Curs 12 – Algebră

Dimensiunea

K corp comutativ, spațiu vectorial = spațiu vectorial finit generat

Teoremă: (Proprietatea de universalitate a spațiului vect)

${}_K V$ – sp vect, X bază în ${}_K V$, $\forall$ ${}_K V'$ sp vect.

$\forall f : X \to V'$ funcție, $\exists\ \bar{f} : V \to V'$ transf. liniară

$\bar{f}|_X = f$

Teorema schimbului – Steinitz

${}_K V$ – sp vectorial, $x_1, \dots, x_m \in V$ liniar independenți

$y_1, \dots, y_n \in V$

$V = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ atunci $m \leq n$ și (după o schimbare)

$V = \langle x_1, \dots x_m, y_{m+1}, \dots y_n \rangle$

Consecință:

${}_K V$ – sp vect de ~~de~~ tip finit $\Rightarrow$ orice bază a lui V este finită și orice 2 baze au același nr de elemente.

Dem: V are n generatori (ca în teorema anterioară)

$\Rightarrow$ orice n+1 vectori sunt liniari dependenți $\Rightarrow$ toate bazele lui V sunt finite și au cel mult n vectori

Fie X, Y baze în ${}_K V$, $|X| = m$, $|Y| = n$, $m, n \in \mathbb{N}$

X sistem de generatori, Y mulțime liberă $\Big\} \Rightarrow n \leq m$

X liberă, Y sistem de generatori $\Big\} \Rightarrow m \leq n$

$\Rightarrow m = n$

Obs: a) ${}_K V$ – sp vectorial, $\dim V = n \ (\in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$

în ${}_K V$ există n vectori liniar independenți și orice n+1 vectori din V sunt liniar dependenți

Dem: este consecință a teoremei schimbului și a faptului că bazele sunt mț de vectori liniar independenți maximale

b) V K-sp vect, $\dim V = n (\in \mathbb{N})$ $\Leftarrow$ orice n vectori liniar independenți ai lui V formează o bază în ${}_K V$

c) V K-sp vect, $A \leq_K V \Rightarrow \dim A \leq \dim V$
(V de tip finit) $\Rightarrow \dim A = \dim V \Leftrightarrow A = V$

dem: $A \leq_K V$. Fie X bază în ${}_K V \Rightarrow X$ bază în ${}_K V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists Y$ bază în ${}_K V$ cu $X \subseteq Y$

$X \subseteq Y \Rightarrow |X| \leq |Y| \Rightarrow \dim A = |X| \leq |Y| = \dim V$
$|X| = |Y| \Leftrightarrow X = Y \Leftrightarrow A = \langle X \rangle = \langle Y \rangle = V$

d) $n \in \mathbb{N}$, $P_n(K) = \{ f \in K[X] \mid \text{grad } f \leq n \} \leq_K K[X]$
$\langle 1, x, x^2, \dots x^n \rangle$

$\langle 1, x, x^2, \dots x^n \rangle$ bază în $P_n(K)$ l. independent
$\dim_K P_n(K) = n+1$

e) V_1, V_2, K-sp vect $V_1 \times V_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \}$
$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$\alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \ \forall \alpha \in K$

$\Rightarrow V_1 \times V_2$ K-sp vect, $\dim (V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$\left. \begin{array}{l} X \text{ bază în } V_1 \\ Y \text{ bază în } V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ (x, 0) \mid x \in X \} \cup \{ (0, y) \mid y \in Y \}$
bază în $V_1 \times V_2$

LIPSEȘTE

(T): Fie $f : V \to V'$ transf K liniară. Atunci $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f$ = rangul lui f

$\dim \operatorname{Ker} f$ = defectul lui f

(C): a) $A, B \leq_K V$, V K - sp vectorial. Atunci:

$\dim A + \dim B = \dim (A+B) + \dim (A \cap B)$

b) $A, B \leq {}_K V$: $\dim(A+B) = \dim A + \dim B \Leftrightarrow A+B = A \oplus B$

c) Fie V, V' K sp vect ~~de~~ cu $\dim V = \dim V'$ $(\in \mathbb{N})$

$f: V \to V'$ transf K-liniară

f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f izomorfism

Transformări liniare de matrici

Fie K ~~sp vect~~ corp comutativ, V, V' K-sp vect

$\dim V = n$ $(u_1, \dots, u_n) = u$ bază (ord) în ${}_K V$

$\dim V' = m$ $(v_1, \dots, v_m) = v$ bază (ord) în ${}_K V$

$y \in V'$, y se scrie în mod unic sub forma:

$$y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m \quad (1)$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ s.n. constantele lui y în baza V

Fie $f: V \to V'$ transformare K-liniară. Proprietatea de universalitate a spațiului vectorial ne spune că f este unic determinată de:

$$f(u_1) = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \dots + \alpha_{m1} v_m$$

$$\vdots$$

$$f(u_n) = \alpha_{1n} v_1 + \alpha_{2n} v_2 + \dots + \alpha_{mn} v_m$$

$$[f]_{u,v} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(u_1) & f(u_2) & & f(u_n) \end{array}$$

Obs: 1) Există o transformare a coordonatelor unui vector prin f cu ajutorul $[f]_{u,v}$

2) rang $[f]_{u,v}$ = rang f = dim Im f

3) $[f]_{u,v}$ depinde de f, de u şi v şi de ordinul elementelor din aceste baze

Ex: a) $[1_V]_u = I_n$ ($\forall\, u$ bază în V)

b) $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad f_A : K^n \to K^m$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$

$f_A(x_1, \dots x_n) = {}^t\left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$

f_A transf K-liniară şi $[f_A]_{e,e'} = A$

(e, e' bazele canonice ale lui K^n, resp K^m)

c) $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

derivată formală, D - transf $\mathbb{R}$-liniară

$u = (1, x, x^2, x^3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$v = (1, x, x^2)$, $v' = (x^2, 1, x)$ baze în $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = 0\cdot x^2 + 0\cdot 1 + 0\cdot x$

$D(x) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = 0\cdot x^2 + 1\cdot 1 + 0\cdot x$

$D(x^2) = 2\cdot x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 = 0x^2 + 0\cdot 1 + 2\cdot x$

$D(x^3) = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3x^2 = 3x^2 + 0\cdot 1 + 0\cdot x$

$[D]_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $[D]_{u,v'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Teoremă :

Fie V, V', V'' K sp vect , $\dim V'' = p (\in \mathbb{N}^*)$

u, v bază în V resp V' (ca mai sus)

$w = (w_1, \dots w_p)$ bază în ${}_K V''$

a) $f, f' : V \to V'$ transf K-liniare

$[f+f']_{u,v} = [f]_{u,v} + [f']_{u,v}$

b) $\alpha \in K$, $f : V \to V'$ transf K liniară

$[\alpha f]_{u,v} = \alpha [f]_{u,v}$

c) $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ transf K liniare

$[g \circ f]_{u,v} = [g]_{v,w} [f]_{u,v}$

Dem: a) $[f]_{u,v} = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$

$[f']_{u,v} = (\alpha'_{ij}) \in M_{m,n}(K)$

$j = \overline{1,n}$ $(f+f')(u_j) = f(u_j) + f'(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha'_{ij} v_i =$

$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij}) v_i \Rightarrow [f+f']_{u,v} = (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij}) = [f]_{u,v} + [f']_{u,v}$

c) $[f]_{u,v} = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(K)$

$[g]_{v,w} = (\beta_{ij}) \in M_{m,p}(K)$

$j = \overline{1,n}$ $(g \circ f)(u_j) = g(f(u_j)) = g(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} g(v_i) =$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} (\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} w_k) = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{i=1}^{m} (\beta_{ki} \alpha_{ij}) w_k \Rightarrow$

$\Rightarrow [g \circ f]_{u,w} = (\sum_{i=1}^{m} (\beta_{ki} \alpha_{ij})) = [g]_{v,w} [f]_{u,v}$

Consecință:

a) Fie u, v baze finite în ${}_K V$ resp ${}_K V'$

$$\varphi : Hom_K(V, V') \to M_{mn}(K)$$
$$\varphi(f) = [f]_{u,v} \quad K\text{-izom.}$$

Dem: φ inj $\Leftarrow$ prop de unic. a p vect

φ transf lin $\Leftarrow$ a), b) anterior

b) u bază în V ~~fixată~~

$$\varphi : End_K(V) \to M_n(K), \ \varphi(f) = [f]_u$$

c) $\varphi' : Aut_K(V) \to$ ~~Gl_n~~ (K)

$\varphi'(f) = [f]_u$ izom de grupuri de la ~~autom lin~~

$(Aut_K(V), \circ)$ la $(GL_n(K), \cdot)$

d) $u = (u_1, \dots, u_n)$ în ${}_K V$

$u' = (u_1', \dots, u_m')$ sistem de vectori din ${}_K V$, $S = (s_{ij}) \in M$

$j = \overline{1,m}$, $u_j' = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i \ (\Leftrightarrow u' = u \cdot S)$