# Şiruri de funţii

Studiaţi convergenţa punctuală (precizând mulţimea de convergenţă şi funcţia limită punctuală) şi convergenţa uniformă pentru următoarele şiruri de funcţii:

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^\alpha}$ unde $\alpha > 0$;
2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x(1+n^2)}{n^2}$;
3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^4+n^2}$;
4. $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$;
5. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}$;
6. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$;
7. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$;
8. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$;
9. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx^2}}$;
10. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x(1+n^2)}{n^2}$;
11. $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$;

## Sinteză teorie

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Notăm prin

$$\mathcal{F}(D) = \{f| \quad f : D \to \mathbb{R}\}$$

mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe mulţimea $D$. Se numeşte **şir de funcţii** orice funcţie $x : \mathbb{N}_k \to \mathcal{F}(D)$, care asociază în mod unic oricărui număr natural $n \geq k$, o funcţie:

$$x(n) := f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_k.$$

Reamintim că $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$, pentru un $k \in \mathbb{N}$.
Notaţiile uzuale pentru şiruri de funcţii sunt

$$(f_n) = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_k} = (f_n)_{n \geq k}.$$

Următoarele consideraţii teoretice sunt formulate sub ipotezele:

$$(f_n) \subseteq \mathcal{F}(D) \text{ este un şir de funţii definite pe } \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}.$$

Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de convergenţă** (punctuală) dacă şirul de numere reale rezulatat prin aplicarea tuturor funcţiilor unui şir de funcţii, este convergent. Adică

$$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă formează **mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii**, notată cu

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in D : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atunci când, mulţimea de convergenţă asociată unui şir de funcţii este nevidă, ei i se asociază în mod natural o funcţie, numită **funcţia limită punctuală**,

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Notaţia pentru această **convergenţă punctuală** este:

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad sau \quad f_n \to f.$$

Folosind caracterizarea cu $\epsilon$ a limitelor de şiruri de numere reale,în fiecare punct al mul ctimii de convergenţă putem deduce următoarea teoremă de caracterizare a convergenţei punctuale:

**Teoremă**

$$f_n \xrightarrow{p} f \iff \forall x \in \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad a.i. \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

S-a introdus o noţiune diferită de convergenţă pentru şirurile de funcţii, şi anume convergenţa uniformă.

**Definiţie:** Spunem că şirul de funcţii $(f_n)$ converge uniform pe o mulţime $D_0 \subseteq D$ dacă

$$\exists f : D \to \mathbb{R}, \quad a.i. \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad a.i. \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in D_0, \; sa\ aiba\ loc |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notaţia folosită pentru convergenţa uniformă este:

$$f_n \overset{u}{\rightrightarrows} f \quad sau \quad f_n \rightrightarrows f.$$

**Observaţii:**

- $\rightrightarrows \Longrightarrow \longrightarrow$ cu alte cuvinte, toate şirurile de funcţiile uniform convergente sunt şi punctuale convergente (către aceeaşi funcţie limită definită mai sus), dar reciproca nu este adevărată

- continuitatea se transmite prin uniform convergenţă

- În practică, de obicei determinăm funcţia limită explicit, calculând pentru fiecare $x \in D$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
După ce constuim explicit funcţia limita, analizăm şi convergenţa uniforma, folosind de obicie, criteriul lui Weierstrass

**Teorema lui Weirstrass** Considerând un şir de funcţii $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(D)$ şi un şir de numere reale $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât
$$|f_n(x) - f(x)| < a_n, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in \mathcal{C}$$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

atunci
$$f_n \rightrightarrows f,$$

**Teorema de moştenire a continuităţii**
Dacă $f_n \rightrightarrows f$, iar toate funcţiile $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ sunt continue, atunci şi funcţia limită $f$ este continuă.