CURS 7+8

Spaţii vectoriale, subspaţii

În cele ce urmează, $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ (dacă nu menţionăm altceva).

Definiţia 1. Fie K un corp comutativ. O pereche formată dintr-un grup abelian $(V, +)$ şi o funcţie $\cdot : K \times V \to V$ (care asociază unei perechi $(\alpha, x) \in K \times V$ elementul notat αx din V) se numeşte **K-spaţiu vectorial (liniar)** sau **spaţiu vectorial (liniar) peste** K dacă verifică următoarele axiome: pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$,

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
4) $1x = x$.

Elementele din K se numesc **scalari**, elementele din V se numesc **vectori**, funcţia $\cdot : K \times V \to V$ se numeşte **operaţie externă** pe V sau **înmulţire cu scalari** (din K), vectorul αx se numeşte **produsul** dintre scalarul α şi vectorul x, iar $+$ din V **operaţie internă** sau **adunare a vectorilor**.

Observaţia 2. Atragem atenţia că $+$ şi $\cdot$ notează fiecare câte două operaţii. O analiză atentă a fiecărei axiome arată ca nu e nici pericol de a face confuzie între operaţiile notate la fel. De exemplu, în axioma 1) primul $+$ este operaţia din corp, iar al doilea este operaţia din grup, iar în axioma 3), în membrul stâng, primul $\cdot$ este operaţia din corp, iar al doilea este operaţia externă, în timp ce în membrul drept ambii $\cdot$ simbolizează operaţia externă.

Desigur, ar exista şi opţiunea schimbării notaţiilor, dar aceasta ar duce la forma mai puţin comodă a axiomelor de mai sus. De exemplu, dacă pentru operaţia externă am folosi notaţia φ (în loc de $\cdot$), axiomele de mai sus s-ar transcrie astfel:

1) $\varphi(\alpha + \beta, x) = \varphi(\alpha, x) + \varphi(\beta, x)$;
2) $\varphi(\alpha, x + y) = \varphi(\alpha, x) + \varphi(\alpha, y)$;
3) $\varphi(\alpha\beta, x) = \varphi(\alpha, \varphi(\beta, x))$;
4) $\varphi(1, x) = x$.

Notaţie. Pentru a sugera că V este un K-spaţiu vectorial, folosim notaţia ${}_K V$ (sau V_K).

Teorema 3. Dacă V este un K-spaţiu vectorial, atunci:
i) Pentru orice $\alpha \in K$, funcţia $t_\alpha : V \to V$, $t_\alpha(x) = \alpha x$ este un endomorfism al grupului $(V, +)$. Dacă, în plus, $\alpha \neq 0$ atunci t_α este un automorfism al lui $(V, +)$ şi $t_\alpha^{-1} = t_{\alpha^{-1}}$.
ii) Pentru orice $x \in V$ funcţia $t'_x : K \to V$, $t'_x(\alpha) = \alpha x$ este un omomorfism al grupului $(K, +)$ în grupul $(V, +)$.

Demonstraţie.

Corolarul 4. (Reguli de calcul într-un spaţiu vectorial)
a) Pentru orice $\alpha \in K$ şi $x \in V$ avem:

i) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$;
ii) $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$ şi $(-\alpha)(-x) = \alpha x$.

b) Pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$ avem:

$$(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x \text{ şi } \alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y.$$

c) Pentru orice $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ şi $x, x_1, \ldots, x_n \in V$ avem:

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)x = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x \text{ şi } \alpha(x_1 + \cdots + x_n) = \alpha x_1 + \cdots + \alpha x_n.$$

Exemplele 5. a) Pe o mulţime dintr-un singur element $\{0\}$ există o singură operaţie $+$ definită prin egalitatea $0 + 0 = 0$ şi $(\{0\}, +)$ este grup abelian. De asemenea, există o singură operaţie externă

$$K \times \{0\} \to \{0\},\ (\alpha, 0) \mapsto 0,$$

iar aceasta verifică în mod evident axiomele $1) - 4)$ din definiţia 1. Prin urmare, cele două operaţii definesc pe $\{0\}$ o structură de K-spaţiu vectorial. Acest spaţiu vectorial se numeşte **spaţiul vectorial zero** sau **nul**.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K,\ i = \{1, \ldots, n\}\}$$

este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite pe componente astfel:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

unde $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ şi $\alpha \in K$.

c) Fie O un punct fixat în plan. Fiecărui punct M al planului i se asociază vectorul (segmentul orientat) $\overrightarrow{OM}$ numit vectorul de poziţie al punctului M (relativ la originea O). Notăm cu V_2 mulţimea tuturor vectorilor $\overrightarrow{OM}$ când M parcurge punctele planului fixat. Mulţimea V_2 este $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor după regula paralelogramului şi înmulţirea cu scalari definită astfel: dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha\overrightarrow{OM}$ este vectorul cu originea în O care are direcţia lui $\overrightarrow{OM}$, sensul lui $\overrightarrow{OM}$ dacă $\alpha > 0$ şi sens contrar lui $\overrightarrow{OM}$ dacă $\alpha < 0$, iar lungimea (modulul) este produsul dintre $|\alpha|$ şi lungimea lui $\overrightarrow{OM}$. Dacă $\alpha = 0$ sau $\overrightarrow{OM}$ este vectorul nul atunci $\alpha\overrightarrow{OM}$ este vectorul nul.

Relativ la un sistem de coordonate ortogonal cu originea în O un vector $\overrightarrow{OM}$ este reprezentat de coordonatele (x, y) ale punctului M, iar operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire a vectorilor cu scalari se exprimă astfel:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y');$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Cu alte cuvinte, putem identifica $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial V_2 cu ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

Analog se obţine spaţiul liniar V_3 al vectorilor din spaţiu cu originea într-un punct O fixat. Un vector din V_3 este determinat în raport cu un sistem de coordonate cu originea în O de un triplet (x, y, z) de numere reale. Scriind coordonatele vectorului sumă şi produs cu un scalar în acest sistem, se constată că putem identifica $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial V_3 cu ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

d) Grupul $(K, +)$ al unui corp $(K, +, \cdot)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă

$$K \times K \to K,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

unde αx este produsul perechii (α, x) în $(K, \cdot)$. Acest exemplu se obţine şi din b) luând $n = 1$.
e) Fie K' un corp şi K un un subcorp al lui K'. Dacă $(V, +)$ este un K'-spaţiu vectorial, atunci $(V, +)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă

$$K \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

unde αx este produsul dintre scalarul α şi vectorul x în K'-spaţiul vectorial V. Se spune că K-spaţiul vectorial V s-a obţinut din K'-spaţiul vectorial V prin **restricţia corpului de scalari** de la K' la K. Astfel $\mathbb{R}$ este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial, iar $\mathbb{C}$ este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

f) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Grupul abelian $(M_{m,n}(K), +)$ al matricelor de tipul (m, n) cu elemente din K e un K-spaţiu vectorial în raport cu înmulţirea cu scalari definită astfel:

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})\ (\alpha \in K,\ (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)).$$

Să observăm că pentru $m = 1$ se obţine chiar exemplul b) (caz care poate fi identificat, în urma unei transpuneri, şi cu cel al K-spaţiului vectorial $M_{n,1}(K)$). Cu alte cuvinte, liniile (coloanele) unei matrice din $M_{m,n}(K)$ pot fi privite ca vectori din K^n (respectiv K^m).

Să notăm şi că în cazul matricilor pătratice (de ordin n), pe lânga structura de K-spaţiu vectorial a lui $M_n(K)$ avem şi o structură de inel pe $M_n(K)$. Mai mult, între cele două structuri avem o relaţie de legătură, şi anume:

$$\alpha(A\,B) = (\alpha A)B = A(\alpha B),\ \forall \alpha \in K,\ \forall A, B \in M_n(K).$$

g) Fie $K[X] = \{f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in K,\ n \in \mathbb{N}\}$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în corpul comutativ K în nedeterminata X. Reamintim că $(K[X], +)$ este un grup abelian în raport cu adunarea polinoamelor: pentru $f, g \in K[X]$,

$$f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n,\ g = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n$$

(putem considera că ambele polinoame au acelaşi număr de termeni, adăugând, dacă e cazul, monoame cu coeficientul 0 în scrierea unuia dintre ele şi) avem

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n.$$

Elementul nul e $0 \in K[X]$ (polinomul nul) şi orice $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$ are opus, pe

$$-f = -a_0 + (-a_1)X + \cdots + (-a_n)X^n.$$

Grupul abelian $(K[X], +)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu înmulţirea cu scalari definită astfel: dacă $\alpha \in K$ şi $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$, atunci

$$\alpha f = \alpha a_0 + \alpha a_1X + \cdots + \alpha a_nX^n.$$

Şi aici, pe lângă structura de K-spaţiu vectorial, există şi o structură de inel cu unitate pe $K[X]$ şi structurile sunt ,,compatibile" în sensul că

$$\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g),\ \forall \alpha \in K,\ \forall f, g \in K[X].$$

h) Dacă V_1 şi V_2 sunt K-spaţii vectoriale, atunci produsul cartezian $V_1 \times V_2$ este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite astfel: pentru $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in V_1 \times V_2$ şi $\alpha \in K$,

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2'),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Spaţiul vectorial obţinut astfel (peste K) se numeşte **produsul direct** al spaţiilor V_1 şi V_2.

Definiţia 6. O pereche formată dintr-un inel $(R, +, \cdot)$ şi o operaţie externă $\cdot : K \times V \to V$ se numeşte K**-algebră** sau **algebră peste** K dacă grupul abelian $(R, +)$ este un K-spaţiu vectorial şi înmulţirea cu scalari şi înmulţirea din inel verifică următoarea condiţie

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),\ \forall \alpha \in K,\ \forall x, y \in R.$$

Dacă, în plus, inelul R este comutativ (cu unitate), spunem că R este o K**-algebră comutativă** (respectiv o K**-algebră cu unitate**).

Observaţia 7. Din exemplele anterioare rezultă că inelul $M_n(K)$ al matricelor pătratice de ordinul n ($n \in \mathbb{N}^*$) formează o K-algebră cu unitate şi că $K[X]$ este o K-algebră comutativă cu unitate.

Definiţia 8. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime $A \subseteq V$ se numeşte **subspaţiu** al lui V dacă

i) $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 + a_2 \in A$,

ii) $\alpha \in K$, $a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$

şi A este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse.

Faptul că A este un subspaţiu al K-spaţiului vectorial V îl notăm prin $A \leq_K V$.

Observaţia 9. Dacă A este un subspaţiu al K-spaţiului vectorial V, atunci $0 \in A$.

Practic, când arătăm că o submulţime a unui spaţiu vectorial este subspaţiu aplicăm următoarea:

Teorema 10. (Teorema de caracterizare a subspaţiului)
Fie V un K-spaţiu vectorial şi $A \subseteq V$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) A este subspaţiu al lui V.

2) A verifică condiţiile:

α) $A \neq \emptyset$;

β) $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 - a_2 \in A$;

γ) $\alpha \in K,\ a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$.

3) A verifică condiţiile:

α) $A \neq \emptyset$;

β') $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 + a_2 \in A$;

γ) $\alpha \in K,\ a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$.

4) A verifică condiţiile:

α) $A \neq \emptyset$;

β'') $\alpha_1, \alpha_2 \in K,\ a_1, a_2 \in A \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$.

Demonstraţie.

Observaţiile 11. a) Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi $A \subseteq V$, atunci A este un subspaţiu dacă şi numai dacă A este subgrup al grupului $(V, +)$ şi A verifică condiţia ii).

b) Cum A este subgrup al grupului $(V, +)$ dacă şi numai dacă

$$A \neq \emptyset \text{ şi } a_1 - a_2 \in A, \forall a_1, a_2 \in A,$$

caracterizarea de mai sus rămâne adevărată dacă înlocuim condiţia α) cu

α') $A \neq \emptyset$.

Exemplele 12. a) Pentru orice spaţiu vectorial V submulţimile $\{0\}$ şi V sunt subspaţii ale lui V. Un subspaţiu al lui V diferit de $\{0\}$ şi V se numeşte **subspaţiu propriu**.
b) Fie K-spaţiul vectorial al polinoamelor $K[X]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Se constată uşor că

$$P_n(K) = \{f \in K[X] \mid \operatorname{grad} f \leq n\}$$

verifică pe α), β'), γ). Deci $P_n(K)$ este un subspaţiu al lui $K[X]$.
c) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Mulţimea $\mathbb{R}^I = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ este $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite prin:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

unde $f, g \in \mathbb{R}^I$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Submulţimile

$$C(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ continuă pe } I\},\ D(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ derivabilă pe } I\}$$

sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^I$ pentru că sunt nevide şi

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in C(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C(I, \mathbb{R});$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in D(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D(I, \mathbb{R}).$$

Teorema 13. Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie nevidă de subspaţii ale K-spaţiului vectorial V, atunci

$$\bigcap_{i \in I} A_i \leq_K V.$$

Demonstraţie.

Din Teorema 13 rezultă că dacă $X \subseteq V$ atunci

$$\bigcap \{A \leq_K V \mid X \subseteq A\} \tag{1}$$

este un subspaţiu al lui V notat cu $\langle X \rangle$ numit **subspaţiul generat** de X. Din (1) rezultă că

$\langle X \rangle$ *este cel mai mic subspaţiu al lui* V *care include pe* X.

Dacă $V = \langle X \rangle$ atunci vom spune că X este un **sistem de generatori** al lui V sau că X generează pe V. Dacă există o submulţime finită $X \subseteq V$ astfel încât $V = \langle X \rangle$, atunci spunem că spaţiul V este de **tip finit** sau **finit generat**. Dacă $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vom nota $\langle X \rangle$ cu $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Observaţia 14. Din definiţia subspaţiului generat rezultă:
a) $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$;
b) $X, Y \subseteq V,\ X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$;
c) $A \leq_K V \Rightarrow \langle A \rangle = A$;
d) $X \subseteq V \Rightarrow \langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$.

Definiţia 15. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$. O sumă de forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\ x_1, \ldots, x_n \in X)$$

se numeşte **combinaţie liniară** de elemente din X.

Teorema 16. Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi $\emptyset \neq X \subseteq V$, atunci

$$\langle X \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \mid \alpha_k \in K,\, x_k \in X,\, k = 1, \ldots, n,\, n \in \mathbb{N}^*\} \tag{2}$$

adică $\langle X \rangle$ este format din toate combinaţiile liniare de elemente din X.

Demonstraţie.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, \ldots, A_n \subseteq V$, notăm

$$A_1 + \cdots + A_n = \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Corolarul 17. a) Dacă $x \in V$ atunci $\langle x \rangle = \{\alpha x \mid \alpha \in K\} = Kx$.
b) Dacă $x_1, \ldots, x_n \in V$ atunci $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = Kx_1 + \cdots + Kx_n$.

Observaţiile 18. (şi exemple...)
a) Fie V_2 $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial al vectorilor din plan cu originea într-un punct O. Subspaţiile lui V_2 sunt: $\{0\}$, V_2 şi dreptele care trec prin O (mai exact mulţimile de vectori de poziţie ai punctelor situate pe aceste drepte).

b) Pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial V_3 peste al vectorilor din spaţiu cu originea într-un punct O, subspaţiile lui sunt: $\{0\}$, V_3, dreptele care trec prin O (mai exact mulţimile de vectori de poziţie ai punctelor situate pe aceste drepte) şi planele care trec prin O (mulţimile de vectori de poziţie conţinuţi în aceste plane).
c) În general reuniunea a două subspaţii ale unui spaţiu vectorial nu este un subspaţiu. De exemplu, mulţimile $A = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi $B = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$, dar $A \cup B$ nu este subspaţiu, nefiind stabilă în raport cu $+$:

$$(1, 0) \in A \subseteq A \cup B,\ (0, 1) \in B \subseteq A \cup B,\ \text{dar } (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A \cup B.$$

d) Dacă $A, B \leq_K V$ atunci cel mai mic subspaţiu al lui V ce conţine A şi B este $A + B$, adică

$$A + B = \langle A \cup B \rangle.$$

e) Dacă $X_i \subseteq V$ $(i = 1, \dots, n)$, atunci $\langle X_1 \cup \dots \cup X_n \rangle = \langle X_1 \rangle + \dots + \langle X_n \rangle$.

f) Dacă $A_1, \dots, A_n$ sunt subspaţii ale K-spaţiului vectorial V, atunci

$$A_1 + \dots + A_n = \langle A_1 \cup \dots \cup A_n \rangle.$$

Am văzut că suma a două subspaţii este un subspaţiu.

Definiţia 19. Dacă A şi B sunt subspaţii ale lui V şi $A \cap B = \{0\}$, subspaţiul $A + B$ se notează cu $A \oplus B$ şi se numeşte **suma directă** a lui A şi B.

În particular, $V = A \oplus B$ dacă şi numai dacă au loc următoarele:
i) $A + B = V$;
ii) $A \cap B = \{0\}$.
În acest caz, spunem că A (sau B) este **sumand** (sau **sumant**) **direct** al lui V (prin urmare, A şi B sunt sumanzi (sumanţi) direcţi ai lui V). De asemenea, spunem că A este un **complement direct** al lui B (în V); la fel B pentru A.

Observaţiile 20. a) Pentru un sumand direct pot exista mai mulţi complemenţi direcţi.

b) Proprietatea de a fi sumand direct este tranzitivă (la seminar).