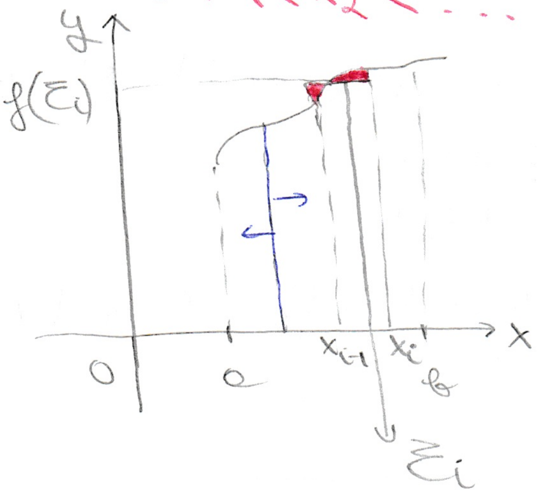
Curs 11 – Analiză

Def: Fie $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. S.n. DIVIZIUNE a intervalului $[a,b]$ $\forall$ sistem ordonat $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ unde

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



Se notează $Div[a,b] = \{\Delta \mid \Delta \text{ diviziune a intervalului } [a,b]\}$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$

Ex: $[0,3] \subseteq \mathbb{R}$

$\Delta^1 = (0,3)$

$\Delta^2 = (0,1,2,3)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Delta^n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{3n}{n}\right)$

$\Delta^4 = (0,1,3)$

$\Delta^1 \subseteq \Delta^2, \Delta^n, \Delta^4$

$\Delta^4 \subseteq \Delta^2, \Delta^n$

Def: Fie $\Delta \in Div[a,b]$. Norma diviziunii Δ este un nr real

$$\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = \overline{1,n}\}$$

Def: Fie Δ^1 și $\Delta^2 \in Div[a,b]$

$\Delta^1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_p^1)$

$\Delta^2 = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_q^2)$

Δ^1 s.n. diviziune mai fină decât Δ^2 dacă:

- $q \le p$
- $\{x_0^2, x_1^2, \dots, x_q^2\} \subseteq \{x_0^1, \dots, x_p^1\}$

Ex: Δ^2 este mai fină decât Δ^1 și Δ^4

Δ^4 mai fină decât Δ^1

T_1: Fie $\Delta^1, \Delta^2 \in Div[a,b]$, Δ^2 mai fină decât Δ^1 $\Big\} \Rightarrow \|\Delta^2\| \le \|\Delta^1\|$

$\rightarrow$ temă

P_2: Fie $\Delta^1, \Delta^2 \in Div[a,b]$. Atunci $\Delta^1 \cup \Delta^2 \in Div[a,b]$

Mai mult:

a) $\Delta^1 \cup \Delta^2$ este mai fină decât Δ^1, Δ^2

b) $\|\Delta^1 \cup \Delta^2\| \le \|\Delta^1\|$

$\le \|\Delta^2\|$

T_3: Fie $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\Big\} \Rightarrow \exists\, \Delta_\varepsilon \in Div[a,b]$ a.î. $\|\Delta_\varepsilon\| < \varepsilon$

Dem:

$b-a>0$

Din ax lui Arhimede $\exists\, p \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{b-a}{p} < \varepsilon \left(\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \underbrace{\frac{\varepsilon}{b-a}}_{>0}\right)$

Construim diviziunea:

$$\Delta = \left(a, a+\frac{b-a}{p}, a+2\frac{b-a}{p}, \dots, a+p\frac{b-a}{p}\right)$$

$$\|\Delta\| = \frac{b-a}{p} < \varepsilon$$

Def: Fie $\Delta \in Div[a,b]$, $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

S.n. $\boxed{\text{sistem de puncte intermediare}}$ atașat diviziunii Δ $\forall$ sistem ordonat $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a.î. $\forall\, i=\overline{1,n}$ $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

Def: Fie $\Delta \in Div[a,b]$, $\xi \in P_i(\Delta)$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

S.n. SUMA RIEMANN atașată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare ξ, nr real:

$$\sigma(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$$

Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Funcție f s.n. ÎNTEGRABILĂ RIEMANN pe $[a,b]$ dacă $\boxed{\exists}$ nr real I,

$$I=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta^n,\xi^n) \text{ pt:}$$

- $\forall(\Delta^n)\subseteq Div[a,b]$ un șir de diviziuni cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$
- $\forall(\xi^n)$ un șir de sisteme de puncte intermediare a.î. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\xi^n\in P_i(\Delta^n)$

Concluzie:

f este iR pe $[a,b]$ dacă:

$\exists I\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall(\Delta^n)\subseteq Div[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$

$\forall(\xi^n)$ cu $\xi^n\in P_i(\Delta^n)$

$$I=\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

Proprietăți ale integralei Riemann

P1) (aditivitate față de interval)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcție iR pe $[a,b]$ atunci

$\forall c\in(a,b)$, funcție este iR pe $[a,c]$, resp $[c,b]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

P2) (de inversare a capetelor de integrare)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ f iR pe $[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a -f(x)\,dx$$

P3) (de conservare a pozitivității)

$$\left.\begin{array}{l}f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \text{ iR pe } [a,b]\\ f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[a,b]\end{array}\right|\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$$

Dem: $\forall \xi_i \; f(\xi_i) \geq 0$
$x_{i-1} < x_i \Rightarrow (x_i - x_{i-1}) > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq 0$
$\Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{D}iv[a,b]$
$\forall \xi \in Pi(\Delta)$
$\sigma(f, \Delta, \xi) \geq 0 \cdots \Rightarrow I \geq 0$

P4) (de conservare a ordinii în inegalități)

$$\left.\begin{array}{l} f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{iR pe } [a,b] \\ \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Dem: $h : [a,b] \to \mathbb{R} \quad h(x) = f(x) - g(x)$
$\downarrow$
iR pe $[a,b]$ și $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx =$
$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
$h(x) \geq 0 \xrightarrow{P3} \int_a^b h(x) \geq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

P5)
$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ m, M \in \mathbb{R} \text{ a.î. } m \leq f(x) \leq M \\ f \text{ iR pe } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Dem: P4 $\quad g = 1_{[a,b]} \cdot m$
$u = 1_{[a,b]} \cdot M$

P6) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ iR pe $[a,b]$ atunci
$\min\{f(x) : x \in [a,b]\} \, (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq$
$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} \, (b-a)$

Obs: iR $\Rightarrow$ f este aproape peste tot continuă pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists$ min, $\exists$ max

PRIMITIVIBILITATE

Def: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Sp că funcția f admite primitive pe A dacă:

$\exists F: A \to \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} \cdot\ F \text{ deriv} \\ \cdot\ \forall x \in A,\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

F s.n. primitiva funcției f

P1) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f: I \to \mathbb{R}$ iar $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ primitive ale funcției f. Atunci $\exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in I$

$F_1(x) = F_2(x) + c$

Dem: F_1 primitivă a lui f $\Rightarrow$ F_1 deriv și $F_1'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

F_2 — " — $\Rightarrow$ F_2 deriv și $F_2'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

$\Downarrow$

$(F_1 - F_2)$ este deriv iar

$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ $\forall x \in I$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î.

$(F_1 - F_2)(x) = c$ $\forall x \in I$

$F_1(x) = F_2(x) + c$ $\forall x \in I$

Din P1 se justifică introducerea mulțimii tuturor primitivelor unei funcții pe care o numim INTEGRALA NEDEFINITĂ a funcției f pe intervalul I și o notăm

$$\int f(x)\,dx = \{F : F \text{ este o primitivă a lui } f\} = F(x) + \mathcal{C}$$

$\mathcal{C} = \{ c_I : c \in \mathbb{R} \}$

unde $c_I : I \to \mathbb{R}$ $\quad c_I(x) = c$ $\forall x \in I$

Obs: Ipoteza din P1, privind faptul că I este un interval este obligatorie:

$$F_1, F_2 : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \qquad F_1(x) = e^2 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} e^2 & : x>0 \\ -e^2 & : x<0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F_1'(x) = 0$

$F_2'(x) = 0$ și F_1, F_2 sunt deriv. pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ F_1, F_2 sunt primitive ale funcției constante

$f : \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $f(x) = 0$

Pp că $\exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $F_1(x) = F_2(x) + c$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- $x>0$ $e^2 = e^2 + c \Rightarrow c = 0$
- $x<0$ $e^2 = -e^2 + c \Rightarrow c = 2e^2 \neq \Rightarrow$ ↯

T_2: $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{R}$

$u \in I$ a.î. $\boxed{f \text{ este continuă în } u}$ + f este local integrabilă Riemann pe I

Atunci $\forall a \in I$, funct

$F : I \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este

derivabilă în u și $F'(u$

Dem: Obs f s.n. LIR I dacă f este IR, $\forall [u,v] \subseteq I$

Știm că $\boxed{f \text{ c în } u} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ a.î. $\forall x \in I$ cu

$|x-u|<\delta$ să avem $|f(x)-f(u)|<\varepsilon$

Dorim F deriv în $u \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to u} \dfrac{F(x)-F(u)}{x-u} \overset{not}{=} F'(u) \in \mathbb{R}$

$\overset{T\varepsilon,\delta}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ a.î. $\forall x \in I$ cu $|x-u|<\delta$ să avem

$$\left| \frac{F(x)-F(u)}{x-u} - F'(u) \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Dorim $F'(u) = f(u)$ $\quad \left| \frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u) \right| < \varepsilon$ (3)

Fie $\varepsilon > 0$ arb. dat

(3) $\left| \frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u) \right| < \varepsilon \iff$

$\iff -\varepsilon < \frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u) < \varepsilon \quad \Big| + f(u)$

$\iff f(u) - \varepsilon < \frac{F(x)-F(u)}{x-u} < f(u) + \varepsilon$

I $x - u > 0 \Rightarrow$

$(f(u) - \varepsilon)(x-u) < F(x) - F(u) < (f(u)+\varepsilon)(x-u)$

Din (1) aplicată pt $\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\exists\, \delta > 0}$ a.î. $\forall\, \boxed{t \in I \text{ cu } |t-u| < \delta}$ avem

$|f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\iff -\frac{\varepsilon}{2} < f(t) - f(u) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Big| + f(u)$

$\iff \underbrace{f(u)}_{\text{const}} - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < \underbrace{f(u) + \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{const}}$

$\iff f(u) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(u) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \in I$ cu $|t-u| <$

$\underset{\text{propr de monotonie ale } \int_R \text{ pe intervalul } [u,x]}{\iff} \left(f(u) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-u) < \int_u^x f(t)\,dt < \left(f(u) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-u)$

$\int_u^x f(t)\,dt = \int_u^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt =$

$= F(x) - \int_0^u f(t)\,dt =$

$= F(x) - F(u)$

$$\Leftrightarrow \left(f(u)-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x-u) < F(x)-F(u) < \left(f(u)+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x-u) \;\Big|\; :\underset{>0}{(x-u)}$$

$$\Leftrightarrow f(u)-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{F(x)-F(u)}{x-u} < f(u)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow f(u)-\varepsilon < f(u)-\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{F(x)-F(u)}{x-u} \le f(u)+\frac{\varepsilon}{2} < f(u)+\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{F(x)-F(u)}{x-u} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u)\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to u} \frac{F(x)-F(u)}{x-u} = f(u)$$

II $x-u<0 \to$ similar

III $x=u$ $F(x)-F(u)=0 \Rightarrow$ const

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

T_2: $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un interval | Atunci $\forall\, a \in I$, $\exists\, F: I \to \mathbb{R}$ a.î.

$f: I \to \mathbb{R}$ LiR pe I, C pe I | $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este deriv pe I și $F(a)=0$

Dem: $T_1 \to \forall$ punct din I

T_3: $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un interval | Atunci dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este

$f: I \to \mathbb{R}$ continuă pe I | o primitivă a lui f a.î.

$a \in I$ | $F(a)=0$

$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pt $\forall x \in I$

T_4: (teorema lui Leibnitz Newton)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ | Atunci

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivă a lui f | $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

f este iR pe $[a,b]$

Dem:

- Fie $(\Delta^n) \subseteq Div[a,b]$ un şir de diviziuni cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$
- Fie (ξ^n) a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xi^n \in Pi(\Delta^n)$ un sistem de puncte intermediare arb. dese

Ar că: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta^n, \xi^n) = F(b) - F(a)$

$$\sigma(f, \Delta^n, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)$$

O diviziune arbitrară Δ^n din şirul de diviziuni (Δ^n) este

$$\Delta^n = (x_0^n = a, x_1^n, \ldots, x_{p_n}^n = b)$$

F este c pe $\forall$ int $[x_{i-1}^n, x_i^n]$
deriv pe $\forall$ (x_{i-1}^n, x_i^n) $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{T lui Lagrang}}$ $\exists c_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$:

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = \underbrace{F'(c_i^n)}_{f(c_i^n)}(x_i^n - x_{i-1}^n) \quad (*)$$

$$\Rightarrow (c_1^n, c_2^n, \ldots, c_{p_n}^n) \in Pi(\Delta^n)$$

$$\sigma(f, \Delta^n, c) = \sum_{i=1}^{p_n} f(c_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{p_n} \frac{F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)}{x_i^n - x_{i-1}^n}(x_i^n - x_{i-1}^n)$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} \left(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)\right) = F(b) - F(a)$$

Pt (Δ^n) arb $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$