Curs 9

Spații vectoriale

Fie $(K,+,\cdot)$ corp com., $(V,+)$ grup abelian

$\cdot : K \times V \to V$, $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$

V_K sp vectorial dacă:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
4) $1 \cdot x = x \ \forall \alpha, \beta \in K \ \forall x, y \in V$

(T) Fie V_K - sp vectorial

a) $\alpha \in K$, $t_\alpha : V \to V$, $t_\alpha(x) = \alpha x$ endomorf$(V,+)$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow t_\alpha$ autom$(V,+)$

b) $x \in V$, $t'_x \ K \to V$, $t'_x(\alpha) = \alpha x$

morfism de la

C: Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in V$

a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$

b) $\underbrace{\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x}_{\text{dem ??}}$, $(-\alpha)(-x) = \alpha x$

temă

c)
d) > temă

Subspații, subspațiu generat

Fie $(K,+,\cdot)$ corp com.

Def: Fie V_K, sp vectorial, $A \subseteq V$. Spunem că V subspațiu în

V_K (A_K subspațiu în V) dacă:

1) A p.s în $(V,+)$ și
$\forall \alpha \in K, \forall x \in A, \alpha x \in A$

2) $(A,+)$ împreună cu $\cdot : K \times A \to A$ este K s.v
$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ ← de$_K V$

Notație: $A \leq_K V$

Obs: 1) $A \leq_K V \Leftrightarrow A \leq (V,+)$ și
(A-subgrup)
$\forall \alpha K, \forall x \in A, \alpha x \in A$

2) $A \leq_K V \Rightarrow 0 \in A$
din V (elem neutru)

T de caracterizare a subspațiului

Fie V_K-sp vectorial $A \subseteq V$

Urm afirmații sunt echivalente:

1) $A \leq_K V$

2) au loc următoarele:

α) $0 \in A$

β) $\forall x, y \in A, x+y \in A$

γ) $\forall \alpha \in K, \forall x \in A, \alpha x \in A$

3) au loc următoarele:

α) $0 \in A$

β) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in A$ $\underbrace{\alpha x + \beta y}_{\text{combinație liniară}} \in A$

Dem: 1) $\Rightarrow$ 2) s-a văzut (de trunchiere)

2) $\Rightarrow$ 1) A p.s în $(V,+)$ și în raport cu op externă

$\Uparrow$

β, γ

$(A,+)$ grup (?) + asoc, com $\Leftarrow$ + asoc, com
op ind op ind din V

$0 \in A \Rightarrow 0$ el neutru din $(A,+)$

$\forall x \in A, -1 \in K \xRightarrow{\gamma} \underbrace{(-1)x}_{\in A} = \underbrace{-x}_{\text{op lui } x \text{ în } V}$

$\Rightarrow (A,+)$ grup abelian

$\cdot : K \times A \to A$ verif 1)–4) din def sp vect [evident]

2) $\Rightarrow$ 3) Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in A \xRightarrow{\gamma} \alpha x, \beta y \in A \xRightarrow{\beta}$

$\xRightarrow{\beta} \alpha x + \beta y \in A$

3) $\Rightarrow$ 2) Dacă în δ) luăm $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow$ β)

δ) luăm $\beta = 0 \Rightarrow$ γ)

□ (t. de carac)

Obs: În t. ant cond α) poate fi înlocuită α') $A \neq \emptyset$

Dem: α), β), γ) $\Leftrightarrow$ α'), β'), γ')

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$?

$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \xRightarrow{\gamma} -x = (-1)x \in A \xRightarrow{\beta} 0 = x + (-x) \in A$

V

Exemple:

a) ${}_KV$, $\{0\}, V \leq_K V$

Celelalte subspații (dacă $\exists$) s.n. subspații proprii !! temă

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $P_n(K) = \{ f \in K[X] \mid \text{grad } f \leq n \}$

$\Rightarrow P_n(K) \leq_K K[X]$ (temă)

c) I interval $\mathbb{R}^I$ $\mathbb{R}$ sp vect.

$C(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^I$

$D(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă} \} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^I$

Subspații, subspațiu generat

$\boxed{T}$: Fie V K-sp vectorial, $I \neq \emptyset$ mulțime, $A_i \leq_K V$, $i \in I$

Atunci: $\bigcap_{i \in I} A_i \leq_K V$

Dem: $A_i \leq_K V \ \forall i \in I \Rightarrow 0 \in A_i \ \forall i \in I \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$

$\Downarrow$

$x, y \in A_i \ \forall i \in I \xRightarrow[A_i \leq_K V]{\text{def}} \alpha x + \beta y \in A_i \ \forall i \in I$

$\Downarrow$

$\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i \in I} A_i$

$\underline{C}$: a) $X \subseteq V$

$\langle X \rangle = \bigcap \{ A \leq_K V \mid X \subseteq A \} \leq_K V$

$\hookrightarrow$ subspațiul lui V generat de X

b) $\langle X \rangle$ ~~este~~ (cel mai mic) subspațiu al lui V care conține pe X

$\cap$

c) $\langle \emptyset \rangle = \{0\} = \langle \{0\} \rangle$

d) $X, Y \subseteq V, X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (temă)

e) $A \leq_K V \Rightarrow \langle A \rangle = A$

f) $X \subseteq V$, $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$

Terminologie: $X \subseteq V$, $V = \langle X \rangle$

X generează pe V sau X este sistem de generatori pt V

pt X finită, spunem că V este finit generat sau de tip finit

Notații: $x_1, \dots x_n \in V$

$\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_n)$

Def Fie V K-sp vectorial. O sumă de forma =

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

cu $\alpha_1, \dots \alpha_n \in K$, $x_1, \dots x_n \in V$ s.n. combinație liniară de vectori din V. (ca la matrice)

T Fie V K-sp vectorial, $X \neq \emptyset$. Atunci:

$\langle X \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in K, x_i \in X, i = \overline{1,k}, \underbrace{n \in \mathbb{N}^*\}}$

mulțimea tuturor combinațiilor liniare

αx

Dem: Fie M mulț. din membrul drept

I) $M \leq_K V$

II) $X \subseteq M$

III) $A \leq_K V,\ X \subseteq A \Rightarrow M \subseteq A$

II) Fie $x \in X$, $\underbrace{x = \underset{\in K}{1} \cdot \underset{\in X}{x}}_{\in M}$ (comb liniară)

I) II) $\Rightarrow M \neq \emptyset$, ($\alpha'$) îndeplinit

Fie $x, y \in M \Rightarrow x+y \in M$

$x = \underset{\in X}{\alpha_1 x_1} + \dots + \underset{\in X}{\alpha_m x_m}$, $y = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m$, $x+y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m \in M$

Fie $\alpha \in K$, $\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m}_{x} \in M \Rightarrow \alpha x = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha\alpha_m)x_m \in M$

III) Fie $x \in M \Rightarrow \exists\, x_1, \dots x_m \in X$, $\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_m \in K$ a.î.

$x = \alpha_1 \underset{\underset{A}{\cap}}{\underset{X}{\cap}}{x_1} + \dots + \alpha_m \underset{\underset{A}{\cap}}{\underset{X}{\cap}}{x_m} \in A$

temă

$\supseteq M$

$\left[A \leq_K V,\ a_1, \dots, a_m \in A,\ \alpha_1, \dots \alpha_m \in K \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m \in A \right]$ temă

Obs: i) $x \in V$

$\langle x \rangle = \{\alpha x \mid \alpha \in K\} = Kx$

ii) $x_1, \dots, x_m \in V$

$\langle x_1, \dots, x_m \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \mid \alpha_1, \dots \alpha_m \in K\} = 6$

$= Kx_1 + Kx_2 + \dots + Kx_n$
(subspațiu în B)

Obs: a) Reuniunea a 2 subspații de lui V nu este în general subspațiu în V.

Ex: Fie $\mathbb{R}$ - sp vectorial $\mathbb{R}^2$

$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ (dem cu + acasa)

$B = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

$$\underset{\substack{\in A \\ \cap \\ A\cup B}}{(1,0)} + \underset{\substack{\in B \\ \cap \\ A\cup B}}{(0,1)} = (1,1) \notin A \cup B$$

b) Fie ~~...~~ $A, B \leq_K V$

$$\langle A \cup B \rangle \overset{?}{=} A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Dem: I) $A + B \overset{?}{\leq}_K V$

II) $A \cup B \overset{?}{\subseteq} A + B$

III) $S \leq_K V,\ A \cup B \subseteq S \Rightarrow A + B \overset{?}{\subseteq} S$

I) $0 = \underset{}{\overset{\in A}{0}} + \overset{\in B}{0} \in A + B$

Fie $x, y \in A + B \Rightarrow \exists a_1 a_2 \in A, \exists b_1, b_2 \in B : \left.\begin{array}{l} x = a_1 + b_1 \\ y = a_2 + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = \underset{\in A}{(a_1 + a_2)} + \underset{\in B}{(b_1 + b_2)} \in A + B$

Fie $\alpha \in K$, $\alpha x = \underset{\in A}{\alpha a_1} + \underset{\in B}{\alpha b_1} \in A + B$

II) $a \in A$, $a = \underset{\in A}{a} + \underset{\in B}{0} \in A + B$

$b \in B$, $b = \underset{\in B}{b} + \underset{\in A}{0} \in A + B$

III) Fie $x \in A+B \Rightarrow \exists a \in A, \exists b \in B : x = \underset{\substack{\cap \\ A+B \\ \cap \\ S}}{a} + \underset{\substack{\cap \\ A+B \\ \cap \\ S}}{b} \in S$

temă - inducție

$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in A, i = \overline{1,n}\} \leq_K V$