r \in R\}$ subunitol lui R' care este morfism cu R

dem: $\varphi(R)$ subunitol in R' (temă)

$\varphi : R \to \varphi(R)$, $\varphi'(r) = \varphi(r)$

morfism inj + surj = izom de inele

3) In contextul de la (1), f morfism inj de inele $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ K este un inel cu subinelul imaginilor $\{(a,0,0\dots,0 \mid a \in K\}$ al lui $K^{\mathbb{N}}$
subinel

Ca urmare, identificăm: $a \in K$ cu $(a,0,\dots 0,\dots)$ imaginea sa din $K^{\mathbb{N}}$ și considerăm că $K^{\mathbb{N}}$ conține pe K și subinelul său.

Terminologie $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ s.n. inelul seriilor formale cu coef în K

Def: fie $f \in K^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_n \dots)$
Suportul lui f, notat supp f este

$\text{supp } f = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$

Fie $K^{\mathbb{N}} = \{f \in K^{\mathbb{N}} \mid \text{supp } f \text{ este finit}\}$

Obs: 1) $f = (a_0, a_1, \dots a_n \dots)$

$f \in K^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $a_k = 0 \ \forall\, k > n$

2) $supp(0,0, \dots 0 \dots) = \emptyset$

$supp(1,0, \dots 0 \dots) = \{0\}$

$supp(0,1,2,0,4, \dots 0) = \{1,2,4\}$

$X \overset{not}{=} (0,1,0,0, \dots 0 \dots) \in K^{\mathbb{N}}$

$supp\, X = \{1\}$

3) $X^2 = (0,0,1,0 \dots)$

$X^3 = (0,0,0,1,0 \dots)$

$\vdots$

$X^n = (\underbrace{0, \dots 0}_{n \text{ termen}},1,0 \dots)$

(T) 1) $K^{(\mathbb{N})}$ este un subinel în inelul $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ ce conține elem. unitate

2) K este subinel în $K^{(\mathbb{N})}$ ce conține unitatea

Dem: 1) Fie $f = (a_0, a_1, \dots a_m, \boxed{0}, 0 \dots)$

$g = (b_0, b_1, \dots b_n, \boxed{0}, 0 \dots)$ $\Big\}$ șiruri din $K^{(\mathbb{N})}$

Fie $k > \max\{m,n\}$,

$a_k + b_k = 0 + 0 = 0$ $\Big\} \Rightarrow f+g = (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots a_N+b_N, 0 \dots)$

$\in K^{(\mathbb{N})}$

(șir de suport finit) ✓

Fie $f \cdot g = (c_0, c_1, \dots c_k, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$

$\rightarrow K^{(\mathbb{N})}$ înseamnă că de la un moment dat toți termenii sunt 0

Fie $k \geq m+n+1 \Rightarrow k-n \geq m+1$

$$c_k = a_0 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{b_k}} + a_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{b_{k-1}}} + \underbrace{a_n b_{k-n}}_{=0} + \underbrace{a_{n+1} b_{k-n-1}}_{=0} + a_k b_0 = 0$$

$$f \cdot g = (c_0, c_1, \dots, c_{m+k}, 0, 0 \dots)$$

Terminologie $K^{(\mathbb{N})}$ = inelul polinoamelor într-o nedeterminată cu coef în K

Obs: Fie $f = (a_0, a_1, \dots a_m, 0, 0) \in K^{(\mathbb{N})}$

$$f = (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0 \dots) + (0, 0, a_2 \dots) + (0, 0 \dots a_m)$$

$$\boxed{(a_1, 0, 0 \dots) \cdot (0, 1, 0 \dots)}$$

$\boxed{\text{Translatare}}$

$$\boxed{= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_m X^m}$$ polinom cu coef în K și nedet în X

2) $K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ și s.n. inelul polinoamelor cu coef în K în nedeterminata X

3) $\forall f \in K[X]$, $f \neq 0$, f poate fi scris în mod unic sub forma $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, $a_0, a_1, \dots a_n \in K$, $a_n \neq 0$ (1)

(1) s.n. forma algebrică a pol f

Def: Gradul unui polinom f notat grad f este:

$$\text{grad } f = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } f = 0 \\ n, & \text{dacă } f \neq 0 \text{ dat de (1)} \end{cases}$$

Obs: 1) grad $f = 0 \Leftrightarrow f = a_0 \neq 0 \Leftrightarrow f \in \mathbb{R}$

2) Considerăm că $-\infty < n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ și $(-\infty) + n = -\infty = n + (-\infty)$ și avem:

$$\left.\begin{aligned} &\text{gradul } (f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\} \\ &\text{și grad } (f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

din dem teoremei care spune că $K^{(\mathbb{N})}$ este subinel în $K^{(\mathbb{N})}$

3) $(K[X], +, \cdot)$ este domeniu de integritate

dem: fie $f, g \in K[x]$ a.î.: $f \cdot g = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\infty = \text{grad } 0 = \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

$=0$

$\Leftrightarrow$ grad $f = -\infty \Leftrightarrow f = 0$

sau

grad $g = -\infty \Leftrightarrow g = 0$

$|K| \geq 2 \Rightarrow K[x]$ infinită

$0 \neq 1$

4) $K[x]$ nu este un corp

$f \in K[x]$ inversabil în $K[x] \Leftrightarrow f \in K^*$

(la seminar)

→ Câteva noțiuni și proprietăți utile referitor la $K[x]$:

→ $f, g \in K[x]$, $f | g \Leftrightarrow \exists h \in K[x]$ a.î. $g = f \cdot h$

$f | 0$, $\forall f \in K[x]$

$0 | f \Rightarrow f = 0$

→ $f \sim g \Leftrightarrow \exists a \in K^*$ a.î. $g = af$ ($\Leftrightarrow f | g$ și $g | f$)
(f și g sunt asociate în divizibilitate)

→ $f \in K[x]$ s.n. pol ireductibil dacă grad $f \geq 1$ și

$f = gh \Rightarrow g \in K^*$ sau $h \in K^*$

(T) Împărțirea cu rest pt pol din $K[x]$

$\forall f, g \in K[x], g \neq 0, \exists! q, r \in K[x]$ a.î.

$f = g \cdot q + r$, unde grd $r <$ grad g