Curs 7 - Analiză

Serii cu termeni oarecare

STO

Def: Fie $\sum_{n\geq k} x_n$ o serie. Ea este STO dacă $x_n \neq 0, \forall n\geq k$

Obs: $STP \subseteq STO$

(T1) Criteriul lui Abel pentru STO

Fie $(a_n), (u_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri a.î.:

a) (a_n) strict descrescător

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) șirul (u_n) are șirul sumelor parțiale mărginit

Atunci seria $\sum a_n \cdot u_n$ este C.

Dem: Dorim $\sum a_n u_n$ C

Folosim șirurile Cauchy $\rightarrow$ pt seria noastră

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\forall p \in \mathbb{N}$:

$|a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \dots + a_{n+p} u_{n+p}| < \varepsilon$

Știm: • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \ |a_n - 0| < \varepsilon$

• (u_n) are (s_n) mărginit $\Rightarrow$

(3) $\exists T > 0$ a.î. $|s_n| < T$

+

Dem: ①

$\boxed{\text{Fie } \varepsilon>0}$ arbitrar deci

$\boxed{?}$ $|a_{n+1}u_{n+1}+\ldots+a_{n+p}u_{n+p}|=$

$=|a_{n+1}(s_{n+1}-s_n)+a_{n+2}(s_{n+2}-s_{n+1})+\ldots+a_{n+p}(s_{n+p}-$

$-s_{n+p-1})|=$

$=|-a_{n+1}s_n+s_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+s_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+3})+$

$+\ldots+s_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+a_{n+p}s_{n+p}|$

$\leq|-a_{n+1}|\underbrace{|s_n|}_{<T}+\underbrace{|s_{n+1}|}_{<T}|(a_{n+1}-a_{n+2})|+\underbrace{|s_{n+2}|}_{<T}|(a_{n+2}-a_{n+3})|$

$+\ldots+\underbrace{|s_{n+p-1}|}_{<T}|(a_{n+p-1}-a_{n+p})|+\underbrace{|s_{n+p}|}_{<T}|a_{n+p}|$

$<T(a_{n+1}+a_{n+1}-\cancel{a_{n+2}}+\cancel{a_{n+2}}-\cancel{a_{n+3}}+\ldots+$

$a_n>0$

(a_n) descresc

$+\cancel{a_{n+p-1}}-\cancel{a_{n+p}}+\cancel{a_{n+p}})\Rightarrow$

$\Rightarrow\ 2Ta_{n+1}\overset{?}{<}\varepsilon \Leftrightarrow a_{n+1}<\underbrace{\frac{\varepsilon}{2T}}_{>0}$ ④

Pt $\varepsilon:=\frac{\varepsilon}{2T}$ din ② $\Rightarrow$ $\boxed{\exists n_\varepsilon'\in\mathbb{N}}$ a.i. $\boxed{\forall n\geq n_\varepsilon}$

$\underbrace{|a_n|}_{=a_n}<\frac{\varepsilon}{2T}$ ⑤

$n+1>n\geq n_\varepsilon \quad a_{n+1}<\frac{\varepsilon}{2T}$

pt $\varepsilon>0$ arbitrar deci

$\overset{⑤}{\Longrightarrow} \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\forall p \in \mathbb{N}$

$|a_{n+1}u_{n+1} + \dots + a_{n+p}u_{n+p}| \overset{④}{<} 2T a_{n+1} \overset{⑤}{<} \cancel{2T}\frac{\varepsilon}{\cancel{2T}} = \varepsilon$

ε - arb $\Rightarrow$ ① ✓

C2 (Criteriul lui Leibnitz pt STO)

Fie $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ un şir
- • ab. descrescător
- • cu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Atunci seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ este C

Dem: $\boxed{C_2} = \boxed{T_1}$ $u_n = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

Verificăm mărginirea: (s_n) $s_1 = -1$

$s_2 = u_1 + u_2 = -1+1 = 0$

$s_3 = (-1)+1+(-1) = -1$

$$s_n = \begin{cases} -1 : n = 2k-1 \\ 0 : n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

$s_n \to$ mărginit $T=1$

Exemplu: Studiati natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

(Sol:) Leibnitz cu $a_n = \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ este C

(a_n) descresc

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Generalizare:

Studiati natura seriei: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(Sol:) Leibnitz cu $a_n = \frac{1}{n^\alpha}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n^\alpha}\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Cum } \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n\ C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Dem că $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ convergent $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{mărginit} \\ \text{monoton} \end{cases}$

monotonia: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha =$

$= 1^\alpha = 1\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\geq 1 \Rightarrow$ strict crescător

mărginirea: a_1 e margine inferioară

$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1^\alpha} \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n$ mărginit $\Rightarrow a_n$ convergent

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)\, a_n$ convergent

Rezolvare:

I $\alpha > 0$ $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ descresc} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \sum C$

II $\alpha = 0$ $\sum (-1)^n$ $a_n = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$ D

III $\alpha < 0$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{(-1)^n \cdot a_n} \nexists \Rightarrow \sum (-1)^n$ D

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \begin{cases} C : \alpha > 0 \\ D : \alpha \leq 0 \end{cases}$

iar $\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} C : \alpha > 1 \\ D : \alpha \leq 1 \end{cases}$

SERII ABSOLUT CONVERGENTE

Def: $\sum x_n$ s.n. A.C. dacă $\sum |x_n|$ este C.

Exemplu: $\sum \frac{1}{n^2}$ AC

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ AC deoarece $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ C

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ nu e AC deoarece $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ D

(T1) $\sum x_n$ AC $\Longrightarrow \sum x_n$ C

Dem: folosim din nou caracterizarea Cauchy

Știm: $\sum x_n$ AC $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum |x_n|$ C $\underset{Cauchy}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$:

$\big| |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}| \big| < \varepsilon$ ①

Dorim: $\sum x_n$ C $\underset{Cauchy}{\Longleftrightarrow}$

② $\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales

(?) $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq \big| |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}| \big| \overset{①}{<} \varepsilon$

pt $\varepsilon > 0$ arbitrar ales $\xRightarrow{①}$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\forall p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| \overset{③}{<} \varepsilon$

ε arbitrar $\Rightarrow$ ② ✓

Obs: $C \overset{?}{\not\Rightarrow} AC$ NU

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ este C dar $\sum \frac{1}{n}$ este D

Aplicație: Atunci când studiem atât convergența cât și absolut convergența este util să începem cu absolut convergența deoarece $AC \Rightarrow C$, altfel AC iar C trebuie studiată cu alte mijloace

- Abel
- Leibnitz
- telescopică
- (s_n)

Studiați natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n(n+1)}$ STO
(atât convergența cât și absolut convergența)

$x_n = \frac{\sin n}{n(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|x_n| = \frac{|\sin n|}{n(n+1)}$ iar $\sum |x_n|$ este STP

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin n| \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{|\sin n|}{n(n+1)} \leq \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{y_n}$$

Astfel $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq y_n$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \sum y_n = \sum \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum \frac{1}{n^2} \, C \end{array}\right\} \xrightarrow{\boxed{CIC}} \text{c)}$$

$$\Rightarrow \sum |x_n| \; C$$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum x_n$ este AC $\xrightarrow{T}$ C.

b) AC şi C pt $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^3+2}}$

Începem cu AC. Studiem $\sum |x_n| = \sum \sqrt{\frac{n}{n^3+2}} \sim \boxed{\sum \frac{1}{n}}$ D

$\Rightarrow \sum x_n$ nu e AC

! Nefiind AC nu oferă nici o informaţie despre convergenţă.

! C se studiază separat

$a_n = \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ $\qquad a_n > 0$

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n^4+n^3+n+1}{n^4+4n^3+3n+2}} < 1 \Rightarrow (a_n) \text{ s.d.}$$

$\xrightarrow{\text{Leibnitz}} \sum (-1)^n a_n$ este C deci $\sum x_n$ este C

IV LIMITE DE FUNCȚII

Obs: Noțiunile studiate sunt considerate în topologia pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Diferența este că avem 3 tipuri de bile.

$r>0$

$x \in \mathbb{R}$, $B(x,r)=(x-r,x+r)$

$B(\infty,r)=(r,\infty]$

$B(-\infty,r)=[-\infty,-r)$

$\rightarrow$ pt $a\in\overline{\mathbb{R}}$ arbitrar, $V\in\mathcal{V}(a)$ dacă $\exists\, r>0$ a.î. $B(a,r)\subseteq V$

Obs: Mulțimea punctelor de acumulare

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$$A' = \{x\in\overline{\mathbb{R}} : \forall V\in\mathcal{V}(x),\ V\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset\}$$

$$\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset$$

$[-1,2]\cup\{3\}$ $A' = \overline{A} \setminus \text{izo}\, A$ $\setminus\{3\}$

A	A' (în $\overline{\mathbb{R}}$)
$(-1,2]\cup\{3\}$	$[-1,2]$
$(-\infty,2)\cup(4,7]$	$[-\infty,2]\cup[4,7]$
$(-\infty,-3]\cup\{4,8,10\}$	$[-\infty,-3]$
$\mathbb{N}$	$\{\infty\}$

$\mathbb{N}' = \{\infty\}$ deoarece $\forall (r, +\infty] \subseteq V$

$\hookrightarrow \begin{cases} \exists\, n_r \in \mathbb{N} \\ r < n_r \end{cases}$ a.î.

$\Rightarrow V \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

$V \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\} \neq \emptyset$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\overline{\mathbb{R}}$

(T) de caracterizare cu șiruri a mulțimii punctelor de acumulare

Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\underbrace{a \in A'}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{\exists\, a_n \subseteq A \setminus \{a\} \text{ a.î. } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}_{(2)}$

Dem:

$[\Leftarrow]$ Știm (2)

Dorim (1) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$ (3)

Fie $V \in \mathcal{V}(a)$ arbitrar ales

din (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall V \in \mathcal{V}(a), \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î.
$\forall n \geq n_0, a_n \in V$ (4)

$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ pt V ales $\exists\, n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V, a_n \in V$

$(a_n) \subseteq A \setminus \{a\}$

$\Rightarrow a_{n_V} \in V \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$

V-arb $\Rightarrow$ (3) are loc $\Leftrightarrow$ (1) ✓

$\Longrightarrow$ Știm ①

Dorim ②

I Caz 1. $a \in \mathbb{R}$

Dorim ② $\exists (a_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon$ ⑤

Știm ① $\Leftrightarrow \forall r > 0, B(a, r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{n} > 0 \\ \Downarrow ⑤ \\ B(a, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset \end{array}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ alegem $a_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{a\}$

$\Rightarrow$ am generat un șir $(a_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n \in B(a, \frac{1}{n}) \Leftrightarrow |a_n - a| \boxed{< \frac{1}{n}} < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

am arătat că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall n \geq n_\varepsilon \ |a_n - a| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Cazul II ($a = \infty$) Dorim: $\exists (a_n) \subseteq A \setminus \{\infty\} = A$ a.î.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Știm: $\infty \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0, B(\infty, r) \cap A \setminus \{\infty\} \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall r > 0 \ (r, \infty] \cap A \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N} \ n > 0, (n, \infty] \cap A \neq \emptyset$

$\exists\, a_n \in (n, \infty] \cap A$

deci am generat un șir $(a_n) \subseteq A = A \setminus \{\infty\}$ a.î.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in (n, \infty] \Rightarrow a_n > n$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$$

$\boxed{\text{Cazul III}}$ $\boxed{a = -\infty}$ (temă)

Obs: Din teoremă $\Rightarrow$ mulțimea pct de acumulare adună limitele tuturor șirurilor din mulțime

Def: (limitei unei funcții într-un punct)

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
$f : A \to \mathbb{R}$
$a \in A'$

Spunem că funcția f are limită în punctul $a \in A'$ dacă $\forall (a_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,

$\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$

Obs: Pt a demonstra că $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ putem evidenția 2 șiruri $(a_n), (b_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$

pt care $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

$f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\infty \in \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$

$\boxed{?}$ $\lim_{x\to\infty} \sin x$

$a_n = 2n\pi \to \infty$

$\Rightarrow f(a_n) = 0 \to 0$

$\not\to$

$b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to \infty \Rightarrow f(b_n) = 1 \to 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \sin x$