Geometrie Analitică
Note de Curs şi Seminar

Conf. Univ. Dr. Habil. Cornel Pintea

E-mail: cpintea math.ubbcluj.ro

Cuprins

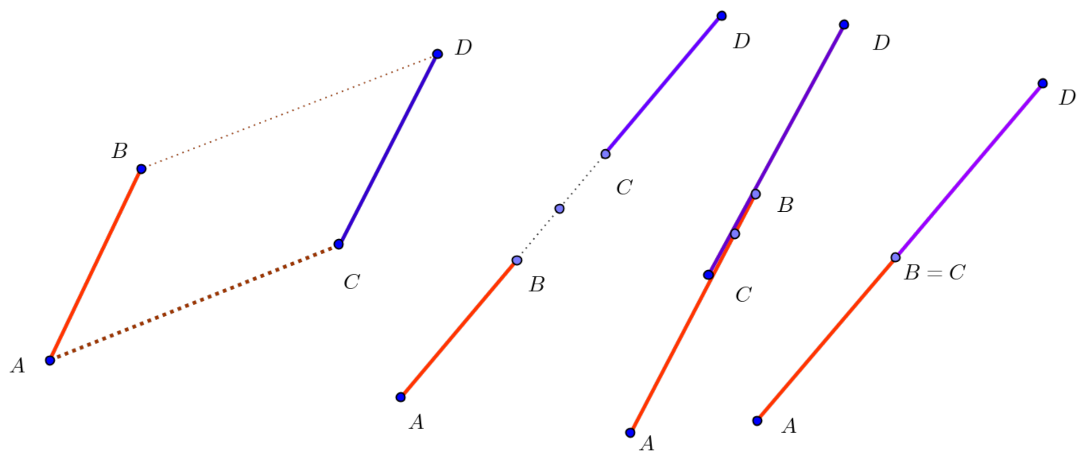
Titular curs: Conf. Univ. Dr. Habil. Cornel Pintea

1 Algebră vectorială

1.1 Vectori liberi

Vectori Considerăm spaţiul fizic tridimensional $\mathcal{P}$ şi amintim că aici putem vorbi despre puncte, drepte, plane şi diverse relaţii între ele. Dacă $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ este o pereche ordonată, atunci A se numeşte *punctul original* sau *origine* şi B se numeşte *punctul terminal* sau *extremitatea* a lui (A, B).

Definiţia 1.1. Spunem că perechile ordonate (A, B), (C, D) sunt *echipolente*, şi scriem $(A, B) \sim (C, D)$, dacă segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc.

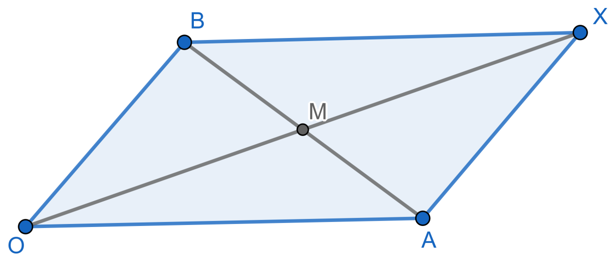


Pairs of equipollent points $(A,B) \sim (C,D)$

Observaţia 1.1. Dacă punctele A, B, C, $D \in \mathcal{P}$ nu sunt coliniare, atunci $(A, B) \sim (C, D)$ dacă şi numai dacă $ABDC$ este un paralelogram. De fapt, lungimea segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ este aceeaşi dacă $(A, B) \sim (C, D)$.

Propoziţia 1.1. *Dacă (A, B) este o pereche ordonată şi $O \in \mathcal{P}$ este un punct dat, atunci există un punct unic X astfel încât $(A,B) \sim (O, X)$.*

Demonstraţie. Fie M mijlocul segmentului $[BO]$. Există un singur punct $X \in \mathcal{P}$ astfel încât $M \in [AX]$ şi $[AM] \equiv [MX]$.

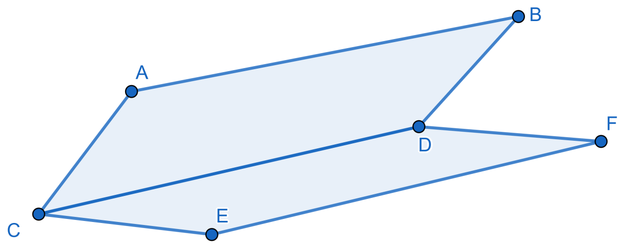


□

Propoziţia 1.2. *Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$.*

Demonstraţie. Fie $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Segmentele $[AB]$ şi $[BA]$ au evident acelaşi mijloc şi prin urmare $(A, B) \sim (A, B)$, ceea ce se înseamnă că " $\sim$ " este reflexivă. Fie (A, B), $(C, D) \in$

$\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ astfel încât $(A, B) \sim (C, D)$, adică segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc. Prin urmare segmentele $[CB]$ şi $[DA]$ au acelaşi mijloc şi astfel obţinem că $(C, D) \sim (A, B)$. Deci relaţia " $\sim$ " este simetrică. Pentru a studia tranzitivitatea relaţiei de echipolenţă considerăm bipunctele (A, B), (C, D) şi (E, F) astfel încât $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$. Observăm că dacă punctele uneia dintre perechi coincid, acelaşi lucru se întâmplă cu toate perechile rezultând, în acest caz, că $(A, B) \sim (E, F)$. Admitem în continuare că $A \neq B,\ B \neq C,\ E \neq F$. Din acest punct demonstraţia va fi împărţită în trei cazuri.



a) Dreptele AB şi EF sunt distincte, adică $AB||EF$. Presupunem de asemenea că $C \notin \{B, F\}$. Fie M mijlocul segmentelor $[AD]$ şi $[BC]$ iar N mijlocul segmentelor $[CF]$ şi $[DE]$. Rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiurile BCF şi ADE, însemnând, pe de o parte, că $BF||MN$ şi $BF = 2MN$, iar pe de altă parte că $MN||AE$ şi $AE = 2MN$. Prin urmare $ABFE$ este paralelogram, sau echivalent $(A, B) \sim (E, F)$. Dacă $C \in \{B, F\}$ considerăm punctele $C',\ D' \in \mathcal{P}$ astfel încât $C' \notin \{B, F\}$ şi $(C, D) \sim (C', D')$, şi aplicăm acelaşi raţionament tripletuluui (A, B), (C', D'), (E, F).

b) Dreptele AB şi EF coincid, dar CD este o altă dreaptă. Considerăm punctul $X \in \mathcal{P}$ astfel încât $(A, B) \sim (E, X)$. Aplicând punctul a) bipunctelor (C, D), (A, B), (E, X), obţinem $(C, D) \sim (E, X)$. Cum însă $(C, D) \sim (E, F)$ rezultă că $X = F$. Aşadar, $(A, B) \sim (E, F)$.

c) Dreptele AB, CD, EF coincid. Considerăm un punct G, nesituat pe dreapta AB, şi $M \in \mathcal{P}$ astfel încât $(C, D) \sim (G, M)$. Ţinând seama de cazul a) deducem că $(A, B) \sim (G, M)$ şi $(G, M) \sim (E, F)$. Folosind b) rezultă $(A, B) \sim (E, F)$. $\square$

Definiţia 1.2. Clasele de echivalenţă în raport cu relaţia de echivalenţă se numesc *vectori (liberi)* .

Notăm cu $\overrightarrow{AB}$ clasa de echivalenţă a perechii ordonate (A, B), adică

$$\overrightarrow{AB} = \{(X, Y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid (X, Y) \sim (A, B)\}$$

şi fie

$$\mathcal{V} = \mathcal{P} \times \mathcal{P}\big/_{\sim} = \{\overrightarrow{AB} \,|\, (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}\}$$

mulţimea vectorilor (liberi). *Lungimea* sau *magnitudinea* vectorului $\overrightarrow{AB}$, notată cu $\|\overrightarrow{AB}\|$ sau cu $|\overrightarrow{AB}|$, este lungimea segmentului $[AB]$. Obsevăm că aceasta este independentă de alegerea reprezentantului în clasa $\overrightarrow{AB}$.

Observaţia 1.2. Dacă două perechi ordonate (A, B) şi (C, D) sunt echipolente, adică vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt egali, atunci vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au aceeaşi lungime, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. De altfel, un vector este determinat de aceste trei elemente.

Propoziţia 1.3. *1.* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2. $\forall A, B, O \in \mathcal{P},\ \exists! X \in \mathcal{P}$ *astfel încât* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OX}$.

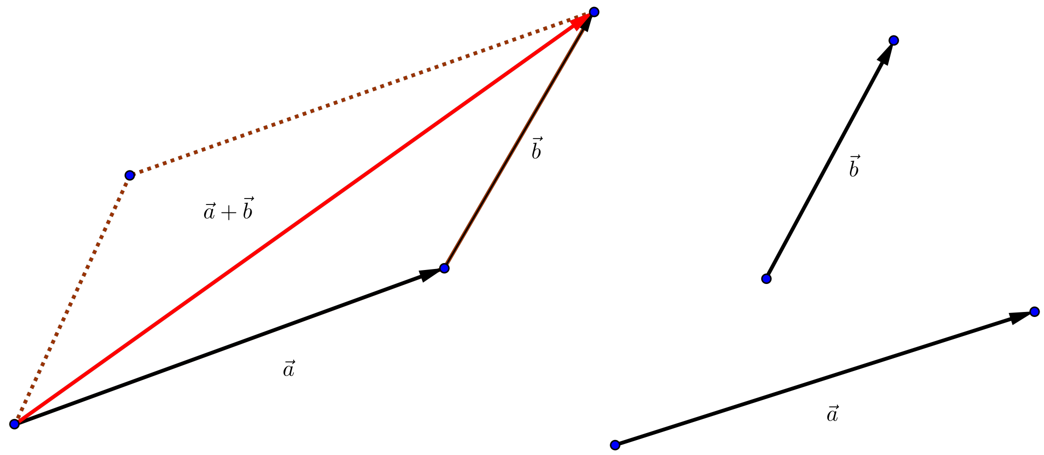
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Definiţia 1.3. Dacă O, $M \in \mathcal{P}$, vectorul $\overrightarrow{OM}$ este notat cu $\overrightarrow{r}_M$ şi se numeşte *vectorul de poziţie* al punctlui M în raport cu punctul O.

Corolarul 1.4. *Aplicaţia* $\varphi_O : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$, $\varphi_O(M) = \overrightarrow{r}_M$ *este bijectivă.*

1.1.1 Operaţii cu vectori

• **Adunarea vectorilor** Fie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$ şi $O \in \mathcal{P}$ astfel încât $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$. Observăm că vectorul $\overrightarrow{OB}$ este independent de alegerea punctului O şi se numeşte *suma* vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$. Scriem acest fapt astfel: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Într-adevăr, dacă O' un alt punct şi A', $B' \in \mathcal{P}$ sunt astfel încât $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{b}$. Întrucât $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ şi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ rezultă, conform Propoziţiei 1.3(3), că $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$.



Propoziţia 1.5. *Mulţimea* $\mathcal{V}$ *înzestrată cu operaţia binară* $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, *este un grup abelian al cărui element nul este vectorul* $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$ *şi opusul lui* $\overrightarrow{AB}$, *notat cu* $-\overrightarrow{AB}$, *este vectorul* $\overrightarrow{BA}$.

În particular, operaţia de adunare este asociativă şi vectorul

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

este de obicei notată cu $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Mai mult, expresia

$$((\cdots(\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2) + \overrightarrow{a}_3 + \cdots + \overrightarrow{a}_n)\cdots), \tag{1.1}$$

este independentă de distribuţia parantezelor şi este de obicei notată cu

$$\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \overrightarrow{a}_n.$$

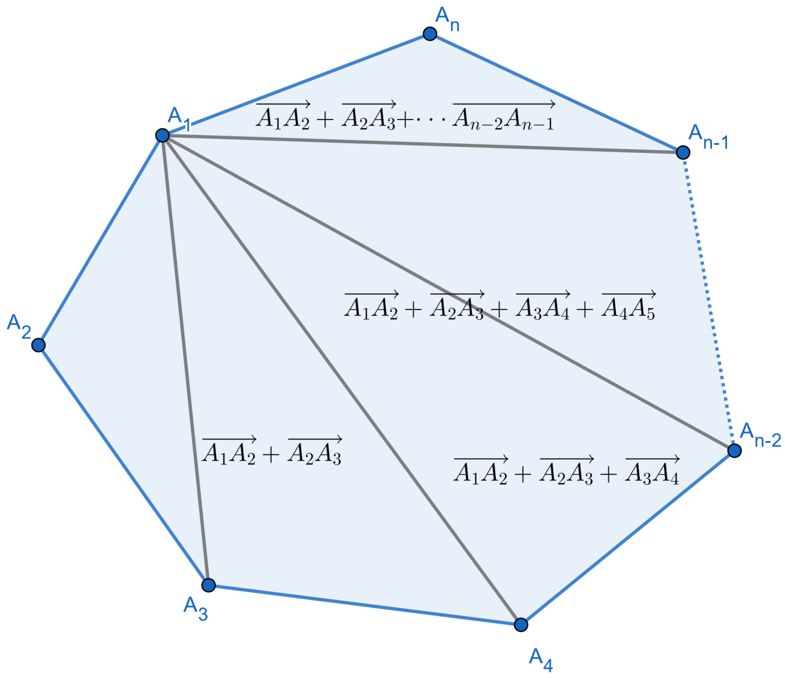
Exemplul 1.1. Dacă $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ sunt n puncte date, atunci

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

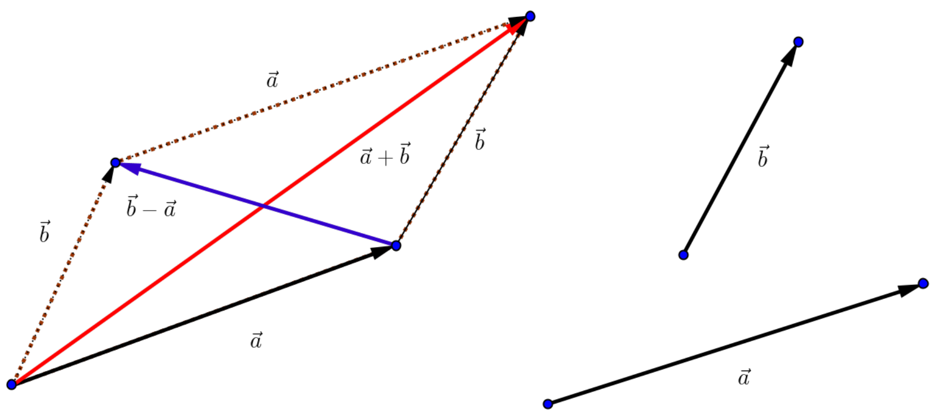
Aşadar $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{0}$, şi anume suma vectorilor construiţi pe laturile unei drepte frânte închise este zero.

Într-adevăr avem succesiv:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n} &= \overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\\ &= \overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\\ &\vdots\\ &= \overrightarrow{A_1A_{n-1}}+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.\end{aligned}$$



Corolarul 1.6. *Dacă $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$ sunt vectori daţi, există un vector unic $\overrightarrow{x}\in\mathcal{V}$ astfel încât $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$. De fapt $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{AB}$ şi este notat cu $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$.*



• Înmulţirea vectorilor cu scalari

Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ un scalar şi fie $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}\in\mathcal{V}$ un vector. Definim vectorul $\alpha\cdot\overrightarrow{a}$ astfel:

$$\alpha\overrightarrow{a}=\begin{cases}\overrightarrow{0} & \text{dacă } \alpha=0 \text{ sau } \overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{OB} & \text{dacă } \overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0} \text{ şi } \alpha>0,\ \text{unde } B\in]OA \text{ este unicul punct a.î. } ||OB||=\alpha\cdot||OA||\\ -(|\alpha|\cdot\overrightarrow{a}) & \text{dacă } \alpha<0.\end{cases}$$

Operaţia externă

$$\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V},\ (\alpha, \overrightarrow{a}) \mapsto \alpha \cdot \overrightarrow{a}$$

se numeşte *înmulţirea vectorilor cu scalari.*

Propoziţia 1.7. *Operaţiile de adunare a vectorilor şi cea de înmulţire a vectorilor cu scalari au următoarele proprietăţi:*

(v1) $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{a} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{a},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}.$

(v2) $\alpha \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \alpha \cdot \overrightarrow{b},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}.$

(v3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{a}) = (\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{a}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(v4) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a},\ \forall\, \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}.$

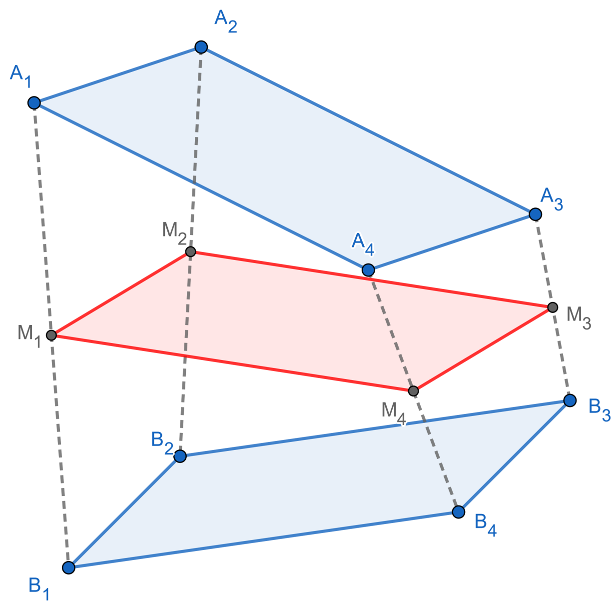
Aplicaţia 1.1. Considerăm două paralelograme, $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ în $\mathcal{P}$ şi fie M_1, M_2, M_3, M_4 mijloacele segmentelor $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3B_3]$, respectiv $[A_4B_4]$. Arătaţi că

- $2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}$ şi $2\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{B_3B_4}$.
- M_1, M_2, M_3, M_4 sunt vârfurile unui paralelogram.

Soluţie. Adunând următoarele egalităţi, evidente de altfel,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{B_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_1} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

obţinem $2\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{0}$, adică $2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}$.



Analog, adunând egalităţile, evidente de altfel,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_3M_3} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_4A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{B_3M_3} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_4B_4} + \overrightarrow{B_4B_3} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

obţinem $2\overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{B_4B_3} = \overrightarrow{0}$, adică $2\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{B_3B_4}$. Prin urmare

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} \\ &= \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{B_4B_3} = -2\overrightarrow{M_3M_4} = 2\overrightarrow{M_4M_3}. \end{aligned}$$

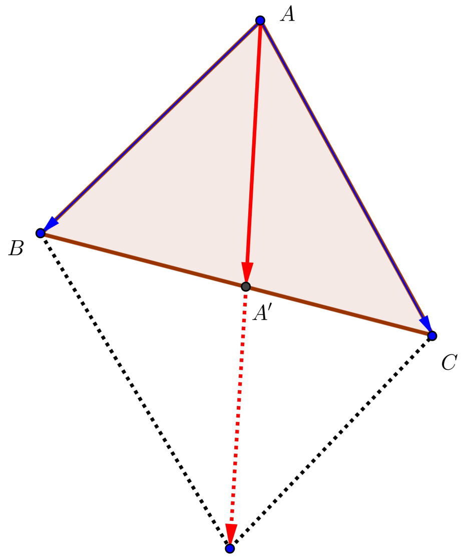
□

1.1.2 Structura vectorială pe mulţimea de vectori

Teorema 1.8. *Mulţimea vectorilor (liberi) înzestrată cu operaţia binară de adunare a vectorilor şi cu operaţia externă de înmulţire a vectorilor cu scalari este un spaţiu vectorial real.*

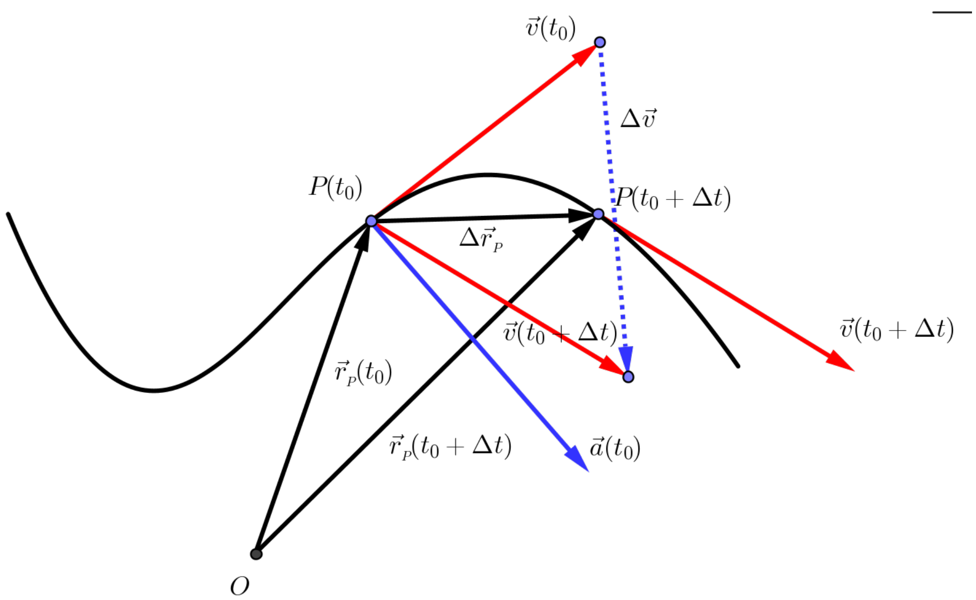
Exemplul 1.2. Dacă A' este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC, atunci

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$



Iată câteva mărimi vectoriale:

1. **Forţa**, de obicei notată cu $\overrightarrow{F}$.
2. **Viteza** $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ a unei particule în mişcare P, este de obicei notată cu $\overrightarrow{v}_P$ sau pur şi simplu cu $\overrightarrow{v}$.
3. **Acceleraţia** $\frac{d\overrightarrow{v}_P}{dt}$ a unei particule în mişcare P, este de obicei notată cu $\overrightarrow{a}_P$ sau pur şi simplu cu $\overrightarrow{a}$.



• **Legea gravitaţiei lui Newton**, afirmă că orice particulă de materie din univers atrage orice altă particulă cu o forţă variind direct proporţional cu produsul maselor şi invers proporţional cu pătratul distanţei dintre ele. În simboluri, mărimea forţei de atracţie F este egal cu G (constanta gravitaţională, un număr a cărui mărime depinde de sistemul de unităţi folosit şi care este o constantă universală) înmulţită cu produsul maselor (m_1 şi m_2) şi împărţită la pătratul distanţei R: $F = G(m_1 m_2)/R^2$. (Encyclopdia Britannica)

• **A doua lege a lui Newton** este o descriere cantitativă a modificărilor pe care o forţă le poate produce asupra mişcării unui corp. Ea afirmă că rata de schimbare în timp a impulsului unui corp este egală atât ca mărime cât şi direcţie cu forţa impusă acestuia. Momentul unui corp este egal cu produsul dintre masa şi viteza acestuia. Momentul, ca şi viteza, este o mărime vectorială, având atât magnitudine cât şi direcţie. O forţă aplicată unui corp poate schimba mărimea impulsului, sau direcţia acestuia, sau ambele. A doua lege a lui Newton este una dintre cele mai importante din întreaga fizică. Pentru un corp a cărui masă m este constantă, acesta poate fi scrisă sub forma $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, unde $\overrightarrow{F}$ (forţă) şi $\overrightarrow{a}$ (acceleraţie) sunt ambele mărimi vectoriale. Dacă un corp are o forţă netă care acţionează asupra lui, atunci acesta este accelerat în conformitate cu ecuaţia. În schimb, dacă un corp nu este accelerat, atunci nu există nicio forţă netă care acţionează asupra lui. (Encyclopaedia Britannica)

1.2 Probleme

1. Considerăm un tetraedru $ABCD$. Calculaţi următoarele sume de vectori:

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$.

   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

   Soluţie.

2. ([4, Problem 3, p. 1]) Fie $OABCDE$ un hexagon regulat în care $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{b}$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ în termenii vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OC}.$$

Soluţie.

3. Considerăm o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărei diagonale sunt concurente în O. Arătaţi că $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

   Soluţie.

4. Fie E şi F mijloacele diagonalelor unui patrulater $ABCD$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right).$$

Soluţie.

5. Într-un triunghi ABC considerăm înălţimea AD din vârful A ($D \in BC$). Descompuneţi vectorul AD în termenii vectorilor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.

   Soluţie.

6. ([4, Problema 12, p. 3]) Fie M, N mijloacele a două muchii opuse ale unui patrulater dat $ABCD$ şi fie P mijlocul segmentului $[MN]$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 0$$

Soluţie.

7. ([4, Problema 12, p. 7]) Se consideră două coarde perpendiculare AB şi CD ale unui cerc dat şi $\{M\} = AB \cap CD$. Arătaţi că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

   Soluţie.

8. ([4, Problema 13, p. 3]) Dacă G este centrul de greutate al unui tringhi ABC şi O este un punct dat, arătaţi că
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

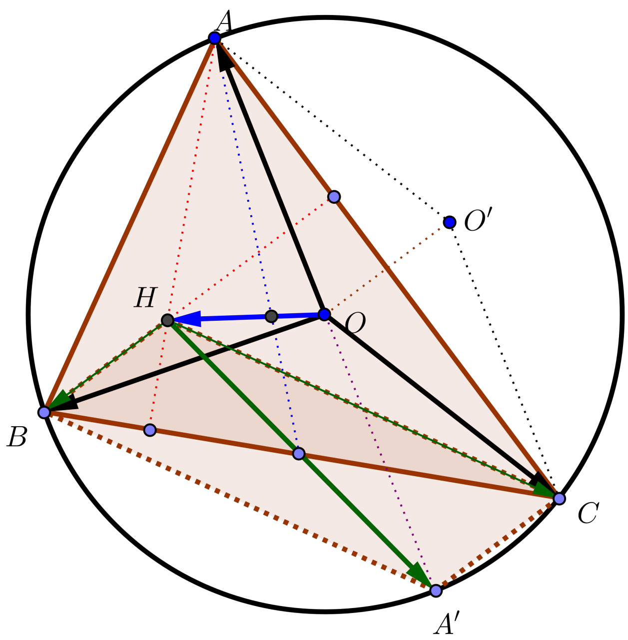
Soluţie.

9. ([4, Problema 14, p. 4]) În triunghiul ABC se consideră ortocentrul său H, centrul cercului său circumscris O şi punctul diametral opus A' al lui A pe ultimul cerc. Arătaţi că:

   (a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

   (b) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$.

   (c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.



Soluţie.

10. ([4, Problema 15, p. 4]) În triunghiul ABC considerăm centrul său de greutate, ortocentrul său H şi centrul cercului său circumscris O. Arătaţi că O, G, H sunt coliniare şi $3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HO}$.

    Soluţie.

11. ([4, Problema 27, p. 13]) Se consideră un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ şi mijloacele A_{ij} ale muchiilor $[A_iA_j]$, $i \neq j$. Arătaţi că:

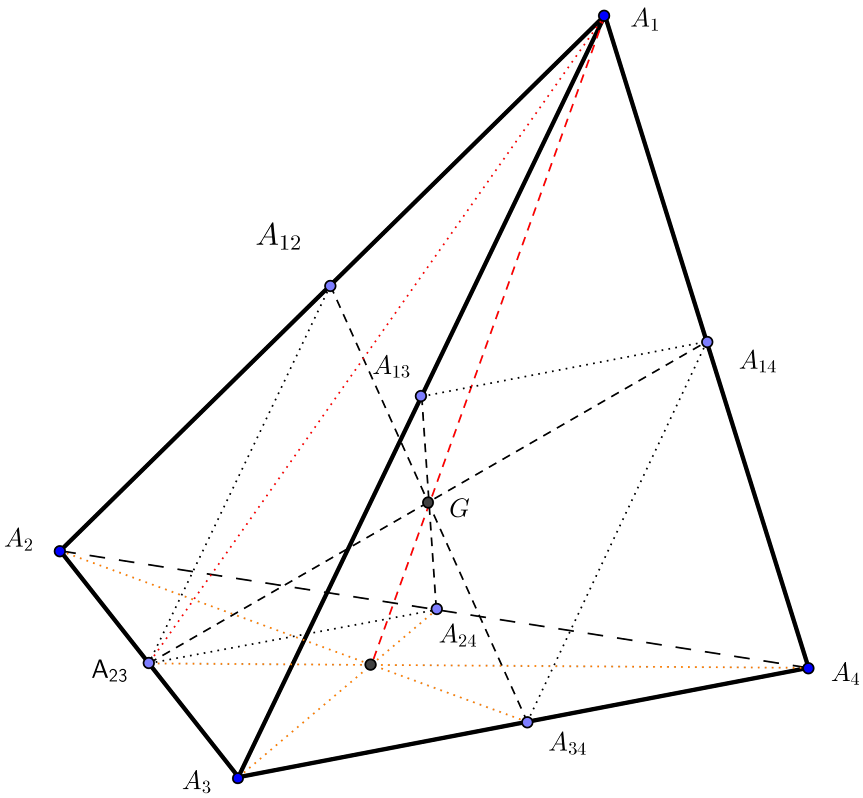
   (a) Dreptele $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ şi $A_{14}A_{23}$ sunt concurente într-un punct G.

   (b) Medianele tetraedrului (dreptele care trec prin vârfuri şi centrele de greutate ale feţelor opuse) sunt de asemenea concurente în G.

   (c) Determinaţi raportul în care punctul G împarte fiecare mediană.

   (d) Arătaţi că $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} = \overrightarrow{0}$.

   (e) Dacă M este un punct arbitrar, arătaţi că $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} = 4\overrightarrow{MG}$.



Soluţie.

12. Într-un triunghi ABC considerăm punctele M, L pe latura AB şi N, T pe latura AC astfel încât $3\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ şi $3\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AS}$, unde $\{S\} = MT \cap LN$.

    Soluţie.

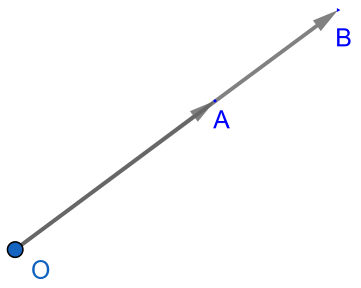
13. Considerăm două triunghiuri $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$, nu neapărat în acelaşi plan, şi centrele lor de greutate G_1, G_2. Arătaţi că $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$.

Soluţie.

2 Drepte şi plane

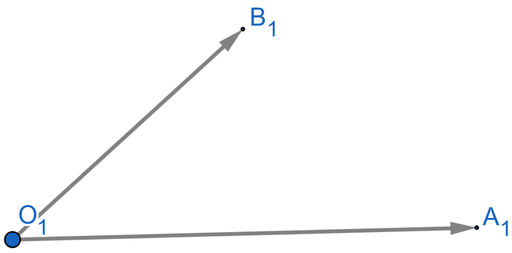
2.1 Dependenţa liniară şi independenţa liniară a vectorilor

Definiţia 2.1. 1. Spunem că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt *coliniari* dacă punctele O, A, B sunt coliniare. În caz contrar, spunem că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt *necoliniari*.



Vectori coliniari (liniar dependenti)

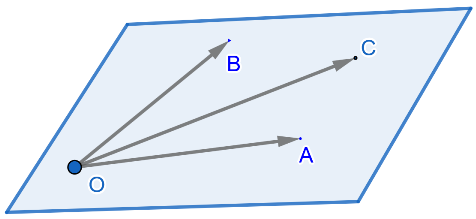
$$\overrightarrow{OB} = a\overrightarrow{OA} \iff \overrightarrow{OB} - a\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$$



Vectori necoliniari (liniar independenti)

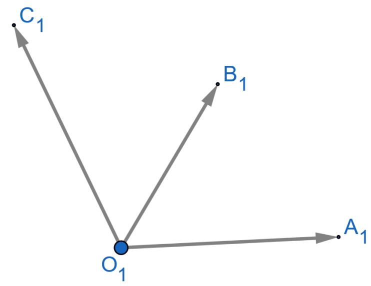
$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0} \implies a = b = 0.$$

2. Spunem că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt *coplanari* dacă punctele O, A, B, C sunt coplanare. În caz contrar, spunem că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt *necoplanari*.



Vectori coplanari (liniar dependenti)

$$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \iff a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$



Vectori necoliniari (liniar independenti)

$$a\overrightarrow{O_1A_1} + b\overrightarrow{O_1B_1} + c\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0} \implies a = b = c = 0.$$

Observaţia 2.1. 1. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt *coliniari* dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ şi $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt *necoliniari* dacă şi numai dacă $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$ implică $\alpha = \beta = 0$.

2. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt *coplanari* dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ şi $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt *necoplanari* dacă şi numai dacă $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$ implică $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

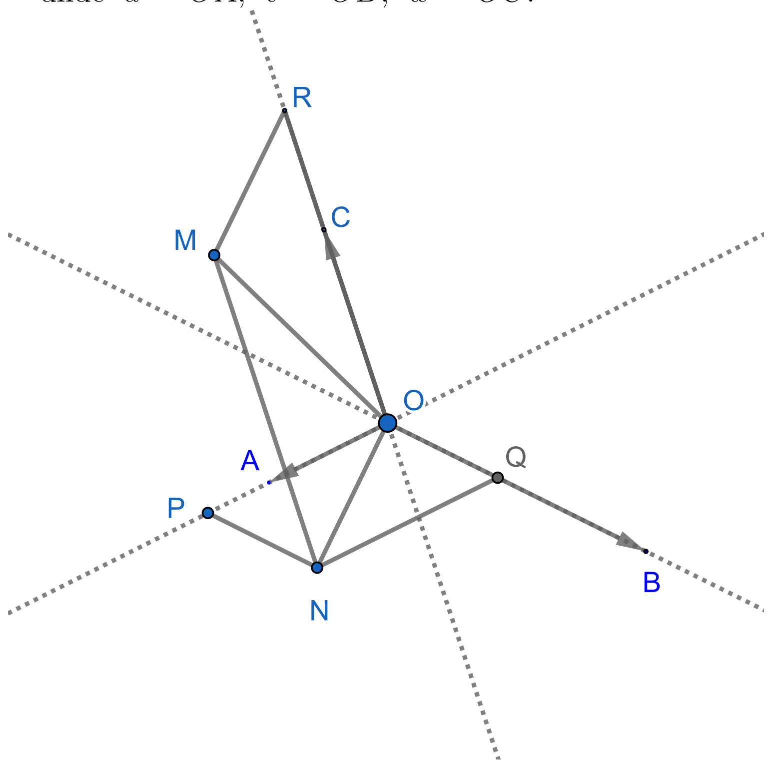
3. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt liniar (in)dependenţi dacă şi numai dacă sunt (ne)coliniari.

4. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt liniar (in)dependenţi dacă şi numai dacă sunt (ne)coplanari.

5. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sunt liniar independenţi (necoplanari) dacă şi numai dacă orice vector $\overrightarrow{x} \in \mathcal{V}$ se poate reprezenta în mod unic sub forma unei combinaţii liniare a vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, adică există şi sunt unici scalarii reali x_1, x_2, x_3 astfel încât $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}$. În acest caz tripletul de vectori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ se numeşte *bază* a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$, iar (x_1, x_2, x_3) se numesc *coordonatele* vectorului $\overrightarrow{x}$ faţă de baza ordonată $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ al vectorilor liberi şi scriem

$$\overrightarrow{x}(x_1, x_2, x_3) \text{ sau } [\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

unde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.



Propoziţia 2.1. *Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ formează o bază pentru $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă sunt necoplanari.*

Corolarul 2.2. *Dimensiunea spaţiului vectorial al vectorilor liberi $\mathcal{V}$ este trei.*

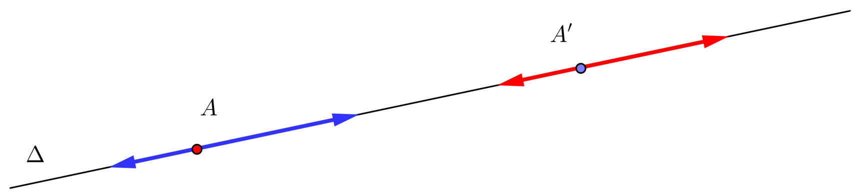
Propoziţia 2.3. *Fie Δ o dreaptă şi fie $A \in \Delta$ un punct dat. Mulţimea*

$$\overrightarrow{\Delta} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \Delta\}$$

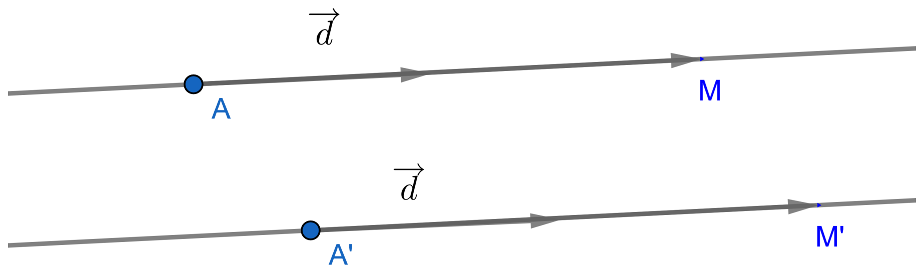
este un subspaţiu unu dimensional al lui $\mathcal{V}$, adică $\overrightarrow{\Delta}$ este parte stabilă faţă de cele două operaţii pe $\mathcal{V}$ şi există un vector nenul $\overrightarrow{d} \in \overrightarrow{\Delta}$ atfel încât

$$\overrightarrow{\Delta} = \{\alpha \overrightarrow{d} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

În acest caz subspaţiul $\overrightarrow{\Delta}$ se mai notează şi cu $\langle \overrightarrow{d} \rangle$ şi se numeşte subspaţiul generat de $\overrightarrow{d}$. Subspaţiul $\overrightarrow{\Delta}$ este independent de alegerea lui $A \in \Delta$ şi se numeşte subspaţiul director *al dreptei Δ sau* direcţia *dreptei Δ.*



Observaţia 2.2. Dreptele drepte Δ, Δ' sunt paralele dacă şi numai dacă $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{\Delta}'$

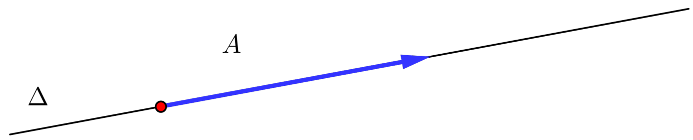


Definiţia 2.2. *Numim* vector director *al dreptei* Δ *orice vector diferit de zero* $\overrightarrow{d} \in \overrightarrow{\Delta}$.

Dacă $\overrightarrow{d} \in \mathcal{V}$ este un vector diferit de zero şi $A \in \mathcal{P}$ este un punct dat, atunci există o unică dreaptă care trece prin A şi are direcţia $\langle \overrightarrow{d} \rangle$. Această dreaptă este

$$\Delta = \{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM} \in \langle \overrightarrow{d} \rangle\}.$$

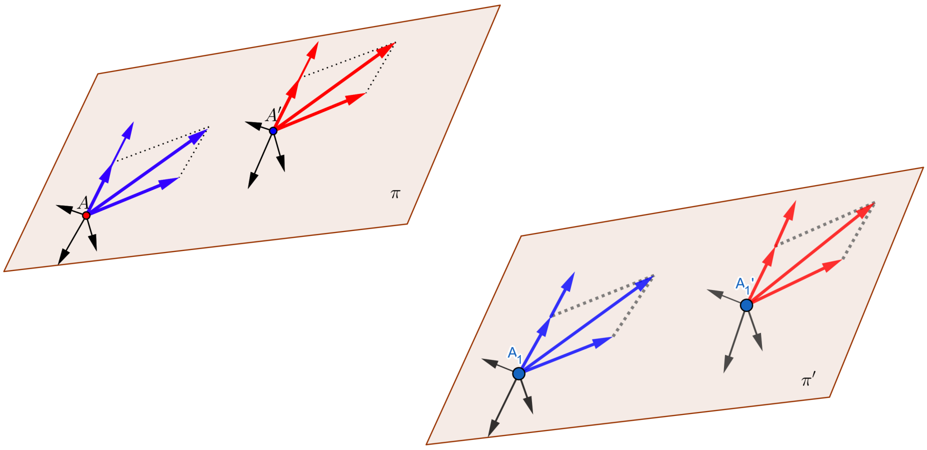
Δ se numeşte dreapta care trece prin A şi este paralelă cu vectorul $\overrightarrow{d}$.



Propoziţia 2.4. *Fie* π *un plan şi* $A \in \pi$ *un punct dat. Mulţimea* $\overrightarrow{\pi} = \{\overrightarrow{AM} \in \mathcal{V} \mid M \in \pi\}$ *este un subspaţiu bidimensional al* $\mathcal{V}$*, adică* $\overrightarrow{\pi}$ *este parte stabilă faţă de cele două operaţii pe* $\mathcal{V}$ *şi există doi vectori liniar independenţi* $\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2 \in \overrightarrow{\pi}$ *astfel încât*

$$\overrightarrow{\pi} = \{\alpha_1 \overrightarrow{d}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{d}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

În acest caz subspaţiul $\overrightarrow{\pi}$ *se mai notează şi cu* $\langle \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2 \rangle$ *şi se numeşte subspaţiul generat de* $\overrightarrow{d}_1$ *şi* $\overrightarrow{d}_2$*, iar* $[\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2]$ *se numeşte o bază a lui* $\overrightarrow{\pi}$*. Subspaţiul* $\overrightarrow{\pi}$ *este independent de alegerea lui* A *în* π *şi se numeşte* subspaţiul director, planul director *sau* direcţia *planului* π*.*

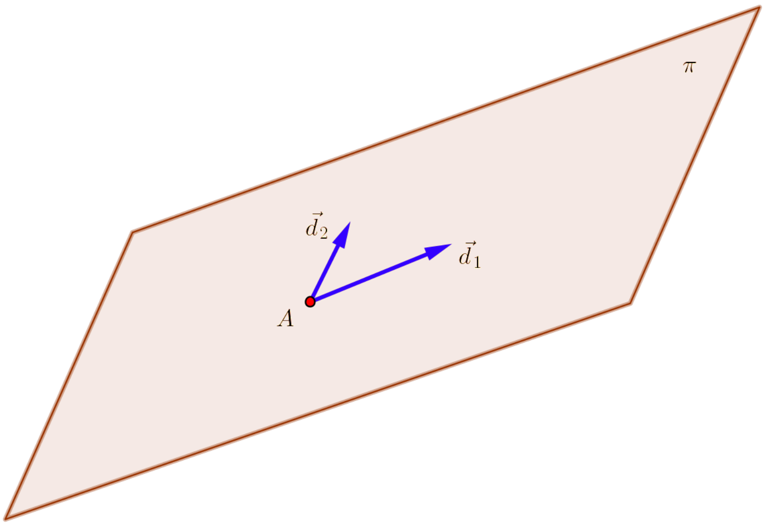


Observaţia 2.3. • *Planele π, π' sunt paralele dacă şi numai dacă $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}'$.*

• Dacă $\overrightarrow{d}_1$, $\overrightarrow{d}_2$ sunt doi vectori liniar independenţi şi $A \in \mathcal{P}$ este un punct fixat, atunci există un plan unic prin A a cărui direcţie este $\langle \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2 \rangle$. Acesta este

$$\pi = \{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM} \in \langle \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2 \rangle\}.$$

Spunem că π este planul care trece prin punctul A şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$.



Observaţia 2.4. Vectorii necoliniari $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ formează o bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului $\pi = (OAB)$ dacă şi numai dacă orice vector $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\pi}$ se poate reprezenta în mod unic sub forma unei combinaţii liniare a vectorilor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, adică există şi sunt unici scalarii reali x_1, x_2 astfel încât $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} = x_1\overrightarrow{u} + x_2\overrightarrow{v}$. În acest caz perechea de vectori $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ se numeşte *bază* a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului $\pi = (OAB)$, iar (x_1, x_2) se numesc *coordonatele* vectorului $\overrightarrow{x}$ faţă de baza ordonată $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului $\pi = (OAB)$ şi scriem

$$\overrightarrow{x}(x_1, x_2) \text{ sau } [\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Propoziţia 2.5. *Fie π un plan şi fie $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ o bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π şi $\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \in \overrightarrow{\pi}$. Dacă $\overrightarrow{u}' = a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{v}' = a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v}$, atunci $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ este o bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π dacă şi numai dacă matricea*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

este inversabilă.

Demonstraţie. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} b' \text{ este o bază a lui } & \overrightarrow{\pi} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \text{ sunt liniar independenţi} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \text{ sunt liniar independenţi} \\ & \det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ este inversabilă.} \end{aligned}$$

□

Propoziţia 2.6. *Fie π un plan şi fie $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ două baze ale direcţiei sale $\overrightarrow{\pi}$. Dacă $\overrightarrow{u}' = a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{v}' = a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v}$, atunci*

$$[\overrightarrow{x}]_b = A[\overrightarrow{x}]_{b'}, \ \forall \overrightarrow{x} \in \mathcal{V},$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se numeşte matricea de trecere de la baza b la baza b'. *Matricea de trecere de la baza b' la baza b este A^{-1}.*

Demonstraţie. Presupunem că

$$[\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ şi } [\overrightarrow{x}]_{b'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}.$$

Prin urmare avem succesiv:

$$\begin{aligned} x_1\overrightarrow{u} + x_2\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{x} = x_1'\overrightarrow{u}' + x_2'\overrightarrow{v}' \\ &= x_1'(a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}) + x_2'(a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v}) \\ &= (a_{11}x_1' + a_{12}x_2')\overrightarrow{u}' + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2')\overrightarrow{v}'. \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \Longleftrightarrow [\overrightarrow{x}]_b = A[\overrightarrow{x}]_{b'}.$$

□

Problema 2.7. *Se consideră triunghiul OUV şi fie U', V' mijloacele laturilor $[OV]$ şi respectiv $[OU]$. Considerăm de asemenea baza $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, unde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$ şi vectorii $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{UU'}$, $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{VV'}$. Decideţi dacă vectorii $[\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ formează o bază a direcţiei planului (OUV), iar în caz afirmativ determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OG}$ faţă de baza $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$, unde G este centrul de greutate al triunghiului OUV.*

Soluţie. $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ bază a direcţiei $\overrightarrow{(OUV)}$ a planului (OUV). Deoarece

$$\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{UU'} = \overrightarrow{UO} + \overrightarrow{OU'} = -\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OV} = -\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{VV'} = \overrightarrow{VO} + \overrightarrow{OV'} = -\overrightarrow{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OU} = -\overrightarrow{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$$

şi

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

deducem că matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

este inversabilă, iar $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ este şi ea o bază a direcţiei $\overrightarrow{(OUV)}$ a planului (OUV). De fapt A este matricea de trecere de la baza b la baza b'. Aşadar

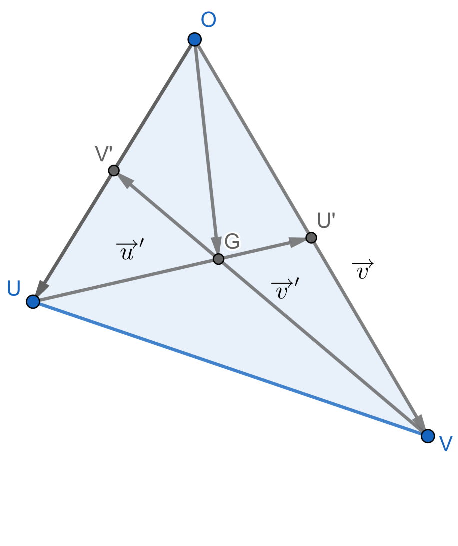
$$[\overrightarrow{x}]_b = A[\overrightarrow{x}]_{b'},\ \forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{(OUV)}.$$

Pentru a găsi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OG}$ faţă de baza b' observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UG} = \overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{UU'} = \overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\right) \\ &= \overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

adică

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ şi deci } [\overrightarrow{OG}]_b = A[\overrightarrow{OG}]_{b'} \Longleftrightarrow [\overrightarrow{OG}]_{b'} = A^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$



Ţinând seama de faptul că

$$A^{-1} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

avem succesiv:

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{OG}]_{b'} &= \frac{4}{3}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{4}{9}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{4}{9}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Propoziţia 2.8. *Fie $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ o bază ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ şi $\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}' \in \mathcal{V}$. Dacă $\overrightarrow{u}' = a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}\overrightarrow{v} + a_{31}\overrightarrow{w}$ $\overrightarrow{v}' = a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v} + a_{32}\overrightarrow{w}$ şi $\overrightarrow{w}' = a_{13}\overrightarrow{u} + a_{23}\overrightarrow{v} + a_{33}\overrightarrow{w}$, atunci $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}]$ este o bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π dacă şi numai dacă matricea*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

este inversabilă.

Propoziţia 2.9. *Fie $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}']$ două baze ale s paţiului vectorial $\mathcal{V}$. Dacă*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}' &= a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}\overrightarrow{v} + a_{31}\overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{v}' &= a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v} + a_{32}\overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{w}' &= a_{13}\overrightarrow{u} + a_{23}\overrightarrow{v} + a_{33}\overrightarrow{w},
\end{aligned}$$

atunci

$$[\overrightarrow{x}]_b = A[\overrightarrow{x}]_{b'},\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathcal{V},$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se numeşte matricea de trecere de la baza b la baza b'. *Matricea de trecere de la baza b' la baza b este A^{-1}.*

Problema 2.10. *Se consideră tetraedrul $OUVW$ şi fie U', V', W' centrele de greutate ale feţelor OVW, OUW şi respectiv OUV. Considerăm de asemenea baza $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, unde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OW}$ şi vectorii $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{UU'}$, $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{VV'}$, $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{WW'}$. Decideţi dacă vectorii $[\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}']$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$, iar în caz afirmativ determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OG}$ faţă de baza $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}']$, unde G este centrul de greutate al tetraedrului $OUVW$.*

Soluţie.

$\square$

Observaţia 2.5. Fie $O \in \mathcal{P}$ un punct, $\Delta \subset \mathcal{P}$ o dreaptă şi fie $\pi \subset \mathcal{P}$ un plan dat.

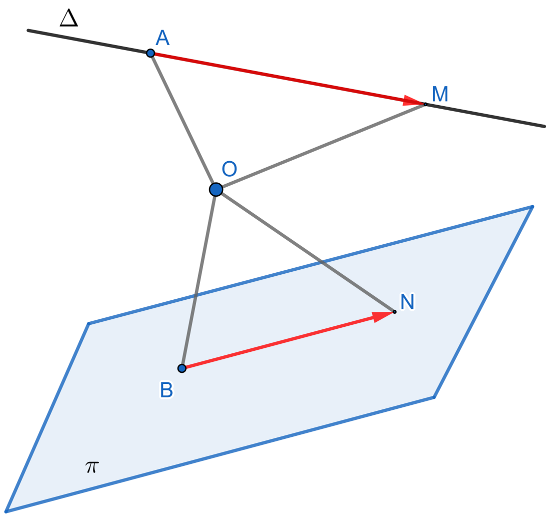
1. Dacă $A \in \Delta$ este un punct dat, atunci $\varphi_O(\Delta) = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{\Delta}$.
2. Dacă $B \in \Delta$ este un punct dat, atunci $\varphi_O(\pi) = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{\pi}$.

Intr-adevăr,

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{AM}\ .$$

Aşadar

$$\begin{aligned}\varphi_O(\Delta) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in \Delta\} &= \{\overrightarrow{r}_M \mid M \in \Delta\} = \{\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{AM} \mid M \in \Delta\}\\ &= \overrightarrow{r}_A + \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \Delta\} = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{\Delta}\ .\end{aligned}$$



Analog,

$$\begin{aligned}\varphi_O(\pi) = \{\overrightarrow{ON} \mid N \in \Delta\} &= \{\overrightarrow{r}_N \mid N \in \pi\} = \{\overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{BN} \mid N \in \pi\} \\ &= \overrightarrow{r}_B + \{\overrightarrow{BN} \mid N \in \pi\} = \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{\pi}.\end{aligned}$$

În general, o submulţime X a unui spaţiu vectorial se numeşte *varietate liniară* dacă fie $X = \emptyset$ sau există $a \in V$ şi un subspaţiu vectorial U de V, astfel încât $X = a + U$.

$$\dim(X) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } X = \emptyset \\ \dim(U) & \text{dacă } X = a + U, \end{cases}$$

Propoziţia 2.11. *Bijecţia φ_O transformă dreptele şi planele spaţiului afin $\mathcal{P}$ în varietăţile unu şi respectiv doi dimensionale ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$.*

2.2 Ecuaţiile vectoriale ale dreptelor şi planelor

Propoziţia 2.12. *Fie $O \in \mathcal{P}$ un punct, Δ o dreaptă, fie π un plan, iar $\{\overrightarrow{d}\}$ o bază a direcţiei $\overrightarrow{\Delta}$ a dreptei Δ şi fie $[\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2]$ o bază ordonată a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π.*

1. *Punctele $M \in \Delta$ sunt caracterizate de* ecuaţia vectorială a lui Δ

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_A + \lambda \overrightarrow{d}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

unde $A \in \Delta$ este un punct dat.

2. *Punctele $M \in \pi$ sunt caracterizate de* ecuaţia vectorială a lui π

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_A + \lambda_1 \overrightarrow{d}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{d}_2, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

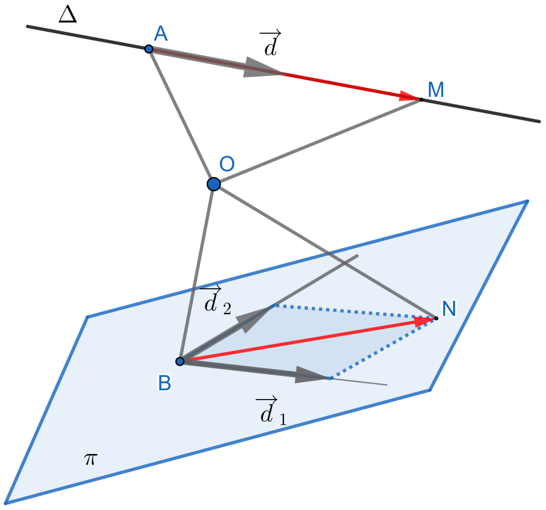
unde $A \in \pi$ este un punct dat.

Demonstraţie. Intr-adevăr,

$$\begin{aligned}M \in \Delta &\iff \varphi_O(M) \in \varphi_O(\Delta) \iff \overrightarrow{r}_M \in \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{\Delta} \\ &\iff \overrightarrow{r}_M \in \overrightarrow{r}_A + \langle \overrightarrow{d} \rangle \iff \overrightarrow{r}_M \in \{\overrightarrow{r}_A + \lambda \overrightarrow{d} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, $M \in \Delta \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \vec{d}\,. \tag{2.4}$$



Analog,

$$\begin{aligned} M \in \pi \quad &\iff \varphi_O(M) \iff \vec{r}_M \in \vec{r}_A + \vec{\pi} \iff \vec{r}_M \in \vec{r}_A + \langle \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle \\ &\iff \vec{r}_M \in \{\vec{r}_A + \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \,|\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, $M \in \pi \iff \exists \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

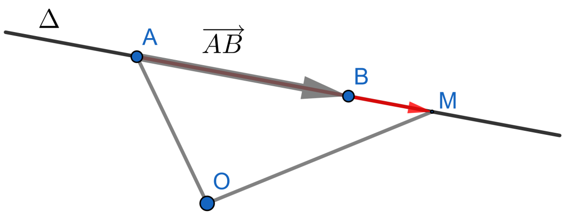
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2\,. \tag{2.5}$$

$\square$

Corolarul 2.13. *Dacă $A, B \in \mathcal{P}$ sunt puncte diferite, atunci ecuaţia vectorială a dreptei AB este*

$$\vec{r}_M = (1 - \lambda)\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Demonstraţie. Trebuie doar să considerăm ecuaţia (2.4) şi vectorul director $\vec{d} := \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ al dreptei AB.



Cu această alegere, ecuaţia vectorială a dreptei AB este

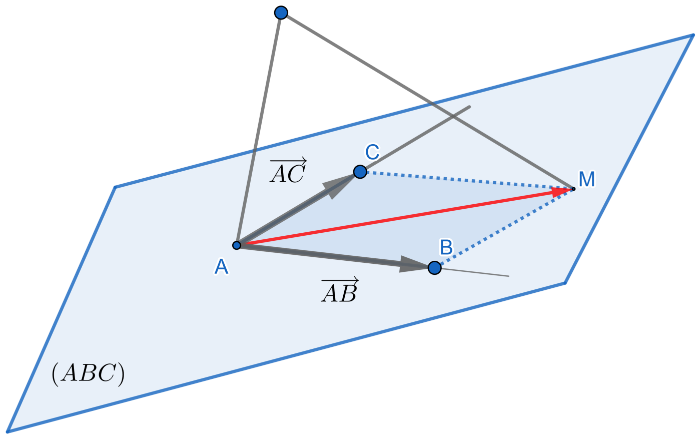
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

care este echivalentă cu (2.6). $\square$

Corolarul 2.14. *Dacă A, B, $C \in \mathcal{P}$ sunt trei puncte necoliniare, atunci ecuaţia vectorială a planului (ABC) este*

$$\overrightarrow{r}_M = (1-\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{r}_A + \lambda_1 \overrightarrow{r}_B + \lambda_2 \overrightarrow{r}_C,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Demonstraţie. Trebuie doar să considerăm baza ordonată $[\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2]$ a direcţiei planului (ABC), unde $\overrightarrow{d}_1 := \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A$ şi $\overrightarrow{d}_2 := \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A$.



Cu această alegere, ecuaţia (2.5) a planului (ABC) devine

$$\overrightarrow{r}_N = \overrightarrow{r}_A + \lambda_1(\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A) + \lambda_2(\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

care este echivalentă cu (2.7). □

Exemplul 2.1. Considerăm unghiul BOB' şi punctele $A \in [OB]$, $A' \in [OB']$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{OM} = m\frac{1-n}{1-mn}\overrightarrow{OA} + n\frac{1-m}{1-mn}\overrightarrow{OA'} \tag{2.8}$$

$$\overrightarrow{ON} = m\frac{n-1}{n-m}\overrightarrow{OA} + n\frac{m-1}{m-n}\overrightarrow{OA'}. \tag{2.9}$$

unde $\{M\} = AB' \cap A'B$, $\{N\} = AA' \cap BB'$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OA'}$.

Soluţie. (2.8) Ecuaţiile vectoriale ale dreptelor AB' şi $A'B$ sunt:

$$AB' : \overrightarrow{r}_X = (1-\lambda)\overrightarrow{r}_A + \lambda\overrightarrow{r}_{B'},\ A'B : \overrightarrow{r}_Y = (1-\mu)\overrightarrow{r}_{A'} + \lambda\overrightarrow{r}_B,$$

sau, echivalent $AB' : \overrightarrow{r}_X = (1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda n\overrightarrow{v}$, $A'B : \overrightarrow{r}_Y = (1-\mu)\overrightarrow{v} + \lambda m\overrightarrow{u}$.
Deoarece $\{M\} = AB' \cap A'B$, deducem că $\overrightarrow{r}_M$ admite atât o reprezentare de forma

$$(1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda n\overrightarrow{v} \text{ cât şi o reprezentare de } (1-\mu)\overrightarrow{v} + \mu m\overrightarrow{u},$$

adică

$$\overrightarrow{r}_M = (1-\lambda)\overrightarrow{u} + \lambda n\overrightarrow{v} = (1-\mu)\overrightarrow{v} + \mu m\overrightarrow{u},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Liniar independenţa vectorilor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA'}$ ne conduce la sistemul compatibil

$$\begin{aligned} 1-\lambda &= \mu m \\ \lambda n &= 1-\mu, \end{aligned}$$

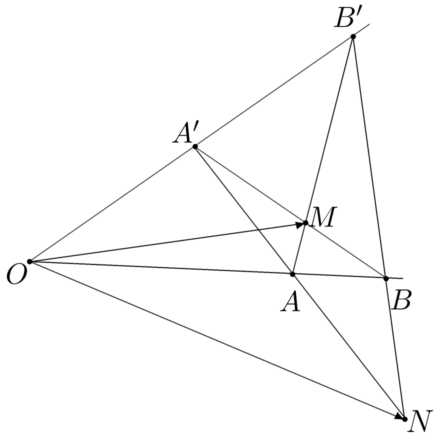


Figure 1:

a cărui soluţie este

$$\lambda = \frac{1-m}{1-mn}, \mu = \frac{1-n}{1-mn},$$

şi deci

$$1-\mu = n\frac{1-m}{1-mn}.$$

Aşadar,

$$\vec{r}_M = m\frac{1-n}{1-mn}\,\vec{u} + n\frac{1-m}{1-mn}\,\vec{v}\ .$$

(2.9) Ecuaţiile vectoriale ale dreptelor AA' şi BB' sunt:

$$AA' : \vec{r}_X = (1-\lambda)\,\vec{r}_A + \lambda\,\vec{r}_{A'},\ BB' : \vec{r}_Y = (1-\mu)\,\vec{r}_B + \lambda\,\vec{r}_{B'},$$

$AA' : \vec{r}_X = (1-\lambda)\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}, BB' : \vec{r}_Y = (1-\mu)m\,\vec{u} + \lambda n\,\vec{v}$. deoarece $\{N\} = AA' \cap BB'$, deducem că $\vec{r}_N$ admite atât o reprezentare de forma $(1-\lambda)\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$, cât şi o reprezentare de forma $(1-\mu)m\,\vec{u} + \mu n\,\vec{v}$, şi deci

$$\vec{r}_M = (1-\lambda)\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v} = (1-\mu)m\,\vec{u} + \mu n\,\vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Liniar independenţa vectorilor $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OA'}$ ne conduce la sistemul compatibli

$$\begin{aligned} &1-\lambda = m(1-\mu) \\ &\lambda = \mu n, \end{aligned}$$

a cărui soluţie este

$$\lambda = n\frac{1-m}{n-m},\ \mu = \frac{1-m}{n-m}$$

and thus

$$1-\mu = n\frac{n-1}{n-m}.$$

Prin urmare,

$$\vec{r}_M = m\frac{n-1}{n-m}\,\vec{u} + n\frac{m-1}{m-n}\,\vec{v}\ .$$

Exemplul 2.2. Considerăm punctele C' şi B' pe laturile AB şi respectiv AC ale triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{AB'} = \mu\overrightarrow{CB'}$. Dreptele BB' şi CC' se întâlnesc în M. Dacă $P \in \mathcal{P}$ este un punct dat şi fie $\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{PC}$ vectorii de poziţie, în raport cu punctul P, ai vârfurilor A, B şi respectiv C, arătaţi că

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\overrightarrow{r_B} - \mu\overrightarrow{r_C}}{1-\lambda-\mu}. \tag{2.10}$$

Soluţie. Ecuaţiile dreptelor BB' şi CC' sunt:

$$BB' :\ \overrightarrow{r_X} = (1-t)\overrightarrow{r_B} + t\overrightarrow{r_{B'}},\ CC' :\ \overrightarrow{r_Y} = (1-s)\overrightarrow{r_C} + s\overrightarrow{r_{C'}}.$$

Pentru a exprima $\overrightarrow{r_{B'}}$ în termenii vectorilor $\overrightarrow{r_A}$ şi $\overrightarrow{r_C}$ observăm că:

$$\overrightarrow{AB'} = \mu\,\overrightarrow{CB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA} = \mu\left(\overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{r_{B'}} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \mu\overrightarrow{r_C}}{1-\mu}.$$

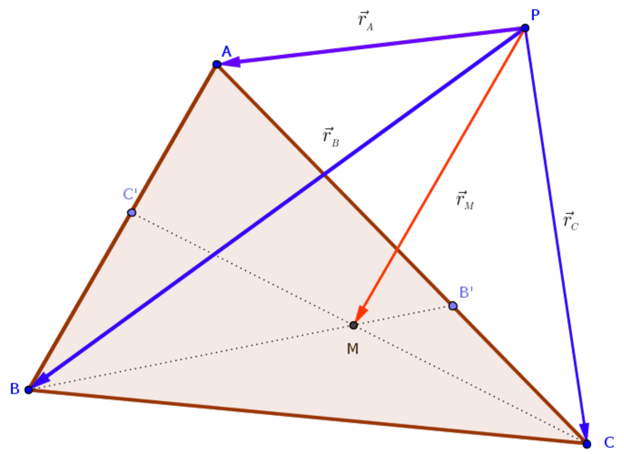
Se poate analog arăta că $\overrightarrow{r_{C'}} = \dfrac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\overrightarrow{r_B}}{1-\lambda}$. Aşadar ecuaţiile vectoriale ale dreptelor BB' şi CC' devin:

$$\begin{aligned} BB' :\ \overrightarrow{r_X} &= \frac{t}{1-\mu}\overrightarrow{r_A} + (1-t)\overrightarrow{r_B} - \frac{t\mu}{1-\mu}\overrightarrow{r_C} \\ CC' :\ \overrightarrow{r_Y} &= \frac{s}{1-\lambda}\overrightarrow{r_A} - \frac{s\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r_B} + (1-s)\overrightarrow{r_C}. \end{aligned}$$

Deoarece $BB' \cap CC' = \{M\}$, rezultă că

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{s_0}{1-\lambda}\overrightarrow{r_A} - \frac{s_0\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r_B} + (1-s_0)\overrightarrow{r_C} = \frac{t_0}{1-\mu}\overrightarrow{r_A} + (1-t_0)\overrightarrow{r_B} - \frac{t_0\mu}{1-\mu}\overrightarrow{r_C},$$

pentru $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$.



Ţinând seama de faptul că sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{t}{1-\mu} &= \dfrac{s}{1-\lambda} \\ 1-t &= \dfrac{s\lambda}{\lambda-1} \\ \dfrac{t\mu}{\mu-1} &= 1-s \end{cases}$$

are singura soluţie $s_0 = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda-\mu}$, $t_0 = \dfrac{1-\mu}{1-\lambda-\mu}$, deducem că

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_M &= \frac{s_0}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_A - \frac{s_0\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_B + (1-s_0)\overrightarrow{r}_C \\
&= \frac{t_0}{1-\mu}\overrightarrow{r}_A + (1-t_0)\overrightarrow{r}_B - \frac{t_0\mu}{1-\mu}\overrightarrow{r}_C \\
&= \frac{\overrightarrow{r}_A - \lambda\overrightarrow{r}_B - \mu\overrightarrow{r}_C}{1-\lambda-\mu}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.15 (Teorema lui Pappus). *Fie d, d' drepte concurente şi $A, B, C \in d$, $A', B', C' \in d'$. Dacă au loc următoarele relaţii $AB' \nparallel A'B$, $AC' \nparallel A'C$ şi $BC' \nparallel B'C$, arătaţi că punctele $\{M\} := AB' \cap A'B$, $\{N\} := AC' \cap A'C$, $\{P\} := BC' \cap B'C$ sunt coliniare.*

Demonstraţie. Folosind relaţia (2.8), deducem că

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_M &= m\frac{1-m'}{1-mm'}\overrightarrow{u} + m'\frac{1-m}{1-mm'}\overrightarrow{v} \\
\overrightarrow{r}_N &= n\frac{1-n'}{1-nn'}\overrightarrow{u} + n'\frac{1-n}{1-nn'}\overrightarrow{v} \\
\overrightarrow{r}_P &= \frac{n}{m}\frac{1-\dfrac{n'}{m'}}{1-\dfrac{n}{m}\dfrac{n'}{m'}}\overrightarrow{OB} + \frac{n'}{m'}\frac{1-\dfrac{n}{m}}{1-\dfrac{n}{m}\dfrac{n'}{m'}}\overrightarrow{OB'} \\
&= mn\frac{m'-n'}{mm'-nn'}\overrightarrow{u} + m'n'\frac{m-n}{mm'-nn'}\overrightarrow{v},
\end{aligned}$$

unde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = m\ \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} = n\ \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = m'\ \overrightarrow{OA'}$ şi $\overrightarrow{OC'} = n'\ \overrightarrow{OA'}$. Aşadar $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m}\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC'} = \dfrac{n'}{m'}\overrightarrow{OB'}$. Aşadar

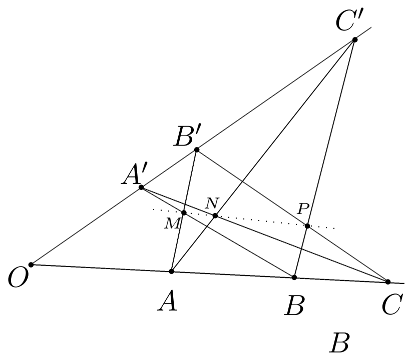


Figure 2:

$$\begin{aligned}
(1-mm')\overrightarrow{r}_M &= m(1-m')\overrightarrow{u} + m'(1-m)\overrightarrow{v} \\
(1-nn')\overrightarrow{r}_N &= n(1-n')\overrightarrow{u} + n'(1-n)\overrightarrow{v} \\
(mm'-nn')\overrightarrow{r}_P &= mn(m'-n')\overrightarrow{u} + m'n'(m-n)\overrightarrow{v},
\end{aligned}$$

sau, echivalent

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{mm'}-1\right)\vec{r}_{M} &= \left(\frac{1}{m'}-1\right)\vec{u}+\left(\frac{1}{m}-1\right)\vec{v})\\
&= \frac{1}{m'}\vec{u}+\frac{1}{m}\vec{v}-(\vec{u}+\vec{v})\\
\left(\frac{1}{nn'}-1\right)\vec{r}_{N} &= \left(\frac{1}{n'}-1\right)\vec{u}+\left(\frac{1}{n}-1\right)\vec{v}\\
&= \frac{1}{n'}\vec{u}+\frac{1}{n}\vec{v}-(\vec{u}+\vec{v})\\
\left(\frac{1}{nn'}-\frac{1}{mm'}\right)\vec{r}_{P} &= \left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{m'}\right)\vec{u}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\vec{v}.
\end{aligned}$$

Scăzând primele două relaţii obţinem

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{mm'}-1\right)\vec{r}_{M}+\left(1-\frac{1}{nn'}\right)\vec{r}_{N} &= \left(\frac{1}{m'}-\frac{1}{n'}\right)\vec{u}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\vec{v}\\
&= \left(\frac{1}{mm'}-\frac{1}{nn'}\right)\vec{r}_{P}.
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\vec{r}_{P}=\underbrace{\frac{\frac{1}{mm'}-1}{\frac{1}{mm'}-\frac{1}{nn'}}}_{\lambda}\vec{r}_{M}+\underbrace{\frac{1-\frac{1}{nn'}}{\frac{1}{mm'}-\frac{1}{nn'}}}_{\mu}\vec{r}_{N}=\lambda\vec{r}_{M}+\mu\vec{r}_{N},$$

fapt care arată coliniaritatea punctelor M, N şi P, deoarece $\lambda+\mu=1$. □

Teorema 2.16 (Teorema afină a lui Pappus)**.** *Fie d, d' două drepte drepte şi $A,B,C\in d$, $A',B',C'\in d'$ trei puncte pe fiecare dintre aceste două drepte astfel încât $AB'\|BA'$, $AC'\|CA'$. Arătaţi că $BC'\|CB'$.*

Demonstraţie. Să notăm cu $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi respectiv $\overrightarrow{OA'}$. Observăm că $\overrightarrow{OB}=m\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}=n\vec{u}$, $\overrightarrow{A'B}=m\vec{u}-\vec{v}$ şi $\overrightarrow{A'C}=n\vec{u}-\vec{v}$. Prin urmare

$$\overrightarrow{OB'}=\alpha\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB'}=\vec{u}+\beta\overrightarrow{BA'}=\vec{u}+\beta(\vec{v}-m\vec{u})=(1-\beta m)\vec{u}+\beta\vec{v}.$$

fapt care arată că $\alpha=\beta=\frac{1}{m}$ şi $\overrightarrow{OB'}=\frac{\vec{v}}{m}$. Se poate analog arăta că $\overrightarrow{OC'}=\frac{\vec{v}}{n}$. Aşadar

$$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB'}=n\vec{u}-\frac{\vec{v}}{m}\text{ şi }\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OB}=\frac{\vec{v}}{n}-m\vec{u}.$$

Prin urmare

$$\overrightarrow{B'C}=-\frac{n}{m}\left(\frac{\vec{v}}{n}-m\vec{u}\right)=-\frac{n}{m}\overrightarrow{BC'},$$

fapt care arată că $B'C\|BC'$. □

Teorema 2.17 (Teorema afină a lui Desargues)**.** *Considerăm două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ astfel încât dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct O, iar $AB \not\parallel A'B'$, $BC \not\parallel B'C'$ şi $CA \not\parallel C'A'$. Arătaţi că punctele $\{M\} = AB \cap A'B'$, $\{N\} = BC \cap B'C'$ şi $\{P\} = CA \cap C'A'$ sunt coliniare.*

Demonstraţie. Folosind relaţia (2.9), deducem că

$$\begin{aligned}
\vec{r}_M &= m\frac{n-1}{n-m}\vec{a} + n\frac{m-1}{m-n}\vec{b} \\
\vec{r}_N &= m\frac{p-1}{p-m}\vec{a} + p\frac{m-1}{m-p}\vec{c} \\
\vec{r}_P &= n\frac{p-1}{p-n}\vec{b} + p\frac{n-1}{n-p}\vec{c}
\end{aligned}$$

unde $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA'}= m\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}= n\,\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OB'}= p\,\overrightarrow{OC'}$.

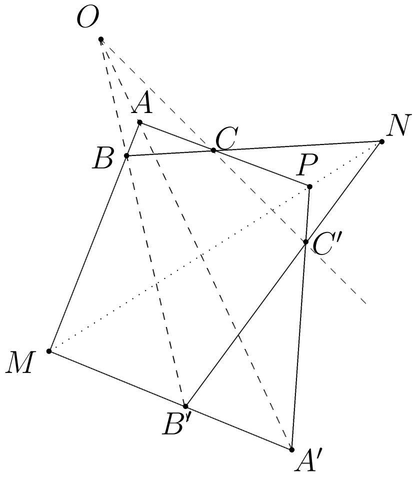


Figure 3:

$$\begin{aligned}
M,\ N,\ P \text{ are collinear} \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}= t\,\overrightarrow{NP} \text{ for some } t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_N = t(\vec{r}_P - \vec{r}_N) \text{ for } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(m\frac{n-1}{n-m} - m\frac{p-1}{p-m}\right)\vec{a} + n\frac{m-1}{m-n}\vec{b} - p\frac{m-1}{m-p}\vec{c} \\
&= t\left[-m\frac{p-1}{p-m}\vec{a} + n\frac{p-1}{p-n}\vec{b} + \left(p\frac{n-1}{n-p} - p\frac{m-1}{m-p}\right)\vec{c}\right] \\
&\Leftrightarrow m\left(\frac{n-1}{n-m} - \frac{p-1}{p-m}\right)\vec{a} + n\frac{m-1}{m-n}\vec{b} - p\frac{m-1}{m-p}\vec{c} \\
&= -tm\frac{p-1}{p-m}\vec{a} + tn\frac{p-1}{p-n}\vec{b} + tp\left(\frac{n-1}{n-p} - \frac{m-1}{m-p}\right)\vec{c}\,.
\end{aligned}$$

Ţinând seama de relaţiile

$$\begin{aligned}
&\frac{p-m}{p-1}\left(\frac{p-1}{p-m} - \frac{n-1}{n-m}\right) = \frac{m-1}{m-n}\cdot\frac{p-n}{p-1} \\
&= \frac{m-1}{m-p}\Bigg/\left(\frac{m-1}{m-p} - \frac{n-1}{n-p}\right),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

observăm că egalitatea $\overrightarrow{NM} = t\ \overrightarrow{NP}$ este satisfisfăcută pentru valoarea comună t a expresiilor (2.11). $\square$

2.3 Probleme

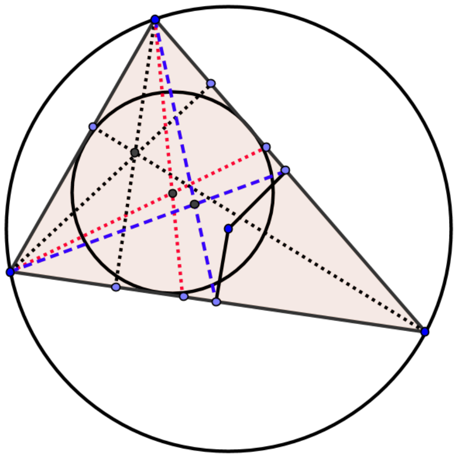
1. ([4, Problema 17, p. 5]) Considerăm triunghiul ABC, centrul său de greutate G, ortocentrul său H, centrul cercului său înscris I şi centrul cercului său circumscris O. Dacă $P \in \mathcal{P}$ este un punct dat şi $\vec{r}_A = \overrightarrow{PA}$, $\vec{r}_B = \overrightarrow{PB}$, $\vec{r}_C = \overrightarrow{PC}$ sunt vectorii de poziţie, în raport cu punctul P, ai vârfurilor A, B şi respectiv C, arătaţi că:

$$\vec{r}_G := \overrightarrow{PG} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}.$$

$$\vec{r}_I := \overrightarrow{PI} = \frac{a\,\vec{r}_A + b\,\vec{r}_B + c\,\vec{r}_C}{a+b+c}.$$

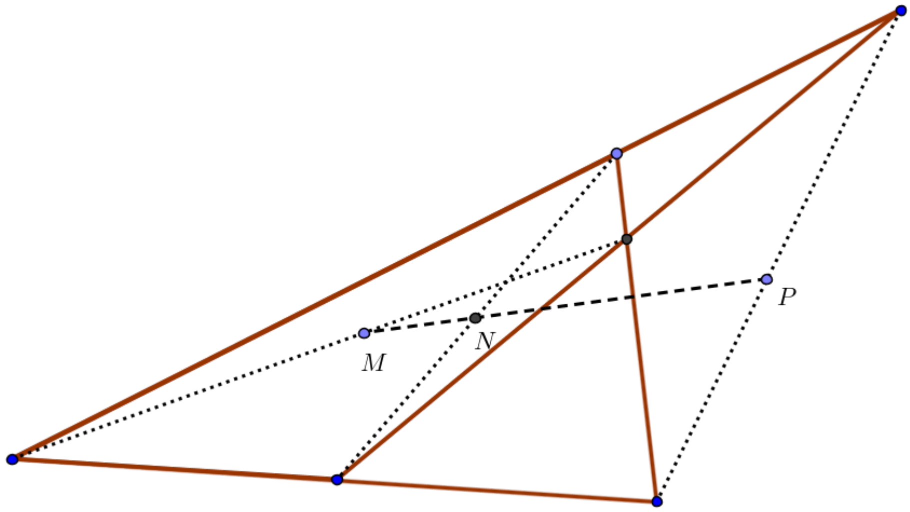
$$\vec{r}_H := \overrightarrow{PH} = \frac{(\tan A)\,\vec{r}_A + (\tan B)\,\vec{r}_B + (\tan C)\,\vec{r}_C}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

$$\vec{r}_O := \overrightarrow{PO} = \frac{(\sin 2A)\,\vec{r}_A + (\sin 2B)\,\vec{r}_B + (\sin 2C)\,\vec{r}_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$



Soluţie.

2. Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare (teorema lui Newton).



Soluţie.

3 Ecuaţiile carteziene ale dreptelor şi planelor

3.1 Repere afine şi repere carteziene

Dacă $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ este o bază ordonată a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ şi $\overrightarrow{x} \in \mathcal{V}$, amintim că vectorul coloană al coordonatelor lui $\overrightarrow{x}$ în raport cu b este notat cu $[\overrightarrow{x}]_b$. Cu alte cuvinte

$$[\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

unde $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{u} + x_2\overrightarrow{v} + x_3\overrightarrow{w}$. Pentru a evidenţia coordonatele lui $\overrightarrow{x}$ faţă de baza b, vom folosi şi notaţia $\overrightarrow{x}(x_1, x_2, x_3)$, atunci când baza b este subînţeleasă.

Observaţia 3.1. $[\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}]_b = \alpha[\overrightarrow{x}]_b + \beta[\overrightarrow{y}]_b,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{V}$. Într-adevăr, dacă

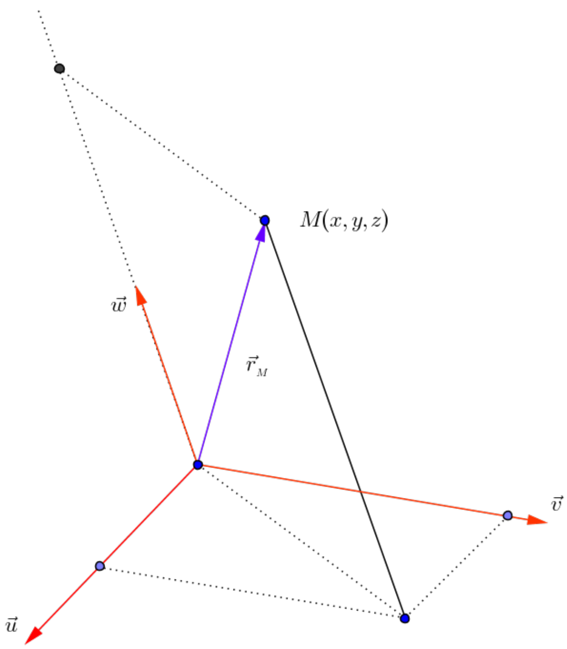
$$[\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ [\overrightarrow{y}]_b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

atunci

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} &= \alpha(x_1\overrightarrow{u} + x_2\overrightarrow{v} + x_3\overrightarrow{w}) + \beta(y_1\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{v} + y_3\overrightarrow{w}) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\overrightarrow{u} + (\alpha x_2 + \beta y_2)\overrightarrow{v} + (\alpha x_3 + \beta y_3)\overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

Aşadar

$$[\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}]_b = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \alpha[\overrightarrow{x}]_b + \beta[\overrightarrow{y}]_b.$$



Definiţia 3.1. Un *reper cartezian* $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ al spaţiului $\mathcal{P}$, constă într-un punct $O \in \mathcal{P}$ numit *originea* reperului şi o bază ordonată $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$.

Notăm cu E_1, E_2, E_3 punctele pentru care $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OE}_1,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OE}_2,\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OE}_3$.

Definiţia 3.2. Sistemul de puncte (O, E_1, E_2, E_3) se numeşte *reperul afin asociat reperului cartezian* $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Dreptele OE_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, orientate de la O la E_i se numesc *axele de coordonate.* Coordonatele x, y, z ale vectorului de poziţie $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ în raport cu baza $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ se numesc coordonatele punctului M fată de sistemul cartezian R şi scriem $M(x, y, z)$. De asemenea, pentru matricea coloană coordonatelor vectorului $\overrightarrow{r_M}$ vom folosi notaţia $[M]_R$. Cu alte cuvinte, dacă $\overrightarrow{r_M} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$, atunci

$$[M]_R = [\overrightarrow{OM}]_b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observaţia 3.2. Dacă $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ sunt două puncte, atunci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= x_B\overrightarrow{u} + y_B\overrightarrow{v} + z_B\overrightarrow{w} - (x_A\overrightarrow{u} + y_A\overrightarrow{v} + z_A\overrightarrow{w}) \\ &= (x_B - x_A)\overrightarrow{u} + (y_B - y_A)\overrightarrow{v} + (z_B - z_A)\overrightarrow{w}, \end{aligned}$$

adică coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt date de diferenţele coordonatelor punctelor A şi B. Alternativ, putem determina coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ folosind reprezentaările matriceale astfel:

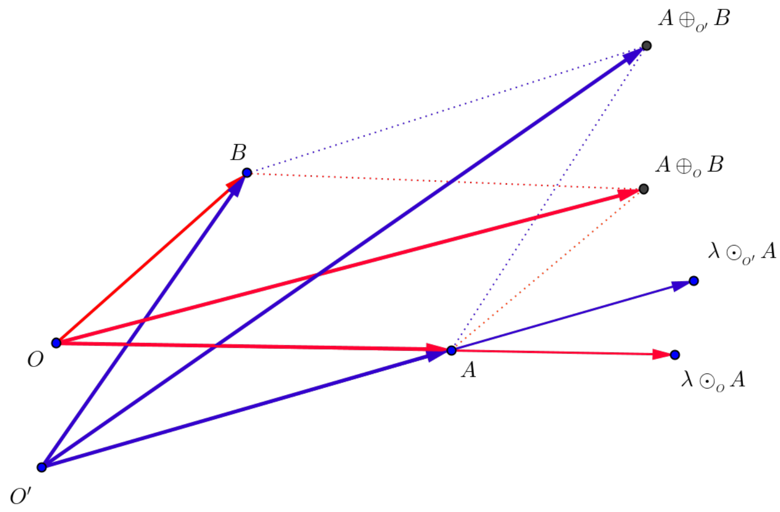
$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}]_b &= [\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]_b = [\overrightarrow{OB}]_b - [\overrightarrow{OA}]_b \\ &= \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observaţia 3.3. Dacă $R = (O, b)$ este un reper cartezian, unde $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ este o bază ordonată a lui $\mathcal{V}$, amintim că $\varphi_O : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\varphi_O(M) = \overrightarrow{OM}$ este bijectivă şi $\psi_b : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{V}$, $\psi_b(x, y, z) = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$ este un izomorfism liniar. Bijecţia φ_O defineşte o structură vectorială unică peste $\mathcal{P}$ astfel încât φ_O devine un izomorfism. Această structură vectorială depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{P}$. Prin urmare, un punct $M \in \mathcal{P}$ ar putea fi identificat fie cu vectorul său de poziţie $\overrightarrow{r_M} = \varphi_O(M)$, sau, cu tripletul $(\psi_b^{-1} \circ \varphi_O)(M) \in \mathbb{R}^3$ al coordonatelor sale faţă de reperul R. O discuţie similară poate fi făcută pentru un reper cartezian $R' = (O', b')$ al unui plan π, unde $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ este o bază ordonată a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π.

Întrucât $\varphi_O : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$ este bijecţie, iar $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial, există o unică structură de spaţiu vectorial pe $\mathcal{P}$ astfel încât φ_O este izomorfism. Această structură este dată de operaţiile:

1. $P = A \oplus_O B \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

2. $Q = \lambda \odot_O A \Longleftrightarrow \overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OA}$,



iar spaţiul vectorial $(\mathcal{P}, \oplus_O, \odot_O)$ se notează cu $T_O(\mathcal{P})$ şi se numeşte *spaţiul vectorial tangent la* $\mathcal{P}$ *în punctul* O. Menţionăm că structura lui $\mathcal{P}$ dată de operaţiile $\oplus_O$ şi $\odot_O$ depinde de alegerea punctului O.

Propoziţia 3.1. *Fie $R = (O, b)$ şi $R' = (O', b')$ două repere carteziene ale lui $\mathcal{P}$ şi T matricea de trecere de la bază b la baza b'. Coordonatele carteziene ale unui punct $M \in \mathcal{P}$ se schimbă după formula*

$$[M]_R = T \cdot [M]_{R'} + [O']_R.$$

Aceasta se mai numeşte şi formula de trecere de la reperul R la reperul R'.

Demonstraţie. Pentru a stabili legătura dintre $[M]_R$ şi $[M]_{R'}$ observăm că avem succesiv:

$$\begin{aligned} [M]_R &= [\overrightarrow{OM}]_b = T \cdot [\overrightarrow{OM}]_{b'} = T \cdot [\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}]_{b'} \\ &= T \cdot [\overrightarrow{O'M}]_{b'} + T \cdot [\overrightarrow{OO'}]_{b'} = T \cdot [M]_{R'} + [\overrightarrow{OO'}]_b \\ &= T \cdot [M]_{R'} + [O']_R \end{aligned}$$

□

Problema 3.2. *Se consideră tetraedrul $OUVW$ şi fie U', V', W' centrele de greutate ale feţelor OVW, OUW şi respectiv OUV. Arătaţi că vectorii $[\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}']$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$, unde $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{UU'}$, $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{VV'}$, $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{WW'}$. Considerăm de asemenea reperele carteziene $R = (O, b)$ şi $R' = (G, b')$, unde $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, cu $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OW}$, iar G este centrul de greutate al tetraedrului. Determinaţi formulele de trecere de la reperul R la reperul R' şi ecuaţiile dreptei d şi ale planului π faţă de reperul R' ştiind că ecuaţiile acestora faţă de reperul R sunt*

$$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2} \textit{ respectiv } \pi : x - y + z + 1 = 0.$$

Soluţie. □

Exemplul 3.1 (Temă). Considerăm tetraedrul $ABCD$, unde $A(1,-1,1)$, $B(-1,1,-1)$, $C(2,1,-1)$ şi $D(1,1,2)$. Aflaţi coordonatele:

1. centrelor de greutate G_A, G_B, G_C, G_D ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD şi, respectiv, ABC[1].

2. mijloacelor M, N, P, Q, R şi S ale segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[CD]$ şi, respectiv, $[DB]$.

[1] centrele de greutate ale feţelor sale

Soluţie. □

3.2 Ecuaţiile carteziene ale dreptelor

Fie Δ dreapta care trece prin punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralelă cu vectorul $\overrightarrow{d}(p, q, r)$. Ecuaţia sa vectorială este

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda \overrightarrow{d}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Notând cu x, y, z coordonatele punctului generic M al dreptei Δ, ecuaţia vectorială (3.1) este echivalentă cu următorul sistem

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Într-adevăr, ecuaţia vectorială a lui Δ poate fi scrisă, în termenii coordonatelor vectorilor $\overrightarrow{r}_M$, $\overrightarrow{r}_{A_0}$ şi $\overrightarrow{d}$, după cum urmează:

$$\begin{aligned} & x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = x_0\overrightarrow{u} + y_0\overrightarrow{v} + z_0\overrightarrow{w} + \lambda(p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} + r\overrightarrow{w}) \\ \Longleftrightarrow \ & x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = (x_0 + p\lambda)\overrightarrow{u} + (y_0 + q\lambda)\overrightarrow{v} + (z_0 + r\lambda)\overrightarrow{w}, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

care este evident echivalentă cu (3.2). Alternativ, putem justifica ecuaţiile parametrice (3.2) astfel:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda \overrightarrow{d} & \Longleftrightarrow [\overrightarrow{r}_M]_b = [\overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda \overrightarrow{d}]_b \\ & \Longleftrightarrow [\overrightarrow{OM}]_b = [\overrightarrow{OA_0}]_b + \lambda[\overrightarrow{d}]_b \\ & \Longleftrightarrow [M]_R = [A_0]_R + \lambda[\overrightarrow{d}]_b \\ & \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \lambda p \\ y_0 + \lambda q \\ z_0 + \lambda r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \end{aligned}$$

Relaţiile (3.2) se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei Δ şi sunt echivalente cu următoarele relaţii

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \tag{3.3}$$

numite *ecuaţiile canonice* ale dreptei Δ. Dacă, de exemplu, $r = 0$, atunci ecuaţiile canonice ale dreptei Δ sunt

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \ \wedge \ z = z_0.$$

Dacă $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ sunt puncte diferite ale dreaptei Δ, atunci

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

este un vector director al dreptei Δ, ecuaţiile sale canonice sunt, în acest caz, de forma

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{3.4}$$

Exemplul 3.2. Considerăm tetraedrul $ABCD$, unde $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(2, 1, -1)$ şi $D(1, 1, 2)$, precum şi centrele de greutate G_A, G_B, G_C, G_D ale feţelor sale BCD, ACD, ABD şi respectiv ABC[2]. Arătaţi că medianele AG_A, BG_B, CG_C şi DG_D sunt concurente şi găsiţi coordonatele punctului lor de intersecţie.

Soluţie. Se poate observa cu uşurinţă că centrele de greutate G_A, G_B, G_C, G_D au coordonatele $(2/3, 1, 0)$, $(4/3, 1/3, 2/3)$, $(1/3, 1/3, 2/3)$ şi respectiv $(2/3), 1/3, -1/3)$. Ecuaţiile medianelor AG_A şi BG_B au forma

$$\begin{array}{ll} (AG_A) & \dfrac{x-1}{2/3-1} = \dfrac{y+1}{1-(-1)} = \dfrac{z-1}{0-1} \Longleftrightarrow \dfrac{x-1}{-1/3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \\ (BG_B) & \dfrac{x+1}{4/3+1} = \dfrac{y-1}{1/3-1} = \dfrac{z+1}{2/3+1} \Longleftrightarrow \dfrac{x+1}{7/3} = \dfrac{y-1}{-2/3} = \dfrac{z+1}{5/3}. \end{array}$$

Astfel, spaţiul director al medianei AG_A este $\left\langle\left(-\frac{1}{3}, 2, -1\right)\right\rangle = \langle(-1, 6, -3)\rangle$ iar spaţiul director al medianei BG_B este $\left\langle\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)\right\rangle = \langle(7, -2, 5)\rangle$. Prin urmare, ecuaţiile parametrice ale medianelor AG_A şi BG_B sunt

$$(AG_A) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 6t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ şi } (BG_B) \begin{cases} x = -1 + 7s \\ y = 1 - 2s \\ z = -1 + 5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Astfel, cele două mediane AG_A şi BG_B sunt concurente dacă şi numai dacă există $s, t \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} 1 - t = -1 + 7s \\ -1 + 6t = 1 - 2s \\ 1 - 3t = -1 + 5s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 7s + t = 2 \\ 2s + 6t = 2 \\ 5s + 3t = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 7s + t = 2 \\ s + 3t = 1 \\ 5s + 3t = 2. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil şi are soluţia unică $s = t = \frac{1}{4}$, care arată că cele două mediane AG_A şi BG_B sunt concurente şi

$$AG_A \cap BG_B = \left\{G\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Se poate arăta în mod similar că $BG_B \cap CG_C = CG_C \cap AG_A = \left\{G\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right\}$.

Exemplul 3.3 (Temă)**.** Considerăm tetraedrul $ABCD$, unde $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(2, 1, -1)$ şi $D(1, 1, 2)$, precum şi mijloacele M, N, P, Q, R şi S ale muchiilor sale $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[CD]$ şi, respectiv, $[DB]$. Arătaţi că dreptele MR, PQ şi NS sunt concurente şi găsiţi coordonatele punctului lor de intersecţie.

[2]Centrele feţelor sale

Soluţie.

3.3 Ecuaţiile carteziene ale planelor

Fie $A_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$ şi $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$, $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$ doi vectori liniar independenţi, adică

$$\text{rang}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Ecuaţia vectorială a planului π care trece prin A_0 şi care este paralel cu vectorii $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ şi $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2)$ este

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{d}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{d}_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Dacă notăm cu x, y, z coordonatele punctului generic M al planului π, atunci ecuaţia vectorială (3.5) este echivalentă cu următorul sistem de relaţii

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Într-adevăr, ecuaţia vectorială a lui π poate fi rescrisă, în termenii coordonatelor vectorilor $\overrightarrow{r}_M$, $\overrightarrow{r}_{A_0}$, $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$, astfel

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = x_0\overrightarrow{u} + y_0\overrightarrow{v} + z_0\overrightarrow{w} + \lambda_1(p_1\overrightarrow{u} + q_1\overrightarrow{v} + r_1\overrightarrow{w}) + \lambda_2(p_2\overrightarrow{u} + q_2\overrightarrow{v} + r_2\overrightarrow{w}), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = (x_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)\overrightarrow{u} + (y_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2)\overrightarrow{v} + (z_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)\overrightarrow{w}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

care este echivalentă cu (3.6). Alternativ, putem justifica ecuaţiile parametrice (3.2) astfel:

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{d}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{d}_2 \Longleftrightarrow [\overrightarrow{r}_M]_b = [\overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{d}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{d}_2]_b$$

$$\Longleftrightarrow [\overrightarrow{OM}]_b = [\overrightarrow{OA_0}]_b + \lambda_1[\overrightarrow{d}_1]_b + \lambda_2[\overrightarrow{d}_2]_b$$
$$\Longleftrightarrow [M]_R = [A_0]_R + \lambda_1[\overrightarrow{d}_1]_b + \lambda_2[\overrightarrow{d}_2]_b$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \\ y_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \\ z_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 p_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2. \end{cases}$$

Relaţiile (3.6) caracterizează punctele planului π şi se numesc *ecuaţiile parametrice* ale planului π. Mai precis, compatibilitatea sistemului liniar (3.6) cu necunoscutele λ_1, λ_2 este o condiţie necesară şi suficientă pentru ca punctul $M(x, y, z)$ să fie conţinut în planul π. Pe de altă parte, compatibilitatea sistemului liniar (3.6) este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.7}$$

care exprimă egalitatea dintre rangul matricei coeficienţilor sistemului şi rangul matricei extinse a sistemului. Ecuaţia (3.7) este o caracterizare a punctelor planului π în termenii coordonatelor carteziene ale punctului generic M şi se numeşte *ecuaţia carteziană* a planului π. Aceasta poate fi rescrisă în formă

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3.8}$$

sau

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.9}$$

unde coeficienţii A, B, C satisfac relaţia $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. De asemenea, este uşor să arătăm că fiecare ecuaţie de forma (3.9) reprezintă ecuaţia unui plan. Într-adevăr, dacă $A \neq 0$, atunci ecuaţia (3.9) este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0.$$

Observăm că ecuaţia (3.8) se poate pune în forma

$$AX + BY + CZ = 0 \tag{3.10}$$

unde $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, $Z = z - z_0$ sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{A_0M}$.

Propoziţia 3.3. *Ecuaţia subspaţiului director* $\overrightarrow{\pi}$*, al planului* $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ *este* $AX + BY + CZ = 0$.

Demonstraţie. Mai întâi amintim că

$$\overrightarrow{\pi} = \{\overrightarrow{A_0M} \mid M \in \pi\}, \tag{3.11}$$

unde $A_0 \in \pi$ este un punct arbitrar, iar reprezentarea (3.11) a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π este independentă de alegerea lui $A_0 \in \pi$. Conform ecuaţiei (3.8), ecuaţia planului π poate fi scrisă sub forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

unde $A_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct în π. Cu alte cuvinte,

$$M(x,y,z) \in \pi \Longleftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

adică

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\pi} &= \{\overrightarrow{A_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \mid M(x,y,z) \in \pi\}\\ &= \{\overrightarrow{A_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \mid A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0\}\\ &= \{\overrightarrow{v}(X,Y,Z) \in \mathcal{V} \mid AX + BY + CZ = 0\}.\end{aligned}$$

Astfel, ecuaţia $AX + BY + CZ = 0$ este o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un vector $\overrightarrow{v}(X,Y,Z)$ să fie conţinut în direcţia planului

$$\pi : A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

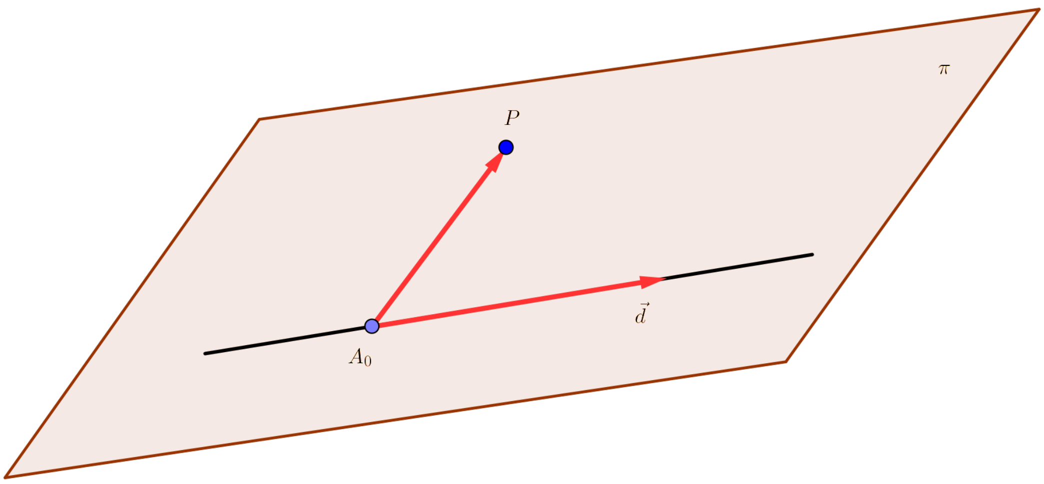
Cu alte cuvinte, *ecuaţia subspaţiului director* $\overrightarrow{\pi}$ este $AX + BY + CZ = 0$. $\square$

Exemplul 3.4. Scrieţi ecuaţia planului determinat de punctul $P(-1,1,2)$ şi dreapta

$$(\Delta)\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Soluţie. Amintim că $P \notin \Delta$, deoarece $\frac{-1-1}{3} \neq \frac{1}{2} \neq -3 = \frac{2+1}{-1}$, adică punctul P şi dreapta Δ determină, într-adevăr, un plan, să zicem π. π este de fapt planul care trece prin punctul $A_0(1,0,-1)$ şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{A_0P}(-1-1, 1-0, 2-(-1)) = \overrightarrow{A_0P}(-2,1,3)$ şi $\overrightarrow{d}(3,2,-1)$. Astfel, ecuaţia lui π este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 0.$$



Exemplul 3.5 (Temă)**.** Generalizaţi Exemplul 3.4: scrieţi ecuaţia planului determinat de dreapta $(\Delta)\ \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ şi punctul $M(x_M, y_M, z_M) \notin \Delta$.

Soluţie.

Observaţia 3.4. Dacă $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ sunt puncte necoliniare, atunci planul (ABC) determinat de cele trei puncte poate fi privit ca planul care trece prin punctul A care este paralel cu vectorii $\overrightarrow{d}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{d}_2 = \overrightarrow{AC}$. Coordonatele vectorilor $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$ sunt

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \text{ şi } (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \text{ respectiv.}$$

Astfel, ecuaţia planului (ABC) este

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0, \tag{3.12}$$

sau, echivalent,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Prin urmare, patru puncte $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ şi $D(x_D, y_D, z_D)$ sunt coplanare dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.14}$$

Exemplul 3.6 (Temă)**.** Scrieţi ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(5, 4, 1)$ şi $M_3(-1, -2, 3)$.

Soluţie.

Observaţia 3.5. Dacă $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ sunt trei puncte ($abc \neq 0$), atunci pentru ecuaţia planului (ABC) avem succesiv:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-c & 1 \\ a & 0 & -c & 1 \\ 0 & b & -c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-c \\ a & 0 & -c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow ab(z-c) + bcx + acy = 0 \Longleftrightarrow bcx + acy + abz = abc$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3.15}$$

Se spune că planul (ABC) este dat prin tăieturi, iar ecuaţia (3.15) se numeşte ecuţia planului prin tăieturile a, b, c.

Exemplul 3.7 (Temă)**.** Scrieţi ecuaţia planului (π) $3x - 4y + 6z - 24 = 0$ prin tăieturi.

Soluţie.

3.4 Probleme

1. Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $M_0(1, -2, 3)$ şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{v}_1(1, -1, 0)$ şi $\overrightarrow{v}_2(-3, 2, 4)$.

   Soluţie.
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1, -2, 6)$ şi este paralelă cu

   (a) Axa Ox;

   (b) dreapta (d_1) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

   (c) Vectorul $\overrightarrow{v}(1, 0, 2)$.

   Soluţie.

3. Scrieţi ecuaţia planului care conţine dreapta

$$(d_1)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$$

şi este paralel cu dreapta

$$(d_2)\ \frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Soluţie.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Considerăm punctele $A(\alpha,0,0)$, $B(0,\beta,0)$ şi $C(0,0,\gamma)$ astfel încât
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{a} \quad \text{unde } a \text{ este un constatnt.}$$
Să se arate că planul (ABC) trece printr-un punct fix.

Soluţie. Întrucât planul (ABC) este dat prin tăieturi, ecuaţia lui este
$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$
Relaţia dată arată că punctul $P(a,a,a)\in(ABC)$ dacă şi numai dacă α,β,γ verifică relaţia dată.

5. Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $M_0(1,-2,3)$ şi intersectează semiaxele de coordonate pozitive prin tăieturi egale.

Soluţie. Ecuaţia generală a unui astfel de plan este $x+y+z=a$. În acest caz particular $a=1+(-2)+3=2$ iar ecuaţia planului căutat este $x+y+z=2$.

6. Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $A(1,2,1)$ şi este paralelă cu dreptele
$$(d_1)\begin{cases} x+2y-z+1=0\\ x-y+z-1=0\end{cases} \qquad (d_2)\begin{cases} 2x-y+z=1\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

Soluţie. Trebuie să găsim parametrii directori ai dreptelor (d_1) şi (d_2). În acest sens, putem rezolva cele două sisteme. Soluţia generală a primului sistem este
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}\\ z=t\end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$
şi soluţia generală a celui de-al doilea sistem este
$$\begin{cases} x=1\\ y=t+1\\ z=t\end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$
iar acestea sunt de fapt ecuaţiile parametrice ale dreptelor (d_1) şi (d_2). Astfel, direcţia dreptei (d_1) este subspaţiul 1-dimensional
$$\left\langle\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)\right\rangle=\langle(-1,2,3)\rangle,$$
iar direcţia dreptei (d_2) este subspaţiul 1-dimensional $\langle(0,1,1)\rangle$.

Prin urmare, parametrii directori ai dreptei (d_1) sunt $p_1=-1, q_1=2, r_1=3$ şi parametrii directori ai dreptei (d_2) sunt $p_2=0, q_2=r_2=1$. Aşadar, ecuaţia planului căutat este
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$
Calculul determinantului este lăsat cititorului.

4 Ecuaţiile carteziene ale dreptelor în context bidimensional

4.1 Repere carteziene şi afine

Dacă $b = [\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}]$ este o bază ordonată a subspaţiului director $\overrightarrow{\pi}$ al planului π şi $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\pi}$, amintim că vectorul coloană $\overrightarrow{x}$ în raport cu baza b este notat cu $[\overrightarrow{x}]_b$. Cu alte cuvinte

$$[\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

unde $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{e} + x_2 \overrightarrow{f}$.

Observaţia 4.1. $[\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}]_b = \alpha[\overrightarrow{x}]_b + \beta[\overrightarrow{y}]_b,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\pi}$. Într-adevăr, dacă

$$[\overrightarrow{x}]_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ [\overrightarrow{y}]_b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

atunci

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y} &= \alpha(x_1 \overrightarrow{u} + x_2 \overrightarrow{v}) + \beta(y_1 \overrightarrow{u} + y_2 \overrightarrow{v}) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\overrightarrow{u} + (\alpha x_2 + \beta y_2)\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Aşadar

$$[\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}]_b = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \alpha[\overrightarrow{x}]_b + \beta[\overrightarrow{y}]_b.$$

Definiţia 4.1. Un *reper cartezian* al planului π, este un sistem $R = (O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$, unde O este un punct din π numit *origine* a reperului şi $b = [\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}]$ este o bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π.

Notăm cu E, F punctele pentru care $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{DE}$.

Definiţia 4.2. Sistemul de puncte (O, E, F) se numeşte *reperul afin asociat reperului cartezian* $R = (O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$.

Dreptele OE, OF, orientate de la O la E şi respectiv de la O la F, se numesc *axe de coordonate*. Coordonatele x, y ale vectorului de poziţie $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ în raport cu baza $[\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}]$ sunt numite coordonatele punctului M în raport cu sistemul cartezian R şi scriem $M(x, y)$. De asemenea, pentru matricea coloană a coordonatelor vectorului $\overrightarrow{r_M}$ vom folosi notaţia $[M]_R$. Cu alte cuvinte, dacă $\overrightarrow{r_M} = x\overrightarrow{e} + y\overrightarrow{f}$, atunci

$$[M]_R = [\overrightarrow{OM}]_b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observaţia 4.2. Dacă $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B)$ sunt două puncte, atunci

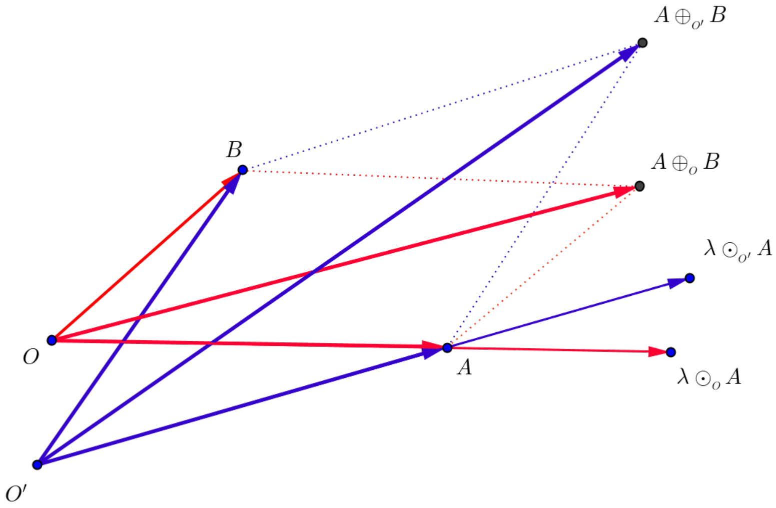
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \overrightarrow{e} + y_B \overrightarrow{f} - (x_A \overrightarrow{e} + y_A \overrightarrow{f}) \\ &= (x_B - x_A)\overrightarrow{e} + (y_B - y_A)\overrightarrow{f}, \end{aligned}$$

adică coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt obţinute prin efectuarea diferenţelor coordonatelor punctelor A şi B. Alternativ, putem determina coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ folosind reprezentaările matriceale astfel:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}]_b &= [\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]_b = [\overrightarrow{OB}]_b - [\overrightarrow{OA}]_b \\ &= \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Întrucât $\varphi_O : \pi \longrightarrow \overrightarrow{\pi}$ este bijecţie, iar $\overrightarrow{\pi}$ este un spaţiu vectorial, există o unică structură de spaţiu vectorial pe π astfel încât φ_O este izomorfism. Această structură este dată de operaţiile:

1. $P = A \oplus_O B \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
2. $Q = \lambda \odot_O A \Longleftrightarrow \overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OA}$,



iar spaţiul vectorial $(\pi, \oplus_O, \odot_O)$ se notează cu $T_O(\pi)$ şi se numeşte *spaţiul vectorial tangent la π în punctul O*. Menţionăm că structura lui π dată de operaţiile $\oplus_O$ şi $\odot_O$ depinde de alegerea punctului $O \in \pi$.

Propoziţia 4.1. *Fie $R = (O, b)$ şi $R' = (O', b')$ două repere carteziene ale lui planului π şi T matricea de trecere de la bază b la baza b' Coordonatele carteziene ale unui punct M se schimbă după formula după formula*
$$[M]_R = T \cdot [M]_{R'} + [O']_R.$$
Aceasta se mai numeşte şi formula de trecere de la reperul R la reperul R'.

Demonstraţie. Pentru a stabili legătura dintre $[M]_R$ şi $[M]_{R'}$ observăm că avem succesiv:

$$\begin{aligned}
[M]_R &= [\overrightarrow{OM}]_b = T \cdot [\overrightarrow{OM}]_{b'} = T \cdot [\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}]_{b'} \\
&= T \cdot [\overrightarrow{O'M}]_{b'} + T \cdot [\overrightarrow{OO'}]_{b'} = T \cdot [M]_{R'} + [\overrightarrow{OO'}]_b \\
&= T \cdot [M]_{R'} + [O']_R
\end{aligned}$$

□

Problema 4.2. *Se consideră triunghiul OUV şi fie U', V' mijloacele laturilor $[OV]$ şi respectiv $[OU]$. Considerăm de asemenea reperele carteziene $R = (O, b)$ şi $R' = (G, b')$ unde $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, $b = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{UU'}$, $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{VV'}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului OUV (vezi problema 2.7). Determinaţi formulele de trecere de la reperul R la reperul R' şi determinaţi ecuaţia dreptei d faţă de reperul R' ştiind că ecuaţia sa faţă de reperul R este*
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}.$$

Soluţie. Conform Propoziţiei 8.9 avem

$$[M]_R = T \cdot [M]_{R'} + [G]_R$$

unde

$$T = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza b la baza b' (vezi problema 2.7). Deoarece

$$[G]_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

deducem că formulele de trecere de la reperul R la reperul R' sunt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -x' + y'/2 + 1/3 \\ y = x'/2 - y' + 1/3 \end{cases}, \tag{4.1}$$

unde

$$[M]_R = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ şi } [M]_{R'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Din formulele (4.1) de trecere de la reperul R la reperul R' putem deduce formulele de trecere de la reperul R' la reperul R fie inversând matricea T fie exprimând x', y' în funcţie de x, y. Oricare dintre cele două metode ne conduc la

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Scriind ecuaţiile parametrice ale dreptei d faţă de reperul R

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

şi înlocuind x, y astfel exprimate în funcţie de t în formulele (4.2) obţinem ecuaţiile parametrice ale dreptei d faţă de reperul R'

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{3}(1+2t) - \frac{2}{3}(2+t) \\ y' = -\frac{2}{3}(1+2t) - \frac{4}{3}(2+t) - \frac{2}{3} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{8}{3} - \frac{10}{3}t \\ y' = -4 + \frac{8}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, ecuaţia canonică a dreptei d faţă de reperul R' este

$$\frac{x' + \frac{8}{3}}{-\frac{10}{3}} = \frac{y' + 4}{\frac{8}{3}} \text{ sau, echivalent } \frac{x' + \frac{8}{3}}{-5} = \frac{y' + 4}{4}.$$

4.2 Ecuaţiile parametrice şi carteziene ale dreptelor

Fie Δ o dreaptă care trece prin punctul $A_0(x_0, y_0) \in \pi$ şi este paralelă cu vectorul $\overrightarrow{d}(p,q)$. Ecuaţia sa vectorială este

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + t\overrightarrow{d}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Dacă (x, y) sunt coordonatele unui punct generic $M \in \Delta$, atunci ecuaţia sa vectorială (4.3) este echivalentă cu următorul sistem

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Într-adevăr, pentru ecuaţia vectorială (4.3) avem succesiv:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda\overrightarrow{d} &\iff [\overrightarrow{r}_M]_b = [\overrightarrow{r}_{A_0} + \lambda\overrightarrow{d}]_b \\
&\iff [\overrightarrow{OM}]_b = [\overrightarrow{OA_0}]_b + \lambda[\overrightarrow{d}]_b \\
&\iff [M]_R = [A_0]_R + \lambda[\overrightarrow{d}]_b \\
&\iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\
&\iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \lambda p \\ y_0 + \lambda q \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}
\end{aligned}$$

Relaţiile se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei Δ şi sunt echivalente cu următoarea ecuaţie

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \tag{4.5}$$

numită *ecuaţia canonică* a lui Δ. Dacă $q = 0$, atunci ecuaţia (4.5) devine $y = y_0$.
Dacă $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte diferite ale planului π, atunci

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

este un vector director al dreptei AB şi ecuaţia sa canonică este

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}. \tag{4.6}$$

Ecuaţia (4.6) este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Astfel, trei puncte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ şi $P_3(x_3, y_3)$ sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

4.3 Ecuaţia generală a dreptei

Putem pune ecuaţia (4.5) sub forma

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{cu} \quad a^2 + b^2 > 0, \tag{4.8}$$

ceea ce înseamnă că orice dreaptă din π este caracterizată de o ecuaţie de gradul întâi. Pe de altă parte o astfel de ecuaţie reprezintă o dreaptă, deoarece formula (4.8) este echivalentă cu

$$\frac{x + \frac{c}{a}}{-\frac{b}{a}} = \frac{y}{1}$$

şi aceasta este *ecuaţia simetrică* a dreptei care trece prin $P_0\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ şi este paralelă cu $\overline{v}\left(-\frac{b}{a}, 1\right)$. Ecuaţia (4.8) se numeşte *ecuaţia generală* a dreptei.

Observaţia 4.3. Dreptele

$$(d)\ ax + by + c = 0 \text{ şi } (\Delta)\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{x - x_0}{q}$$

sunt paralele dacă şi numai dacă $ap + bq = 0$. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} d \| \Delta \iff \overrightarrow{d} = \overrightarrow{\Delta} \iff \langle \overrightarrow{u}(p,q) \rangle = \langle \overrightarrow{v}\left(-\tfrac{b}{a}, 1\right) \rangle \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \overrightarrow{u}(p,q) = t\overrightarrow{v}\left(-\tfrac{b}{a}, 1\right) \\ \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ a.î. } = -t\tfrac{b}{a} = p \text{ şi } q = t \iff ap + bq = 0. \end{aligned}$$

4.4 Ecuaţia redusă a dreptei

Se consideră o dreaptă dată având ecuaţia sa generală $ax + by + c = 0$, unde cel puţin unul dintre coeficienţii a şi b este diferit de zero. Se poate presupune că $b \neq 0$, astfel încât ecuaţia poate fi împărţită la b. Se obţine

$$y = mx + n \tag{4.9}$$

despre care se spune că este *ecuaţia redusă* a dreptei.

Observaţia 4.4. Dacă $B = 0$, (4.8) devine $ax + c = 0$ sau $x = -\dfrac{c}{a}$, o dreaptă paralelă cu Oy. (În acelaşi mod, dacă $a = 0$, se obţine ecuaţia unei drepte paralele cu Ox).

4.5 Intersecţia a două drepte

Fie $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ două drepte în planul π. Soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

este perechea coordonatelor punctului de intersectie a dreptelor d_1 si d_2, atunci când sistemul este compatibil determinat şi dreptele sunt concurente. De fapt (in)compatibilitatea sistemului exprimă pe deplin poziţia relativă a dreptelor coplanare d_1, d_2.

1) Dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, sistemul are o soluţie unică (x_0, y_0) şi dreptele au un punct de intersecţie unic $P_0(x_0, y_0)$, adică dreptele sunt concurente.

2) Dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, sistemul este incompatibil, iar dreptele nu au puncte comune, adică sunt paralele şi nu coincid.

3) Dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, sistemul are o infinitate de soluţii, iar dreptele coincid, adică sunt *identice.*

Dreptele $d_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = \overline{1,3}$ din planul π sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.10}$$

4.6 Fascicule de drepte ([1])

Mulţimea tuturor dreptelor care trec printr-un punct dat P_0 se numeşte *fascicul* de drepte. Punctul P_0 se numeşte *vârful* fasciculului.
Dacă punctul P_0 are coordonatele (x_0, y_0), atunci ecuaţia fasciculului de vârf P_0 este

$$r(x - x_0) + s(y - y_0) = 0, \qquad (r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \tag{4.11}$$

Observaţia 4.5. *Fasciculul redus* de dreaptă prin P_0 este,

$$y - y_0 = m(x - x_0), \qquad m \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

şi acoperă fasciculul de drepte prin P_0, cu excepţia dreaptei $x = x_0$. În mod similar, familia de drepte

$$x - x_0 = k(y - y_0), \qquad k \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

acoperă fasciculul de drepte prin P_0, cu excepţia dreaptei $y = y_0$.
Dacă punctul P_0 este dat ca intersecţia a două drepte, atunci coordonatele sale sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases} d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases},$$

presupus a fi compatibil. Ecuaţia fasciculului de drepte prin P_0 este

$$r(a_1 x + b_1 y + c_1) + s(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0, \qquad (r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \tag{4.14}$$

Observaţia 4.6. Dacă $s \neq 0$ (sau $r \neq 0$), se obţine ecuaţia fasciculului redus, care conţine toate dreptele prin P_0, cu excepţia d_1 (respectiv d_2).

4.7 Probleme

1. Laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC sunt împărţite de punctele M, N respectiv P în acelaşi raport k. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

   Soluţie.

2. Schiţaţi graficul conicei de ecuaţie $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$.

   Soluţie.

3. Aflaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : 2x - 5y - 1 = 0, \quad d_2 : x + 4y - 7 = 0$$

şi printr-un punct M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k = \frac{2}{3}$, unde $A(4, -3)$, $B(-1, 2)$.

Soluţie.

4. Fie A un punct mobil pe semiaxa pozitivă Ox şi B un punct mobil pe semiaxa pozitivă Oy, astfel încât $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = k$ (constant). Demonstraţi că dreptele AB trec printr-un punct fix.

   Soluţie.

5. Aflaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : 3x - 2y + 5 = 0, \quad d_2 : 4x + 3y - 1 = 0$$

şi intersectează semiaxa pozitivă a lui Oy în punctul A cu $OA = 3$.

Soluţie.

6. Aflaţi ecuaţiile parametrice ale dreptei prin P_1P_2, dacă
   (a) $P_1(3,-2)$, $P_2(5,1)$;
   (b) $P_1(4,1)$, $P_2(4,3)$.

   Soluţie.

7. Găsiţi ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $P(-5,2)$ şi este paralelă cu $\overrightarrow{v}(2,3)$.

   Soluţie.

8. Arătaţi că ecuaţiile parametrice

$$x = 3 - t, y = 1 + 2t \qquad \text{şi} \qquad x = -1 + 3t, y = 9 - 6t$$

definesc aceeaşi dreaptă.

Soluţie.

9. Găsiţi ecuaţia vectorială a dreptei P_1P_2, unde

   (a) $P_1(2, -1)$, $P_2(-5, 3)$;

   (b) $P_1(0, 3)$, $P_2(4, 3)$.

   Soluţie.

10. Dată fiind dreapta $d : 2x + 3y + 4 = 0$, găsiţi ecuaţia dreptei d_1 prin punctul $M_0(2, 1)$ cu proprietatea că d_1 este paralel cu d.

    Soluţie.

11. Vârfurile triunghiului ABC sunt punctele de intersecţie ale dreptelor

$$d_1 : 4x + 3y - 5 = 0, \quad d_2 : x - 3y + 10 = 0, \quad d_3 : x - 2 = 0.$$

    (a) Aflaţi coordonatele lui A, B, C.

    (b) Aflaţi ecuaţiile dreptelor suport ale medianelor triunghiului ABC.

    Soluţie.

5 Condiţii analitice de paralelism/neparalelism

5.1 Paralelismul dintre o dreaptă şi un plan

Amintim că ecuaţia subspaţiului director $\overrightarrow{\pi}$ a planului π de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$, este, conform propoziţiei 3.3, $AX + BY + CZ = 0$.

Propoziţia 5.1. *Dreapta*

$$\Delta : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

este paralelă cu planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ *dacă şi numai dacă*

$$Ap + Bq + Cr = 0 \tag{5.1}$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \Delta \| \pi &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\Delta} \subseteq \overrightarrow{\pi} \Longleftrightarrow \langle (p, q, r) \rangle \subseteq \overrightarrow{\pi} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{d}\,(p, q, r) \in \overrightarrow{\pi} \Longleftrightarrow Ap + Bq + Cr = 0. \end{aligned}$$

□

5.2 Punctul de intersecţie dintre o dreaptă şi un plan

Propoziţia 5.2. *Considerăm o dreaptă*

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi un plan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ *care nu sunt paralele între ele, adică*

$$Ap + Bq + Cr \neq 0.$$

Coordonatele punctului de intersecţie $d \cap \pi$ *sunt*

$$\begin{cases} x_0 - p\dfrac{F(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ y_0 - q\dfrac{F(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ z_0 - r\dfrac{F(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr}, \end{cases} \tag{5.2}$$

unde $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.

Demonstraţie. Ecuaţiile parametrice ale lui (d) sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

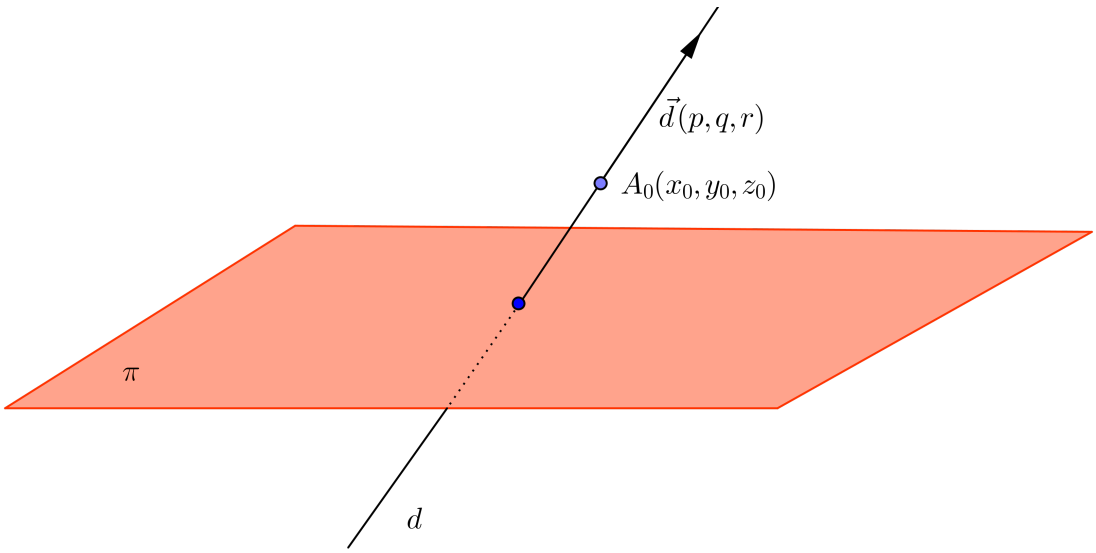
Valoarea unică a parametrului $t \in \mathbb{R}$, care corespunde punctului de intersecţie $d \cap \pi$, poate fi găsită prin rezolvarea ecuaţiei

$$A(x_0 + pt) + B(y_0 + qt) + C(z_0 + rt) + D = 0.$$

Soluţia sa unică este

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap + Bq + Cr} = -\frac{F(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr}$$

şi poate fi folosită pentru a obţine coordonatele necesare (5.2) prin înlocuirea acestei valori în (5.3). □



Exemplul 5.1 (Temă)**.** Decideţi dacă dreapta d şi planul π sunt paralele sau concurente şi găsiţi coordonatele punctului de intersecţie al dreptei Δ şi planului π dacă ele sunt concurente:

1. $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$ şi $\pi : x - y + 2z = 1$.
2. $d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ şi $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$.

Soluţie.

5.3 Paralelismul a două plane

Propoziţia 5.3. *Considerăm planele*

$$(\pi_1)\, A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \;\; (\pi_2)\, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Atunci $\dim(\overrightarrow{\pi}_1 \cap \overrightarrow{\pi}_2) \in \{1, 2\}$ *următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1. $\pi_1 \| \pi_2$.

2. $\dim(\overrightarrow{\pi}_1 \cap \overrightarrow{\pi}_2) = 2$, *adică* $\overrightarrow{\pi}_1 = \overrightarrow{\pi}_2$.

3. $\text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1.$

4. Vectorii $(A_1, B_1, C_1),\ (A_2, B_2, C_2) \in \mathbb{R}^3$ *sunt liniar dependenţi.*

Observaţia 5.1. Amintim că

$$\text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = A_1C_2 - A_2C_1 = B_1C_2 - C_2B_1 = 0. \tag{5.4}$$

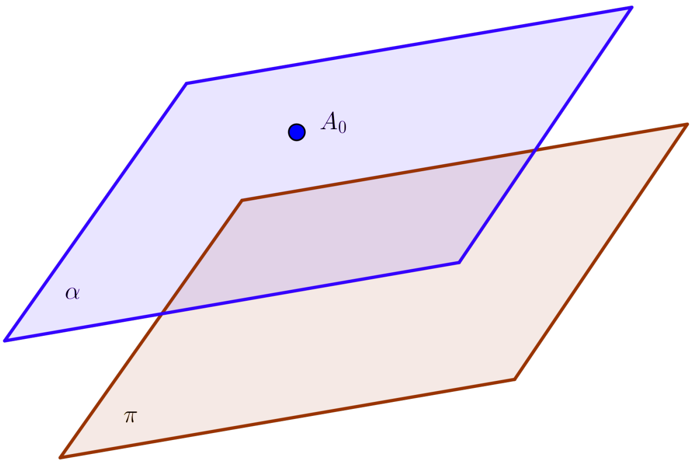
Relaţiile (5.4) sunt adesea scrise sub forma

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{5.5}$$

şi cel mult doi dintre coeficienţii A_2, B_2 sau C_2 ar putea fi zero. De fapt relaţiile (5.5) trebuie înţeles în termeni de dependenţă liniară a vectorilor $(A_1, B_1, C_1),\ (A_2, B_2, C_2) \in \mathbb{R}^3$, adică $(A_1, B_1, C_1) = k(A_2, B_2, C_2)$, unde $k \in \mathbb{R}$ este valoarea comună a acelor rapoarte (5.5) atunci când nici unul dintre coeficienţii A_2, B_2, C_2 nu este zero. Să menţionăm în sfârşit că echivalenţa (5.4) demonstrează echivalenţa (3) $\Longleftrightarrow$ (4) din Propoziţia 5.3.

Exemplul 5.2. Ecuaţia planului α care trece prin punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$, şi este paralel cu planul $\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$ este

$$\alpha:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



5.4 Dreapta ca intersecţie a două plane

Corolarul 5.4. *Considerăm planele*

$$(\pi_1)\, A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ (\pi_2)\, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente

1. $\pi_1 \nparallel \pi_2$.

2. $\dim(\overrightarrow{\pi}_1 \cap \overrightarrow{\pi}_2) = 1.$

3. rang $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$

4. Vectorii $(A_1, B_1, C_1),\ (A_2, B_2, C_2) \in \mathbb{R}^3$ *sunt liniar independenţi.*

Folosind caracterizarea paralelismului dintre o dreaptă şi un plan, dată de Propoziţia 5.1, vom găsi direcţia unei drepte care este dată ca intersecţia a două plane. Considerăm planele $(\pi_1)\, A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $(\pi_2)\, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ astfel încât

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

adică intersecţia celor 2 plane este drepta $\Delta = \pi_1 \cap \pi_2$ de ecuaţii

$$(\Delta) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0. \end{cases}$$

Astfel, $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{\pi}_1 \cap \overrightarrow{\pi}_2$ şi, prin urmare, prin intermediul unei Propoziţii anterioare, rezultă că ecuaţiile lui $\overrightarrow{\Delta}$ sunt

$$(\overrightarrow{\Delta}) \begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1Z = 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Prin rezolvarea sistemului (5.6) se poate deduce că $\overrightarrow{d}(p, q, r) \in \overrightarrow{\Delta} \Leftrightarrow\ \exists\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(p, q, r) = \lambda \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{5.7}$$

Relaţia (5.7) este de obicei scrisă sub forma

$$\frac{p}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{q}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{r}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{5.8}$$

Să menţionăm în sfârşit că de obicei alegem valorile

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \text{ şi } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

pentru parametrii directori (p, q, r) ai Δ.

Exemplul 5.3. Scrieţi ecuaţiile planului prin $P(4, -3, 1)$ care este paralel cu dreptele

$$(\Delta_1) \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ 3y + 2z - 2 = 0. \end{cases} \text{ şi } (\Delta_2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Planul căutat este cel care trece prin $P(4, -3, 1)$ şi este paralel cu vectorii directori $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ şi $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2)$ din Δ_1 şi, respectiv, Δ_2. Se poate alege

$$p_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad p_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$
$$q_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{şi} \quad q_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$
$$r_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad r_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Astfel, ecuaţia planului căutat este

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff 12(x-4) - 3(z-1) + 24(y+3) + 16(z-1) + 6(x-4) + 9(y+3) = 0$$
$$\Longrightarrow 18(x-4) + 33(y+3) + 13(z-1) = 0$$
$$\Longrightarrow 18x + 33y + 13z - 72 + 99 - 13 = 0$$
$$\Longrightarrow 18x + 33y + 13z + 14 = 0.$$

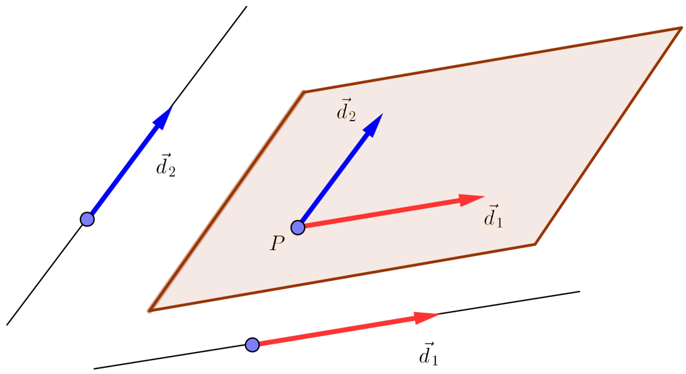


Figure 4:

5.5 Fascicule de plane

Definiţia 5.1. Mulţimea tuturor planelor care conţin o dreaptă dată

$$(\Delta)\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

se numeşte *fascicul* de plane prin Δ.

Propoziţia 5.5. *Planul π aparţine fasciculului de plane prin dreapta Δ dacă şi numai dacă ecuaţia planului π este de forma*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{5.10}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Demonstraţie. Fiecare plan din familia (5.10) conţine evident dreapta Δ.

Să presupunem acum că π este un plan prin dreapta Δ. Considerăm un punct $M \in \pi \setminus \Delta$ şi reamintim că π este complet determinat de Δ şi M. Pe de altă parte, M şi Δ sunt evident conţinute în planul de ecuaţie $F_1(x_M, y_M, z_M)F_2(x, y, z) - F_2(x_M, y_M, z_M)F_1(x, y, z) = 0$ din familia (5.10), unde $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_i(x, y, z) = A_ix + B_iy + C_iz + D_i$, pentru $i = 1, 2$. Astfel, planul π aparţine familiei (5.10) şi ecuaţia sa este

$$F_1(x_M, y_M, z_M)F_2(x, y, z) - F_2(x_M, y_M, z_M)F_1(x, y, z) = 0.$$

□

Observaţia 5.2. Familia de plane $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0$, unde λ acoperă întreaga dreaptă reală $\mathbb{R}$, este aşa-numitul *fascicul redus de plane* prin Δ şi constă în toate planele prin Δ cu excepţia planului de ecuaţie $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Exemplul 5.4. Scrieţi ecuaţiile planului paralel cu dreapta $d: \; x = 2y = 3z$ care trece prin dreapta

$$\Delta : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că niciunul dintre planele $x + y + z = 0$ şi $x - y + 3z = 0$, care trece prin (Δ), nu este paralel cu (d), deoarece $1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} \neq 0$ şi $2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 0$. Astfel, planul căutat se află în fasciculul redus de plane $\pi_\lambda : x + y + z + \lambda(2x - y + 3z) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Relaţia de paralelism dintre (d) şi $\pi_\lambda : (2\lambda + 1)x + (1 - \lambda)y + (3\lambda + 1)z = 0$ este

$$(2\lambda+1)\cdot 1 + (1-\lambda)\cdot\frac{1}{2} + (3\lambda+1)\cdot\frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow 12\lambda + 6 + 3 - 3\lambda + 6\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{11}{15}.$$

Astfel, planul căutat este

$$\pi_{-11/15} : \left(-2\frac{11}{15} + 1\right)x + \left(1 + \frac{11}{15}\right)y + \left(-3\frac{11}{15} + 1\right)z = 0 \Longleftrightarrow -7x + 26y - 18z = 0.$$

5.6 Probleme

1. Scrieţi ecuaţia planului determinat de dreapta

$$(d)\ \left\{\begin{array}{llllllll} x & - & 2y & + & 3z & & & = 0 \\ 2x & & & + & z & - & 3 & = 0 \end{array}\right.$$

şi punctul $A(-1, 2, 6)$.

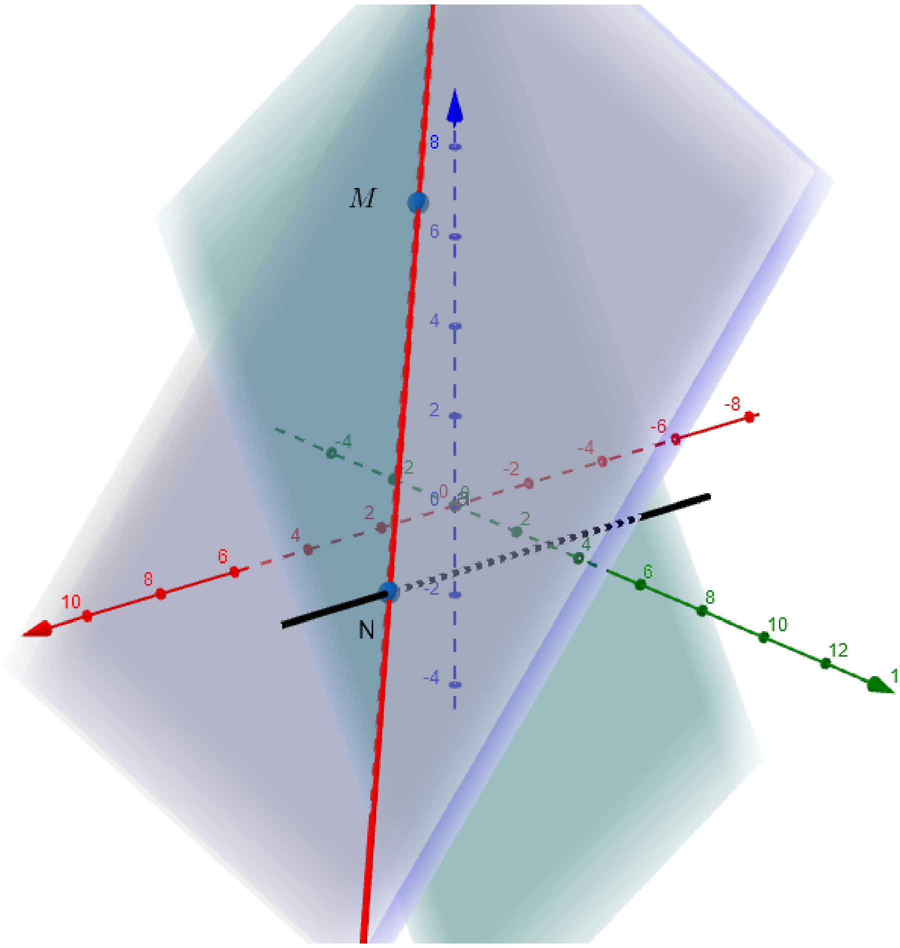
Soluţie.

2. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(1,0,7)$, intersectează dreapta

$$(d)\ \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}.$$

şi este paralelă cu planul $(\pi)\ 3x - y + 2z - 15 = 0$.

Soluţia 1. Ecuaţia planului α care trece prin punctul $M(1,0,7)$ şi este paralel cu planul $(\pi)\ 3x-y+2z-15=0$ este $(\alpha)\ 3(x-1)-(y-0)+2(z-7)=0$, adică $(\alpha)\ 3x-y+2z-17=0$.



Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Coordonatele punctului de intersecţie N dintre dreapta (d) şi planul α pot fi obţinute prin rezolvarea ecuaţiei $3(1+4t) - (3+2t) + 2t - 17 = 0$. Dreapta căutată este MN.

Soluţia 2. Dreapta căutată este dreapta de intersecţie dintre planul α (care trece prin punctul $M(1,0,7)$ şi este paralel cu planul (π)) şi planul determinat de dreapta dată (d) şi punctul M. În timp ce ecuaţia planului $\alpha : 3x - y + 2z - 17 = 0$ a a fost deja folosită mai sus, ecuaţia planului determinat de dreapta (d) şi punctul M poate fi determinată cu ajutorul fasciculului de plane prin

$$(d) \begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{2} \\ \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1} \end{cases} \Leftrightarrow (d) \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Observăm că niciunul dintre planele $x - 2y + 5 = 0$ sau $y - 2z - 3 = 0$ nu trece prin M, ceea ce înseamnă că planul determinat de d şi M sunt în fasciculul redus al acestor plane, adică în familia de plane

$$(\pi_\lambda)\ x - 2y + 5 = 0 + \lambda(y - 2z - 3) = 0.$$

Planul determinat de d şi M poate fi găsit din condţia aspra coordonatelor lui M să verifice ecuaţia lui π_λ.

6 Proiecţii şi simetrii în spaţiu

6.1 Proiecţia pe un plan paralelă cu o dreaptă dată

Considerăm o dreaptă

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi un plan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ care nu sunt paralele între ele, adică

$$Ap + Bq + Cr \neq 0.$$

Acestor date le putem asocia proiecţia $p_{\pi,d} : \mathcal{P} \longrightarrow \pi$ a lui $\mathcal{P}$ pe π paralelă cu d, a cărei valoare $p_{\pi,d}(M)$ în $M \in \mathcal{P}$ este punctul de intersecţie dintre π şi dreapta prin M care este paralelă cu d. Datorită relaţiilor (5.2), coordonatele lui $p_{\pi,d}(M)$, în termenii de coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_M - p\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap + Bq + Cr} \\ y_M - q\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap + Bq + Cr} \\ z_M - r\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap + Bq + Cr}, \end{cases} \tag{6.1}$$

unde $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Aşadar, vectorul de poziţie al lui $p_{\pi,d}(M)$ este

$$\overrightarrow{Op_{\pi,d}(M)} = \overrightarrow{OM} - \frac{F(M)}{Ap + Bq + Cr}\overrightarrow{d}. \tag{6.2}$$

Propoziţia 6.1. *Dacă $R = (O, b)$ este reperul cartezian faţă de care ecuaţiile dreptei d şi a planului π sunt*

$$(d)\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

respectiv (π) $Ax + By + Cz + D = 0$, concurent cu (d), atunci

$$[p_{\pi,d}(M)]_R = \frac{1}{Ap + Bq + Cr}\begin{bmatrix} Bq + Cr & -Bp & -Cp \\ -Aq & Ap + Cr & -Cq \\ -Ar & -Br & Ap + Bq \end{bmatrix}[M]_R - \frac{D}{Ap + Bq + Cr}[\overrightarrow{d}]_b,$$

unde $\overrightarrow{d}(p, q, r)$ reprezintă vectorul director al dreptei (d).

Demonstraţie.

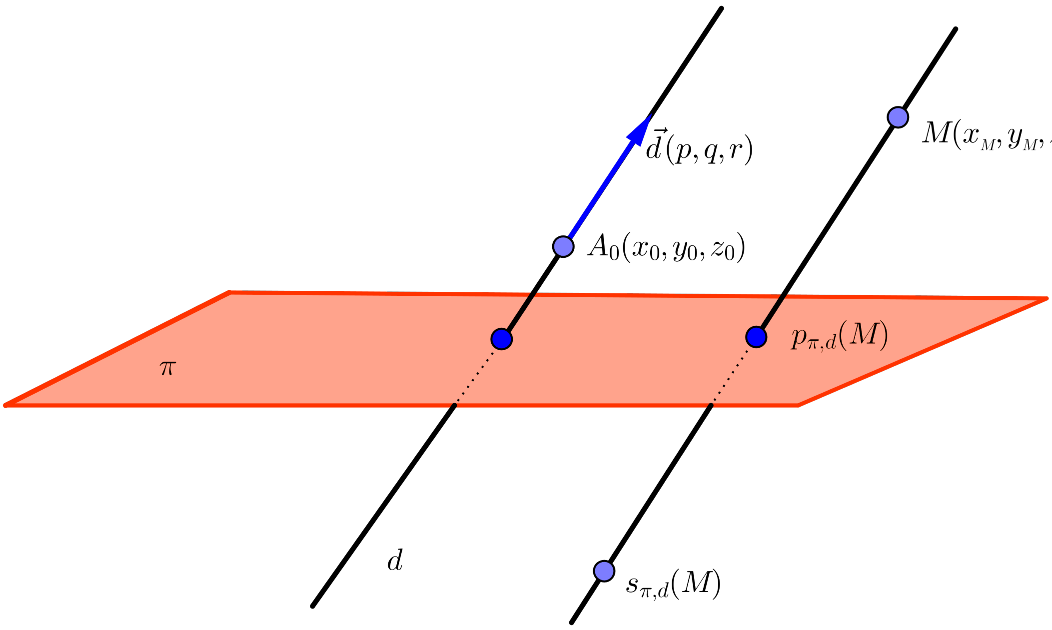
$$[p_{\pi,d}(M)]_R = \begin{bmatrix} x_M - p\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap+Bq+Cr} \\ y_M - q\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap+Bq+Cr} \\ z_M - r\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{Ap+Bq+Cr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{Apx_M + Bqx_M + Crx_M - Apx_M - Bpy_M - Cpz_M - Dp}{Ap+Bq+Cr} \\ \dfrac{Apx_M + Bqy_M + Cry_M - Aqy_M - Bqy_M - Cqz_M - Dq}{Ap+Bq+Cr} \\ \dfrac{Apz_M + Bqz_M + Crz_M - Arx_M - Bry_M - Crz_M - Dr}{Ap+Bq+Cr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Bq+Cr & -Bp & -Cp \\ -Aq & Ap+Cr & -Cq \\ -Ar & -Br & Ap+Bq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Ap+Bq+Cr} \begin{bmatrix} Bq+Cr & -Bp & -Cp \\ -Aq & Ap+Cr & -Cq \\ -Ar & -Br & Ap+Bq \end{bmatrix} [M]_R - \frac{D}{Ap+Bq+Cr}[\overrightarrow{d}]_b.$$

□



6.2 Simetria faţă de un plan paralelă cu o dreaptă dată

Funcţia $s_{\pi,d} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, a cărei valoare $s_{\pi,d}(M)$ în $M \in \mathcal{P}$ este simetricul lui M faţă de $p_{\pi,d}(M)$ *simetria lui* $\mathcal{P}$ *faţă de* π *paralelă cu* d . Direcţia lui d se numeşte şi *direcţia* simetriei şi π se numeşte *axa* simetriei. Pentru vectorul de poziţie $s_{\pi,d}(M)$ avem

$$\overrightarrow{Op_{\pi,d}(M)} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Os_{\pi,d}(M)}}{2}, \text{ adică} \tag{6.3}$$

$$\overrightarrow{Os_{\pi,d}(M)} = 2\overrightarrow{Op_{\pi,d}(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - 2\frac{F(M)}{Ap+Bq+Cr}\overrightarrow{d}. \tag{6.4}$$

Datorită relaţiei (6.11), coordonatele lui $s_{\pi,d}(M)$, în termenii de coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_{_M} - 2p\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr} \\ y_{_M} - 2q\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr} \\ z_{_M} - 2r\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr}, \end{cases} \tag{6.5}$$

unde $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.

Propoziţia 6.2. *Dacă $R = (O, b)$ este reperul cartezian faţă de care ecuaţiile dreptei Δ şi a planului π sunt*

$$(d)\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

respectiv (π) $Ax + By + Cz + D = 0$, concurent cu (d), atunci

$$(Ap{+}Bq{+}Cr)[s_{\pi,d}(M)]_{_R} = \begin{bmatrix} -Ap{+}Bq{+}Cr & -2Bp & -2Cp \\ -2Aq & Ap{-}Bq{+}Cr & -2Cq \\ -2Ar & -2Br & Ap{+}Bq{-}Cr \end{bmatrix} [M]_R - 2D[\overrightarrow{d}]_b, \tag{6.6}$$

unde $\overrightarrow{d}(p, q, r)$ reprezintă vectorul director al dreptei (d).

Demonstraţie.

$$\begin{aligned} [s_{\pi,d}(M)]_{_R} &= \begin{bmatrix} x_{_M} - 2p\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr} \\ y_{_M} - 2q\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr} \\ z_{_M} - 2r\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M}, z_{_M})}{Ap + Bq + Cr} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{Apx_{_M} + Bqx_{_M} + Crx_{_M} - 2Apx_{_M} - 2Bpy_{_M} - 2Cpz_{_M} - Dp}{Ap + Bq + Cr} \\ \dfrac{Apx_{_M} + Bqy_{_M} + Cry_{_M} - 2Aqy_{_M} - 2Bqy_{_M} - 2Cqz_{_M} - Dq}{Ap + Bq + Cr} \\ \dfrac{Apz_{_M} + Bqz_{_M} + Crz_{_M} - 2Arx_{_M} - 2Bry_{_M} - 2Crz_{_M} - Dr}{Ap + Bq + Cr} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -Ap{+}Bq{+}Cr & -2Bp & -2Cp \\ -2Aq & Ap{-}Bq{+}Cr & -2Cq \\ -2Ar & -2Br & Ap{+}Bq{-}Cr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{_M} \\ y_{_M} \\ z_{_M} \end{bmatrix} - 2D \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{Ap + Bq + Cr} \begin{bmatrix} -Ap{+}Bq{+}Cr & -2Bp & -2Cp \\ -2Aq & Ap{-}Bq{+}Cr & -2Cq \\ -2Ar & -2Br & Ap{+}Bq{-}Cr \end{bmatrix} [M]_R - \frac{2D}{Ap + Bq + Cr}[\overrightarrow{d}]_b.$$

□

6.3 Proiecţia pe o dreaptă paralelă cu un plan dat

Considerăm o dreaptă

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi un plan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ care nu sunt paralele între ele, adică

$$Ap + Bq + Cr \neq 0.$$

Acestor date le putem asocia proiecţia $p_{d,\pi} : \mathcal{P} \longrightarrow d$ a lui $\mathcal{P}$ pe d paralelă cu π, a cărei valoare $p_{d,\pi}(M)$ în $M \in \mathcal{P}$ este punctul de intersecţie între d şi planul prin M care este paralel cu π. Datorită relaţiilor (5.2), coordonatele lui $p_{d,\pi}(M)$, în termeni de coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_0 - p\dfrac{G_M(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ y_0 - q\dfrac{G_M(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ z_0 - r\dfrac{G_M(x_0, y_0, z_0)}{Ap + Bq + Cr}, \end{cases} \tag{6.7}$$

unde $G_M(x, y, z) = A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M)$. Prin urmare, vectorul de poziţie al lui $p_{d,\pi}(M)$ este

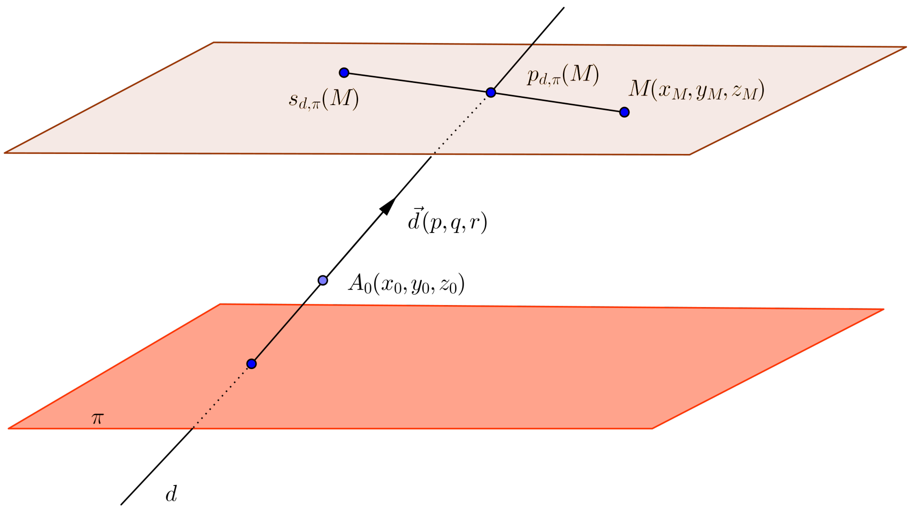
$$\overrightarrow{Op_{d,\pi}(M)} = \overrightarrow{OA_0} - \frac{G_M(A_0)}{Ap + Bq + Cr}\overrightarrow{d}, \text{ unde } A_0(x_0, y_0, z_0). \tag{6.8}$$

Observăm că $G_M(A_0) = A(x_0 - x_M) + B(y_0 - y_M) + C(z_0 - z_M) = F(A_0) - F(M)$, unde $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Prin urmare, coordonatele lui $p_{d,\pi}(M)$, în termenii de coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_0 + p\dfrac{F(M) - F(A_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ y_0 + q\dfrac{F(M) - F(A_0)}{Ap + Bq + Cr} \\ z_0 + r\dfrac{F(M) - F(A_0)}{Ap + Bq + C}, \end{cases} \tag{6.9}$$

iar vectorul de poziţie al lui $p_{d,\pi}(M)$ este

$$\overrightarrow{Op_{d,\pi}(M)} = \overrightarrow{OA_0} + \frac{F(M) - F(A_0)}{Ap + Bq + Cr}\overrightarrow{d}, \text{ unde } A_0(x_0, y_0, z_0). \tag{6.10}$$



6.4 Simetria faţă de o dreaptă paralelă cu un plan

Funcţia $s_{d,\pi} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, a cărei valoare $s_{d,\pi}(M)$ în $M \in \mathcal{P}$ este simetricul lui M faţă de $p_{d,\pi}(M)$, se numeşte *simetria lui $\mathcal{P}$ faţă de d paralelă cu π*. Direcţia lui π se numeşte şi *direcţia* simetriei şi d se numeşte *axa* simetriei. Vectorul de poziţie $s_{d,\pi}(M)$ este

$$\overrightarrow{Op_{d,\pi}(M)} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Os_{d,\pi}(M)}}{2}, \text{ i.e.} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Os_{d,\pi}(M)} &= 2\overrightarrow{Op_{d,\pi}(M)} - \overrightarrow{OM} \\ &= 2\overrightarrow{OA_0} - \overrightarrow{OM} + 2\frac{F(M) - F(A_0)}{Ap + Bq + Cr}\overrightarrow{d}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.5 Probleme

1. Scrieţi ecuaţiile proiecţiei dreptei

$$(d) \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

pe planul $\pi : x + 2y - z = 0$ paralelă cu direcţia $\overrightarrow{u}(1, 1, -2)$. Scrieţi ecuaţiile simetricei dreptei d faţă de planul π paralelă cu direcţia $\overrightarrow{u}(1, 1, -2)$.

Soluţie.

2. Demonstraţi propoziţia 6.1

   Soluţie.

3. Demonstraţi propoziţia 8.13

   Soluţie.

4. Arătaţi că două drepte paralele diferite sunt proiectate fie pe drepte paralele, fie în două puncte printr-o proiecţie $p_{\pi,d}$, unde

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \quad d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi $\pi \nparallel d$.

Soluţie.

5. Arătaţi că două drepte paralele diferite sunt transformate în drepte paralele printr-o simetrie $s_{\pi,d}$, unde

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \quad d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi $\pi \not\parallel d$.

Soluţie.

6. Să presupunem că $R=(O,b)$ $(b=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}])$ este reperul cartezian faţă de care ecuaţiile dreptei Δ şi ale planului π sunt planului $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ şi ale dreptei

$$d:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}.$$

Dacă $\pi \not\parallel d$, arătaţi că

(a) $[\overrightarrow{p_{\pi,d}(M)p_{\pi,d}(N)}]_R=[p]_b[\overrightarrow{MN}]_R$, $\forall\ M,N\in\mathcal{V}$, unde

$$[p]_b=\frac{1}{Ap+Bq+Cr}\begin{bmatrix} Bq+Cr & -Bp & -Cp \\ -Aq & Ap+Cr & -Cq \\ -Ar & -Br & Ap+Bq \end{bmatrix}$$

Soluţie.

(b) $[\overrightarrow{s_{\pi,d}(M)s_{\pi,d}(N)}]_R = [s]_b[\overrightarrow{MN}]_R$, $\forall\ M, N \in \mathcal{V}$, unde

$$[s]_b = \frac{1}{Ap + Bq + Cr}\begin{bmatrix} -Ap + Bq + Cr & -2Bp & -2Cp \\ -2Aq & Ap - Bq + Cr & -2Cq \\ -2Ar & -2Br & Ap + Bq - Cr \end{bmatrix}.$$

Soluţie.

7. Considerăm un plan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ şi o dreaptă

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Dacă $\pi \not\parallel d$, arătaţi că

(a) $p_{\pi,d} \circ p_{\pi,d} = p_{\pi,d}$.

(b) $s_{\pi,d} \circ s_{\pi,d} = id_{\mathcal{P}}$.

Soluţie.

7 Proiecţii şi simetrii în plan

7.1 Punctul de intersecţie a două drepte concurente

Considerăm două drepte

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

şi $\Delta : ax + by + c = 0$ care nu sunt paralele între ele, adică

$$ap + bq \neq 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale lui d sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

Valoarea lui $t \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta d (7.1) intersectează dreapta Δ poate fi determinat cerând ca punctul de coordonate

$$(x_0 + pt, y_0 + qt)$$

să verifice ecuaţia dreaptei Δ şi anume

$$a(x_0 + pt) + b(y_0 + qt) + c = 0.$$

Astfel

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{ap + bq} = -\frac{F(x_0, y_0)}{ap + bq},$$

unde $F(x, y) = ax + by + c$.
Coordonatele punctului de intersecţie $d \cap \Delta$ sunt:

$$\begin{aligned} x_0 - p\frac{F(x_0, y_0)}{ap + bq} \\ y_0 - q\frac{F(x_0, y_0)}{ap + bq}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2 Proiecţia planului pe o dreaptă din plan paralelă cu o dreaptă dată

Considerăm două drepte

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

şi $\Delta : ax + by + c = 0$ care nu sunt paralele între ele, adică $ap + bq \neq 0$. Acestor date le putem asocia proiecţia $p_{\Delta,d} : \pi \to \Delta$ lui π pe Δ paralelă cu d, a cărui valoare $p_{\Delta,d}$ în $M \in \pi$ este punctul de intersecţie dintre Δ şi dreapta prin M care este paralelă cu d. Datorită relaţiilor (7.2), coordonatele lui $p_{\Delta,d}(M)$, în termenii coordonatelor lui M sunt:

$$\begin{aligned} x_M - p\frac{F(x_M, y_M)}{ap + bq} \\ y_M - q\frac{F(x_M, y_M)}{ap + bq}, \end{aligned}$$

unde $F(x, y) = ax + by + c$. Prin urmare, vectorul de poziţie al lui $p_{\Delta,d}(M)$ este

$$\overrightarrow{Op_{\Delta,d}(M)} = \overrightarrow{OM} - \frac{F(M)}{ap + bq}\overrightarrow{d},$$

unde $\overrightarrow{d} = p\overrightarrow{e} + g\overrightarrow{f}$.

Propoziţia 7.1. *Dacă R este reperul cartezian al planului π faţă de care ecuaţiile dreptelor Δ şi d sunt*

$$\Delta : ax + by + c = 0 \text{ şi } d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

atunci

$$[p_{\Delta,d}(M)]_R = \frac{1}{ap + bq} \begin{bmatrix} bq & -bp \\ -aq & ap \end{bmatrix} [M]_R - \frac{c}{ap + bq}[\overrightarrow{d}]_b. \tag{7.3}$$

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
[p_{\pi,d}(M)]_R &= \begin{bmatrix} x_{_M} - p\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M})}{ap + bq} \\ y_{_M} - q\dfrac{F(x_{_M}, y_{_M})}{ap + bq} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{apx_{_M} + bqx_{_M} - apx_{_M} - bpy_{_M} - cp}{ap + bq} \\ \dfrac{apy_{_M} + bqy_{_M} - aqx_{_M} - bqy_{_M} - cq}{ap + bq} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} bq & -bp \\ -aq & ap \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{_M} \\ y_{_M} \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ap + bq} \begin{bmatrix} bq & -bp \\ -aq & ap \end{bmatrix} [M]_R - \frac{c}{ap + bq}[\overrightarrow{d}]_b.
\end{aligned}$$

□

7.3 Simetria planului cu axa şi direcţia date

Funcţia $s_{\Delta,d} : \pi \to \pi$, a cărei valoare $s_{\Delta,d}$ în $M \in \pi$ este simetricul lui M faţă de $p_{\Delta,d}(M)$, se numeşte *simetria lui π faţă de Δ paralelă cu d.* Direcţia lui d se numeşte şi direcţia simetriei, iar π se numeşte *axa simetriei.* Pentru vectorul de poziţie $s_{\Delta,d}(M)$ avem

$$\overrightarrow{Op_{\Delta,d}(M)} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Os_{\Delta,d}(M)}}{2}, \text{ adică}$$

$$\overrightarrow{Os_{\Delta,d}(M)} = 2\overrightarrow{Op_{\Delta,d}(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - 2\frac{F(M)}{ap + bq}\overrightarrow{d},$$

unde $F(x, y) = ax + by + c$. Astfel, coordonatele lui $s_{\Delta,d}(M)$, în termenii de coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_M - 2p\dfrac{F(x_M, y_M)}{ap + bq} \\ y_M - 2q\dfrac{F(x_M, y_M)}{ap + bq}. \end{cases}$$

Propoziţia 7.2. *Dacă R este reperul cartezian al planului π faţă de care ecuaţiile dreptelor Δ şi d sunt*

$$\Delta : ax + by + c = 0 \text{ şi } d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

atunci

$$[s_{\Delta,d}(M)]_R = \frac{1}{ap + bq} \begin{bmatrix} -ap + bq & -2bp \\ -2aq & ap - bq \end{bmatrix} [M]_R - \frac{2c}{ap + bq}[\overrightarrow{d}]_b. \tag{7.4}$$

Demonstraţie.

$$
\begin{aligned}
[s_{\pi,d}(M)]_R &= \begin{bmatrix} x_M - 2p\dfrac{F(x_M, y_M)}{ap+bq} \\ y_M - 2q\dfrac{F(x_M, y_M)}{ap+bq} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{apx_M + bqx_M - 2pax_M - 2bpy_M - 2cp}{ap+bq} \\ \dfrac{apy_M + bqy_M - 2aqx_M - 2bqy_M - 2cq}{ap+bq} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -ap+bq & -2bp \\ -2aq & ap-bq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} - 2c \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\
&\frac{1}{ap+bq} \begin{bmatrix} -ap+bq & -2bp \\ -2aq & ap-bq \end{bmatrix} [M]_R - \frac{2c}{ap+bq}[\overrightarrow{d}]_b.
\end{aligned}
$$

□

8 Produse de vectori

8.1 Produsul scalar

Definiţia 8.1. Valoarea reală

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{cases} 0 \text{ if } \overrightarrow{a} = 0 \text{ or } \overrightarrow{b} = 0 \\ ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) \text{ if } \overrightarrow{a} \neq 0 \text{ şi } \overrightarrow{b} \neq 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

se numeşte *produsul scalar* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

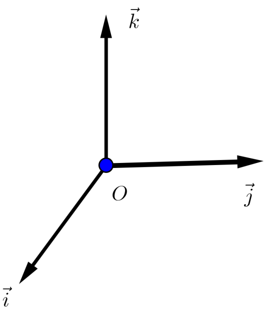
Observaţia 8.1.

1. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{a}|| \cos 0 = ||\overrightarrow{a}||^2$.

Propoziţia 8.1. *Produsul scalar are următoarele proprietăţi:*

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$.
2. $\overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$.
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}$.
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}$.
5. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Definiţia 8.2. O bază $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ se numeşte *ortonormată*, dacă $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$, $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{i}$ $(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0)$. Un reper cartezian $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ se numeşte *ortonormat* dacă baza $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este ortonormată.



orthonormal basis

Observaţia 8.2. Ortogonalitatea bazei $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ se poate rescrie, matriceal, astfel

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propoziţia 8.2. *Fie* $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ *o bază ortonormată şi* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$. *Dacă*

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k} \text{ şi } \overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k},$$

atunci

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{8.2}$$

Proof. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= (a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}) \cdot (b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k}) \\
&= a_1b_1 \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + a_1b_2 \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + a_1b_3 \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} \\
&+ a_2b_1 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + a_2b_2 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} + a_2b_3 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} \\
&+ a_3b_1 \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} + a_3b_2 \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} + a_3b_3 \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

□

Observaţia 8.3. Fie $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ o bază ortonormată şi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$. Dacă

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k} \text{ şi } \overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k},$$

atunci

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ deducem că $||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
2. $$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}||} \\
&= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

   În particular

   $$\begin{aligned}
   \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}}) &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \\
   \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}}) &= \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \\
   \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k}}) &= \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.
   \end{aligned}$$
3. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

Propoziţia 8.3. *Fie* $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ *o bază ortonormată a spaţiului vectorial* $\mathcal{V}$ *şi fie* T *matricea de trecere de la baza* b *la o bază* $b' = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$, *adică*

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{c} = c_1 \overrightarrow{i} + c_2 \overrightarrow{j} + c_3 \overrightarrow{k}.$$

Baza b' *este ortonormată dacă şi numai dacă matricea* T *este ortogonală, adică* $T^{-1} = T^t$.

Demonstraţie. Într-adevăr baza b' este ortonormată dacă şi numai dacă

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 & c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 & c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow T^{-1} = T^t.$$

□

Exemplul 8.1. Fie $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ o bază ortonormată a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Să se arate că sistemul $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}]$, unde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i}' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k}' &= \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

este o bază ortonormată a lui $\mathcal{V}$.

Soluţie. (Indicaţie: Se reduce la demonstrarea ortogonalităţii matricii de trecere de la baza b la baza b'.)

□

Propoziţia 8.4. *Fie $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$, $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}']$ două baze ortonormate ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Dacă T este matricea (ortogonală) de trecere de la baza b la baza b', atunci*

$$[\overrightarrow{x}]_b = T[\overrightarrow{x}]_{b'},\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathcal{V}.$$

Matricea de trecere de la baza b' la baza b este $T^{-1} = T^t$.

Mulţimea $O(3) = \{T \in M_3(\mathbb{R}) \ : \ T^{-1} = T^t\}$ a matricilor 3×3 ortogonale, este conţinută în grupul liniar general $GL(3, \mathbb{R})$ şi este, de fapt, un subgrup al lui $GL(3, \mathbb{R})$ numit *grupul ortogonal* al matricilor 3×3 ortogonale.

Definiţia 8.3. O bază a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π se numeşte *ortonormată*, dacă $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 1$, $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$ ($\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$). Un reper cartezian $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ se numeşte *ortonormat* dacă baza $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ este ortonormată.

Propoziţia 8.5. *Fie $R = (O, b)$ şi $R' = (O', b')$ două repere carteziene ortonormate ale lui $\mathcal{P}$ şi T matricea (ortogonală) de trecere de la bază b la baza b'. Coordonatele carteziene ortonormate ale unui punct M se schimbă după formula*

$$[M]_R = T \cdot [M]_{R'} + [O']_R.$$

Propoziţia 8.6. *Fie $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ o bază ortonormată a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π şi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \overrightarrow{\pi}$. Dacă $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}$, atunci*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{8.4}$$

Propoziţia 8.7. *Fie $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ o bază ortonormată a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π şi fie T matricea de trecere de la baza b la o bază $b' = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, adică*

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j}, \ \ \overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}.$$

Baza b' este ortonormată dacă şi numai dacă matricea T este ortogonală, adică $T^{-1} = T^t$.

Exemplul 8.2. Fie $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ o bază ortonormată a direcţiei $\overrightarrow{\pi}$ a planului π. Saă se arate că pentru orice valoare reală θ, $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}']$, unde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i}' &= \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j}' &= -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

este o bază ortonormată a lui $\overrightarrow{\pi}$.

Soluţie. (Indicaţie: Se reduce la demonstrarea ortogonalităţii matricii de trecere de la baza b la baza b'.)

□

Propoziţia 8.8. *Fie π un plan şi fie $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$, $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}']$ două baze ortonormate ale direcţiei sale $\overrightarrow{\pi}$. Dacă T este matricea (ortogonală) de trecere de la baza b la baza b', atunci*

$$[\overrightarrow{x}]_b = T[\overrightarrow{x}]_{b'}, \ \forall \overrightarrow{x} \in \mathcal{V}.$$

Matricea de trecere de la baza b' la baza b este $T^{-1} = T^t$.

Mulţimea $O(2) = \{T \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ T^{-1} = T^t\}$ al matricilor 2×2 ortogonale, este conţinută în grupul liniar general $GL(2, \mathbb{R})$ şi este, de fapt, un subgrup al lui $GL(2, \mathbb{R})$ numit *grupul ortogonal* al matricilor 2×2 ortogonale.

Propoziţia 8.9. *Fie $R = (O, b)$ şi $R' = (O', b')$ două repere carteziene ortonormate ale lui planului π şi T matricea (ortogonală) de trecere de la bază b la baza b'. Coordonatele carteziene ale unui punct M se schimbă după formula*

$$[M]_R = T \cdot [M]_{R'} + [O']_R.$$

8.2 Panta unei drepte ([1])

Fie d o dreaptă de ecuaţie $y = mx+n$, faţă de un sistem cartezian ortonormat de coordonate, şi să presupunem că dreapta nu este paralelă cu axa Oy. Fie $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ două puncte diferite ale dreptei d şi φ unghiul determinat de d şi Ox (vezi Figura 5); $\varphi \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$. Întrucât punctele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ aparţin lui d, avem

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n, \end{cases}$$

şi $x_2 \neq x_1$, deoarece d nu este paralel cu Oy. Prin urmare,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \varphi. \tag{8.5}$$

Numărul $m = \tan \varphi$ se numeşte *panta* dreptei d. Evident ecuaţia dreptei care trece prin punctul

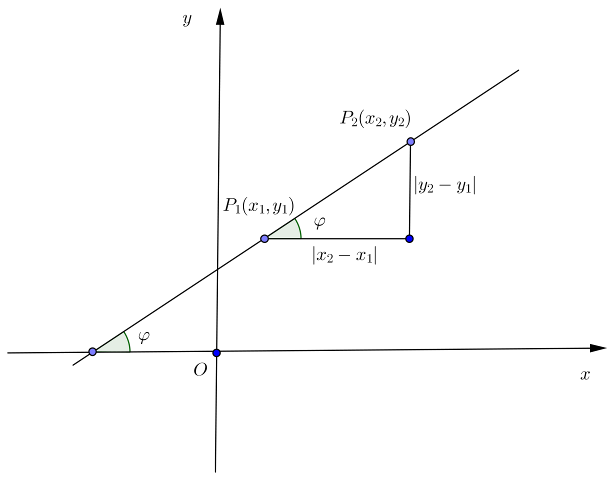


Figure 5:

$P_0(x_0, y_0)$ şi are coeficientului unghiular dat m este

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{8.6}$$

8.3 Unghiul a două drepte ([1])

Fie d_1 şi d_2 două drepte concurente, date prin ecuaţiile lor reduse:

$$d_1 : y = m_1 x + n_1 \quad \text{and} \quad d_2 : y = m_2 x + n_2.$$

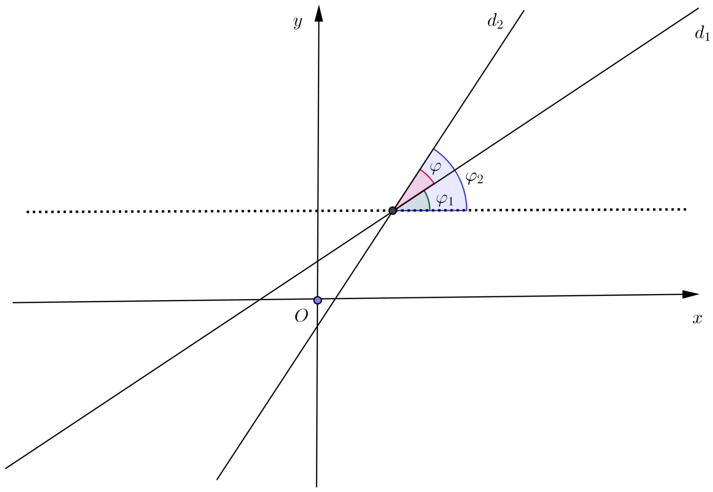


Figure 6:

Coeficienţii unghiulari ai lui d_1 şi d_2 sunt $m_1 = \tan\varphi_1$ şi $m_2 = \tan\varphi_2$ (vezi Figura 6). Dacă, $\varphi_2 \geq \varphi_1$, astfel încât $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$. Unghiul determinat de d_1 şi d_2 este dat de

$$\tan\varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_1 \tan\varphi_2},$$

prin urmare

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \tag{8.7}$$

1) Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele dacă şi numai dacă $\tan\varphi = 0$, adică

$$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2. \tag{8.8}$$

2) Dreptele d_1 şi d_2 sunt ortogonale dacă şi numai dacă unghiul determinat de ele este $\dfrac{\pi}{2}$, adică

$$d_1 \perp d_2 \iff m_1 m_2 + 1 = 0. \tag{8.9}$$

8.4 Aplicaţii ale produsului scalar

♢ Cazul doi dimensional

- **Distanţa dintre două puncte** Considerăm două puncte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B) \in \pi$. Norma vectorului $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ este

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- **Ecuaţia cercului**

  Amintim că cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că $\operatorname{dist}(O, M) = r \iff \|\overrightarrow{OM}\| = r$. Dacă (a, b) sunt coordonatele lui O şi (x, y) sunt coordonatele lui M, atunci

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OM}\| = r &\iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,\end{aligned} \tag{8.10}$$

unde $c = a^2 + b^2 - r^2$. Invers, orice ecuaţie de forma $x^2 + y^2 + 2ex + 2fy + g = 0$ este ecuaţia cercului de centru $(-e, -f)$ şi rază $r = \sqrt{e^2 + f^2 - g}$, dacă $e^2 + f^2 \geq g$. Putem determina ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC cerând coordonatelor (x_A, y_A), (x_B, y_B) şi (x_C, y_C) ale vârfurilor A, B, C să verifice ecuaţial

$$x^2 + y^2 + 2ex + 2fy + g = 0.$$

Un punct $M(x, y)$ aparţine cercului circumscris triunghiului ABC dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ex + 2fy + g = 0 \\ x_A^2 + y_A^2 + 2ex_A + 2fy_A + g = 0 \\ x_B^2 + y_B^2 + 2ex_B + 2fy_B + g = 0 \\ x_C^2 + y_C^2 + 2ex_C + 2fy_C + g = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

Putem privi sistemul (8.11) ca fiind unul liniar cu necunoscutele e, g, f, a cărui compatibilitate este dată, via teorema lui Kronecker-Capelli, de condiţia

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.

- **Vectorul normal al unei drepte în cazul doi dimensional.** Dacă $R = (O, b)$ este reperul cartezian ortonormat faţă de care dreapta d are ecuaţia (d) $ax + by + c = 0$, atunci $\overrightarrow{n}(a, b)$ este un vector normal al direcţiei $\overrightarrow{d}$ al dreptei d. Într-adevăr, orice vector al direcţiei $\overrightarrow{d}$ al dreptei d are forma $\overrightarrow{PM}$, unde $P(x_P, y_P)$ şi $M(x, y)$ sunt două puncte ale dreptei d. Aşadar, $ax_P + by_P + c = 0 = ax_M + by_M + c$, fapt care arată că

$$a(x_M - x_P) + b(y_M - y_P) = 0,$$

adică

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{PM}.$$

- **Distanţa de las un punct la o dreaptă.** Dacă (d) $ax + by + c = 0$ este o dreaptă şi $M(x_M, y_M) \in \pi$ este un punct dat, atunci distanţa de la M la d este

$$\delta(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{8.12}$$

Într-adevăr, $\delta(M, d) = |\delta|$, unde δ este valoarea reală cu proprietatea $\overrightarrow{PM} = \delta \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}$ şi $P(x_P, y_P)$ este proiecţia ortogonală a lui $M(x_M, y_M)$ pe d. Aşadar $\overrightarrow{PM}(x_M - x_P, y_M - y_P)$ şi

$$\begin{aligned} \delta(M, d) &= |\delta| = \left| \overrightarrow{PM} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \right| = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|a(x_M - x_P) + b(y_M - y_P)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_M + by_M - ax_P - by_P)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

$\lozenge$ **Cazul trei dimensional**

- **Distanţa dintre două puncte** Considerăm două puncte $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B) \in \mathcal{P}$. Norma vectorului $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ este

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- **Ecuaţia sferei**

  Să ne amintim că sfera $\mathcal{S}(O,r)$ este locul geometric al punctelor M din spaţiu astfel încât $\mathrm{dist}(O,M)=r \iff \|\overrightarrow{OM}\|=r$. Dacă (a,b,c) sunt coordonatele lui O şi (x,y,z) sunt coordonatele lui M, atunci

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OM}\|=r &\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r\\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\\ &\iff x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,\end{aligned}$$

  unde $d=a^2+b^2+c^2-r^2$. Pe de altă parte, orice ecuaţie de forma

$$x^2+y^2+z^2+2ex+2fy+2gz+h=0$$

  este ecuaţia sferei cu centrul în $(-e,-g,-f)$ şi raza $r=\sqrt{e^2+f^2+g^2-h}$, dacă $e^2+f^2+g^2\geq h$. Se poate găsi ecuaţia sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ prin impunerea cerinţei asupra coordonatelor (x_A,y_A,z_A), (x_B,y_B,z_B), (x_C,y_C,z_C) şi (x_D,y_D,z_D) a vârfurilor sale A,B,C,D de a verifica ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2+2ex+2fy+2gz+h=0.$$

  Un punct $M(x,y,z)$ aparţine acestui cerc circumscris dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2ex+2fy+2gz+h=0\\ x_A^2+y_A^2+z_A^2+2ex_A+2fy_A+2gz_A+h=0\\ x_B^2+y_B^2+z_B^2+2ex_B+2fy_B+2gz_B+h=0\\ x_C^2+y_C^2+z_C^2+2ex_C+2fy_C+2gz_C+h=0\\ x_D^2+y_D^2+z_D^2+2ex_D+2fy_D+2gz_A+h=0\end{cases} \tag{8.13}$$

  Privind sistemul (8.13) ca fiind liniar cu necunoscutele e,g,f,h, a cărui compatibilitate este dată, via teoarema lui Kronecker-Capelli, prin

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1\\ x_A^2+y_A^2+z_A^2 & x_A & y_A & z_A & 1\\ x_B^2+y_B^2+z_B^2 & x_B & y_B & z_B & 1\\ x_C^2+y_C^2+z_C^2 & x_C & y_C & z_C & 1\\ x_D^2+y_D^2+z_D^2 & x_D & y_D & z_A & 1\end{vmatrix}=0. \tag{8.14}$$

  Aşadar ecuaţia (8.14) este o caracterizare a punctelor sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ şi se numeşte *ecuaţia sferei circumscrise tetraedrului* $ABCD$.

- **Vectorul normal al unui plan trei dimensional.** Considerăm planul $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ şi punctul $P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$. Ecuaţia planului π devine

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8.15}$$

  Dacă $M(x,y,z)\in\pi$, coordonatele vectorului $\overrightarrow{PM}$ sunt $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, iar ecuaţia (8.15) ne spune că $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$, pentru orice $M\in\pi$, adică $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{PM}=0$, pentru orice $M\in\pi$, fapt care este echivalent cu relaţia $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\pi}$, unde $\overrightarrow{n}(A,B,C)$. Acesta este motivul pentru care $\overrightarrow{n}(A,B,C)$ se numeşte *vectorul normal* al planului π.

- **Distanţa de la un punct la un plan** Considerăm planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, şi punctul $P(x_P, y_P, z_P) \in \mathcal{P}$, iar M proiecţia ortogonală a lui P pe planul π. Valoarea reală δ dată prin $\overrightarrow{MP} = \delta \cdot \overrightarrow{n}_0$ se numeşte *distanţa orientată* de la punctul P la planul π, unde $\overrightarrow{n}_0 = \frac{1}{||\overrightarrow{n}||}\overrightarrow{n}$ este versorul vectorului normal $\overrightarrow{n}(A, B, C)$. Deoarece $\overrightarrow{MP} = \delta \cdot \overrightarrow{n}_0$, deducem că $\delta(P, M) = ||\overrightarrow{MP}|| = |\delta|$, unde $\delta(P, M)$ este distanţa de la punctul P la planul π. Vom arăta că
$$\delta = \frac{Ax_P + By_P + Cz_P + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$
Într-adevăr, deoarece $\overrightarrow{MP} = \delta \cdot \overrightarrow{n}_0$, deducem:
$$\begin{aligned}\delta &= \overrightarrow{n}_0 \cdot \overrightarrow{MP} = \left(\tfrac{1}{||\overrightarrow{n}||}\overrightarrow{n}\right) \cdot \overrightarrow{MP} = \tfrac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{MP}}{||\overrightarrow{n}||}\\ &= \frac{A(x_P - x_M) + B(y_P - y_M) + C(z_P - z_M)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\\ &= \frac{Ax_P + By_P + Cz_P - (Ax_M + By_M + Cz_M)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\\ &= \frac{Ax_P + By_P + Cz_P + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$
Prin urmare distanţa de la punctul P la planul π este
$$\delta(P, \pi) = ||\overrightarrow{MP}|| = |\delta| = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Exemplul 8.3. Calculaţi distanţa de la punctul $A(3, 1, -1)$ la planul
$$\pi : 22x + 4y - 20z - 45 = 0.$$

Soluţie.
$$\delta(A, \pi) = \frac{|22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + (-20)^2}} = \frac{45}{\sqrt{900}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

8.5 Proiecţii şi simetrii ortogonale

8.5.1 Cazul doi dimensional

Presupunem că $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ este un reper cartezian ortonormat al planului π faţă de care dreapta Δ are ecuaţia $ax + by + c = 0$.

• **Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă.** Definim proiecţia ortogonală a planului ambiant $p_\Delta : \pi \to \Delta$ pe Δ, a cărei valoare $p_\Delta(M)$ în $M \in \pi$, este punctul de intersecţie între Δ şi dreapta prin M perpendiculară pe Δ. datorită relaţiilor (7.2), coordonatele lui $p_\Delta(M)$, în termenii coordonatelor lui M sunt:
$$\begin{aligned}&x_M - p\frac{F(x_M, y_M)}{a^2 + b^2}\\ &y_M - q\frac{F(x_M, y_M)}{a^2 + b^2},\end{aligned}$$
unde $F(x, y) = ax + by + c$. Prin urmare, vectorul de poziţie al punctului $p_\Delta(M)$ este
$$\overrightarrow{Op_\Delta(M)} = \overrightarrow{OM} - \frac{F(M)}{a^2 + b^2}\overrightarrow{n_\Delta},$$
unde $\overrightarrow{n}_\Delta = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

Propoziţia 8.10. *Dacă $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ este reperul cartezian ortonormat al planului π faţă de care ecuaţia dreptei Δ este $ax + by + c = 0$, atunci*

$$[p_\Delta(M)]_R = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix}[M]_R - \frac{c}{a^2+b^2}[\overrightarrow{n}_\Delta]_b, \tag{8.16}$$

unde b este baza ortonormată $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ of $\overrightarrow{\pi}$.

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
[p_\Delta(M)]_R &= \begin{bmatrix} x_M - a\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2} \\ y_M - b\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a^2x_M + b^2x_M - a^2x_M - aby_M - c}{a^2+b^2} \\ \dfrac{a^2y_M + b^2y_M - abx_M - b^2y_M - c}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} - c\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&== \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix}[M]_R - \frac{c}{a^2+b^2}[\overrightarrow{n}_\Delta]_b.
\end{aligned}$$

□

• **Simetria ortogonală a planului faţă de o dreaptă** Numim funcţia $r_\Delta : \pi \to \pi$, a cărei valoare $r_\Delta(M)$ în $M \in \pi$, este simetricul punctului M faţă de $p_\Delta(M)$, *simetria ortogonală a planului π faţă de dreapta Δ*. Vectorul de poziţie a lui $r_\Delta(M)$ este dat de relaţia

$$\overrightarrow{Op_\Delta(M)} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Or_\Delta(M)}}{2}, \text{ i.e.}$$

$$\overrightarrow{Or_\Delta(M)} = 2\overrightarrow{Op_\Delta(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - 2\frac{F(M)}{a^2+b^2}\overrightarrow{n}_\Delta,$$

unde $F(x, y) = ax + by + c$ şi $\overrightarrow{n}_\Delta = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$. Prin urmare, coordonatelui lui $s_{\Delta,d}(M)$, în termenii coordonatelor lui M, sunt

$$\begin{cases} x_M - 2p\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2} \\ y_M - 2q\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Propoziţia 8.11. *Dacă $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ este reperul cartezian ortonormat al planului π faţă de care ecuaţia dreptei Δ este $ax + by + c = 0$, atunci*

$$[r_\Delta(M)]_R = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}[M]_R - \frac{2c}{a^2+b^2}[\overrightarrow{n}_\Delta]_b, \tag{8.17}$$

unde b este baza ortonormată $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ a lui $\overrightarrow{\pi}$.

Demonstraţie.

$$
\begin{aligned}
[p_\Delta(M)]_R &= \begin{bmatrix} x_M - 2a\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2} \\ y_M - 2b\dfrac{F(x_M, y_M)}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a^2x_M + b^2x_M - 2a^2x_M - 2aby_M - 2c}{a^2+b^2} \\ \dfrac{a^2y_M + b^2y_M - 2abx_M - 2b^2y_M - 2c}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} - 2c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix} [M]_R - \frac{2c}{a^2+b^2} [\overrightarrow{n}_\Delta]_b \, .
\end{aligned}
$$

□

Exemplul 8.4. Găsiţi coordonatele simetricului ortogonal al punctului $P(-5, 13)$ faţă de dreapta $d : 2x - 3y - 3 = 0$, ştiind că planul ambiant π al punctului P şi al dreptei d este raportat la un reper cartezian ortonormat.

INDICAŢIE. Folosind ecuaţia 8.18 deducem:

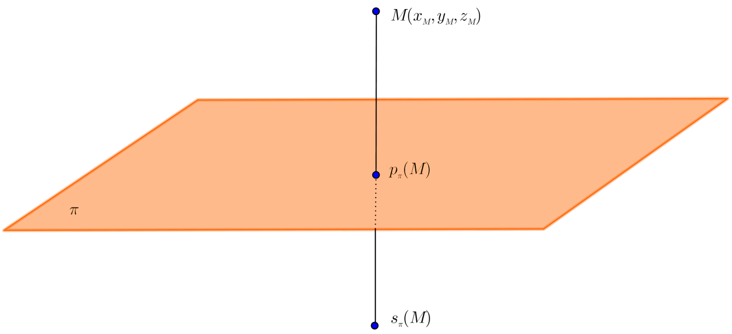
$$
[r_d(P)]_R = \frac{1}{2^2+(-3)^2} \begin{pmatrix} -2^2+(-3)^2 & -2\cdot 2\cdot(-3) \\ -2\cdot 2\cdot(-3) & 2^2-(-3)^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix} - \frac{2\cdot(-3)}{2^2+(-3)^2} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} . \quad (8.18)
$$

8.5.2 Cazul trei dimensional

• **Proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan.** Date fiind planul

$$
\pi : Ax + By + Cz + D = 0
$$

şi punctul $M(x_M, y_M, z_M)$, vom determina coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului M pe planul π şi coordonatele simetricului ortogonale al punctului M faţă de planul π. Ecuaţia planului şi coordonatele lui M sunt considerate faţă de reperul cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. În acest sens considerăm dreapta perpendiculară pe planul π care trece prin punctul M.



Ecuaţiile sale parametrice sunt

$$
\begin{cases} x = x_M + At \\ y = y_M + Bt \\ z = z_M + Ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}. \quad (8.19)
$$

Proiecţia ortogonală $p_\pi(M)$ a lui M pe planul π este punctul de intersecţie dintre planul π şi perpendiculara (8.19), iar valoarea lui $t \in \mathbb{R}$ pentru care această perpendiculară (8.19) întâlneşte planul π poate fi determinat cerând ca valorile $(x_M + At, y_M + Bt, z_M + Ct)$ să verifice ecuaţia planului, adică $A(x_M + At) + B(y_M + Bt) + C(z_M + Ct) + D = 0$. Prin urmare

$$t = -\frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{F(x_M, y_M, z_M)}{\|\overrightarrow{n}_\pi\|^2},$$

unde $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ şi $\overrightarrow{n}_\pi = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ este vectorul normal al planului π.

• **Proiecţia ortogonală a a spaţiului pe un plan.** Coordonatele proiecţiei ortogonale $p_\pi(M)$ a lui M pe planul π sunt

$$\begin{cases} x_M - A\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2} \\ y_M - B\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2} \\ z_M - C\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Aşadar, vectorul de poziţie al proiecţiei ortogonale $p_\pi(M)$ este

$$\overrightarrow{Op_\pi(M)} = \overrightarrow{OM} - \frac{F(M)}{\|\overrightarrow{n}_\pi\|^2}\overrightarrow{n}_\pi. \tag{8.20}$$

Propoziţia 8.12. *Dacă $R = (O, b)$ este reperul cartezian ortonormat faţă de care ecuaţia planului (π) este $Ax + By + Cz + D = 0$, atunci*

$$(A^2 + B^2 + C^2)[p_\pi(M)]_R = \begin{bmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{bmatrix} [M]_R - D[\overrightarrow{n}_\pi]_b. \tag{8.21}$$

Demonstraţie.

$$[p_\pi(M)]_R = \begin{bmatrix} x_M - A\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2} \\ y_M - B\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2} \\ z_M - C\dfrac{F(x_M, y_M, z_M)}{A^2 + B^2 + C^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{A^2x_M + B^2x_M + C^2x_M - A^2x_M - ABy_M - ACz_M - D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ \dfrac{A^2x_M + B^2y_M + C^2y_M - ABy_M - B^2y_M - BCz_M - D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ \dfrac{A^2z_M + ABz_M + ACz_M - ACx_M - BCy_M - C^2z_M - D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{bmatrix} [M]_R - \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}[\overrightarrow{d}]_b.$$

$\square$

Observaţia 8.4. Distanţa de la punctul $M(x_M, y_M, z_M)$ la planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ poate fi calculată şi cu ajutorul formulei (8.20). Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\delta(M,\pi) &= \| \overrightarrow{Mp_\pi(M)} \| = \| \overrightarrow{Op_\pi(M)} - \overrightarrow{OM} \| \\ &= \left| -\tfrac{F(M)}{\|\overrightarrow{n}_\pi\|^2}\right| \cdot \|\overrightarrow{n}_\pi\| = \frac{|F(M)|}{\|\overrightarrow{n}_\pi\|}.\end{aligned}$$

• **Simetria ortogonală a spaţiului faţă de un plan.** Pentru a găsi vectorul de poziţie al simetricului ortogonal $r_\pi(M)$ al punctului M faţă de planul π, folosim relaţia

$$\overrightarrow{Op_\pi(M)} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Or_\pi(M)}\right),$$

adică

$$\overrightarrow{Or_\pi(M)} = 2\,\overrightarrow{Op_\pi(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - 2\frac{F(M)}{\|\overrightarrow{n}_\pi\|^2}\overrightarrow{n}_\pi.$$

Corespondenţa care asociază unui punct M simetricul său ortogonal faţă de planul π, se numeşte *simetria ortogonală* faţă de planul π şi se notează cu r_π.

Propoziţia 8.13. *Dacă $R = (O, b)$ este reperul cartezian ortonormat faţă de care ecuaţia planului (π) este $Ax + By + Cz + D = 0$, atunci*

$$(A^2+B^2+C^2)[r_\pi(M)]_R = \begin{bmatrix} -A^2+B^2+C^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2-B^2+C^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2+B^2-C^2 \end{bmatrix}[M]_R - 2D[\overrightarrow{n}_\pi]_b. \quad (8.22)$$

Demonstraţie.

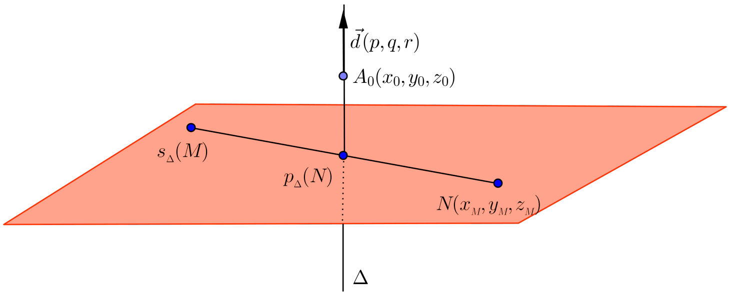
$$\begin{aligned}[r_\pi(M)]_R &= \begin{bmatrix} x_M - 2A\dfrac{F(x_M,y_M,z_M)}{A^2+B^2+C^2} \\ y_M - 2B\dfrac{F(x_M,y_M,z_M)}{A^2+B^2+C^2} \\ z_M - 2C\dfrac{F(x_M,y_M,z_M)}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{A^2x_M + B^2x_M + C^2x_M - 2A^2x_M - 2ABy_M - 2ACz_M - 2D}{A^2+B^2+C^2} \\ \dfrac{A^2x_M + B^2y_M + C^2y_M - 2ABy_M - 2B^2y_M - 2BCz_M - 2D}{A^2+B^2+C^2} \\ \dfrac{A^2z_M + ABz_M + ACz_M - 2ACx_M - 2BCy_M - 2C^2z_M - 2D}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A^2+B^2+C^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2-B^2+C^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2+B^2-C^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} - 2D\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{A^2+B^2+C^2}\begin{bmatrix} -A^2+B^2+C^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2-B^2+C^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2+B^2-C^2 \end{bmatrix}[M]_R - \frac{D}{A^2+B^2+C^2}[\overrightarrow{d}]_b.\end{aligned}$$

□

• **Proiecţia ortogonală a a spaţiului pe o dreaptă.** Dată fiind o dreaptă

$$\Delta : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi un punct $N(x_{_N}, y_{_N}, z_{_N})$, vom găsi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului N pe dreapta Δ, precum şi coordonatele simetricului ortogonal al punctului M faţă de dreapta Δ. Ecuaţiile dreptei ş coordonatele punctului N sunt considerate faţă de un reper cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pentru a găsi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului N pe dreapta Δ considerăm planul $p(x - x_{_N}) + q(y - y_{_N}) + r(z - z_{_N}) = 0$ ortogonal pe dreapta Δ care trece prin punctul N.



Ecuaţiile parametrice ale dreptei Δ sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{8.23}$$

Proiecţia ortogonală a lui N pe dreapta Δ este punctul de intersecţie dintre dreapta Δ şi planul

$$p(x - x_{_N}) + q(y - y_{_N}) + r(z - z_{_N}) = 0,$$

iar valoarea lui $t \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta Δ întâlneşte planul ortogonal

$$p(x - x_{_N}) + q(y - y_{_N}) + r(z - z_{_N}) = 0$$

poate fi găsită cerând coordonatelor $(x_0 + pt, y_0 + qt, z_0 + rt)$ să verifice ecuaţia planului, adică $p(x_0 + pt - x_{_N}) + q(y_0 + qt - y_{_N}) + r(z_0 + rt - z_{_N}) = 0$. Aşadar

$$t = -\frac{p(x_0 - x_{_N}) + q(y_0 - y_{_N}) + r(z_0 - z_{_N})}{p^2 + q^2 + r^2} = -\frac{G(x_{_0}, y_{_0}, z_{_0})}{\|\overrightarrow{d}_{_\Delta}\|^2},$$

unde $G(x, y, z) = p(x - x_{_N}) + q(y - y_{_N}) + r(z - z_{_N})$ şi $\overrightarrow{d}_{_\pi} = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j} + r\overrightarrow{k}$ este vectorul director al dreptei Δ. Coordonatele proiecţiei ortogonale $p_{_\Delta}(N)$ ale punctului N pe dreapta Δ sunt:

$$\begin{cases} x_{_0} - p\dfrac{G(x_{_0}, y_{_0}, z_{_0})}{p^2 + q^2 + r^2} \\ y_{_0} - q\dfrac{G(x_{_0}, y_{_0}, z_{_0})}{p^2 + q^2 + r^2} \\ z_{_0} - r\dfrac{G(x_{_0}, y_{_0}, z_{_0})}{p^2 + q^2 + r^2}. \end{cases}$$

Aşadar, vectorul de poziţie al proiecţiei ortogonale $p_{_\Delta}(N)$ este

$$\overrightarrow{Op_{_\Delta}(N)} = \overrightarrow{OA_0} - \frac{G(A_0)}{\|\overrightarrow{d}_{_\Delta}\|^2}\overrightarrow{d}_{_\Delta}, \tag{8.24}$$

unde $A_0(x_{_0}, y_{_0}, z_{_0}) \in \Delta$.

• **Simetria ortogonală a spaţiului faţă de o dreaptă.** Pentru a găsi vectorul de poziţie al simetricului ortogonal $r_{_\Delta}(N)$ al punctului N faţă de dreapta Δ folosim relaţia

$$\overrightarrow{Op_{_\Delta}(N)} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{Or_{_\Delta}(N)}\right)$$

adică

$$\overrightarrow{Os_{\Delta}(N)} = 2\,\overrightarrow{Op_{\Delta}(N)} - \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OA_0} - 2\frac{G(A_0)}{\|\overrightarrow{d}_{\Delta}\|^2}\overrightarrow{d}_{\Delta} - \overrightarrow{ON}.$$

Corespondenţa care asociază unui punct M simetricul său ortogonal faţă de dreapta δ, se numeţe *simetria ortogonală* faţă de dreapta δ şi se notează prin r_{δ}.

8.6 Probleme

1. Considerăm triunghiul ABC şi mijlocul A' al laturii $[BC]$. Arătaţi că

$$4\overrightarrow{AA'}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Soluţie.

2. Considerăm dreptunghiul $ABCD$ şi punctul arbitrar M din spaţiu. Arătaţi

   (a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

   (b) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$.

   Soluţie.

3. Aflaţi unghiul dintre:

   (a) dreptele

$$(d_1)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & 1 & = 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & 1 & = 0 \end{array}\right. \qquad (d_2)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & - & 1 & = 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & 1 & = 0. \end{array}\right.$$

   (b) planele

$$\pi_1: \ x + 3y + 2z + 1 = 0 \text{ şi } \pi_2 : 3x + 2y - z = 6.$$

   (c) planul xOy şi dreapta M_1M_2, unde $M_1(1, 2, 3)$ şi $M_2(-2, 1, 4)$.

   Soluţie.

4. Considerăm vectorii necoplanari $\overrightarrow{OA}(1,-1,-2)$, $\overrightarrow{OB}(1,0,-1)$, $\overrightarrow{OC}(2,2,-1)$ daţi prin coordonatele lor faţă de baza ortonormată $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Fie H piciorul perpendicularei prin O pe planul ABC. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OH}$.

   Soluţie.

5. Aflaţi punctele pe axa Oz care sunt echidistante faţă de planele

$$\pi_1: \ 12x + 9y - 20z - 19 = 0 \text{ şi } \pi_2: \ 16x + 12y + 15z - 9 = 0.$$

Soluţie.

6. Considerăm planele

$$(\pi_1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(\pi_2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

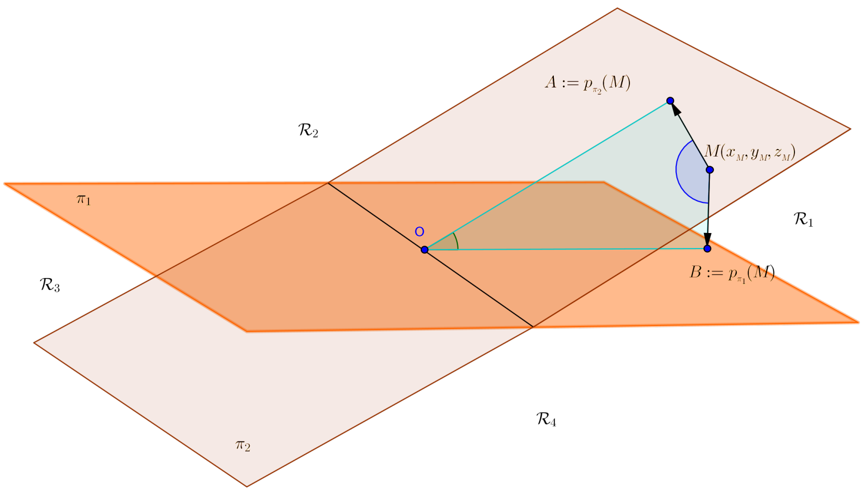
care nu sunt paralele şi nici perpendiculare. Planele π_1, π_2 împart spaţiul în patru regiuni $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ şi $\mathcal{R}_4$, dintre care două, să spunem $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_3$, correspund unghiului diedral ascuţit al celor două plane. Arătaţi că $M(x, y, z) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$, dacă şi numai dacă

$$F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z)(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0,$$

unde $F_1(x, y, z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ şi $F_2(x, y, z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$.

Indicaţie. Relaţia de neparalelism între două plane este echivalentă cu condiţia

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$



Punctul M aparţine reuniunii $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ dacă şi numai dacă unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{Mp_{\pi_1}(M)}$ şi $\overrightarrow{Mp_{\pi_2}(M)}$ este cel puţin 90°, dat fiind faptul că patrulaterul $OAMB$ este inscriptible. Mai formal

$$M(x, y, z) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3 \Leftrightarrow m(\widehat{\overrightarrow{Mp_{\pi_1}(M)}, \overrightarrow{Mp_{\pi_2}(M)}}) > 90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{Mp_{\pi_1}(M)} \cdot \overrightarrow{Mp_{\pi_2}(M)} < 0,$$

unde $p_{\pi_1}(M), p_{\pi_2}(M)$ sunt proiecţiile ortogonale a lui M pe planele π_1 şi respectiv π_2.

Soluţie.

7. Considerăm planele (π_1) $2x + y - 3z - 5 = 0$, (π_2) $x + 3y + 2z + 1 = 0$. Găsiţi ecuaţiile planelor bisectoare ale unghiurilor diedre formate de planele π_1 şi π_2 şi selectaţi planul bisector conţinut în regiunile ascuţite ale unghiurilor diedre formate de cele două plane.

   Soluţie.

8. Fie a, b două numere reale astfel încât $a^2 \neq b^2$. Considerăm planele:

$$(\alpha_1) ax + by - (a+b)z = 0$$

$$(\alpha_2) ax - by - (a-b)z = 0$$

şi quadrica $(\mathcal{C}) : a^2x^2 - b^2y^2 + (a^2 - b^2)z^2 - 2a^2xz + 2b^2yz - a^2b^2 = 0$. Dacă $a^2 < b^2$, arătaţi că $\mathcal{C}$ este conţinută în regiunile ascuţite ale unghiurilor diedre formate de cele două plane. Dacă, dimpotrivă, $a^2 > b^2$, arătaţi că $\mathcal{C}$ este conţinută în regiunile obtuze ale unghiurilor diedre format de cele două plane.

Soluţie.

9. Dacă două perechi de muchii opuse ale tetraedrului $ABCD$ sunt perpendiculare ($AB \perp CD$, $AD \perp BC$), arătaţi că

   (a) A-3-a pereche de de muchii opuse sunt de asemenea perpendiculare ($AC \perp BD$).

   (b) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

   (c) Înălţimile tetraedrului sunt concurente.
   (Un astfel de tetraedru se numeşte ortocentric)

Soluţie. Notăm prin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{d}$.

(a) $AB \perp CD \implies \overrightarrow{b}(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}) = 0 \implies \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = k$
$AD \perp BC \implies \overrightarrow{d}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) = 0 \implies \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d} = k$,
deci
$\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d} \implies \overrightarrow{c}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}) = 0 \implies AC \perp BD$.

(b) $AB^2 + CD^2 = \overrightarrow{b}^2 + (\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c})^2 = \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{d}^2 + \overrightarrow{c}^2 - 2k$;
$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{c}^2 + (\overrightarrow{d} - \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + \overrightarrow{d}^2 - 2k$;
$BC^2 + AD^2 = \overrightarrow{d}^2 + (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + \overrightarrow{d}^2 - 2k$.

(c) Vom arăta că există un punct H astfel încât $AH \perp (DBC)$, $BH \perp (ACD)$, $CH \perp (ABD)$, $DH \perp (ABC)$. Fie $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{AH} = m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c} + p\overrightarrow{d}$. Scriind relaţiile $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ în termenii produsului scalar, obţinem un sistem liniar cu o singură soluţie:

$$\begin{cases} b^2 m + kn + kp = k \\ km + c^2 n + kp = k \\ km + kn + d^2 p = k. \end{cases} \tag{8.25}$$

Într-adevăr matricea coeficienţilor sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & k & k \\ k & c^2 & k \\ k & k & d^2 \end{pmatrix}$$

iar pentru calculul determinantului său avem succesiv:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} b^2 & k & k \\ k & c^2 & k \\ k & k & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\cdot b & b\cdot c & b\cdot c \\ c\cdot b & c\cdot c & c\cdot d \\ d\cdot b & d\cdot c & d\cdot d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 \\ c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 \\ d_1b_1 + d_2b_2 + d_3b_3 & d_1c_1 + d_2c_2 + d_3c_3 & d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_1 & c_2 & d_2 \\ b_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})^2.$$

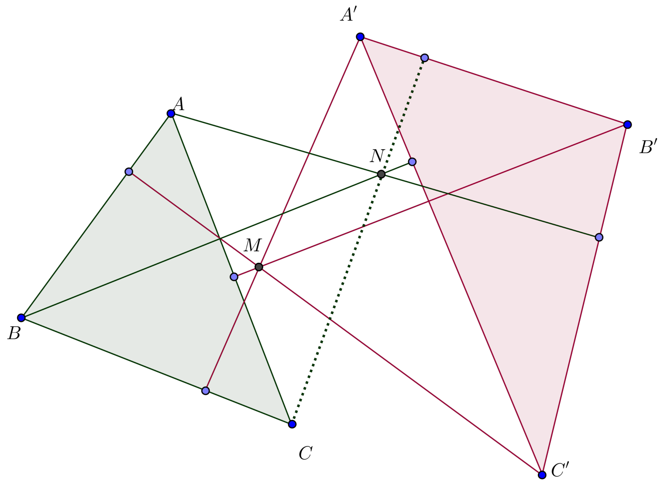
Liniar independenţa vectorilor $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ este echivalentă cu relaţia $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) \neq 0$, care arată că sistemul liniar (8.25) este compatibil determinat.

10. Două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ se numesc *ortologice* dacă sunt în acelaşi plan şi perpendicularele din vârfurile A', B', C' on sides BC, CA, AB sunt concurrente. Arătaţi că, în acest caz, perpendicularele din vârfurile A, B, C pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sunt de asemenea concurente.

    Soluţie. Datorită ipotezelor, avem

$$\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \tag{8.26}$$

    Considerăm acum dreptele perpendiculare din vârfurile A şi B pe laturile $B'C'$ şi $C'A'$ şi notăm cu N punctul lor de intersecţie.



    Aşadar,

$$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{C'A'} = 0.$$

    Folosind relaţiile (8.26) obţinem

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA'} \cdot (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NB}) + \overrightarrow{MB'} \cdot (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC}) + \overrightarrow{MC'} \cdot (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\overrightarrow{MB'} - \overrightarrow{MC'}) \cdot \overrightarrow{NA} + (\overrightarrow{MC'} - \overrightarrow{MA'}) \cdot \overrightarrow{NB} + (\overrightarrow{MA'} - \overrightarrow{MB'}) \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow NC \perp A'B'.
\end{aligned}$$

11. Aflaţi proiecţia ortogonală

    (a) a punctului $A(1, 2, 1)$ pe planul $\pi :\ x + y + 3z + 5 = 0$.

    (b) a punctului $B(5, 0, -2)$ pe dreapta (d) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$.

    Soluţie.

Câteva probleme aferente contextului doi dimensional

12. Dată fiind dreapta $d : 2x + 3y + 4 = 0$, găsiţi ecuaţia dreptei d_1 care trece prin punctul $M_0(2, 1)$ cu proprietatea că:

    (a) d_1 este ortogonală pe d;

    (b) unghiul determinat de d şi d_1 este $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

    Soluţie.

13. Vârfurile triunghiului ABC sunt punctele de intersecţie ale dreptelor

$$d_1 : 4x + 3y - 5 = 0, \quad d_2 : x - 3y + 10 = 0, \quad d_3 : x - 2 = 0.$$

14. Aflaţi ecuaţiile dreptelor suport ale înălţimilor triunghiului ABC.

    Soluţie.

15. Aflaţi coordonatele punctului P de pe dreapta $d : 2x - y - 5 = 0$ pentru care suma $AP + PB$ este minimă, dacă $A(-7, 1)$ şi $B(-5, 5)$.

16. Aflaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului determinat de dreptele $4x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 8 = 0$ şi $x + 4y - 8 = 0$.

    Soluţie.

17. Dat fiind fasciculul de drepte de ecuaţii $(1-t)x+(2-t)y+t-3=0$, $t \in \mathbb{R}$ şi $x+y-1=0$, găsiţi:

    (a) coordonatele vârfului fasciculului;

    (b) ecuaţia dreptei din fasciculul care taie Ox şi Oy în M, respectiv N, astfel încât $OM^2 \cdot ON^2 = 4(OM^2 + ON^2)$.

    Soluţie.

18. Fie $\mathcal{B}$ fasciculul de drepte de vârf $M_0(5,0)$. O linie arbitrară din $\mathcal{B}$ intersectează dreptele $d_1 : y-2=0$ şi $d_2 : y-3=0$ în M_1, respectiv M_2. Demonstraţi că dreapta care trece prin M_1 şi paralelă cu OM_2 trece printr-un punct fix.

19. Vârfurile patrulaterului $ABCD$ sunt $A(4,3)$, $B(5,-4)$, $C(-1,-3)$ şi $D(-3,-1)$.

    (a) Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie $\{E\} = AB \cap CD$ şi $\{F\} = BC \cap AD$;

    (b) Demonstraţi că mijloacele ale segmentelor $[AC]$, $[BD]$ şi $[EF]$ sunt coliniare.

    Soluţie.

20. Fie M un punct ale cărui coordonate satisfac

$$\frac{4x+2y+8}{3x-y+1}=\frac{5}{2}.$$

(a) Demonstraţi că M aparţine unei drepte fixe (d);

(b) Aflaţi minimul funcţiei x^2+y^2, când $M \in d \setminus \{M_0(-1,-2)\}$.

Soluţie.

21. Aflaţi locul geometric al punctelor ale căror distanţe la două drepte ortogonale au un raport constant.

    Soluţie.

8.7 Produsul vectorial

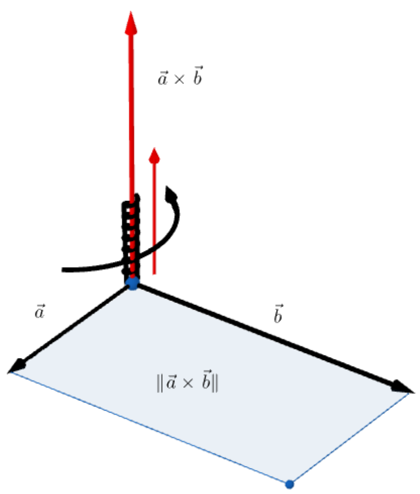
Definiţia 8.4. *Produsul vectorial* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$ este un vector, notat cu $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, care este definit ca fiind zero dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ sunt liniar dependenţi (coliniari), iar dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ sunt liniar independenţi (necoliniari), atunci produsul vectorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este definit prin următoarele date:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este un vector ortogonal pe subspaţiul bidimensional $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ de $\mathcal{V}$;

2. dacă $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, atunci sensul lui $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este cel în care un şurub plasat de-a lungul dreptei care trece prin O şi este perpendiculară pe vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, avansează când este rotit simultan cu vectorul $\overrightarrow{a}$ dinspre $\overrightarrow{a}$ înspre $\overrightarrow{b}$ în subspaţiul vectorial $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ şi semidreapta suport a lui $\overrightarrow{a}$ parcuge prin această rotire interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ (regula şurubului cu filetare directă).

3. *norma* (*magnitudinea* sau *lungimea*) lui $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este definită ca fiind

$$||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|| = ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}).$$



Observaţia 8.5. 1. norma (magnitudinea *sau* lungimea) *vectorului* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *este de fapt aria paralelogramului construit pe vectorii* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

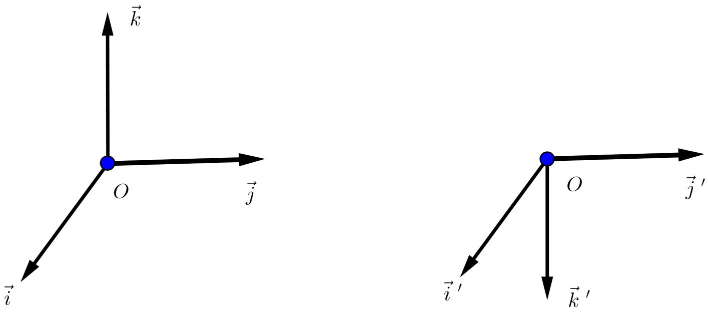
2. *Vectorii* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$ *sunt liniar dependenţi (coliniari) dacă şi numai dacă* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Propoziţia 8.14. *Produsul vectorial are următoarele proprietăţi:*

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$;
2. $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}$;
3. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}$.

8.8 Produsul vectorial în termenii coordonatelor

Dacă $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este o bază ortonormată, observăm că $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} \in \{-\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\}$. Spunem că baza ortonormată $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este *directă* dacă $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$. Dacă, dimpotrivă, $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{k}$, spunem că baza ortonormată $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este *inversă*.



direct orthonormal basis inverse orthonormal basis

Prin urmare, dacă $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este o bază ortonormată directă, atunci

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

şi evident $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

Propoziţia 8.15. *Dacă $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ este o bază orthonormată directă şi $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, atunci*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}, \tag{8.27}$$

sau, echivalent,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \tag{8.28}$$

Proof. Indeed,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}) \times (b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}) \\ &= a_1b_1\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + a_1b_2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + a_1b_3\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} \\ &+ a_2b_1\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} + a_2b_2\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + a_2b_3\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} \\ &+ a_3b_1\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + a_3b_2\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + a_3b_3\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} \\ &= a_1b_2\overrightarrow{k} - a_1b_3\overrightarrow{j} - a_2b_1\overrightarrow{k} + a_2b_3\overrightarrow{i} + a_3b_1\overrightarrow{j} - a_3b_2\overrightarrow{i} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

□

Putem rescrie formula (8.27) în forma

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{8.29}$$

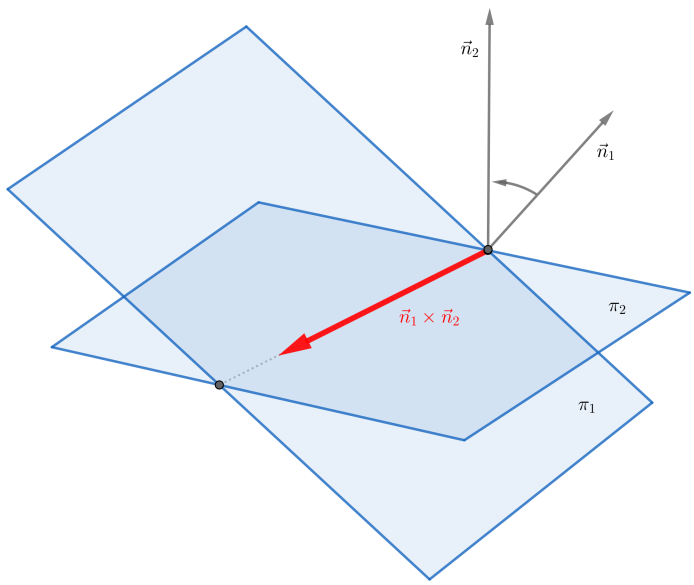
determinantul din dreapta fiind înţeles în sensul dezvoltării sale după prima linie.

Observaţia 8.6. Dacă $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ este un reper cartezian ortonormat direct faţă de care ecuaţiile dreptei Δ sunt

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0, \end{cases}$$

atunci putem recupera parametrii directori (5.9) ai dreptei Δ, în cazul particular al reperelor carteziene ortonormate, observând că $\overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$ este un vector director al dreptei Δ, unde

$$\overrightarrow{n}_1 = A_1\overrightarrow{i} + B_1\overrightarrow{j} + C_1\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{n}_2 = A_2\overrightarrow{i} + B_2\overrightarrow{j} + C_2\overrightarrow{k}.$$



Amintim că

$$\overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}.$$

Amintim de asemenea că parametrii directori au fost obţinuţi anterior şi pentru repere carteziene arbitrare. (See (5.9)).

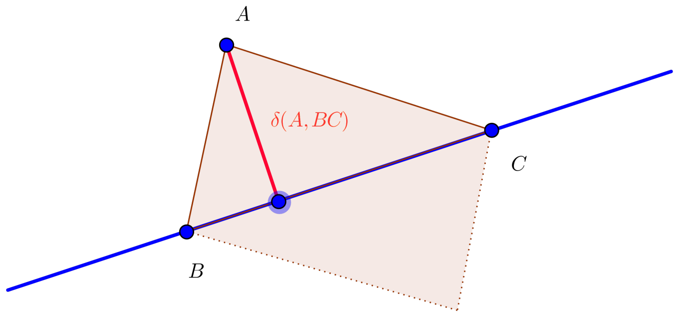
8.9 Aplicaţii ale produsului vectorial

- **Aria triunghiului ABC.** $S_{ABC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$. Pe de altă parte

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_B - x_A & y_B - x_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - x_A & z_C - z_A \end{vmatrix},$$

dat fiind faptul că $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - x_A, z_B - z_A)$ şi $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A, y_C - x_A, z_C - z_A)$. Aşadar,

$$4S^2_{ABC} = \begin{vmatrix} y_B - y_A & z_B - z_A \\ y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_B - z_A & x_B - x_A \\ z_C - z_A & x_C - x_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}^2.$$



- **Distanţa de la un punct la o dreaptă.**

(a) Distanţa $\delta(A,BC)$ de la punctul $A(x_A,y_A,z_A)$ la dreapta BC, unde $B(x_B,y_B,z_B)$ şi $C(x_C,y_C,z_C)$. Deoarece

$$S_{ABC} = \frac{||\overrightarrow{BC}|| \cdot \delta(A,BC)}{2}$$

rezultă că

$$\delta^2(A,BC) = \frac{4S^2_{ABC}}{|| \overrightarrow{BC} ||^2}.$$

Prin urmare obţinem

$$\delta^2(A,BC) = \frac{\begin{vmatrix} y_B-y_A & z_B-z_A \\ y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_B-z_A & x_B-x_A \\ z_C-z_A & x_C-x_A \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}^2}{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}.$$

(b) Distanţa $\delta(A,d)$ de la punctul $A(A_A,y_A,z_A)$ la dreapta

$$d : \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}.$$

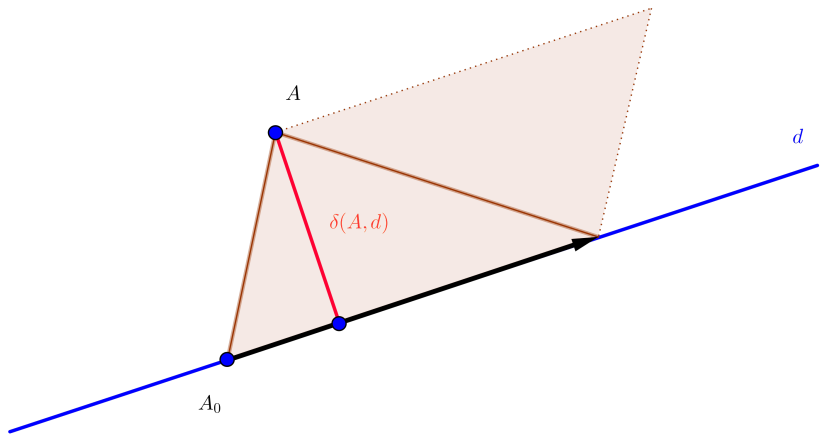
$$\delta(A,d) = \frac{||\overrightarrow{d} \times \overrightarrow{A_0A}||}{||\overrightarrow{d}||}, \tag{8.30}$$

unde $A_0(x_0,y_0,z_0) \in d$. Deoarece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d} \times \overrightarrow{A_0A} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ p & q & r \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 & z_A-z_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q & r \\ y_A-y_0 & z_A-z_0 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} r & p \\ z_A-z_0 & x_A-x_0 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} p & q \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

rezultă că

$$\delta(A,d) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} q & r \\ y_A-y_0 & z_A-z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} r & p \\ z_A-z_0 & x_A-x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & q \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$



8.10 Dublul produs vectorial

Dublul produs vectorial al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ este vectorul $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$

Propoziţia 8.16.

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}. \qquad (8.31)$$

Demonstraţie. (Schiţă) Dacă vectorii $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt linear dependenţi, atunci ambii membrii sunt evident zero. Altfel putem alege o bază ortonormată directă $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$, legată de vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$, astfel încât

$$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i}, \overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j}, \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}.$$

De exemplu putem alege $\overrightarrow{i}$ să fie $\overrightarrow{b}/\|\overrightarrow{b}\|$ şi $\overrightarrow{j}$ este un vector unitar în subspaţiul $\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle$ care este perpendicular pe $\overrightarrow{b}$. În sfârşit, putem alege $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$. Calculând cei doi membrii ai egalităţii (8.31), în termenii coordonatelor şi ai vectorilor $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, obţinem acelaşi rezultat. □

Corolarul 8.17. *Pentru orice vectori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}$ au loc următoarele identităţi:*

1. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}$;

2. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}$ *(Identitatea lui Jacobi).*

Demonstraţie. În vreme ce prima identitate rezultă via (8.31), pentru identitatea lui Jacobi avem succesiv:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \\ &= (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

□

8.11 Probleme

1. Arătaţi că $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \in \mathcal{V}$.

   Soluţie. $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) \leq \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|$.

2. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ trei vectori necoliniari doi câte doi. Arătaţi că există un triunghi ABC cu proprietăţile $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$ dacă şi numai dacă

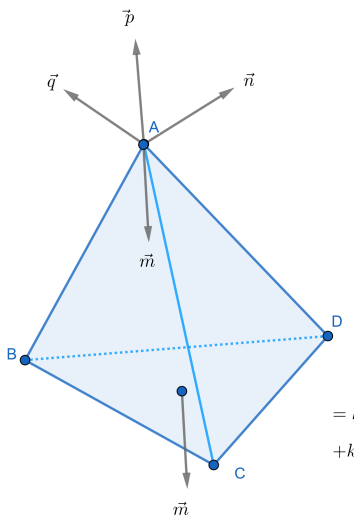
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}.$$

   Din egalitatea normelor deduceţi teorema sinusurilor.

   Soluţie.

3. Arătaţi că suma a patru vectori perpendiculari pe feţele unui tetraedru având lungimile proporţionale cu cu ariile feţelor este zero.

   Soluţie.



The proportionality of $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}, \vec{q}$ with the areas of the corresponding faces of the tetrahedron show that

$\vec{m} = k\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC},\ \vec{n} = k\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$

$\vec{p} = k\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB},\ \vec{q} = k\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Thus, $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}$

$= k\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} +$

$+ k\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$= k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + k\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$

$+ kAD \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{k\overrightarrow{AB}} \times \overrightarrow{AC} =$

$= k\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} =$

$+ k\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} + kAD \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{k\overrightarrow{AB}} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$

4. Aflaţi distanţa de la punctul $P(1, 2, -1)$ la dreapta (d) $x = y = z$.

   Soluţie.

5. Aflaţi aria triunghiului ABC şi lungimile înălţimilor, unde $A(-1,1,2)$, $B(2,-1,1)$ şi $C(2,-3,-2)$.

   Soluţie.

6. Fie d_1, d_2, d_3, d_4 drepte necoplanare două câte două. Presupunând că $d_{12} \perp d_{34}$ şi $d_{13} \perp d_{24}$, arătaţi că $d_{14} \perp d_{23}$, unde d_{ik} este perpendiculara comună a dreptelor d_i şi d_k.

   Soluţie. Un vector director al perpendicularei comune d_{ij} este $\overrightarrow{d}_i \times \overrightarrow{d}_j$, unde $\overrightarrow{d}_r$ este un vector director al dreptei d_r. Prin urmare avem succesiv:

$$\begin{aligned} d_{12} \perp d_{34} \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 \perp \overrightarrow{d}_3 \times \overrightarrow{d}_4 \Leftrightarrow (\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2) \cdot (\overrightarrow{d}_3 \times \overrightarrow{d}_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_3 & \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_4 \\ \overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_3 & \overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_3)(\overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_4) = (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_4)(\overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_3). \end{aligned}$$

   analog

$$\begin{aligned} d_{13} \perp d_{24} \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_3 \perp \overrightarrow{d}_2 \times \overrightarrow{d}_4 \Leftrightarrow (\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_3) \cdot (\overrightarrow{d}_2 \times \overrightarrow{d}_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 & \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_4 \\ \overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_2 & \overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2)(\overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_4) = (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_4)(\overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_2). \end{aligned}$$

   Prin urmare avem

$$(\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_3)(\overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_4) = (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_4)(\overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_3) = (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2)(\overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_4),$$

   fapt care arată că

$$(\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_3)(\overrightarrow{d}_2 \cdot \overrightarrow{d}_4) - (\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2)(\overrightarrow{d}_3 \cdot \overrightarrow{d}_4) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 & \overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_3 \\ \overrightarrow{d}_4 \cdot \overrightarrow{d}_2 & \overrightarrow{d}_4 \cdot \overrightarrow{d}_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_{14} \perp d_{23}.$$

8.12 Produsul mixt

Produsul mixt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este numărul real $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Propoziţia 8.18. *Dacă* $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ *este o bază ortonormată directă şi*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \\ \vec{c} &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \end{aligned}$$

atunci

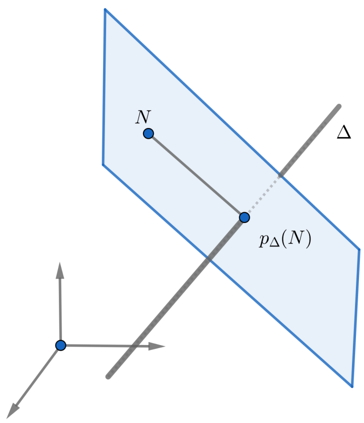
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{8.32}$$

Demonstraţie. Într-adevăr avem succesiv:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observaţia 8.7. Ţinând seama de formula (8.33) pentru distanţa $\delta(N, \Delta)$ de la punctul $N(x_N, y_N, z_N)$ la dreapta $\Delta : \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ precum şi de Propoziţia (8.16) deducem că



$$\begin{aligned} \delta(N, \Delta) &= \| \overrightarrow{Np_\Delta(N)} \| \\ &= \| \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{Op_\Delta(N)} \| = \left\| \overrightarrow{NA_0} - \frac{\vec{d}_\Delta \cdot \overrightarrow{NA_0}}{\| \vec{d}_\Delta \|^2} \vec{d}_\Delta \right\| \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$= \frac{\| \left(\overrightarrow{d}_{\Delta} \cdot \overrightarrow{d}_{\Delta}\right) \overrightarrow{NA_0} - \left(\overrightarrow{d}_{\Delta} \cdot \overrightarrow{NA_0}\right) \overrightarrow{d}_{\Delta} \|}{\|\overrightarrow{d}_{\Delta}\|^2}$$
$$= \frac{\|\overrightarrow{d}_{\Delta} \times (\overrightarrow{NA_0} \times \overrightarrow{d}_{\Delta})\|}{\|\overrightarrow{d}_{\Delta}\|^2} = \frac{\|\overrightarrow{NA_0} \times \overrightarrow{d}_{\Delta}\|}{\|\overrightarrow{d}_{\Delta}\|}.$$

Aşadar, am recuperat formula distanţei de la un punct la o dreaptă (vezi formula 8.30) folosind argumente diferite.

Corolarul 8.19. *1. Vectorii liberi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sunt liniar dependenţi (coliniari) dacă şi numai dacă* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$

2. *Vectorii liberi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sunt liniar independenţi (necoliniari) dacă şi numai dacă* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \neq 0$

3. *Vectorii liberi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \neq 0$.*

4. *Correspondenţa $F : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $F(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ este triliniară şi antisimetrică, adică*

$$\begin{array}{l} (\alpha\overrightarrow{a} + \alpha'\overrightarrow{a}', \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \alpha(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \alpha'(\overrightarrow{a}', \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{a}, \beta\overrightarrow{b} + \beta'\overrightarrow{b}', \overrightarrow{c}) = \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \beta'(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}', \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \gamma\overrightarrow{c} + \gamma'\overrightarrow{c}') = \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \gamma'(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}') \end{array} \tag{8.34}$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}', \overrightarrow{b}', \overrightarrow{c}' \in \mathcal{V}$ *şi*

$$(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3) = sgn(\sigma)(\overrightarrow{a}_{\sigma(1)}, \overrightarrow{a}_{\sigma(2)}, \overrightarrow{a}_{\sigma(3)}),\ \forall \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3 \in \mathcal{V} \text{ şi } \forall \sigma \in S_3 \tag{8.35}$$

Observaţia 8.8. *Putem rescrie relaţiile* (8.35) *astfel:*

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3) & = & (\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_1) = (\overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2) \\ & = & -(\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_3) = -(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_2) = -(\overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_1), \end{array}$$

$\forall \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3 \in \mathcal{V}$

Corolarul 8.20. *1.* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}$.

2. *Pentru orice $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathcal{V}$ are loc* formula lui Laplace:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

Proof. În vreme ce prima identitate este evidentă, pentru formula lui Laplace avem:

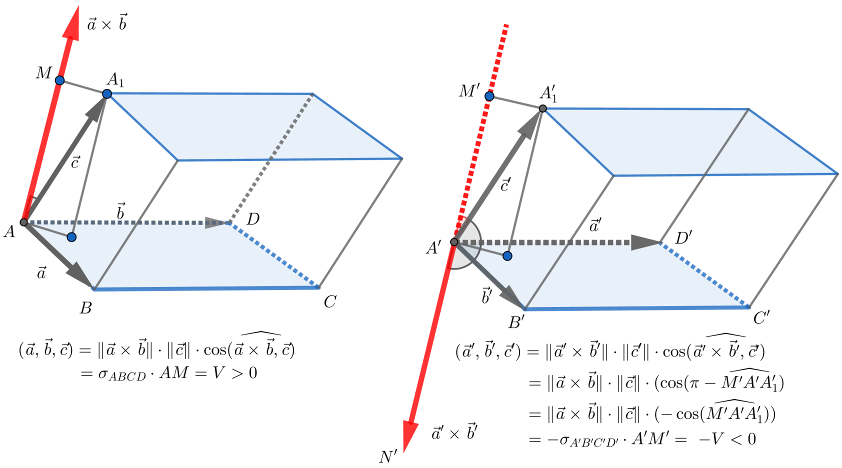
$$\begin{aligned} (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) &= \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) = \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \\ &= \left[(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) \times \overrightarrow{a}\right] \cdot \overrightarrow{b} = -\left[(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{d}\right] \cdot \overrightarrow{b} \\ &= -(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Definiţia 8.5. Baza $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ a spaţiului $\mathcal{V}$ se numeşte *directă* dacă $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) > 0$. Dacă, dimpotrivă, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) < 0$, spunem că baza $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ este *inversă*

Definiţia 8.6. *Volumul orientat* al paralelipipedului construit pe vectorii necoplanari $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ este $\varepsilon \cdot V$, unde V este volumul acestui paralelipiped şi $\varepsilon = +1$ sau -1 după cum baza $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ este directă respectiv inversă.

Propoziţia 8.21. *Produsul mixt $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ al vectorilor necoplanari $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ este egal cu volumul orienatat al paralelipipedului construit pe aceşti vectori.*



8.13 Aplicaţii ale produsului mixt

8.13.1 Distanţa dintre două drepte

Dacă d_1, d_2 sunt două drepte, atunci distanţa dintre ele, notată cu $\delta(d_1, d_2)$, este definită ca fiind

$$\min\{||\overrightarrow{M_1M_2}|| \mid M_1 \in d_1,\ M_2 \in d_2\}.$$

1. Dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, atunci $\delta(d_1, d_2) = 0$.

2. Dacă $d_1 || d_2$, atunci $\delta(d_1, d_2) = ||\overrightarrow{MN}||$ unde $\{M\} = d \cap d_1$, $\{N\} = d \cap d_2$ şi d este o dreaptă perpendiculară pe dreptele d_1 şi d_2. Evident $||\overrightarrow{MN}||$ este independent de algerea perpendicularei comune d.

3. Presupunem acum că dreptele d_1, d_2 sunt necoplanare. În acest caz există o unică dreptă d astfel încât $d \perp d_1, d_2$ şi $d \cap d_1 = \{M_1\}$, $d \cap d_2 = \{M_2\}$. dreapta d se numeşte *perpendiculara comună* a dreptelor d_1, d_2 şi evident $\delta(d_1, d_2) = ||\overrightarrow{M_1M_2}||$.

Pesupunem că dreptele d_1, d_2 sunt date prin câte un punct $A_1(x_1, y_1, z_1)$ respectiv $A_2(x_2, y_2, z_2)$ şi prin câte un vector director $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ respectiv $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2)$, adică, ecuaţiile lor sunt:

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}.$$

Perpendiculara comună a dreptelor d_1, d_2 este dreapta de intersecţie dintre planul care conţine dreapta d_1 care este paralelă cu vectorul $\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2$ şi planul care conţine dreapta d_2 care este paralelă cu $\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2$. Deoarece

$$\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

deducem că ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2 sunt:

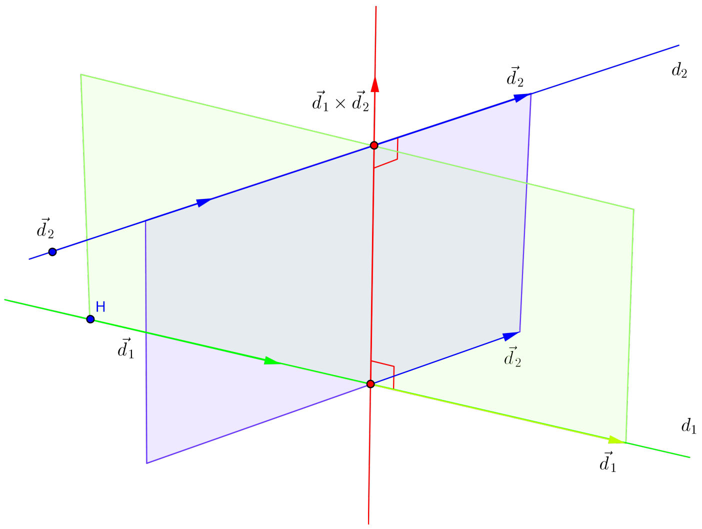


Figure 7: Perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2

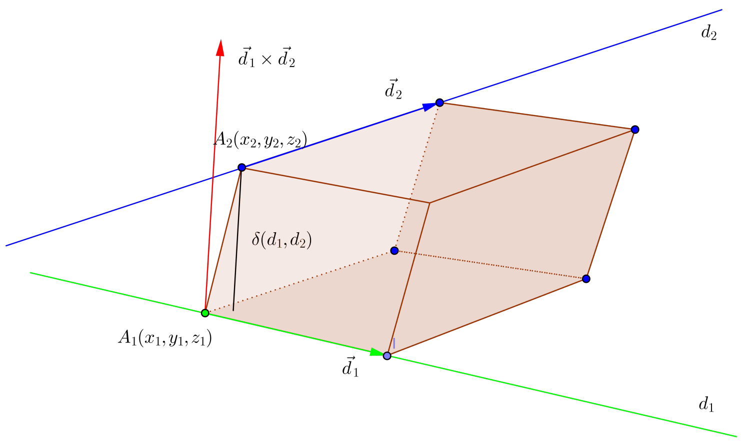
$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{8.36}$$

Dsitanţa dintre dreptele d_1, d_2 poate fi privită ca fiind înălţimea paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{d}_1$, $\overrightarrow{d}_2$, $\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2$. Aşadar

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2)|}{||\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2||}. \tag{8.37}$$

Therefore we obtain

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2}} \tag{8.38}$$



8.13.2 Condiţia de coplanariatate a două drepte

Folosind notaţiile din secţiunea anterioară, observăm că dreptele d_1, d_2 sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{d}_1$, $\overrightarrow{d}_2$ sunt liniar dependenţi (coplanari), sau echivalent

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2) = 0.$$

Prin urmare, dreptele d_1, d_2 sunt coplanare dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.39}$$

8.14 Probleme

1. Arătaţi că

   (a) $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| \leq \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \|\overrightarrow{c}\|$;
   Soluţie.

(b) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})=2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.
Soluţie.

2. Demonstraţi următoarea identitate:

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{a}=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}.$$

Soluţie. Folosind identitatea $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$ for $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{d}$ obţinem

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}) &= \overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{v}\\ &= \left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{c}-\left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right]\overrightarrow{d}\\ &= (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}.\end{aligned}$$

Folosind identitatea $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$ pentru $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}$ obţinem

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}) &= (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}\\ &= \left[\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})\right]\overrightarrow{b}-\left[\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})\right]\overrightarrow{a}\\ &= (\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{a}.\end{aligned}$$

3. Demonstraţi următoarea identitate: $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^2$.

Soluţie. We have successively:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}) &= [(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})]\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\\ &= [(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}]\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}) \qquad (8.40)\\ &= (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\left[\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\right]\\ &= (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^2.\end{aligned}$$

4. *Vectorii reciproci* ai vectorilor necoplanari $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sunt definiţi prin

$$\overrightarrow{u}'=\frac{\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})},\ \overrightarrow{v}'=\frac{\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})},\ \overrightarrow{w}'=\frac{\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}.$$

Show that:

(a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}')\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v}')\overrightarrow{v}+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{w}')\overrightarrow{w}\\ &= \frac{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\overrightarrow{u}+\frac{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{a},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\overrightarrow{v}+\frac{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

(b) vectorii reciproci of $\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}'$ sunt vectorii $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$.

Soluţie. (4a) Evident $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{c}$, întrucât $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sunt trei vectori liniar independenţi ai spaţiului trei dimensional $\mathcal{V}$, adică $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$. Mai mult, avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}' &= \frac{\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\frac{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\frac{(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{c},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\\ &= \frac{\alpha(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+\beta(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+\gamma(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\alpha.\end{aligned}$$

Analog putem arăta

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v}'=\frac{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{a},\overrightarrow{w})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\beta \text{ şi } \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{w}'=\frac{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\gamma.$$

(4b) Let us first observe that

$$(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}')=(\overrightarrow{w}',\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}')=\frac{(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^3}=\frac{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^2}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^3}=\frac{1}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}.$$

Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{v}'\times\overrightarrow{w}'}{(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}')}&=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})(\overrightarrow{v}'\times\overrightarrow{w}')\\&=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\frac{(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\times(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})^2}\\&=\frac{(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}}{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\overrightarrow{u}.\end{aligned}$$

Analog putem arăta

$$\frac{\overrightarrow{w}'\times\overrightarrow{u}'}{(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}')}=\overrightarrow{v} \text{ şi } \frac{\overrightarrow{u}'\times\overrightarrow{v}'}{(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}')}=\overrightarrow{w}.$$

5. Aflaţi valoarea parametrului α pentru care fasciculul de plane prin dreapta AB are un plan comun cu fasciculul de plane prin dreapta CD, unde $A(1,2\alpha,\alpha)$, $B(3,2,1)$, $C(-\alpha,0,\alpha)$ şi $D(-1,3,-3)$.

   Soluţie.

6. Aflaţi valoarea parametrului λ pentru care dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1},\ (d_2)\ \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{\lambda}$$

sunt coplanare. Aflaţi coordonatele punctului lor de intersecţie în acest caz.

Soluţie.

7. Aflaţi distanţa dintre dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1},\ (d_2)\ \frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{3}$$

precum şi ecuaţiile perpendicularei lor comune.

Soluţie.

8. Aflaţi distanţa dintre dreptele M_1M_2 şi d, unde $M_1(-1,0,1)$, $M_2(-2,1,0)$ şi

$$(d)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = 0. \end{cases}$$

precum şi ecuaţiile perpendicularei lor comune.

Soluţie.

9 Curbe şi suprafeţe

9.1 Curbe regulare

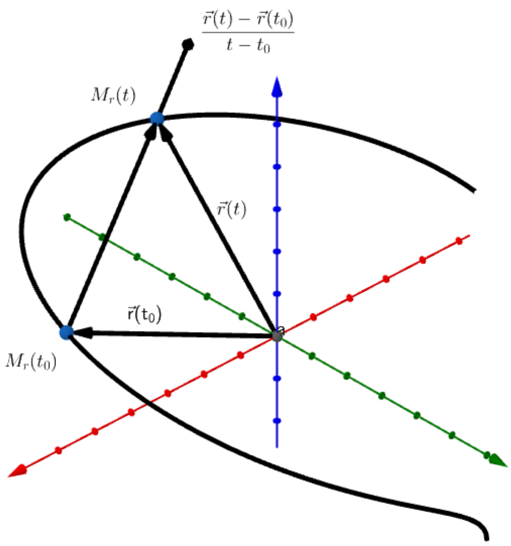
Definiţia 9.1. O submulţime C a lui $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ se numeşte *curbă regulară* dacă pentru orice $p \in C$ există o vecinătate V a lui p în $\mathbb{R}^2$ respectiv $\mathbb{R}^3$ şi o *curbă parametrizată diferenţiabilă* $r : I \to V \cap C$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este o mulţime deschisă, astfel încât

1. r este netedă;
2. $r : I \to V \cap C$ este un omeomorfism;
3. r este regulară, adică $\overrightarrow{r}\,'(t) \neq \overrightarrow{0}$, $\forall t \in I$.

Curba parametrizată diferenţiabilă $r : I \to V \cap C$ se numeşte *parametrizare locală* sau *sistem local de coordonate* în p iar $V \cap C$ se numeşte *vecinătate de coordonate* în p. Amintim că tangenta $(Tr)(t_0)$ a parametrizării locale $r : I \to V \cap C$ în $r(t_0)$, pentru $t_0 \in I$, este definită ca poziţia limită a dreptei $M_r(t_0)M_r(t)$ atunci când $t \longrightarrow t_0$. Un vector director al dreptei $M_r(t_0)M_r(t)$ este evident

$$\frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{t - t_0},$$

fapt care arată că $\overrightarrow{r}\,'(t_0)$ este un vector director al lui $(Tr)(t_0)$ şi direcţia lui $(Tr)(t_0)$ este deci $(d\overrightarrow{r})_{t_0}(\mathbb{R})$.



Dacă $r_1 : I_1 \to U_1 \cap C$ şi $r_2 : I_2 \to U_2 \cap C$ sunt două parametrizări locale ale lui C în $p \in C$, atunci $r_1(t_1) = r_2(t_2) = p$ pentru $t_1 \in I_1$ şi $t_2 \in I_2$ şi putem uşor arăta că $(d\overrightarrow{r}_1)_{t_1}(\mathbb{R}) = (d\overrightarrow{r}_2)_{t_2}(\mathbb{R})$. Aceasta arată că r_1 şi r_2 au aceeaşi tangentă în $r_1(t_1) = r_2(t_2) = p$.

Propoziţia 9.1. *Ecuaţia tangentei curbei parametrizate diferenţiabile* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$ *în* $r(t_0)$, *corespunzătoare valorii regulare* $t_0 \in I$ *a parametrului, adică* $\overrightarrow{r}\,'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ *este*

$$(Tr)(t_0) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}. \tag{9.1}$$

Ecuaţia normalei lui r *în* $r(t_0)$, *adică dreapta prin* $M_r(t_0)$ *care este perpendiculară pe* $(Tr)(t_0)$, *este*

$$(Nr)(t_0) \; x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0. \tag{9.2}$$

Propoziţia 9.2. *Ecuaţia tangentei curbei parametrizate diferenţiabile* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *în* $pr(t_0)$, *corespunzătoare valorii regulare* $t_0 \in I$ *a parametrului, adică* $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ *este*

$$(Tr)(t_0) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{9.3}$$

Ecuaţia planului normal la r *în* $r(t_0)$, *adică planul prin* $M_r(t_0)$ *care este perpendicular pe* $(Tr)(t_0)$ *este*

$$(Nr)(t_0)\ x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0. \tag{9.4}$$

Observaţia 9.1.

1. Condiţia (3) din definiţia (9.1), este echivalentă cu $(dr)_t \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$;
2. $V \cap C$ este imagine unei curbe parametrizate diferenţiabile regulare şi injective. Pe de altă parte, există curbe parametrizate diferenţiabile regulare şi injective ale căror imagini nu sunt curbe regulare;
3. Rolul condiţiei (2) din definiţia (9.1) este de a preveni auto intersecţiile curbelor regulare, ceea ce nu este cazul cu imaginile curbelor parametrizate diferenţiabile regulare.
4. Condiţia (3) combinată cu (2) asigură existenţa tangentei unice în orice punct a unei curbe regulare. Tangenta $T_p(C)$ lui C în $p \in C$ se defineşte ca fiind tangenta unei parametrizări locale $r : I \to U \cap C$ a lui C în p. Tangenta $T_p(C)$ este bine definită deoarece tangenta în p a unei parametrizări locale $r : I \to U \cap C$ în p este independentă de r. Într-adevăr dacă $r_1 : I_1 \longrightarrow C$ şi $r_2 : I_2 \longrightarrow C$ sunt 2 parametrizări locale în $p = r_1(t_1) = r_2(t_2) \in C$, atunci vectorii lor tangenţi $\overrightarrow{r}'_1(t_1)$ şi $\overrightarrow{r}'_2(t_2)$ sunt coliniari şi deci $(Tr_1)(t_1) = (Tr_2)(t_2)$.

Definiţia 9.2. Dacă $U \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, atunci valoarea $a \in \mathrm{Im}(f)$ lui f se numeşte *regulară* dacă $(\nabla f)(x, y) \neq 0,\ \forall (x, y) \in f^{-1}(a)$, adică $(df)_{(x,y)} \neq 0,\ \forall (x, y) \in f^{-1}(a)$.

Teorema 9.3. *(Teorema preimaginii) Dacă* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *este o mulţime deschisă,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1 *şi* $a \in Imf$ *este o valoare regulară a lui* f, *atunci imaginea inversă lui* a *prin* f,

$$f^{-1}(a) = \{(x, y) \in U | f(x, y) = a\}$$

este o curbă regulară plană numită curba regulară de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y) = a$.

Propoziţia 9.4. *Dacă* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *este o mulţime deschisă,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1 *şi* $a \in Imf$ *este o valoare regulară a lui* f, *atunci gradientul* $\nabla_p f = (f_x(p), f_y(p))$ *este un vector normal al tangentei curbei regulare de ecuaţie carteziană implicită* $f(x, y) = a$ *în punctul* $p \in f^{-1}(a)$.

Demonstraţie. Fie $r : I \longrightarrow C = f^{-1}(a)$, $r(t) = (x(t), y(t))$ o parametrizare locală a curbei regulare de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y) = a$, adică $r(t_0) = p$. Derivând identitatea

$$f(x(t), y(t)) = a,\ \forall t \in I$$

avem succesiv:

$$\begin{aligned}
&f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0,\ \forall t \in I \\
\iff &\nabla_{(x(t),y(t))} \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0,\ \forall t \in I \\
\iff &\nabla_{(x(t),y(t))} \perp \overrightarrow{r}'(t) = 0,\ \forall t \in I.
\end{aligned}$$

Pentru $t = t_0$ relaţia $\nabla_{(x(t_0),y(t_0))} \perp \overrightarrow{r}'(t_0) \iff \nabla_p \perp \overrightarrow{r}'(t_0)$ arată că ∇_p este într-adevăr un vector normal al tangentei $T_p(C)$. $\square$

Definiţia 9.3. Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă astfel încât $tx \in U$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice $x \in U$. Funcţia $f : U \to \mathbb{R}$ se numeşte *omogenă de ordin* $p \in \mathbb{R}$ dacă $f(tx) = t^p f(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \in U$.

De exemplu o funcţie polinomială de grad $n \in \mathbb{N}$ este o funcţie omogenă de ordin n.

Exemplul 9.1. Dacă $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 şi omogenă de ordin $p \in \mathbb{R}^*$, iar $c \in Im\, f \backslash \{0\}$, atunci $f^{-1}(c)$ este o curbă regulară. Într-adevăr, este destul să arătăm că c este o valoare regulară a lui f. Derivând relaţia $f(tx) = t^p f(x)$ în raport cu t obţinem:

$$(df)_{tx}(x) = pt^{p-1}f(x), \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \in U,$$

iar relaţia lui Euler

$$(df)_x(x) = pf(x), \ \forall x \in U. \tag{9.5}$$

rezultă pentru $t = 1$. Dar pentru $x \in C(f)$ avem $(df)_x = 0$ şi deci $(df)_x(x) = 0$, adică $f(x) = 0$. Prin urmare am arătat că $B(f) = f(C(f)) \subset \{0\}$, sau, echivalent, $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}\backslash B(f)$, unde $C(f) \subseteq U$ este mulţimea, închisă, a punctelor critice a lui f, adică $C(f) := \{(x, y) \in U | (df)_{(x,y)} = 0\}$. Cum însă $c \in Im\, f \backslash \{0\}$ deducem că c este o valoare regulară a lui f şi $f^{-1}(c)$ este, prin urmare, o curbă regulară.

Propoziţia 9.5. *Ecuaţia tangentei $T_{(x_0,y_0)}(C)$ curbei regulare plane C de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y) = a$ în punctul $p = (x_0, y_0) \in C$, este*

$$T_{(x_0,y_0)}(C) : f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0) = 0,$$

şi ecuaţia normalei $N_{(x_0,y_0)}(C)$ a lui C în p este

$$N_{(x_0,y_0)}(C) : \frac{x - x_0}{f_x(p)} = \frac{y - y_0}{f_y(p)}.$$

Exemplul 9.2. Tangenta conicei

$$C : a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

într-un punct regular $(x_0, y_0) \in C$ al său este

$$a_{00} + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{11}x_0x + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y_0y = 0 \tag{9.6}$$

şi poate fi obţinută polarizând ecuaţia conicei, adică înlocuind, în ecuaţia conicei:

1. x^2 cu x_0x
2. y^2 cu y_0y
3. $2x$ cu $x + x_0$
4. $2y$ cu $y + y_0$
5. $2xy$ cu $x_0y + xy_0$.

Într-adevăr, $C = f^{-1}(0)$, unde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de grad doi dată prin $f(x,y) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Deoarece

$$f_x = 2a_{10} + 2_{11}x + 2a_{12}y \text{ şi } f_y = 2a_{20} + 2a_{12}x + 2a_{22}y,$$

rezultă că

$$\begin{aligned}
T_{(x_0,y_0)}(C) \quad &: \quad (2a_{10} + 2_{11}x + 2a_{12}y)(x - x_0) + (2a_{20} + 2a_{12}x + 2a_{22}y)(y - y_0) = 0 \\
&\iff a_{10}x + a_{11}x_0x + a_{12}y_0x + a_{20}y + a_{12}x_0y + a_22y_0y = a_{10}x_0 + a_{11}x_0^2 + a_{12}y_0x_0 + a_{20}y_0 + a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 \\
&\iff a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{11}x_0x + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y_0y = 2a_{10}x + 0 + 2a_{20}y_0 + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 \\
&\iff a_{00} + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{11}x_0x + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y_0y = 0.
\end{aligned}$$

9.2 Suprafeţe parametrizate diferenţiabile

Definiţia 9.4. Fie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă. O funcţie netedă $r : U \to \mathbb{R}^3$ se numeşte *suprafaţă parametrizată diferenţiabilă*. Mulţimea $r(U)$ se numeşte *urma*, *suportul*, sau *imaginea* lui r. Dacă diferenţiala $(dr)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este injectivă pentru $q \in U$, atunci suprafaţa parametrizată diferenţiabilă r se numeşte *regulară* în q. Dacă diferenţiala $(dr)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este injectivă pentru orice $q \in U$, atunci suprafaţa parametrizată diferenţiabilă r se numeşte *regulară*.

Observaţia 9.2. Fie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $r : U \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ o suprafaţă parametrizată diferenţiabilă. Atunci r este regulară în $q \in U$ dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{r_u}(q) \times \overrightarrow{r_v}(q) \neq \overrightarrow{0}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
r \text{ este regulară în } q \in U \quad &\iff (dr)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ este injectivă} \\
&\iff (dr)_q(e_1),\ (dr)_q(e_2) \text{ sunt liniar independenţi } (e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)) \\
&\iff \overrightarrow{r_u}(q) = (d\overrightarrow{r})_q(e_1),\ \overrightarrow{r_v}(q) = (d\overrightarrow{r})_q(e_2) \text{ sunt liniar independenţi} \\
&\iff \overrightarrow{r_u}(q) \times \overrightarrow{r_v}(q) \neq \overrightarrow{0},
\end{aligned}$$

unde $\overrightarrow{r} : U \longrightarrow \mathcal{V}$, $\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}$.

Imaginea unei suprafaţe parametrizate diferenţiabile poate avea autointersecţii.

9.2.1 Planele tangente şi normalele unei suprafeţe parametrizate diferenţiabile

Definiţia 9.5. Fie $r : U \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ o suprafaţă parametrizată diferenţiabilă regulară şi $q = (u_0, v_0) \in U$. Planul $(Tr)(q)$ prin $M_r(u_0, v_0)$, a cărui direcţie este $(d\overrightarrow{r})_q(\mathbb{R}^2)$, se numeşte *planul tangent* la r în $M_r(q)$ corespunzător perechii (u_0, v_0) a parametrilor. Dreapta perpendiculară $(Nr)(q)$ pe $(Tr)(q)$ în $M_r(q)$ se numeşte *dreapta normală* la r în $M_r(q)$ corespunzătoare perechii (u_0, v_0) a parametrilor.

Observaţia 9.3. Dacă $r : U \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ este o suprafaţă parametrizată diferenţiabilă regulară şi $q = (u_0, v_0) \in U$, atunci vectorii $\overrightarrow{r_u}(q) = (d\overrightarrow{r})_q(1,0)$, $\overrightarrow{r_v}(q) = (d\overrightarrow{r})_q(0,1)$ formează o bază a subspaţiului doi dimensional $(d\overrightarrow{r})(\mathbb{R}^2)$

al lui $\mathcal{V}$ şi $\overrightarrow{\nu}(q) = \overrightarrow{r_u}(q) \times \overrightarrow{r_v}(q)$ este prin urmare un vector director al normalei lui r în $M_r(q)$ corespunzătoare perechii (u_0, v_0) a parametrilor.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nu}(q) &= \overrightarrow{r_u}(q) \times \overrightarrow{r_v}(q) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u(q) & y_u(q) & z_u(q) \\ x_v(q) & y_v(q) & z_v(q) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(q)\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)\,\overrightarrow{k},\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) &= \begin{vmatrix} x_u(q) & y_u(q) \\ x_v(q) & y_v(q) \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(q) &= \begin{vmatrix} z_u(q) & x_u(q) \\ z_v(q) & x_v(q) \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q) &= \begin{vmatrix} y_u(q) & z_u(q) \\ y_v(q) & z_v(q) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Propoziţia 9.6. *Dacă $r : U \to \mathbb{R}^3$ $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ este o suprafaţă parametrizată diferenţiabilă regulară şi $q = (u_0, v_0) \in U$, atunci ecuaţia planului tangent la r în $M_r(q)$, corespunzătoare perechii (u_0, v_0) a parametrilor, este*

$$\begin{vmatrix} x - x(q) & y - y(q) & z - z(q) \\ x_u(q) & y_u(q) & z_u(q) \\ x_v(q) & y_v(q) & z_v(q) \end{vmatrix} = 0,$$

i.e.

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q)(x - x(q)) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(q)(y - y(q)) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)(z - z(q)) = 0 \tag{9.7}$$

De asemenea, ecuaţia normalei la r în $M_r(q)$, corespunzătoare perechii (u_0, v_0) a parametrilor, este:

$$\frac{x - x(q)}{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q)} = \frac{y - y(q)}{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(q)} = \frac{z - z(q)}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)} \tag{9.8}$$

9.3 Suprafeţe regulare

Definiţia 9.6. O submulţime $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se numeşte *suprafaţă regulară* dacă, pentru orice punct $p \in S$, există o vecinătate V a lui p, în $\mathbb{R}^3$, şi o aplicaţie $r : U \to V \cap S$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, unde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, cu următoarele proprietăţi:

1. r este netedă, adică funcţiile sale de coordonate x, y, z au derivate parţiale continue de orice ordin;

2. r este un omeomorfism;

3. Pentru orice $q \in U$, diferenţiala $(dr)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este injectivă.

Funcţia $r : U \to V \cap S$ se numeşte *parametrizare locală, hartă locală* sau *sistem local de coordonate* în p, iar $V \cap S$ se numeşte *vecinătate de coordonate*. Ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in U,$$

se numesc *ecuaţiile parametrice* ale vecinătăţii de coordonate $V \cap S$. Ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) \text{ unde } \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}$$

se numeşte *ecuaţia vectorială* a vecinătăţii de coordonate $V \cap S$.

Observaţia 9.4. 1. Orice mulţime deschisă O a unei suprafaţe regulare $S \subseteq \mathbb{R}^3$ este o suprafaţă regulară. Într-adevăr orice parametrizare locală $r : U \longrightarrow S \cap V$ a lui S într-un punct $p \in O$ produce o parametrizare locală

$$U \cap r^{-1}(O) \longrightarrow S \cap C \cap V,\ q \mapsto r(q)$$

a lui O în p.

2. Orice suprafaţă regulară poate fi acoperită cu imaginile (sau urmele) unei familii de hărţi locale. O astfel de familie de hărţi locale se numeşte an *atlas* al suprafeţei. Dacă suprafaţa regulară este compactă, atunci ea admite, evident, atlase finite. De exemplu sfera 2-dimensională

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

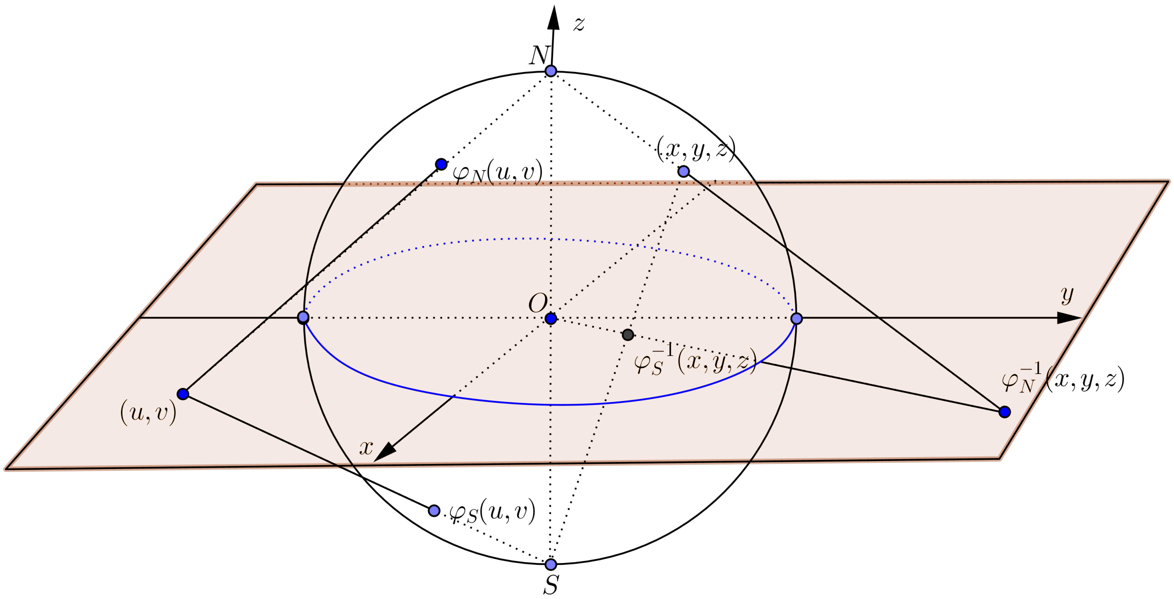
admite un atlas cu două hărţi locale $\mathcal{A} = \{(\varphi_S, \varphi_N\}$, unde

$$\varphi_S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{S\},\ \varphi_S(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right)$$
$$\varphi_N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\},\ \varphi_N(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right),$$

iar $S = (0,0,-1)$, $N = (0,0,1)$ sunt polul sud şi respectiv polul nord a lui S^2.

Observăm că inversele parametrizărilor locale φ_S şi φ_N sunt proiecţiile stereografice

$$\varphi_S^{-1} : S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \varphi_S^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$
$$\varphi_N^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \varphi_N^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

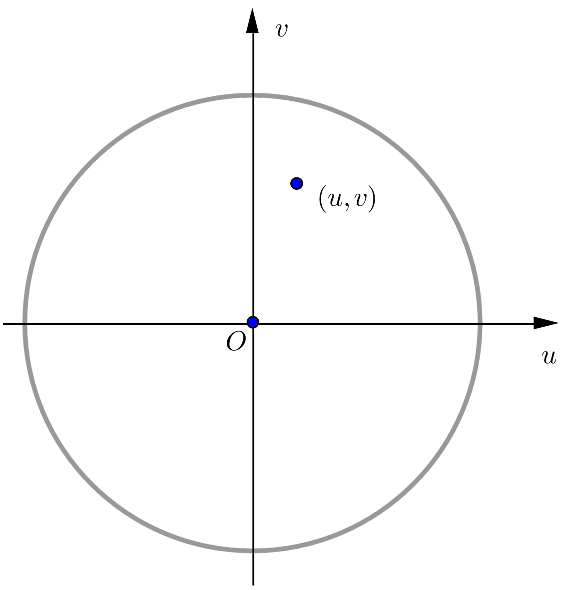


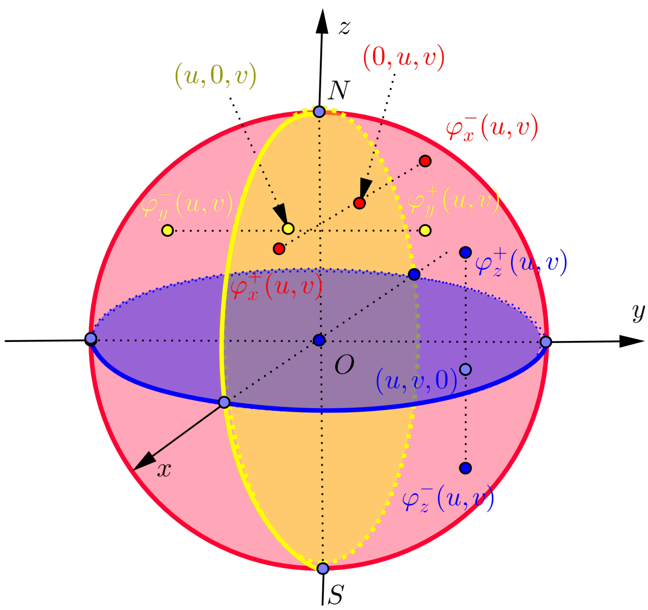
Un alt atlas al sferei S^2 este dat de următoarele 6 hărţi locale, adică

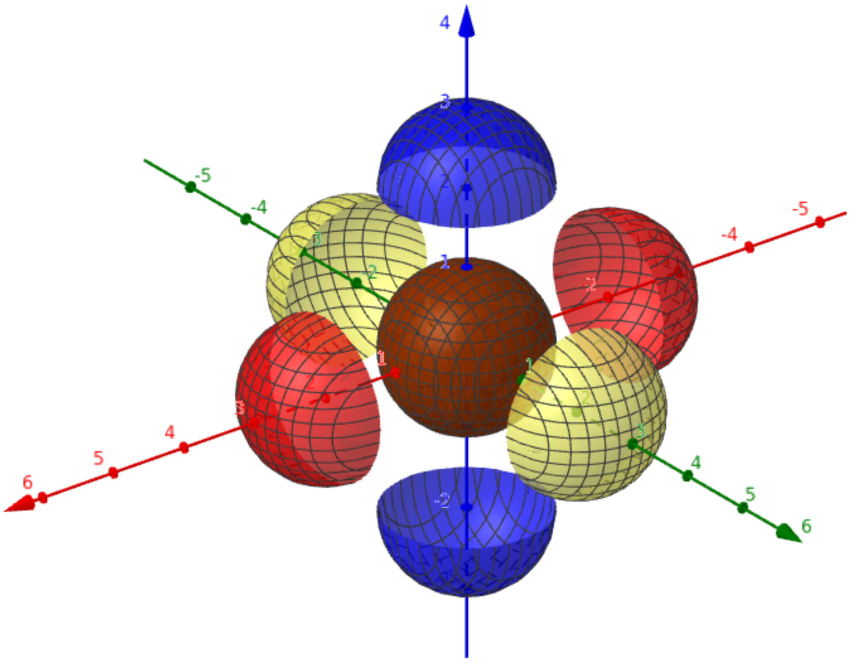
$$\mathcal{A}_1 = \{\varphi_x^{\pm}, \varphi_y^{\pm}, \varphi_z^{\pm} : B(0,1) \longrightarrow S^2\},$$

unde $B(0,1)$ este bila unitate a lui $\mathbb{R}^2$ centrată în origine $0 \in \mathbb{R}^2$ de rază unitate, şi

$$\varphi_x^{\pm}(u,v) = (\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v),$$
$$\varphi_y^{\pm}(u,v) = (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v),$$
$$\varphi_z^{\pm}(u,v) = (u, v, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}).$$







Propoziţia 9.7. *Dacă $U \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă şi $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, atunci graficul său $G_f = \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in U\}$ este o suprafaţă regulară.*

De exemplu

1. Paraboloidul eliptic $P_e : \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0$ este o suprafaţă regulară, deoarece P_e este graficul funcţiei netede $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{p}\right)$.

2. Paraboloidul hiperbolic $P_h : \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0$ este o suprafaţă regulară, deoarece P_h este graficul funcţiei netede $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}\right)$.

Definiţia 9.7. Dacă $U \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, atunci valoarea $a \in \mathrm{Im}(f)$ a lui f se numeşte *regulară* dacă $(\nabla f)(x, y, z) \neq 0,\ \forall (x, y, z) \in f^{-1}(a)$, adică $(df)_{(x,y,z)} \neq 0,\ \forall (x, y, z) \in f^{-1}(a)$.

Teorema 9.8. *(A doua teoremă a preimaginii). Dacă $U \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă, $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă şi $a \in Im\, f$ este o valoare regulară a lui f, atunci*

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \,|\, f(x, y, z) = a\}$$

este o suprafaţă regulară în $\mathbb{R}^3$ *numită* suprafaţă regulară de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y, z) = a$.

Observaţia 9.5. Dacă $C \subseteq \mathbb{R}^2$ este o curbă regulară şi $r_1 : I_1 \longrightarrow C$ şi $r_2 : I_2 \longrightarrow C$ sunt 2 parametrizări locale în $p = r_1(t_1) = r_2(t_2) \in C$, atunci vectorii lor tangenţi $\overrightarrow{r}'_1(t_1)$ şi $\overrightarrow{r}'_2(t_2)$ sunt coliniari. Prin urmare $(Tr_1)(t_1) = (Tr_2)(t_2)$.

Definiţia 9.8. Dacă $S \subseteq \mathbb{R}^3$ este o suprafaţă regulară, atunci planul tangent a lui S în $p \in S$ este planul tangent $(Tr)(u_0, v_0)$ al oricărei parametrizări locale $r : U \longrightarrow S$ în $p = r(u_0, v_0)$.

Propoziţia 9.9. *Dacă* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *este o mulţime deschisă,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1 *şi* $a \in Imf$ *este o valoare regulară a lui* f*, atunci gradientul* $\nabla_p f = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$ *este un vector normal al planului tangent al suprafeţei regulare de ecuaţie carteziană implicită* $f(x, y, z) = a$ *în punctul* $p \in f^{-1}(a)$.

Demonstraţie. Fie $r : I \longrightarrow S = f^{-1}(a)$, $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ o parametrizare locală a suprafeţei regulare de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y, z) = a$, i.e. $r(u, v) = p$. Derivând parţial identitatea $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = a$, $\forall (u, v) \in U$ obţinem

$$\begin{aligned}
&f_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot x_u(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\\
&+ f_y(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot y_u(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\\
&+ f_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot z_u(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0,\\
&f_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot x_v(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\\
&+ f_y(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot y_v(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\\
&+ f_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot z_v(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0
\end{aligned}$$

pentru oricare $(u, v) \in U$, adică $\nabla_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \cdot \overrightarrow{r}_u(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, $\forall (u, v) \in U$ sau, echivalent, $\nabla_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \perp \overrightarrow{r}_u(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, $\forall (u, v) \in U$ şi $\nabla_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \cdot \overrightarrow{r}_v(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, $\forall (u, v) \in U$ or, echivalent, $\nabla_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \perp \overrightarrow{r}_v(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, $\forall (u, v) \in U$. Pentru $(u, v) = (u_0, v_0)$ relaţiile

$$\nabla_{(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))} \perp \overrightarrow{r}_u(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)) \Longleftrightarrow \nabla_p \perp \overrightarrow{r}_u(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$$
$$\nabla_{(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))} \perp \overrightarrow{r}_v(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)) \Longleftrightarrow \nabla_p \perp \overrightarrow{r}_v(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$$

arată că ∇_p este într-adevăr un vector normal al planului tangent $T_p(C)$. □

Propoziţia 9.10. *Fie* $U \subset \mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă astfel încât* $tx \in U$ *pentru orice* $t \in \mathbb{R}^*_+$ *şi orice* $x \in U$. *O funcţie* $f : U \to \mathbb{R}$ *se numeşte* omogenă de ordin $p \in \mathbb{R}$ *dacă* $f(tx) = t^p f(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}^*_+, x \in U$. *Dacă* $f : U \to \mathbb{R}$ *este o funcţie diferenţiabilă şi omogenă de ordin* $p \in \mathbb{R}^*$, *iar* $c \in Im\, f \backslash \{0\}$, *atunci* $f^{-1}(c)$ *este o suprafaţă regulară.*

Demonstraţie. Într-adevăr, este destul să arătăm că c este o valoare regulară a lui f. Derivând în raport cu t relaţia $f(tx) = t^p f(x)$ obţinem

$$(df)_{tx}(x) = pt^{p-1} f(x),\ \forall t \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall x \in U,$$

care arată, luând $t = 1$, relaţia lui Euler

$$(df)_x(x) = pf(x),\ \forall x \in U. \tag{9.9}$$

Dar pentru $x \in C(f)$ avem $(df)_x = 0$ şi deci $(df)_x(x) = 0$, fapt care arată că $f(x) = 0$. Am arătat, prin urmare, că $B(f) = f(C(f)) \subset \{0\}$, sau, echivalent, $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R} \backslash B(f)$. Cum însă $c \in Im\, f \backslash \{0\}$ deducem că c este o valoare regulară luată a lui f, fapt care arată că $f^{-1}(c)$ este o suprafaţă regulară. □

În particular,

1. elipsoidul $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
2. hiperboloidul cu o pânză $H_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,
3. hiperboloidul cu două pânze $H_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

sunt toate suprafaţe regulare. În sfârşit, conul $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ nu este o suprafaţă regulară.

9.3.1 Planele tangente şi normalele unei suprafeţe regulare

Fie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ o suprafaţă regulară şi $p \in S$. Un *vector tangent* la S în p este vectorul tangent $\overrightarrow{\alpha}'(0)$ al unei curbe parametrizate diferenţiabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ cu $\alpha(0) = p$

Propoziţia 9.11. *Fie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, fie $q \in U$ şi fie $r : U \to S$ o parametrizare locală a lui S. Subspaţiul 2-dimensional $(d\overrightarrow{r})_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{V}$ coincide cu mulţimea $\overrightarrow{T}_p(S)$ a vectorilor tangenţi la S în $r(q)$.*

Definiţia 9.9. Planul printr-un punct p al unei suprafaţe regulare S, a cărui direcţie este spaţiul vectorial tangent la S în p, $\overrightarrow{T}_p(S)$, se numeşte *planul tangent* la S în p şi este notat prin $T_p(S)$. Dreapta perpendiculară pe planul tangent la suprafaţa S în p se numeşte *normala* suprafeţei S în p.

Propoziţia 9.12. *Dacă $V \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă, $f : V \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, $a \in Im\, f$ este o valoare regulară a lui f şi $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$, atunci ecuaţia planului tangent la suprafaţa regulară $S = f^{-1}(a)$, de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y, z) = a$, în punctul $p \in S$ este:*

$$f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0) + f_z(p)(z - z_0) = 0. \tag{9.10}$$

Ecuaţia normalei la S în p este:

$$\frac{x - x_0}{f_x(p)} = \frac{y - y_0}{f_y(p)} = \frac{z - z_0}{f_z(p)} \tag{9.11}$$

De exemplu, ecuaţia planul tangent al cuadricei

$$(Q)\ a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$$

într-un punct al său $A_0(x_0, y_0, z_0) \in Q$ este

$$\begin{aligned} T_{A_0}(Q)\ & a_{00} + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{30}(z + z_0) + a_{12}(x_0y + xy_0) \\ & + a_{13}(z_0x + zx_0) + 2a_{23}(y_0z + yz_0) + a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z = 0. \end{aligned}$$

şi poate fi obţinută polarizând ecuaţia cuadricei, adică înlocuind

1. x^2 cu x_0x
2. y^2 cu y_0y
3. z^2 cu z_0z

4. $2x$ cu $x + x_0$
5. $2y$ cu $y + y_0$
6. $2z$ cu $z + z_0$
7. $2xy$ cu $x_0y + xy_0$
8. $2yz$ cu $y_0z + yz_0$
9. $2zx$ cu $z_0x + zx_0$.

9.4 Probleme

1. Arătaţi că unghiul dintre tangentele elicei circulare

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

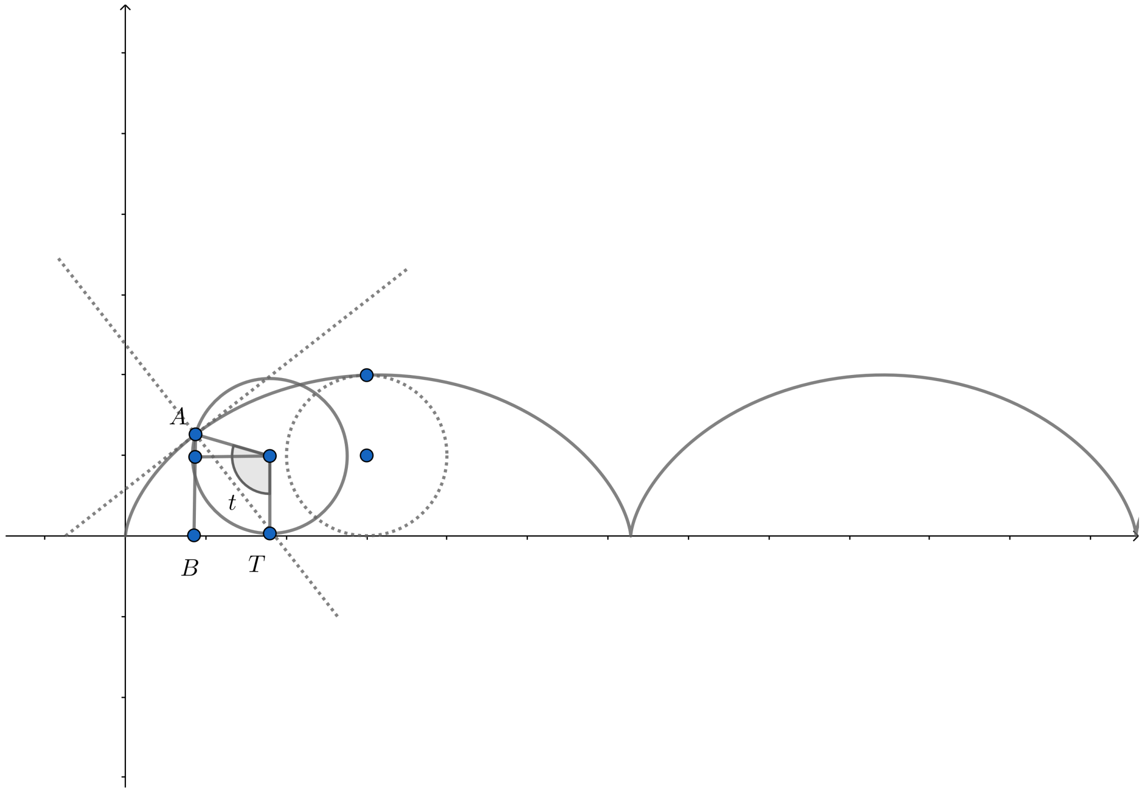
şi axa Oz este constant.

Soluţie.

2. *Cicloida* este curba trasată de un punct de pe circumferinţa unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare de-a lungul unei drepte. Arătaţi că ecuaţiile sale parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soluţie.



3. Arătaţi că normala cicloidei într-un punct trece prin punctul de tangenţă dintre cercul generator şi dreapta de-a lungul căreia se rostogoleşte cercul generator.

   Soluţie.

4. *Epicicloida* este curba plană trasată de un punct de pe cerc care se rostogoleşte fără alunecare de-a lungul unui cerc în exteriorul acestuia. Aflaţi ecuaţiile parametrice ale epicicloidei.

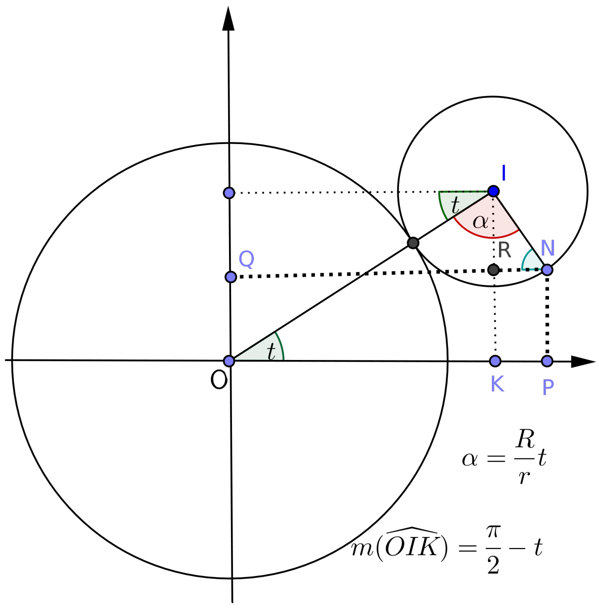
   Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale epicicloidei

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos t - r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \\ y = (R+r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

   or

$$\begin{cases} x = r(k+1)\cos t - r\cos(k+1)t \\ y = r(k+1)\sin t - r\sin(k+1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

   unde $k = \dfrac{R}{r}$. Dacă k este un număr întreg, atunci epicicloida este o curbă închisă.



$$m(\widehat{NIR}) = \alpha - m(\widehat{OIK}) = -\frac{\pi}{2} + \left(\frac{R}{r}+1\right)t$$

$$m(\widehat{INR}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{NIR}) = \pi - \frac{R+r}{r}t$$

$$IR = r\sin\frac{R+r}{r}t, RN = -r\cos\frac{R+r}{2}t$$

5. *Hipocycloida* este curba plană trasată de un punct de pe cerc care se rostogoleşte fără alunecare de-a lungul unui cerc în interiorul acestuia. Aflaţi ecuaţiile parametrice ale hipocicloidei.

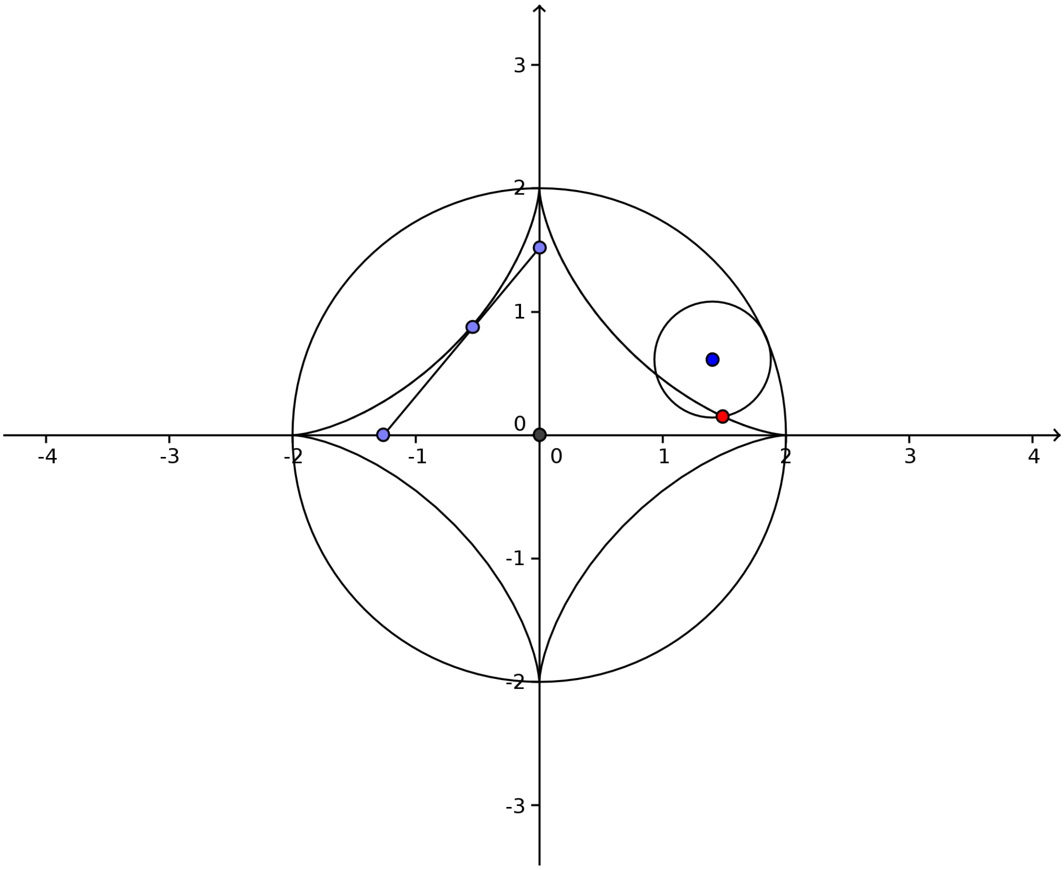
   Răspuns: Ecuaţiile parametrice ale hipocicloidei sunt:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

sau

$$\begin{cases} x = r(k-1)\cos t + r\cos(k-1)t \\ y = r(k-1)\sin t - r\sin(k-1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

unde $k = \dfrac{R}{r}$. Dacă k este un număr întreg, atunci hipocicloida este o curbă închisă. În particular, pentru $k = 4$ hipocicloida se numeşte *astroidă*

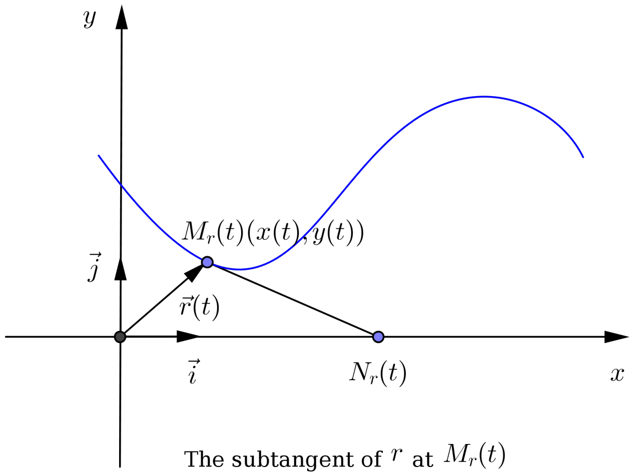


6. *Subtangenta* unei curbe parametrizate diferenţiabile este segmentul care uneşte punctul de tangenţă dintre tangenta unei curbe parametrizate diferenţiabile plane şi curbă cu punctul de intersecţie dintre tangentă şi axa Ox. Arătaţi că lungimea subtangentei curbei parametrizate diferenţiabile plane

$$r : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = a\left(\ln\tan(t/2) + \cos t, \sin t\right),$$

numită *tractrice* este constantă egală cu a.

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale tractricei sunt

$$\begin{cases} x = a\log\tan(t/2) + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \ t \in (0, \pi),$$

ecuaţia sa vectorială este

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\ln\tan(t/2) + a\cos t)\overrightarrow{i} + (a\sin t)\overrightarrow{j}.$$

iar vectorul său tangent este

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}'(t) &= \left(a\frac{1}{\tan(t/2)}\frac{1}{\cos^2(t/2)}\frac{1}{2} - a\sin t\right)\overrightarrow{i} + (a\cos t)\overrightarrow{j} \\ &= \left(\frac{a}{\sin t} - a\sin t\right)\overrightarrow{i} + (a\cos t)\overrightarrow{j} \\ &= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}\overrightarrow{i} + (a\cos t)\overrightarrow{j} = a\cos t(\cot t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}). \end{aligned}$$

Aşadar, ecuaţia tangentei tractricei în punctul regular $M_r(t)$, adică $t \in (0, \pi) \setminus \{0\}$ este

$$(T_r)(t): \ \frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \Longleftrightarrow \frac{X - a\log\tan(t/2) - a\cos t}{a\cos t\cot t} = \frac{Y - a\sin}{a\cos t}. \tag{9.12}$$

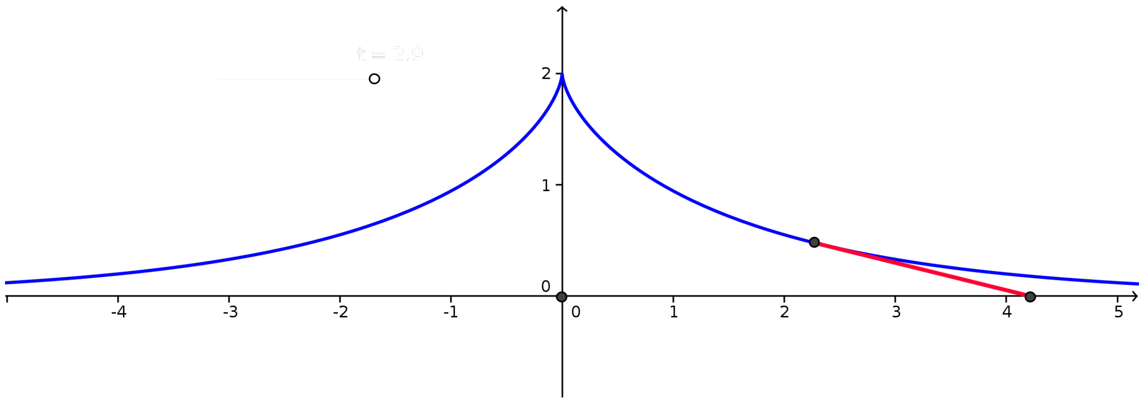
Coordinatele punctului de intersecţie $N_r(t)$ al tangentei $T_r(t)$ tractricei în $M_r(t)$ cu axa Ox poate fi obţinut luând $Y = 0$ în (9.12), care implică $X = a\log\tan(t/2)$, adică $N_r(t)(a\log\tan(t/2), 0)$. Distanţa dintre

$$M_r(t)\,(a\log\tan(t/2) + a\cos t, a\sin t) \ \text{şi} \ N_r(t)(a\log\tan(t/2), 0)$$

is

$$\sqrt{(a\log\tan(t/2) + a\cos t - a\cos t)^2 + (a\sin t - 0)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a.$$

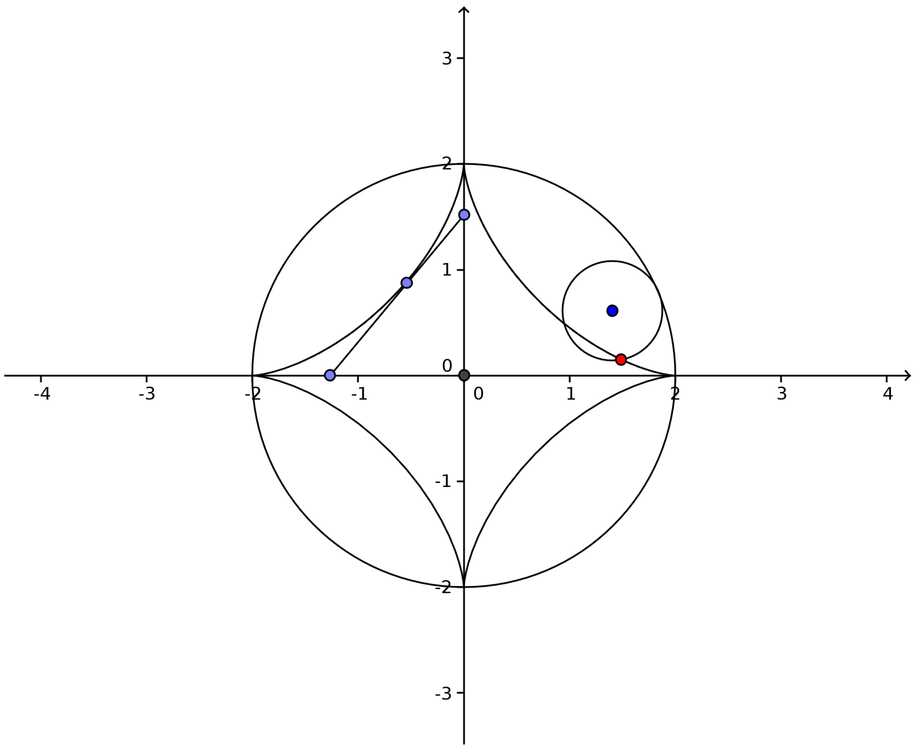
Observăm că $t = \pi/2$ este unicul punct singular al lui $\overrightarrow{r}$. deoarece $\overrightarrow{r}''(\pi/2) = a\overrightarrow{j}$, rezultă că $t = \pi/2$ este un punct singular de ordinul doi pentru $\overrightarrow{r}$, adică $\overrightarrow{r}''(\pi/2)$ este un vector director al tangentei lui r în $t = \pi/2$. Cu alte cuvuinte axa Oy este tangenta lui r în $t = \pi/2$. Observăm că $M_r(\pi/2)(0, a)$ şi $N_r(\pi/2)$ este origine $O(0, 0)$. Aşadar distanţa dintre $M_r(\pi/2)(0, a)$ şi $N_r(\pi/2)$ este a.



7. Arătaţi că tangentele astroidei

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$$

determină segmente de lungimi egale pe axele de coordonate.



Soluţie.

8. Scrieţi ecuaţia tangentei şi a planului normal al următoarelor curbe, atunci când aceste obiecte sunt bine-determinate:

   (a)
   $$\begin{cases} x = e^t \cos 3t \\ y = e^t \sin 3t \\ z = e^{-2t} \end{cases}$$
   în punctul $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$ (corespunzător valorii $t = 0$ a parametrului) .

   (b)
   $$\begin{cases} x = e^t \cos 3t \\ y = e^t \sin 3t \\ z = e^{-2t} \end{cases}$$
   în punctul $(x(\pi/4), y(\pi/4), z(\pi/4))$ corspunzător valorii $t = \dfrac{\pi}{4}$ a parametrului.

   Soluţie.

9. Scrieţi ecuaţiile planelor tangente hiperboloidului cu o pânză $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ în punctele de forma $(x_0, y_0, 0)$ şi arătaţi că acestea sunt paralele cu axa Oz.

   Soluţie.

10. Arătaţi că urma curbei parametrizate diferenţiabile $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 2t)$ este conţintă în suprafaţa regulară de ecuaţie $z = \ln(x^2 + y^2)$ şi scrieţi ecuaţia planului tangent al suprafeţei în punctele $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

    Soluţie.

11. Arătaţi că planele tangente suprafeţei de ecuaţie $z = xf(\frac{y}{x})$, unde f este o funcţie diferenţiabilă, trec prin origine.

    Soluţie.

12. Arătaţi că mulţimea $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, xyz = a^3\}$, $a \neq 0$ este o suprafaţă regulară şi că planul său tangent într-un punct arbitrar $p \in S$ determină pe axele de coordonate trei puncte care, împreună cu originea sunt vârfurile unui tetraedru de volum constant. (independent al lui p).

    Soluţie.

10 Conice

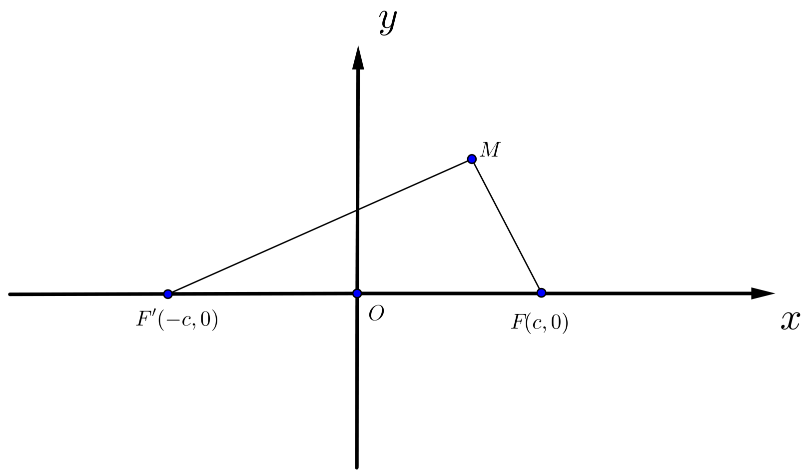
10.1 Elipsa

Definiţia 10.1. *Elipsa* este locul geometric al punctelor din plan care au suma distanţelor la două puncte fixe, să spunem F şi F', numite *focare*, constantă.

Distanţa dintre focare se numeşte *distanţă focală*
Fie F şi F' cele două focare ale unei elipse şi fie . Presupunem că distanţa focală este $|FF'| = 2c$, iar constanta din definiţia elipsei este $2a$. Dacă M este un punct arbitrar al elipsei, acesta trebuie să verifice condiţia

$$|MF| + |MF'| = 2a.$$

Putem alege reperul cartezian ortonormat cu originea în mijlocul segmentului $[FF']$, astfel încât $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$.



Observaţia 10.1. În triunghiul MFF' are loc următoarea inegalitate $|MF| + |MF'| > |FF'|$. Aşadar $2a > 2c$, adică constantele a şi c sunt în ordinea $a > c$.

Prin urmare, pentru un punct generic $M(x, y)$ al elipsei avem:

$$\begin{aligned}
|MF| + |MF'| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
& \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
& x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
& a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2 \\
& a^2(x^2 + 2xc + c^2) + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^2 \\
& (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.
\end{aligned}$$

Notăm $a^2 - c^2$ cu b^2, întrucât $(a > c)$. Aşadar $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, adică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{10.1}$$

Observaţia 10.2. Elipsa

$$(E)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

este o curbă regulară a cărei tangentă $T_{P_0}(E)$ într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in E$ este

$$T_{P_0}(E) : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{10.2}$$

Observaţia 10.3. Ecuaţia (10.1) este echivalentă cu

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

fapt care arată că elipsa este simetrică faţă de axele de coordonate Ox şi Oy. De fapt dreapta FF', deterrminată de focarele elipsei şi mediatoarea segmentului $[FF']$ sunt axele de simetrie ale elipsei. Punctul lor de intersecţie, adică mijlocul segmentului $[FF']$, este centrul de simetre al elipsei, sau, simplu, *centrul* său.

Observaţia 10.4. Pentru a schiţa elipsa, observăm că este suficient să reprezentăm graficul funcţiei

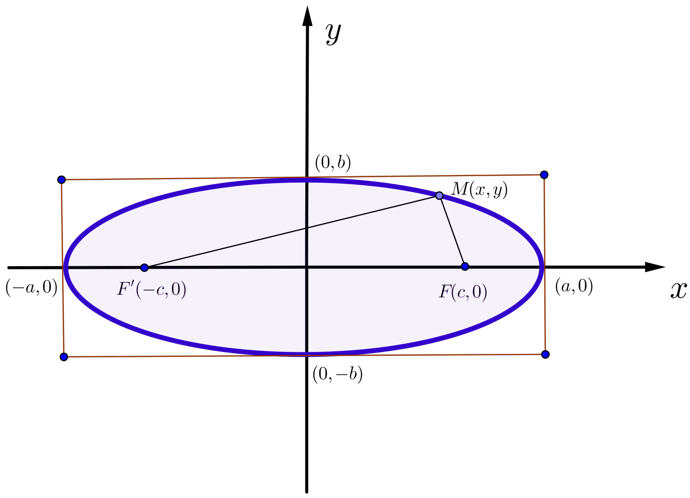
$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

şi să-l simetrizăm apoi faţă de axa Ox.

Avem

$$f'(x) = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	$\vert$	$+ + +$	0	$- - -$	$\vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0
$f''(x)$	$\vert$	$- - -$	$-$	$- - -$	$\vert$



10.2 Hiperbola

Definiţia 10.2. *Hiperbola* este locul geometric al punctelor din plan care au modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe, să spunem F şi F', numite *focare*, constantă.

Distanţa dintre două focare se numeşte *distanţă focală*
Fie F şi F' cele două focare ale unei hiperbole şi fie $|FF'| = 2c$ distanţa focală. Presupunem că în definiţia hiperbolei constanta este $2a$. Dacă M este un punct arbitrar al hiperbolei, acesta trebuie să verifice condiţia

$$|MF| - |MF'| = \pm 2a.$$

Putem alege reperul cartezian ortonormat cu originea în mijlocul segmentului $[F'F]$, astfel încât $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$.

Observaţia 10.5. În triunghiul MFF' are loc următoarea inegalitate $|MF| + |MF'| < |FF'|$. Aşadar $2a < 2c$, adică constantele a şi c sunt în ordinea $a < c$.

Să determinăm acum ecuaţia hiperbolei. Folosind definiţia obţinem $|MF| - |MF'| = \pm 2a$, adică

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

sau, echivalent

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Prin urmare avem succesiv:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
&cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0.
\end{aligned}$$

Folosind notaţia $c^2 - a^2 = b^2$ $(c > a)$ obţinem ecuaţia hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10.3}$$

Observaţia 10.6. Hiperbola

$$(H)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

este o curbă regulară a cărei tangentă $T_{P_0}(H)$ într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in H$ este

$$T_{P_0}(H) : \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1. \tag{10.4}$$

Ecuaţia (10.3) este echivalentă

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Prin urmare axele de coordonate sunt axe de simetrie ale hiperbolei şi originea este centru de simetrie numit *centrul hiperbolei.*

Observaţia 10.7. Pentru a reprezenta hiperbola, este suficient să reprezentăm graficul funcţiei

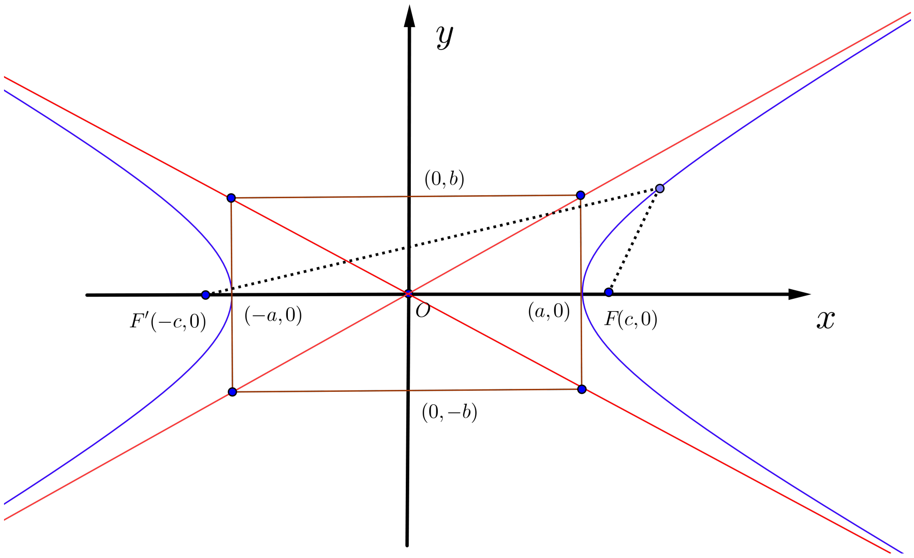
$$f : (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

şi apoi să-l simetrizăm faţă de axa Ox, dat fiind faptul că hiperbola este simetrică faţă de axa Ox.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{b}{a}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{b}{a}$, rezultă că $y=\dfrac{b}{a}x$ şi $y=-\dfrac{b}{a}x$ sunt asimptote ale lui f.
Avem, de asemenea,

$$f'(x)=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},\qquad f''(x)=-\frac{ab}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}.$$

x	$-\infty$		$-a$		a		∞
$f'(x)$	$-$	$-\ -\ -$	$\vert$	$/\ /\ /$	$\vert$	$+\ +\ +$	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	$0\vert$	$/\ /\ /$	$\vert 0$	$\nearrow$	∞
$f''(x)$	$-$	$-\ -\ -$	$\vert$	$/\ /\ /$	$\vert$	$-\ -\ -$	$-$



10.3 Parabola

Definiţia 10.3. *Parabola* este locul geometric al punctelor din plan echidistante faţă de un punct F şi o dreaptă d date.

Dreapta d se numeşte *dreapta directoare* iar punctul F se numeşte *focarul* parabolei. Distanţa dintre focar şi dreapta directoare se notează cu p şi se numeşte *parametrul* parabolei.

Considerăm un reper cartezian xOy, în care $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ şi $d: x=-\dfrac{p}{2}$. Dacă $M(x,y)$ este un punct arbitrar al parabolei, coordonatele sale verifică condiţia

$$|MN|=|MF|,$$

unde N este proiecţia ortogonală a lui M pe d.
Aşadar, pentru coordonatele lui M avem succesiv:

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+0}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=y^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

iar ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 2px. \tag{10.5}$$

Observaţia 10.8. Parabola

$$(P)\, y^2 = 2px$$

este o curbă regulară, iar ecuaţia tangentei sale $T_{P_0}(P)$ într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in P$ este

$$T_{Q_0}(P)\, y_0 y = p(x + x_0). \tag{10.6}$$

Observaţia 10.9. Ecuaţia (10.5) este echivalentă cu $y = \pm\sqrt{2px}$, adică parabola este simetrică faţă de axa Ox.

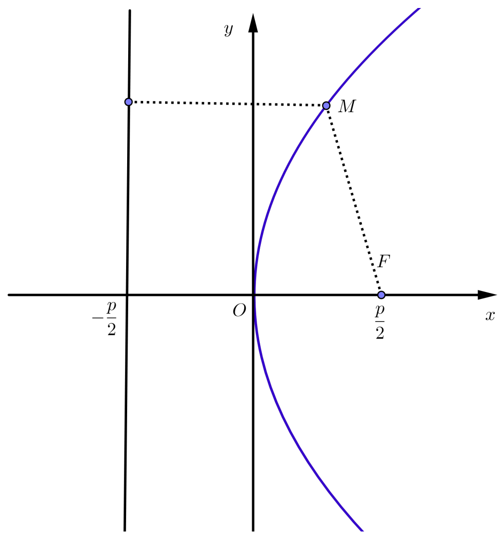
Pentru a reprezenta parabola este suficient să reprezentăm graficul funcţiei

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),$$

iar apoi să-l simetrizăm pe acesta faţă de axa Ox.
Avem

$$f'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}; \qquad f''(x) = -\frac{p}{2x\sqrt{2x}}.$$

x	0				∞
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0		$\nearrow$		∞
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$



10.4 Probleme

1. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ având coeficientul unghiular $m \in \mathbb{R}$. (vezi [1, p. 110]).

Soluţie. Căutăm dreptele $d : y = mx + n$, care sunt tangente elipsei, adică dreptele din familia $d : y = mx + n$ care au cu elipsa un contact de tangenţă. Intersecţia unei drepte din această familie cu elipsa este dată de soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = mx + n \end{cases},$$

care ne conduce la ecuaţia de gradul doi,

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Discriminantul Δ al ultimei ecuaţii este

$$\Delta = 4[a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2)],$$

iar dreapta (d) şi elipsa (E) au un contact de tangenţă dacă şi numai dacă

$$a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0,$$

adică $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Ecuaţiile tangentelor la elipsă având coeficientul unghiular m sunt deci

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}. \tag{10.7}$$

2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa $\mathcal{E} :\ x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ care sunt perpendiculare pe dreapta $d :\ 2x - 2y - 13 = 0$.

   Soluţie.

3. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la elipsa $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-1=0$, care trec prin punctul $P_0(10,-8)$.

   Soluţie.

4. Dacă $M(x,y)$ este un punct al tangentei $T_{M_0}(E)$ la elipsa $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ într-unul dintre punctele sale $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$, arătaţi că $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1$.

   Soluţia 1. Orice vector director al tangentei $T_{M_0}(E) \ : \ \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ este perpendicular pe vectorul normal $\overrightarrow{n}\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2}\right)$ al tangentei $T_{M_0}(E)$. Un astfel de vector ortogonal este $\overrightarrow{v}\left(\dfrac{y_0}{b^2},-\dfrac{x_0}{b^2}\right)$. Aşadar, ecuaţiile parametrice ale tangentei sunt

$$T_{M_0}(E) \ : \ \begin{cases} x = x_0+\dfrac{y_0}{b^2}t \\ y = y_0-\dfrac{x_0}{b^2}t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R},$$

   adică coordonatele lui M sunt de această formă. Pentru a rezolva complet problema, mai trebuie să arătăm că $\varphi\geq 1$, unde

$$\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{\left(x_0+\dfrac{y_0}{b^2}t\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_0-\dfrac{x_0}{b^2}t\right)^2}{b^2}.$$

   Într-adevăr

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{x_0^2+2\dfrac{x_0y_0}{b^2}t+\dfrac{y_0^2}{b^4}t^2}{a^2}+\frac{y_0^2-2\dfrac{x_0y_0}{b^2}t+\dfrac{x_0^2}{a^2}t^2}{b^2}\\ &= \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)t^2 = 1+\frac{t^2}{a^2b^2}\geq 1, \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Soluţia 2. Deoarece $M(x,y)\in T_{M_0}(E) \ : \ \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, rezultă, folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz că

$$\begin{aligned}1 = \frac{x_0}{a}\cdot\frac{x}{a}+\frac{y_0}{b}\cdot\frac{y}{b} &\leq \left|\frac{x_0}{a}\cdot\frac{x}{a}+\frac{y_0}{b}\cdot\frac{y}{b}\right|\\ &\leq \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.\end{aligned}$$

5. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ care au coeficienrul unghiular $m\in\mathbb{R}$. (see [1, p. 115]).

   Soluţie. Intersecţia hiperbolei $(\mathcal{H})$ cu dreapta $(d)y=mx+n$ este dată de soluţia sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \\ y=mx+n \end{cases}.$$

   Acesta ne conduce la ecuaţia de gradul doi

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0. \tag{10.8}$$

- Dacă $a^2m^2 - b^2 = 0$, (sau $m = \pm\frac{b}{a}$), atunci ecuaţia (10.8) devine
$$\pm 2bnx + a(n^2 + b^2) = 0.$$
  - Dacă $n = 0$, atunci ecuaţia (10.8) nu are soluţie (aceasta înseamnă că cele două drepte nu intersectează hiperbola, acestea fiind, de fapt, asimptotele hiperbolei.);
  - Dacă $n \neq 0$, atunci ecuaţia (10.8) are o singură soluţie (geometric, o dreaptă d, care este paralelă cu una dintre asimptote, intersectează hiperbola într-un singur punct);
- Dacă $a^2m^2 - b^2 \neq 0$, atunci discriminantul ecuaţiei (10.8) este
$$\Delta = 4[a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 - b^2)(n^2 + b^2)].$$
Dreapta $d : y = mx + n$ este tangentă hiperbolei $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dacă discriminantul Δ al ecuaţiei (10.8) este zero, adică $a^2m^2 - n^2 - b^2 = 0$.
  - Dacă $a^2m^2 - b^2 \geq 0$, adică $m \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] \cup \left[\frac{b}{a}, \infty\right)$, atunci $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$. Ecuaţiile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H}$ care au coeficientul unghiular $m \in \mathbb{R}$ sunt
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}. \tag{10.9}$$
  - Dacă $a^2m^2 - b^2 < 0$, atunci nu există tangente ale hiperbolei $\mathcal{H}$, cu coeficientul unghiular m.

6. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} - 1 = 0$ care sunt perpendiculare pe dreapta $d :\ 4x + 3y - 7 = 0$.

   Soluţie.

7. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la parabola $\mathcal{P}: \ y^2 = 2px$ care au coeficientul unghiular $m \in \mathbb{R}$. (vezi [1, p. 119]).

   Soluţie. Intersecţia dintre parabola (P) şi dreapta $(d)y = mx + n$ este dată de soluţiile sistemului de ecuaţii
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = mx + n. \end{cases}$$
   Acesta conduce la ecuaţia de gradul doi
$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0,$$
   care are discriminantul
$$\Delta = 4p(2mn - p) \tag{10.10}$$
   Dreapta $d : y = mx + n$ (cu $m \neq 0$) este tangentă parabolei $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ dacă discriminantul Δ, care apare în (10.10) este zero, adică $2mn = p$. Atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{P}$, care au coeficientul unghiular $m \in \mathbb{R}$, este
$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{10.11}$$

8. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la parabola $\mathcal{P}: \ y^2 - 8x = 0$, paralele cu dreapta $d: \ 2x + 2y - 3 = 0$.

   Soluţie.

9. Aflaţi ecuaţiile tangentelor la parabola $\mathcal{P}: \ y^2 - 36x = 0$, care trec prin punctul $P(2, 9)$.

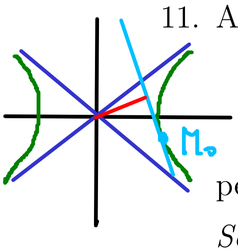
   Soluţie.

10. Aflaţi ecuaţia locului geometric al proiecţiilor ortogonale ale centrului $O(0,0)$ elipsei

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pe tangentele sale.

Soluţie.



11. Aflaţi ecuaţia locului geometric al proiecţiilor ortogonale ale centrului $O(0,0)$ hiperbolei

$$H:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

pe tangentele sale.

Soluţie. $M_0(x_0,y_0)\in H \iff \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$; $T_{M_0}(H)\ \ \frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$

Vectorul normal al tangentei $T_{M_0}(H)$ este $\vec{n}\left(\frac{x_0}{a^2},-\frac{y_0}{b^2}\right)$

$$\begin{cases} x=\frac{x_0}{a^2}t \\ y=-\frac{y_0}{b^2}t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ ;\quad \frac{x_0}{a^2}\,\frac{x_0}{a^2}t-\frac{y_0}{b^2}\left(-\frac{y_0}{b^2}t\right)=1$$

$$\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}_{\neq 0}t=1 \iff t_0=\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}$$

$$P_{T_{M_0}(H)}(O)\ \left(X=\frac{x_0}{a^2}\,\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}},\ Y=-\frac{y_0}{b^2}\,\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}\right)$$

$$\begin{cases} X=\frac{x_0 t_0}{a^2} \\ Y=-\frac{y_0 t_0}{b^2}\end{cases}\qquad aX=\frac{x_0}{a}t_0 \qquad a^2X^2-b^2Y^2=\overbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}^{=1}t_0^2$$

$$bY=-\frac{y_0}{b}t_0 \qquad a^2X^2-b^2Y^2=t_0^2$$

$$X^2+Y^2=\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)t_0^2=\frac{1}{t_0}\cdot t_0^2=t_0$$

$$a^2X^2-b^2Y^2=t_0^2=\left(X^2+Y^2\right)^2$$

$$a^2X^2-b^2Y^2=\left(X^2+Y^2\right)^2$$

$$\mathcal{L}\subseteq\left\{M(X,Y)\ \middle|\ \left(X^2+Y^2\right)^2=a^2X^2-b^2Y^2\right\}\setminus\{(0,0)\}$$

$\supseteq$ TEMĂ

$$\mathcal{L}=\left\{M(X,Y)\ \middle|\ \left(X^2+Y^2\right)^2=a^2X^2-b^2Y^2\right\}\setminus\{(0,0)\}$$

12. Arătaţi că o rază de lumină prin focarul unei elipse se reflectă într-o rază care trece prin celălalt focar (proprietatea optică a elipsei).

Solution. Fie $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ focarele elipsei $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Amintim că gradientul $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ este vectorul normal al elipsei $\mathcal{E}$ în punctul $M_0(x_0,y_0)$, unde

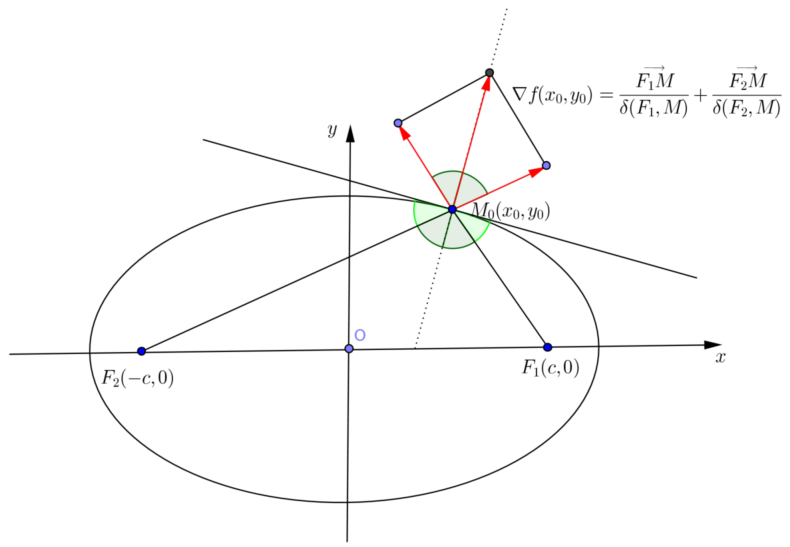
$$f(x,y)=\delta(F_1,M)+\delta(F_2,M)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

şi $M(x,y)$. Observăm că

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{x_0-c}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{x_0+c}{\delta(F_2,M_0)} \text{ şi } f_y(x_0,y_0)=\frac{y}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{y}{\delta(F_2,M_0)},$$

iar aceasta arată că

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f) &= (f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))=\left(\frac{x_0-c}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{x_0+c}{\delta(F_2,M_0)},\frac{y_0}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{y_0}{\delta(F_2,M_0)}\right)\\ &=\frac{(x_0-c,y)}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{(x_0+c,y)}{\delta(F_2,M_0)}=\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{\delta(F_1,M_0)}+\frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{\delta(F_2,M_0)}.\end{aligned}$$



Versorii

$$\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{\delta(F_1,M_0)},\ \frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{\delta(F_2,M_0)}$$

sunt orientaţi înspre exteriorul elipsei $\mathcal{E}$, iar suma lor face unghiuri egale cu direcţiile vectorilor $\overrightarrow{F_1M_0}$ şi $\overrightarrow{F_2M_0}$ şi (suma) este de asemenea perpendiculară pe tangenta $T_{M_0}(\mathcal{E})$ elipsei în $M_0(x_0,y_0)$. Aceasta arată că unghiul dintre raza F_1M şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{E})$ este egal cu unghiul dintre raza F_2M şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{E})$.

13. Arătaţi că o rază de lumină prin focarul unei hiperbole se reflectă într-o rază care trece prin celălalt focar (proprietatea optică a hiperbolei).

Soluţie. Fie $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ focarele hiperbolei $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Amintim că gradientul $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ este un vector normal al hiperbolei $\mathcal{H}$ în punctul $M_0(x_0,y_0)$, unde

$$f(x,y)=\delta(F_2,M)-\delta(F_1,M)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{10.12}$$

pentru ramura stângă a hiperbolei $\mathcal{H}$ şi

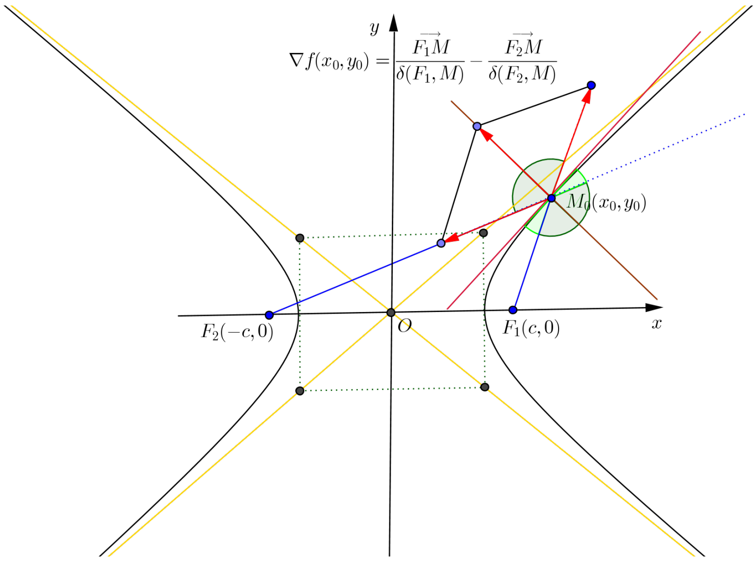
$$f(x,y) = \delta(F_1, M) - \delta(F_2, M) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{10.13}$$

pentru ramura dreaptă a lui $\mathcal{H}$ şi $M(x,y)$. Vom folosi doar versiunea (10.12) lui f, deoarece raţionamentul este acelaşi pentru versiunea (10.13). Observăm că

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{x_0 - c}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{x_0 + c}{\delta(F_2, M_0)} \text{ şi } f_y(x_0,y_0) = \frac{y}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{y}{\delta(F_2, M_0)},$$

şi arată că

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f) &= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) = \left(\frac{x_0 - c}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{x_0 + c}{\delta(F_2, M_0)}, \frac{y_0}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{y_0}{\delta(F_2, M_0)} \right) \\ &= \frac{(x_0 - c, y)}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{(x_0 + c, y)}{\delta(F_2, M_0)} = \frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{\delta(F_1, M_0)} - \frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{\delta(F_2, M_0)}. \end{aligned}$$



Versorii

$$\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{\delta(F_1, M_0)}, \ -\frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{\delta(F_2, M_0)}$$

sunt orientaţi înspre exteriorul hiperbolei $\mathcal{H}$[3] iar suma lor face unghiuri egale cu direcţiile vectorilor $\overrightarrow{F_1M_0}$ şi $\overrightarrow{F_2M_0}$ iar (suma) este de asemenea perpendiculară pe tangenta $T_{M_0}(\mathcal{H})$ hiperbolei în $M_0(x_0,y_0)$. Aceasta arată unghiul dintre raza F_1M şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{H})$ este egal cu unghiul dintre raza F_2M şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{H})$.

14. Arătaţi că o rază de lumină prin focarul unei parabole se reflectă într-o rază paralelă cu axa parabolei (proprietatea optică a parabolei).

Soluţie. Fie $F(\frac{p}{2}, 0)$ focarul parabolei $\mathcal{P}: \ y^2 = 2px$ şi $d: x = -\frac{p}{2}$ dreapta directoare a parabolei. Amintim că gradientul $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$ este un vector normal al parabolei $\mathcal{P}$ în punctul său $M_0(x_0,y_0)$, unde

$$f(x,y) = \delta(F,M) - \delta(M,d) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} - \left(x + \frac{p}{2}\right)$$

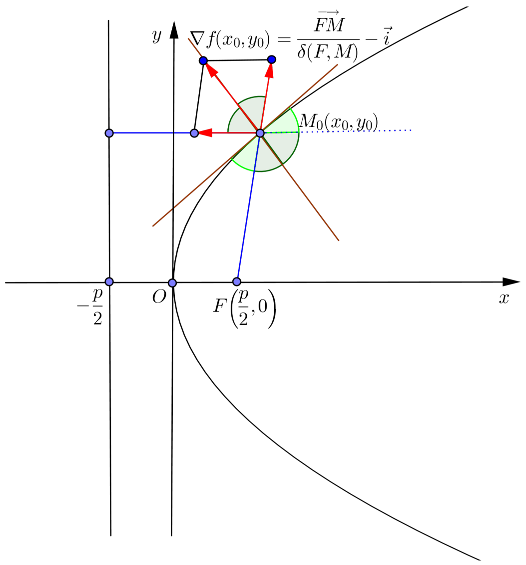
[3]Exteriorul unei hiperbole este componenta neconvexă a complementarei sale

şi $M(x, y)$. Observăm că

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0 - \frac{p}{2}}{\delta(F, M_0)} - 1 \text{ şi } f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\delta(F, M_0)},$$

şi arată că

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = \left(\frac{x_0 - \frac{p}{2}}{\delta(F, M_0)} - 1, \frac{y_0}{\delta(F, M_0)} \right) \\ &= \left(\frac{x_0 - \frac{p}{2}}{\delta(F, M_0)}, \frac{y_0}{\delta(F, M_0)} \right) - (1, 0) = \frac{\overrightarrow{FM_0}}{\delta(F, M_0)} - \overrightarrow{i}. \end{aligned}$$



Versorii

$$\frac{\overrightarrow{FM_0}}{\delta(F, M_0)}, \ -\overrightarrow{i}$$

sunt orientaţi înspre exteriorul parabolei $\mathcal{P}$[4] şi suma lor face unghiuri egale cu direcţiile vectorilor $\overrightarrow{FM_0}$, iar $\overrightarrow{i}$ şi sum lor este de asemenea perpendiculară pe tangenta $T_{M_0}(\mathcal{P})$ parabolei în $M_0(x_0, y_0)$. Aceasta arată că unghiul dintre raza FM şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{P})$ este egal cu unghiul dintre axa Ox şi tangenta $T_{M_0}(\mathcal{E})$.

11 Cuadrice date prin ecuaţiile lor reduse

11.1 Elipsoidul

Elipsoidul este cuadrica de ecuaţie

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ a, b, c > 0. \tag{11.1}$$

Observăm că odată cu un punct $M(x, y, z) \in E$, elipsoidul E conţine şi punctele $N(-x, y, z)$, $P(x, -y, z)$, $Q(-x, y, z)$. Aşadar, planele de coordonate xOy, xOz, yOz sunt plane de simetrie ale elipsoidului ceea ce conduce la concluzia că elipsoidul este simetric şi faţă de axele de

[4]Exteriorul unei parabole este componenta neconvexă a complementarei sale

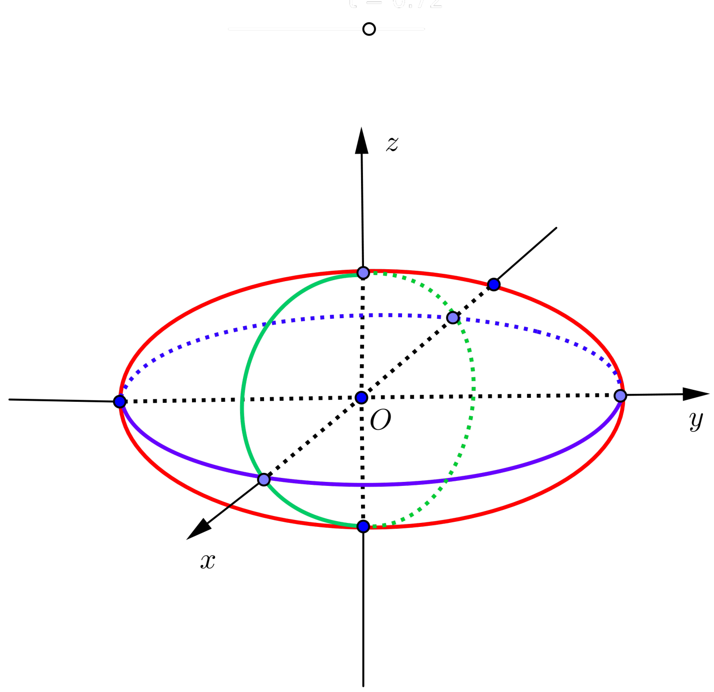
coordonate precum şi faţă de origine. De asemenea intersecţiile elipsoidului cu planele de coordonate sunt elipsele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0. \end{cases}$$

Intersecţia cu planul de ecuaţie $z=\lambda$ este elipsa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2}=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

dacă $|\lambda|<c$ în vreme ce intersecţiile cu planele de ecuaţii $z=c$ respectiv $z=-c$ se reduc la punctele de coordonate $(0,0,c)$ respectiv $(0,0,-c)$. Dacă $|\lambda|>c$ intersecţia elipsoidului cu planul de ecuaţie $z=c$ este vidă.



11.2 Hiperboloidul cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză este cuadrica de ecuaţie

$$H_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0. \tag{11.2}$$

Intersectiile hiperboloidului H_1 cu planele de coordonate yOz respectiv xOy sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

iar intersecţia lui H_1 cu planul de ecuaţie $z=\lambda$ este elipsa de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2}=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

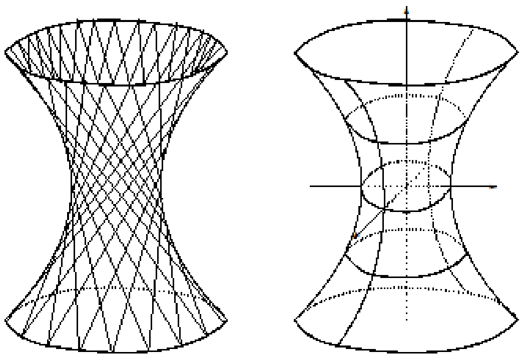
Ecuaţia hiperboloidului cu o pânză poate fi scrisă sub forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

şi astfel este uşor de văzut că dreptele de ecuaţii

$$\Delta_\lambda : \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b} \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ şi } \Delta'_\mu : \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

sunt conţinute în H_1, $\forall\,\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}$. Prin urmare hiperboloidul cu o pânză are două familii de *generatoare rectilinii.* Este uşor de văzut că prin fiecare punct al hiperboloidului H_1 trece câte o generatoare din fiecare familie, că fiecare generatoare dintr-o familie intersectează orice generatoare din cealaltă familie şi că oricare două generatoare din aceeaşi familie nu au puncte comune.



Hiperboloidul cu o pânză H_1

11.3 Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze este cuadrica de ecuaţie

$$H_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ a,b,c>0. \tag{11.3}$$

Intersecţiile hiperboloidului H_2 cu planele de coordonate xOz şi yOz sunt hiperbolele de ecuaţii

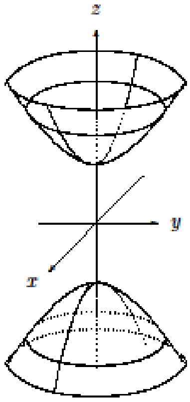
$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

iar intersecţia hiperboloidului H_2 cu planul de ecuaţie $x=\lambda$ este elipsa de ecuaţii

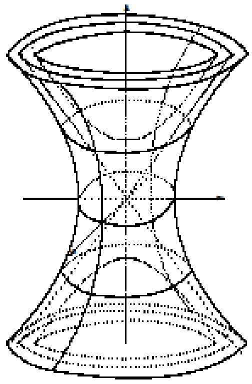
$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}\right)^2}=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

dacă $|\lambda|>|c|$. Dacă $\lambda=c$ sau $\lambda=-c$ atunci intersecţia se reduce la punctul de coordonate $(0,0,c)$ respectiv $(0,0,-c)$, iar dacă $|\lambda|<|c|$, atunci intersecţia este vidă.

Observăm că hiperboloizii H_1 şi H_2 sunt cuadrice cu centru unic, au direcţii asimptotice şi au acelaşi con asimptot.



hiperboloidul cu două pânze H_2


hiperboloizii H_1, H_2 şi conul asimptot comun

11.4 Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic este cuadrica de ecuaţie

$$P_e : \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0 \tag{11.4}$$

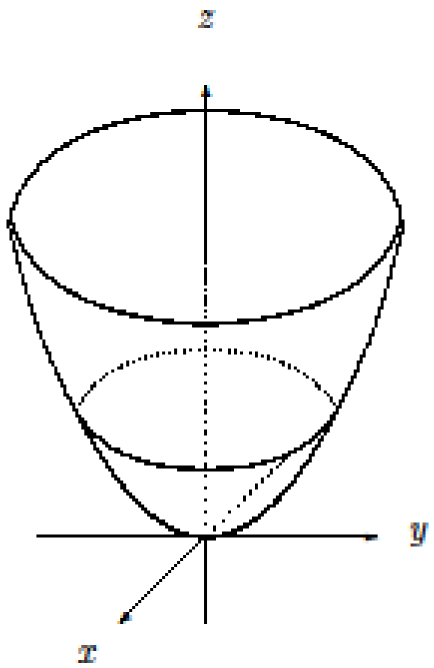
Intersecţia paraboloidului P_e cu planele de coordonate yOz respectiv xOz este parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases} \text{respectiv} \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

Intersecţia paraboloidului eliptic P_e cu planul $z = \lambda$ este elipsa de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{2p\lambda}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2q\lambda}^2} = 1 \\ z = \lambda, \end{cases}$$

pentru $\lambda > 0$. Dacă $\lambda = 0$ intersecţia se reduce la punctul de coordonate $(0, 0, 0)$ iar dacă $\lambda < 0$ intersecţia este vidă.



11.5 Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic este cuadrica de ecuaţie

$$P_h : \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0. \tag{11.5}$$

Intersecţia paraboloidului hiperbolic P_h cu panul de coordonate xOy este reuniunea dreptelor

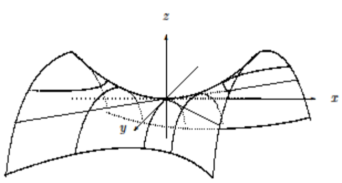
$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{x}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{x}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

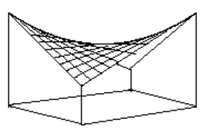
Intersecţia cu planul de coordonate xOz este parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases},$$

iar intersecţia cu planul de ecuaţiie $x = \lambda$ este parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{\lambda^2}{2p}\right) \\ y = 0. \end{cases}$$





Ecuaţia paraboloidului hiperbolic poate fi rescrisă în forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

astfel încât dreptele

$$\Delta_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda \\ \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \end{cases} \text{ şi } \Delta_\mu : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \mu \\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \end{cases}$$

sunt conţinute în paraboloidul hiperbolic P_h. Prin urmare, asemenea hiperboloidului cu o pânză, paraboloidul hiperbolic P_h are două familii de generatoare rectilinii care au aceleaşi proprietăţi cu cele ale hiperboloidului cu o pânză. În plus, în cazul paraboloidului hiperbolic, generatoarele rectilinii Δ_λ sunt paralele cu planul de ecuaţie $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$, iar generatoarele rectilinii Δ_μ sunt paralele cu planul de ecuaţie $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

11.6 Cuadrice degenerate

Cilindrul eliptic este cuadrica de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.6}$$

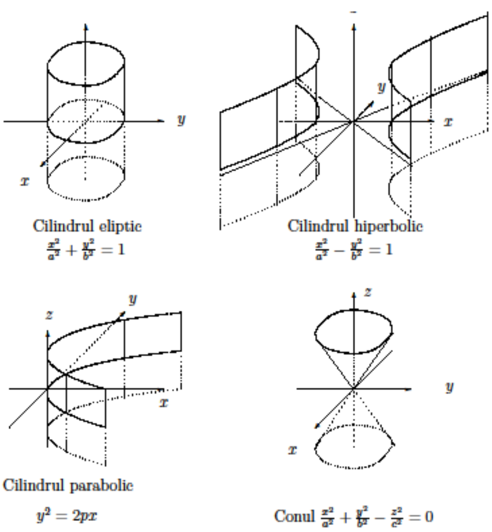
Cilindrul hiperbolic este cuadrica de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.7}$$

Cilindrul parabolic este cuadrica de ecuaţie $y^2 = 2px$ sau $y^2 = 2pz$ sau $x^2 = 2py$ sau $x^2 = 2pz$ sau $z^2 = 2px$ sau $z^2 = 2py$

Conul este cuadrica de educaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{11.8}$$



Perechea de plane concurente este cuadrica de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ şi analoagele.} \tag{11.9}$$

Perechea de plane paralele este cuadrica de ecuaţie

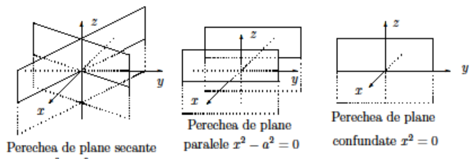
$$x^2 - a^2 = 0 \text{ şi analoagele.} \tag{11.10}$$

Perechea de plane confundate este cuadrica de ecuaţie

$$x^2 = 0 \text{ şi analoagele.} \tag{11.11}$$

Dreapta este cuadrica de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ şi analoagele.} \tag{11.12}$$



Perechea de plane secante $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Perechea de plane paralele $x^2 - a^2 = 0$ Perechea de plane confundate $x^2 = 0$

11.7 Probleme

1. Găsiţi punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

cu dreapta

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}$$

şi scrieţi ecuaţiile planelor tangente precum şi ecuaţiile normalelor elipsoidului în aceste puncte de intersecţie.

Soluţie.

2. Găsiţi generatoarele rectilinii ale cuadricei $4x^2 - 9y^2 = 36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

   Soluţie.

3. Găsiţi generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$(\mathcal{H}_1)\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

care sunt paralelele cu planul (π) $x + y + z = 0$.

Soluţie. $\frac{x^2}{6^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1 - \frac{y^2}{3^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{6} - \frac{z}{2}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{z}{2}\right) = \left(1 - \frac{y}{3}\right)\left(1 + \frac{y}{3}\right)$

$$\Delta_\lambda \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{6} - \frac{z}{2}\right) = 1 - \frac{y}{3} \\ \frac{x}{6} + \frac{z}{2} = \lambda\left(1 + \frac{y}{3}\right) \end{cases} \qquad \Delta'_\mu \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{6} - \frac{z}{2}\right) = 1 + \frac{y}{3} \\ \frac{x}{6} + \frac{z}{2} = \mu\left(1 - \frac{y}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Delta_\lambda \begin{cases} \frac{\lambda}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{\lambda}{2}z = 1 \\ \frac{1}{6}x - \frac{\lambda}{3}y + \frac{1}{2}z = \lambda \end{cases}$$

$\vec{n}_\lambda(p_\lambda, q_\lambda, r_\lambda)$

$$p_\lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} - \frac{\lambda^2}{6}$$

$$q_\lambda = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{12} - \frac{\lambda}{12} = -\frac{\lambda}{6}$$

$$r_\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\lambda}{3} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda^2}{18} - \frac{1}{18}$$

$\pi : x + y + z = 0$, $\vec{n}_\pi(1,1,1)$

$\Delta_\lambda \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{\Delta}_\lambda \subseteq \vec{\pi}$

$\Leftrightarrow \langle \vec{d}_\lambda(p_\lambda, q_\lambda, r_\lambda) \rangle \subseteq \vec{\pi} \Leftrightarrow \vec{d}_\lambda \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{d}_\lambda \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow p_\lambda + q_\lambda + r_\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(1 - \lambda^2) - \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{18}(\lambda^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

4. Aflaţi locul geometric al punctelor de pe paraboloidul hiperbolic $(\mathcal{P}_h)$ $y^2 - z^2 = 2x$ prin care generatoarele rectilinii sunt perpendiculare.

   Soluţie.

5. Calculaţi distanţa de la $O(0,0,0)$ la planul tangent $T_M(\mathcal{E})$ al elipsoidului

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

într-un punct $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$.

Soluţie.

6. Arătaţi că intersecţia dintre dreapta d şi sfera $S(O, r)$ se reduce la un punct dacă şi numai dacă $\operatorname{dist}(O, d) = r$.

   Soluţie.

12 Suprafeţe generate

12.1 Generalităţi

Peste tot în acest capitol spaţiul intuitiv $\mathcal{P}$ va fi raportat la un reper cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Considerăm mulţimile

$$S_1 = \{M(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0\},$$

$$S_2 = \{N(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - r^2 = 0\},$$

S_1 fiind sfera cu centrul în originea axelor de coordonate iar S_2 cilindrul circular drept. Observăm că mulţimile S_1, S_2 admit şi reprezentările

$$\begin{aligned} S_1 &= \{M(x, y, z) \mid x = r\cos v \sin u,\ y = r\cos v \sin u, \\ &\qquad z = r\sin v,\ u, v \in \mathbb{R}\}. \\ S_2 &= \{N(x, y, z) \mid x = r\cos u\ y = r\sin u,\ z = v,\ u, v \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Aceste observaţii sugerează definirea noţiunii de suprafaţă dată implicit şi parametric. Astfel, dacă F este o funcţie reală de trei variabile, iar φ, ψ, χ sunt funcţii reale de două variabile, mulţimile

$$\begin{aligned} S &= \{M(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} \\ S' &= \{N(x, y, z) \mid x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v), \\ &\qquad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,\ D \text{ deschisă}\} \end{aligned}$$

se numesc *suprafaţa* de ecuaţie carteziană implicită $F(x, y, z) = 0$, respectiv *suprafaţa parametrizată* de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \quad (u, v) \in D \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

În continuare considerăm mulţimea

$$\Gamma = \{M(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \wedge Ax + By + Cz = 0,\ C \neq 0\}.$$

Aceasta este un cerc mare al sfrei cu centrul în originea reperului R având raza $r > 0$. Γ admite şi reprezentarea

$$\Gamma = \{M(x, y, z) \mid x = r\cos\varphi(t)\cos t,\ y = r\cos\varphi(t)\sin t,\ r\sin\varphi(t)\},$$

unde $\varphi(t) = -\text{arctg}\frac{A\cos t + B\sin t}{C}$.

Cele două reprezentări ale mulţimii Γ sugerează modul de definire a noţiunilor de curbă implicită şi curbă parametrizată. Astfel, dacă F, G sunt funcţii reale de trei variabile iar x, y, z sunt funcţii reale de o variabilă reală, mulţimile

$$C = \{M(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0\} \tag{12.1}$$

$$C' = \{M(x, y, z) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I \subseteq \mathbf{R},\ I \text{ deschis}\} \tag{12.2}$$

se numesc *curba implicită* de ecuaţii carteziene implicite

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{12.3}$$

respectiv *curba parametrizată* de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases} \tag{12.4}$$

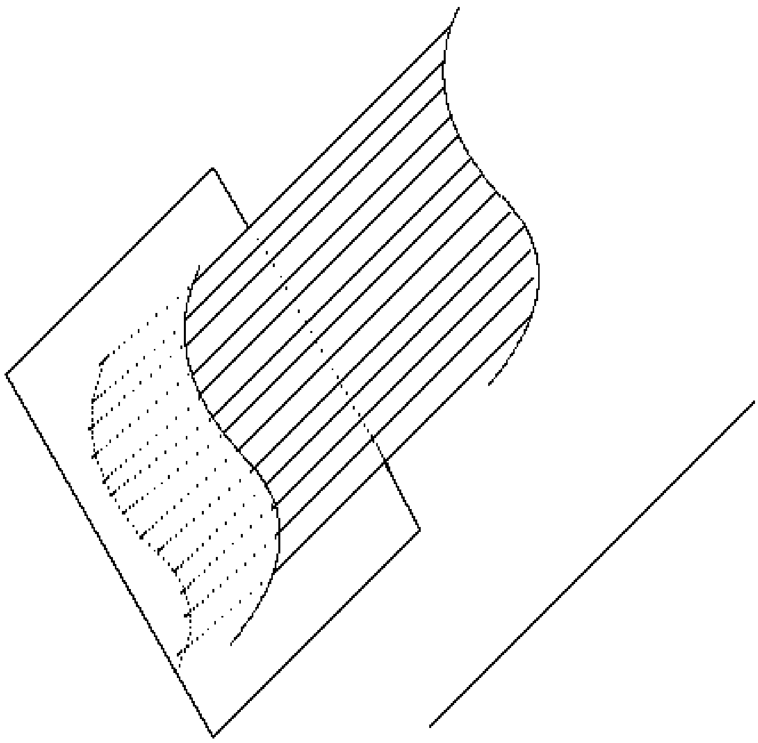
Atragem atenţia asupra faptului că dacă aplicaţiile $F,\ \varphi,\ \psi,\ \chi$ nu sunt bine alese mulţimile asociate se depărtează de ideea intuitivă de suprafaţă. De exemplu dacă $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ atunci $S = \{M(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} = \{M(x, y, z) \mid x = y = 0\} =$ axa Oz. De asemenea dacă $\varphi,\ \psi,\ \chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(u, v) = \cos u,\ \psi(u, v) = \sin u,\ \chi(u, v) = 0$, atunci mulţimea $S' = \{N(x, y, z) \mid x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$, adică imaginea aplicaţiei coincide cu cercul cu centrul în origine de rază unu situat în planul xOy. Considerăm familia de curbe

$$C_{\lambda\mu} \begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ G(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \end{cases}$$

Din familia $C_{\lambda\mu}$ alegem o subfamile de curbe corespunzătoare parametrilor $\lambda,\ \mu$ care satisfac relaţia $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Dacă parametrii $\lambda,\ \mu$ pot fi complet eliminaţi din aceste ecuaţii, atunci mulţimea punctelor de pe curbele subfamiliei se numeşte *suprafaţa generată de subfamilia* $\varphi(\lambda, \mu) = 0$.

12.2 Suprafeţe cilindrice

Definiţia 12.1. Se numeşte *suprafaţă cilindrică* mulţimea generată de o dreaptă variabilă, numită *generatoare*, care rămâne paralelă cu o dreptă dată Δ şi se sprijină pe o curbă dată Γ, numită *curbă directoare*



Teorema 12.1. *Suprafaţa cilindrică generată de o dreaptă variabilă care se sprijină pe curba plană*

$$\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ Q(x,y,z) := Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

şi este paralelă cu dreapta

$$\Delta : \begin{cases} P_1(x,y,z) := A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) := A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

(Δ neparalelă cu planul curbei Γ), este caracterizată de o ecuaţie de forma

$$\varphi(P_1, P_2) = 0, \tag{12.5}$$

Demonstraţie. Considerăm famila dreptelor paralele cu dreapta Δ,

$$\Delta_{\lambda\mu} : \begin{cases} P_1(x,y,z) = \lambda \\ P_2(x,y,z) = \mu. \end{cases}$$

Condiţia de neparalelism a dreptei Δ cu planul curbei Γ este

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

adică determinantul sistemului

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) = \lambda \\ P_2(x,y,z) = \mu \\ Q(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

este nenul. De aici rezultă că acesta are o singură soluţie

$$x = x(\lambda,\mu),\ y = y(\lambda,\mu),\ z = z(\lambda,\mu)$$

care reprezintă coordonatele punctului de intersecţie a dreptei $\Delta_{\lambda\mu}$ cu planul curbei Γ. Impunând condiţia ca acesta să aparţină şi suprafeţei $f(x,y,z) = 0$ obţinem condiţia de legătură $\varphi(\lambda,\mu) = 0$. Deci ecuaţia suprafeţei cilindrice este $\varphi(P_1,P_2) = 0$. Invers, orice ecuaţie de forma $\varphi(P_1,P_2) = 0$, unde

$$\Delta : \begin{cases} P_1(x,y,z) := A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) := A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

este o dreaptă, reprezintă ecuaţia unei suprafeţe cilindrice. Într-adevăr, considerăm suprafaţa cilindrică generată de o dreaptă variabilă paralelă cu dreapta Δ care se sprijină pe curba plană

$$C : \begin{cases} \varphi(P_1,P_2) = 0 \\ px + qy + rz = 0, \end{cases}$$

unde

$$p = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ q = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

sunt parametrii directori ai dreptei Δ. Ecuaţia acesteia este $\varphi(P_1,P_2) = 0$. □

Exemplul 12.1. Să găsim ecuaţia suprafeţei ecuaţiei cilindrice având generatoarele paralele cu dreapta

$$d : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

şi curba directoare dată prin

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} .$$

Considerăm familia dreptelor paralele cu dreapta d. Aceasta este o familie care depinde de doi parametri şi are ecuaţiile

$$d_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x + y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} .$$

Acestea intersectează curba $\mathcal{C}$, adică sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. O soluţie a sistemului poate fi obţinută folosind ultimele trei ecuaţii.

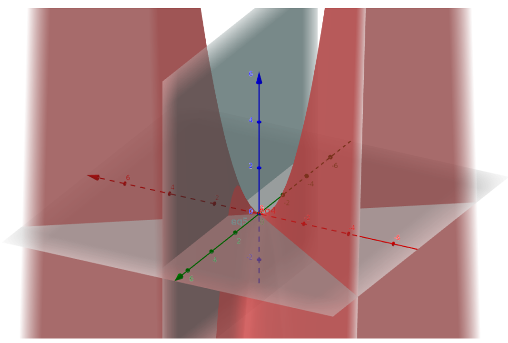
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

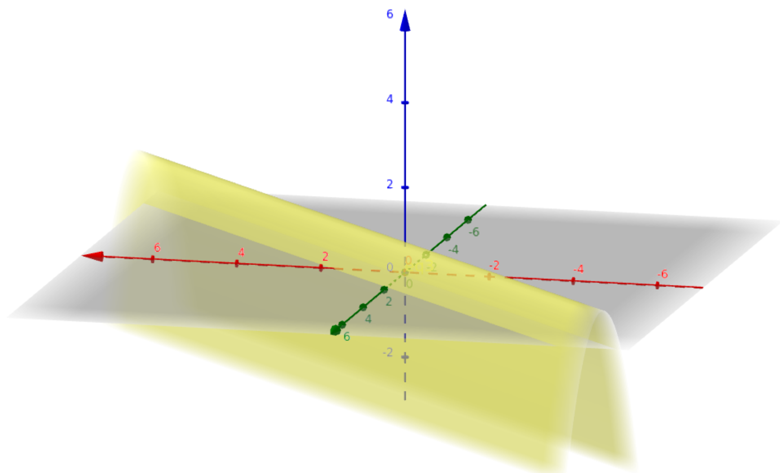
şi, înlocuind în primul, obţinem condiţia de compatibilitate

$$2(\lambda - 1)^2 + \mu - 1 = 0.$$

Aşadar, ecuaţia suprafeţei cilindrice cerută este

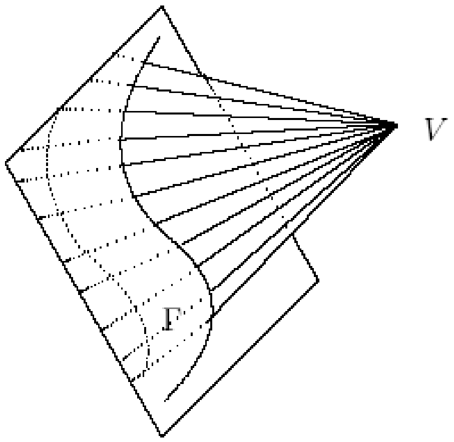
$$2(x + y - 1)^2 + z - 1 = 0.$$





12.3 Suprafeţe conice

Definiţia 12.2. Se numeşte *suprafaţă conică* mulţimea generată de o dreaptă variabilă, numită *generatoare*, care trece printr-un punct fix, numit *vârful supafeţei conice*, şi care se sprijină pe o curbă numită *curbă directoare.*



Teorema 12.2. *Suprafaţa conică a cărei generatoare se sprijină pe curba plană*

$$\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ P(x, y, z) := Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

şi are vîrful în punctul $V(x_0, y_0, z_0)$*, neconţinut în planul curbei* Γ*, este caracterizată de o ecuaţie de forma*

$$\varphi\Big(\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}\Big) = 0, \tag{12.6}$$

unde $R(x, y, z) := A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$ *iar*

$$\Delta_1 : \begin{cases} P_1(x, y, z) := A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \\ R(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_2 : \begin{cases} P_2(x, y, z) := A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) \\ R(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sunt două drepte concurente în punctul V *şi conţinute în planul de ecuaţie* $R(x, y, z) = 0$ *care trece prin punctul* V *şi este paralel cu planul curbei* Γ*.*

Demonstraţie. Considerăm familia dreptelor care trec prin punctul V şi nu sunt paralele cu planul curbei Γ,

$$\Delta_{\lambda\mu} : \begin{cases} P_1 - \lambda R = 0 \\ P_2 - \mu R = 0. \end{cases}$$

Deoarece dreptele Δ_1, Δ_2 au un singur punct comun rezultă că

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare sistemul

$$\begin{cases} P_1 - \lambda R = 0 \\ P_2 - \mu R = 0 \\ P = 0 \end{cases}$$

are o singură soluţie $x = x(\lambda, \mu),\ y = y(\lambda, \mu),\ z = z(\lambda, \mu)$ şi aceasta reprezintă coordonatele punctului de intersecţie ale dreptei $\Delta_{\lambda\mu}$ cu planul curbei. Impunând condiţia ca acesta să aparţină şi suprafeţei de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y, z) = 0$ obţinem o condiţie de legătură $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ între parametrii λ, μ. Aşadar ecuaţia suprafeţei conice este $\varphi\left(\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}\right) = 0$. Invers, orice ecuaţie de forma (12.6) este ecuaţia unei suprafeţe cilindrice. Într-adevăr, dacă $V(x_0, y_0, z_0)$ este punctul de intersecţie al planelor de ecuaţii $P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ R = 0$ iar $P = 0$ este un plan paralel cu planul de ecuaţie $R = 0$, atunci ecuaţia suprafeţei conice având vârful în punctul V şi curba directoare

$$\Gamma : \begin{cases} \varphi\left(\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}\right) = 0 \\ P(x, y, z) := Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

are ecuaţia $\varphi\left(\frac{P_1}{R}, \frac{P_1}{R}\right) = 0.$ $\square$

Exemplul 12.2. Să determinăm ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(1, 1, 1)$ şi curba directoare

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Familia dreptelor care trec prin V şi sunt neparalele cu planul xOt al curbei directoare depinde de doi parametrii şi are ecuaţiile

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - 1 = \lambda(z - 1) \\ y - 1 = \mu(z - 1) \end{cases}.$$

Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - xy = 0 \\ z = 0 \\ x - 1 = \lambda(z - 1) \\ y - 1 = \mu(z - 1) \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. O soluţie este

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \mu \\ z = 0 \end{cases},$$

şi, înlocuită în prima ecuaţie a sistemului, ne conduce la condiţia de compatibilitate

$$[(1 - \lambda)^2 + (1 - \mu)^2]^2 - (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei conice se obţine eliminând parametrii λ şi μ în

$$\begin{cases} x - 1 = \lambda(z - 1) \\ y - 1 = \mu(z - 1) \\ ((1 - \lambda)^2 + (1 - \mu)^2)^2 - (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0 \end{cases}.$$

Exprimând $\lambda = \dfrac{x - 1}{z - 1}$ şi $\mu = \dfrac{y - 1}{z - 1}$ şi înlocuind în condiţia de compatibilitate, obţinem

$$\left[\left(\frac{z - x}{z - 1}\right)^2 + \left(\frac{z - y}{z - 1}\right)^2\right]^2 - \left(\frac{z - x}{z - 1}\right)\left(\frac{z - y}{z - 1}\right) = 0,$$

şi

$$[(z - x)^2 + (z - y)^2]^2 - (z - x)(z - y)(z - 1)^2 = 0.$$

12.4 Suprafeţe conoide

Definiţia 12.3. Se numeşte *suprafaţă conoidă* mulţimea generată de o dreaptă variabilă, numită *generatoare*, care se sprijină pe o dreaptă dată şi pe o curbă dată şi rămâne paralelă cu un plan dat numit *plan director*

Teorema 12.3. *Suprafaţa conoidă a cărei generatoare se sprijină pe curba plană*

$$\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ P(x,y,z) := A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

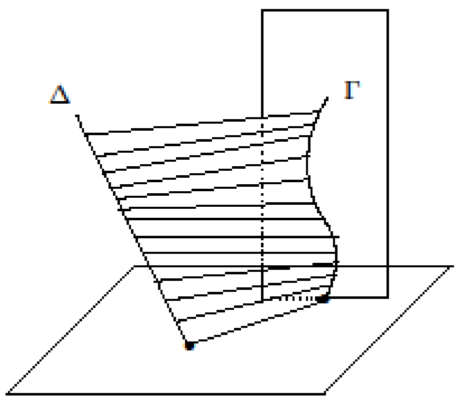
şi pe dreapta

$$\Delta : \begin{cases} P_1(x,y,z) := A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) := A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

paralelă cu planul curbei Γ*, şi rămâne paralelă cu planul de ecuaţie* $Q(x,y,z) := Ax + By + Cz + D = 0$ *neparalel cu dreapta* Δ *şi cu planul curbei* Γ*, este caracterizată de o ecuaţie de forma*

$$\varphi\Big(\frac{P_1}{P_2}, Q\Big) = 0 \tag{12.7}$$

Demonstraţie. Planul de ecuaţie $P_2(x,y,z) = 0$ poate fi ales ca fiind planul care conţine dreapta Δ şi este paralel cu dreapta



$$\begin{cases} P(x,y,z) = 0 \\ Q(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Considerăm familia dreptelor care se spijină pe dreapta Δ, sunt paralele cu planul de ecuaţie $Q(x,y,z) = 0$ şi sunt neparalele cu planul curbei Γ. Ecuaţiile acestora sunt:

$$\Delta_{\lambda\mu} : \begin{cases} P_1 - \lambda P_2 = 0 \\ Q = \mu. \end{cases}$$

Evident planele de ecuaţii $P_1 = 0,\ Q = 0,\ P = 0$ au un singur punct comun, ceea ce înseamnă că

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare sistemul

$$\begin{cases} P_1 - \lambda P_2 = 0 \\ Q = \mu \\ P = 0 \end{cases}$$

are o singură soluţie $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$, $z = z(\lambda, \mu)$ şi aceasta reprezintă coordonatele punctului de intersecţie ale dreptei $\Delta_{\lambda\mu}$ cu planul curbei. Impunând condiţia ca acesta să aparţină suprafeţei de ecuaţie carteziană implicită $f(x, y, z) = 0$ obţinem o condiţie de legătură $\varphi(\lambda, \mu)$ între parametrii λ, μ. Aşadar ecuaţia suprafeţei conoide este $\varphi\left(\frac{P_1}{P_2}, Q\right) = 0$. Invers, este uşor de arătat că orice ecuaţie de tipul (12.7) este ecuaţia unei suprafeţe conoide. $\square$

Exemplul 12.3. Să determinăm ecuaţia suprafeţei conoidale, ale cărei generatoare sunt paralele cu planul xOy şi intersectează Oz şi curba

$$\begin{cases} y^2 - 2z + 2 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Ecuaţiile planelor xOy şi ale axei Oz sunt

$$xOy : z = 0, \quad \text{şi respectiv} \quad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

astfel încât ecuaţiile generatoarelor sunt

$$d_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \end{cases}.$$

Folosind compabilitatea sistemului de ecuaţii

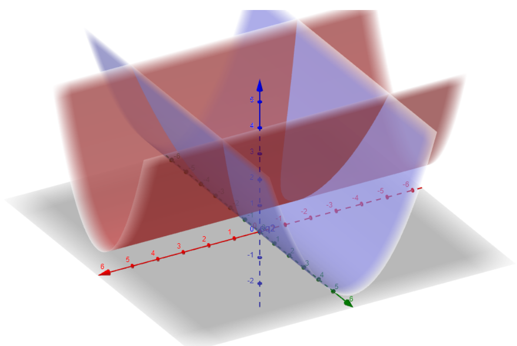
$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ y^2 - 2z + 2 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases},$$

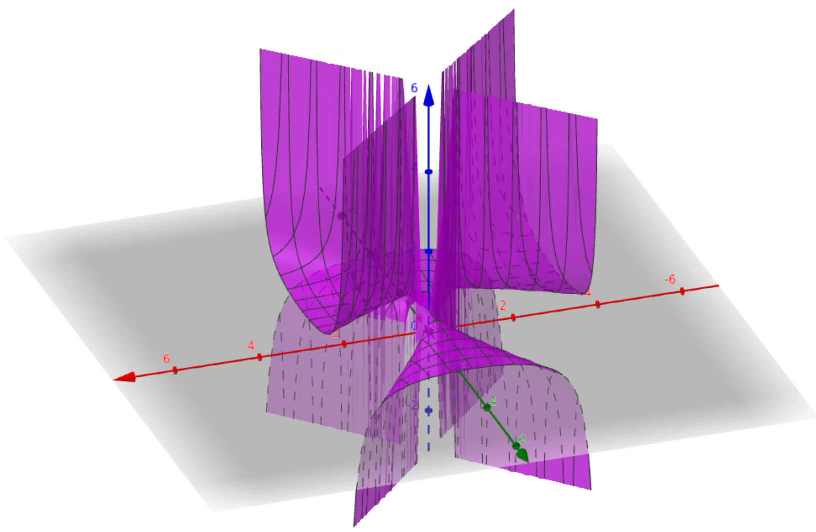
se obţine condiţia de compatibilitate

$$2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0,$$

şi, înlocuind $\lambda = \dfrac{x}{y}$ şi $\mu = z$, ecuaţia suprafeţei conoide este

$$2x^2z - 2y^2z - 2x^2 + y^2 = 0. \tag{12.8}$$





12.5 Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 12.4. Se numeşte *suprafaţă de rotaţie* mulţimea obţinută prin rotirea punctelor unei curbe în jurul unei drepte

Teorema 12.4. *Ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinută prin rotirea curbei*

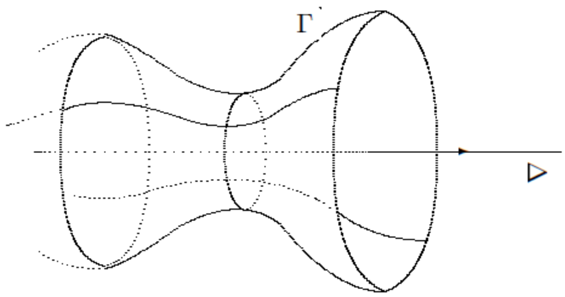
$$\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei $\Delta : \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ *este de forma*

$$\varphi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, px + qy + rz) = 0 \tag{12.9}$$

Demonstraţie. Considerăm familia cercurilor situate în plane perpendiculare pe dreapta Δ având centrul pe dreapta Δ

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda \\ px + qy + rz = \mu \end{cases}$$



Dacă din sistemul

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ px + qy + rz = 0 \end{cases}$$

putem exprima x, y, z în fincţie de λ şi μ, prin înlocuirea acestora în ecuaţia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda$$

obţinem o condiţie de legătură între parametrii λ şi μ, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Prin urmare ecuaţia suprafeţei de rotaţie este într-adevăr

$$\varphi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, px + qy + rz) = 0.$$

□

Exemplul 12.4. Suprafaţa generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe situată în planul cercului şi care nu intersectează cercul se numeşte *tor*. Să se găsească ecuaţia torului.

Soluţie.

12.6 Probleme

1. Să se găsească ecuaţia suprafeţei cilindrice a cărei curbă directoare este cercul
$$(C)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$$
iar generatoarele sunt paralele cu dreapta $(\Delta)\ x = y = z$.

   Soluţie.

2. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice generată de o dreaptă variabilă paralelă cu dreapta
$$(\Delta)\ \begin{cases} x - 3y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

şi care rămâne tangentă suprafeţei $(E)\ 2x^2+3y^2+2z^2-1=0$.

Soluţie. $\Delta_{\lambda\mu}: \begin{cases} x-3y=\lambda \\ y+2z=\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda+3t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

$2(\lambda+3t)^2+3t^2+2\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}t\right)^2=1$

$2(\lambda^2+6\lambda t+9t^2)+3t^2+\frac{1}{2}(\mu^2-2\mu t+t^2)=1$

$2\lambda^2+12\lambda t+18t^2+3t^2+\frac{1}{2}\mu^2-\mu t+\frac{1}{2}t^2=1$

$4\lambda^2+24\lambda t+36t^2+6t^2+\mu^2-2\mu t+t^2=2$

$43t^2+2(12\lambda-\mu)t+4\lambda^2+\mu^2-2=0$

$b^2-4ac=0$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=0$

$\Delta'=0 \Leftrightarrow (12\lambda-\mu)^2-43(4\lambda^2+\mu^2-2)=0$

$\Leftrightarrow 144\lambda^2-24\lambda\mu+\mu^2-172\lambda^2-43\mu^2+86=0$

$\Leftrightarrow -28\lambda^2-24\lambda\mu-42\mu^2+86=0 \Leftrightarrow \boxed{14\lambda^2+12\lambda\mu+21\mu^2=43}$

$14(x-3y)^2+12(x-3y)(y+2z)+21(y+2z)^2=43$ .....> calculele temă

3. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în originea axelor de coordonate şi a cărei directoare este curba
$$(C)\ \begin{cases} y^2-x=0 \\ 4x+3y+2z=1. \end{cases}$$

Soluţie.

4. Un disc circular de rază unu are centrul în punctul $O'(1,0,2)$ şi este paralel cu planul yOz. În punctul $P(0,0,3)$ se află o sursă de lumină. Să se caracterizeze umbra discului aruncată pe planul xOy.

Soluţie. Considerăm suprafaţa conică cu vârful P a cărei curbă directoare ~~directopare~~ este cercul de rază 1 şi care este centrată în $A(1,0,2)$ şi este paralelă cu planul yOz. Umbra discului aruncată peste planul xOy este componenta convexa ~~convecă~~ a complementarei, în planul xOy, a curbei de intersecţie dintre planul xOy şi suprafaţa conică descrisă.

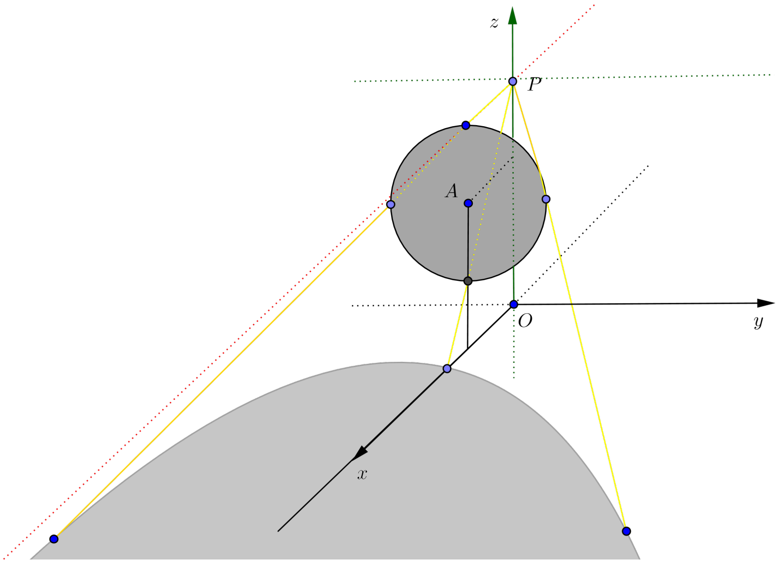
Pentru a afla ecuaţia suprafeţei conice, considerăm dreptele

$$(Oz)\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ şi } (d)\ \begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$$

şi familia de drepte

$$(\Delta_{\lambda\mu})\ \begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ z - 3 - \mu x = 0 \end{cases}$$

depinzând de parametrii λ şi μ ḑi de fasciculele reduse de drepte $x - \lambda y = 0$ prin Oz şi $z - 3 - \mu z = 0$ prin d.



Cercul C care mărgineşte discul este dat de ecuaţiile

$$(C)\ \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Punctul de intersecţie dintre dreapta $\Delta_{\lambda\mu}$ cu planul cercului este dat de soluţia sistemului

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - \lambda x = 0 \\ z - 3 - \mu x = 0 \end{cases}$$

care are soluţia

$$(\Delta_{\lambda\mu} \cap (x = 1))\ \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 3 + \mu. \end{cases} \tag{12.10}$$

Impunând condiţia ca punctul de intersecţie (12.10) să aparţină şi celeilalte suprafeţe care defineşte C, adică sfera $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$, obţinem relaţia

$$\lambda^2 + (\mu + 1)^2 = 1,$$

dintre λ şi μ, pentru a avea concurenţă între $\Delta_{\lambda\mu}$ şi C. Ecuaţia suprafeţei conice este

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{x} + 1\right)^2 = 1, \text{ sau } y^2 + (x + z - 3)^2 = x^2.$$

Ultima ecuaţie este echivalentă cu

$$y^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + 9 = 0.$$

Curba de intersecţie cu planul xOy este parabola

$$(\mathcal{P}\ \begin{cases} z = 0 \\ y^2 - 6x + 9 = 0. \end{cases}$$

Componenta convexă a complmentarei $xOy \setminus \mathcal{P}$ coincide umbra cerută şi este caracterizată de următorul sistem

$$\begin{cases} y^2 - 6x + 9 & \leq 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

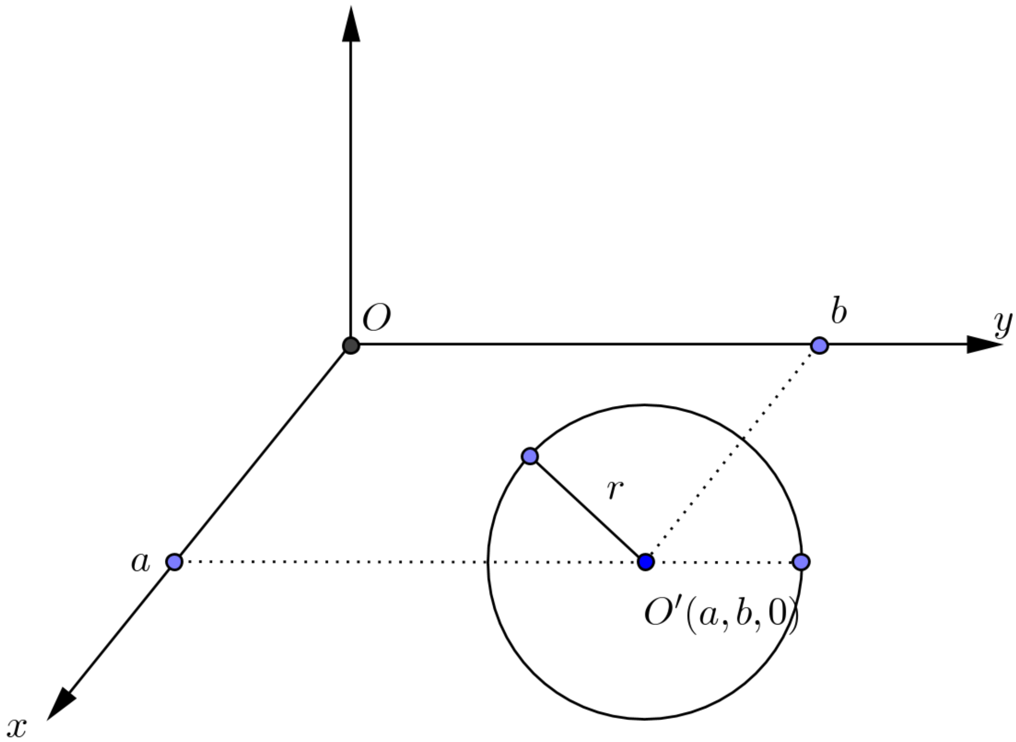
5. Să se găsească ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă variabilă ce se sprijină pe dreapta

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{şi pe curba } (H) \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

şi este paralelă cu planul xOy.

6. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă variabilă ce se sprijină pe dreapta d şi pe un cerc situat într-un plan paralel cu d, rămânâd paralelă la un plan perpendicular pe d (*conoidul lui Willis*).

Soluţie. Avem libertatea de a alege reperul cartezian ortonormat, legat de obiectele geometrice date. În acest sens vom considera dreapta dată d drept axă Oz, iar planul xOy planul ortogonal pe d care trece prin centrul O' al cercului, unde O este punctul de intersecţie aacestul plan cu dreapta d, adică axa Oz. În acest plan vom alege axa Oy ca fiind cea care trece prin punctul O care este paralelă planul cercului, iar xaa rămasă Ox este acum complet determinată.



Ecuaţiile lui $d = Oz$ faţă de acest reper sunt

$$(d = Oz) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

şi ecuaţiile cercului dat sunt

$$(C) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2 \\ x = a \end{cases} ,$$

5. Să se găsească ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă variabilă ce se sprijină pe dreapta

$$(\Delta)\begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases} \quad \text{şi pe curba } (H) \begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1 \\ y=2. \end{cases}$$

şi este paralelă cu planul xOy.

Soluţie

$$\Delta_{\lambda,\mu}\begin{cases} x-2+\lambda y=0 \\ z=\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2+\lambda y=0 \\ y=2 \\ z=\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=2 \\ z=\mu \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{(2-2\lambda)^2}{4}-\frac{\mu^2}{9}=1 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2-\frac{\mu^2}{9}=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{9(1-\lambda)^2-\mu^2=9}$$

$$9\left(1-\frac{2-x}{y}\right)^2-z^2=9$$

$$\boxed{9(y-2+x)^2-y^2z^2=9y^2}$$

unde $(a, b, 0)$ sunt coordonatele centrului O' şi r este raza cercului dat.

În continuare considerăm familia de drepte

$$d_{\lambda\mu} \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \mu \end{cases}$$

care sunt toate paralele cu planul de coordonate xOy, adică perpendiculara pe $d = Oz$. Din această familie selectăm acele drepte care au intersecţia nevidă cu cercul C. În acest sens rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = a \\ y = \lambda x \\ z = \mu \end{cases}$$

a cărei ecuaţie

$$\begin{cases} x = a \\ y = \lambda a \\ z = \mu \end{cases}$$

reprezintă coordonatele punctului de intersecţi dintre dreapta $d_{\lambda\mu}$ şi planul $x = a$ al cercului. Relaţia de legătura dintre parametrii λ şi μ pentru ca dreapta $d_{\lambda\mu}$ să intersecteze cercul este $(\lambda a - b)^2 + \mu^2 = r^2$. Aşadar, ecuaţia conoidului lui Willis este

$$\left(\frac{y}{x}a - b\right)^2 + z^2 = r^2 \Longrightarrow (ya - b)^2 + x^2 z^2 = r^2 x^2.$$

7. Să se scrie ecuaţia suprafeţei ce ia naştere prin rotirea unei drepte în jurul altei drepte.

   Soluţie. Vom împărţi soluţia în două cazuri după cum dreptele sunt sau nu sunt coplanare. Cacul dreptelor coplanare va fi la rândul său împărţit î două subcazuri după cum dreptele sunt paralele sau concurente. Pentru a simplifica calculele, vom alege, în fiecare situaţie, un reper cartezian ortonormat potrivit.

   (a) *Cele două drepte sunt coplanare.*

   i. *Cele două drepte sunt paralele.* Alegem reperul cartezian ortonormat având drept axă Oz dreapta în jurul căreia se face rotaţia, iar axa Ox să fie o perpendiculară comună. Axa Oy este acum determinată. Ecuaţiile celor două drepte sunt:

   $$(d_1 = Oz) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (d_2) \begin{cases} x = a \\ y = 0. \end{cases}$$

   Considerăm familia de cercuri

   $$(C_{\lambda\mu}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

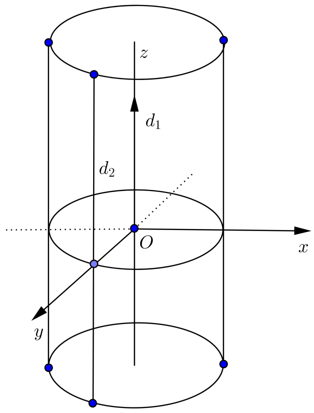
   şi determinăm intersecţia cercului $C_{\lambda\mu}$ cu semiplanul lui xOz în care se află d_2, rezolvând sistemul

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \\ y = 0 \end{cases}$$

   pentru x, y şi z în termenii parametrilor λ şi μ. Această soluţie este

   $$x = \sqrt{\lambda - \mu^2},\ y = 0,\ z = \mu,$$

iar acest punct de intersecţie se află pe dreapta d_2 atunci când $x = a$, adică $\lambda - \mu^2 = a^2$. Aşadar, ecuaţia suprafeţei de rotaţie, în acest caz, este $x^2 + y^2 = a^2$ şi reprezintă un cilindru circular.



ii. *Cele două drepte sunt concurente.* Alegem reperul cartezian ortonormat având drept axă Oz dreapta în jurul căreia se face rotaţia, iar axa Ox să fie perpendiculara lor comună. Axa Oy este acum determinată. Ecuaţiile celor două drepte sunt:

$$(d_1 = Oz)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (d_2)\ \begin{cases} x = 0 \\ z = my. \end{cases}$$

Considerăm familia de cercuri

$$(C_{\lambda\mu})\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

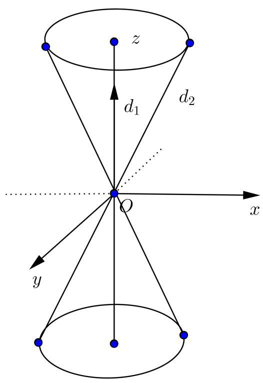
şi determinăm intersecţia cercului $C_{\lambda\mu}$ cu planul de coordonate yOz, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

pentru x, y şi z în termenii parametrilor λ şi μ. Această soluţie este

$$x = 0,\ y = \pm\sqrt{\lambda - \mu^2},\ z = \mu$$

iar acest punct de intersecţie se află pe dreapta d_2 atunci când $z = my$, adică $\mu^2 = \lambda - \mu^2$. Aşadar, ecuaţia suprafeţei de rotaţie, în acest caz, este $x^2 + y^2 = z^2$ şi reprezintă un con circular.



(b) *Cele două drepte sunt necoplanare.* Alegem reperul cartezian ortonormat având drept axă Oz dreapta în jurul căreia se face rotaţia, iar axa Ox să fie perpendiculara lor comună. Axa Oy este acum determinată. Ecuaţiile celor două drepte sunt:

$$(d_1 = Oz) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (d_2) \begin{cases} x = a \\ z = my. \end{cases}$$

Considerăm familia de cercuri

$$(C_{\lambda\mu}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

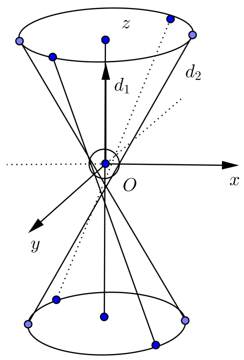
c si determinăm intersecţia cercului $C_{\lambda\mu}$ cu planul $x = a$, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

pentru x, y şi z în termenii parametrilor λ şi μ. Această soluţie este

$$x = a,\ y = \pm\sqrt{\lambda - \mu^2 - a^2},\ z = \mu$$

iar acest punct de intersecţie se află pe dreapta d_2 atunci când $z = my$, adică $\mu^2 = \lambda - \mu^2 - a^2$. Aşadar, ecuaţia suprafeţei de rotaţie, în acest caz, este $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ şi reprezintă un hiperboloid circular cu o pânză.



13 Funcţii polinomiale în două variabile

Fie π un plan. O funcţie $f : \pi \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte funcţie polinomială dacă există un reper cartezian $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ al lui π şi un polinom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ astfel încât pentru orice punct $M \in \pi$ de coordonate carteziene (x, y) faţă de R să avem

$$f(M) = F(x, y),$$

adică f este un polinom în coordonatele lui π faţă de R. Observăm că noţiunea de funcţie polinomială nu depinde de alegerea reperului cartezian R. Întradevăr, dacă S este un alt reper cartezian şi $f : \pi \to \mathbb{R}$ este un polinom în coordonatele lui M faţă de R, atunci f este un polinom de acelaşi grad şi în coordonatele lui π faţă de S, deoarece formulele de trecere de la reperul R la reperul S sunt polinoame de gradul întâi reversibile.

Prin urmare gradul polinomului F este invariant la schimbarea reperului şi se numeşte *gradul lui f*. Alegerea convenabilă a reperului poate conduce la o cea mai simplă formă a polinomului de reprezentare a lui f.

Propoziţia 13.1. *Fie a un număr real, $u \in \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n\times 1}$ şi $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică. Dacă*

$$a + 2ux + x^tUx = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^{1\times n} \tag{13.1}$$

atunci $a = 0$, $u = 0$ şi $U = O_n$.

Proof. Într-adevăr, luând $x = 0$ în (13.1) obţinem $a = 0$, iar pentru $x = y + z$ ($y, z \in \mathbb{R}^{1\times n}$) în (13.1), deducem, în urma unor calcule elementare şi ţinând seama de (13.1), că

$$y^tUz + z^tUy = 0 \Longleftrightarrow y^tUz + y^tU^tz = 0 \Longleftrightarrow y^tUz = 0,\ \forall y, z \in \mathbb{R}^{1\times n}. \tag{13.2}$$

Luând $y = e_i^t$ şi $z = e_j^t$ în (13.2) deducem $u_{ij} = 0$. Prin urmare $U = O_n$ şi implicit $u = 0$. □

13.1 Funcţii polinomiale de gradul doi şi conice. Reprezentări matriceale

Fie π un plan şi $f : \pi \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie polinomială de gradul doi care, faţă de reperul cartezian $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ al lui π, are reprezentarea

$$f(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}yx + a_{22}y^2$$

pentru orice $M(x, y) \in \pi$.

Definiţia 13.1. Dacă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul doi pe planul π, atunci preimaginea $Q = f^{-1}(0)$ se numeşte *conică*.

Aceasta se poate reprezentă matriceal astfel:

$$f(M) = a_{00} + 2(a_{10}\ a_{20})[M]_R + [M]_R^t A[M]_R,$$

unde

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Matricea A poate fi aleasă simetrică deoarece f admite şi reprezentarea

$$f(M) = a_{00} + 2(a_{10}\ a_{20})[M]_R + [M]_R^t \frac{A + A^t}{2}[M]_R,$$

Notăm cu $[f]_R$ matricea A, atunci când A este simetrică, adică

$$\begin{aligned} & f(M) = a_{00} + 2(a_{10}\ a_{20})[M]_R + [M]_R^t \cdot [f]_R \cdot [M]_R \\ \Leftrightarrow\ & f(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \end{aligned}$$

unde

$$[f]_R := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ a_{12} = a_{21}.$$

Dacă $R' = (O', \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ este un alt reper cartezian, atunci $[M]_R = T[M]_{R'} + [O']_R$, unde T este matricea de trecere de la baza $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ la baza $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}']$, fapt care arată că

$$f(M) = b_{00} + 2(b_{10}\ b_{20})[M]_{R'} + [M]_{R'}^t (T^t[f]_R T)[M]_{R'},$$

unde

$$b_{00} = a_{00} + 2(a_{10}\ a_{20})[O']_R + [O']_R^t \cdot [f]_R[O']_R = f(O')$$

$$(b_{10}\, b_{20}) = (a_{10}\, a_{20})T + \frac{1}{2}[O']_R^t([f]_R + [f]_R^t)T.$$

Aşadar $[f]_{R'} = T^t[f]_R T$.

O altă matrice importantă legată de reprezentarea funcţiei polinomiale f faţă de reperul R este

$$[[f]]_R := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ unde } a_{0i} = a_{i0},\ i = \overline{1,2}.$$

Într-adevăr avem

$$f(M) = (1\ x\ y)[[f]]_R \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dacă $[M]_{R'}^t = (x'\ y')$, atunci avem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & t_{11} & t_{12} \\ \beta_2 & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix},$$

unde

$$[O']_R = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ şi } T = (t_{ij})_{1\le i,j\le 2}.$$

Prin urmare avem

$$f(M) = (1\ x'\ y')(S^t[[f]]_R S) \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix},$$

unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & t_{11} & t_{12} \\ \beta_2 & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

fapt care arată că $[[f]]_{R'} = S^t[[f]]_R S$.

13.1.1 Invarianţi şi semiinvarianţi ortogonali

Fie $\pi \subseteq \mathcal{P}$ un plan afin şi $f : \pi \to \mathbb{R}$ o funcţie polinomială de gradul doi reprezentată în raport cu reperul cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de polinomul

$$F = a_{00} + 2a_{10}X + 2a_{20}Y + a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2, \text{ adică}$$

$$[f]_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ şi } [[f]]_R = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Definiţia 13.2. O funcţie $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{X}$ se numeşte invariant ortogonal al funcţiei polinomiale

$$f : \pi \to \mathbb{R},\ f(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

dacă valoarea $\Phi(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{12}, a_{22})$ nu se schimbă atunci când schimbăm reperul cartezian ortonormat.

Propoziţia 13.2. *Polinomul caracteristic*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det([f]_R - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - I\cdot\lambda + \delta, (a_{21} = a_{12}) \end{aligned}$$

este invariant ortogonal al lui f. În particular

$$\delta = \det[f]_R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \text{ şi } I = Tr[f]_R = a_{11} + a_{22}$$

sunt invarianţi ortogonali ai lui f. De asemenea determinantul

$$\Delta = \det[[f]]_R = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

este invariant ortogonal al lui f numit discriminantul *lui f.*

Demonstraţie. Dacă $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ este reperul cartezian ortonormat iniţial şi $R' = (O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$ este noul reper cartezian ortonormat, notăm cu T matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

de trecere de la baza $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ la baza $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}']$ şi amintim că T este ortogonală, adică $T^t \cdot T = I_2$. Prin urmare, dacă notăm cu $P'(\lambda)$ polinomuul caracteristic asociat lui f faţă de reperul cartezian R', deducem că

$$\begin{aligned} P'(\lambda) &= \det([f]_{R'} - \lambda I_2) \\ &= \det[T^t \cdot [f]_R \cdot T - T^t \cdot (\lambda I_2) \cdot T] \\ &= \det[T^t \cdot ([f]_R - \lambda I_2) \cdot T] \\ &= \det T^t \cdot \det([f]_R - \lambda I_2) \cdot \det T \\ &= \det([f]_R - \lambda I_2) = P(\lambda). \end{aligned}$$

Pentru a demonstra invarianţa lui Δ la schimbarea reperului ortonormat folosim relaţia $[[f]]_{R'} = S^t[[f]]_R S$, unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ şi } [O']_R = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare dacă notăm cu Δ' discriminantul lui f faţă de reperul R' obţinem:

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det[[f]]_{R'} = \det(S^t[[f]]_R S) \\ &= \det(T^t \cdot [[f]]_R \cdot \det T) \\ &= \det[[f]]_R (\det T)^2 = \Delta(\det T)^2 = \Delta. \end{aligned}$$

□

Definiţia 13.3. O funcţie $\Psi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{X}$ se numeşte semiinvariant ortogonal al funcţiei polinomiale $f : \pi \to \mathbb{R}$, $f(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ dacă valoarea $\Psi(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{12}, a_{22})$ nu se schimbă atunci când schimbăm reperul cartezian ortonormat fără a schimba originea sa.

Propoziţia 13.3. *Polinomul* $P_O(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \Delta - K\lambda + a_{00}\lambda^2$ *este un semiinvariant ortogonal al lui f. Prin urmare,*

$$K = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}$$

este un semiinvariant ortogonal al lui f.

Demonstraţie. Presupunem că reprezentarea lui f faţă de reperul cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ este

$$f(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

şi considerăm funcţia polinomială $f - \lambda(x^2+y^2)$, care faţă de un nou reper cartezian ortonormat $R' = (O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$ (având aceeaşi origine O) are forma

$$a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + b_{11}x'^2 + 2b_{12}x'y' + b_{22}y'^2 - \lambda(x'^2 + y'^2),$$

deoarece formula distanţei de la M la O nu se schimbă dacă schimbăm reperul R cu reperul R'. Discriminantul lui $f - \lambda(x^2 + y^2)$ fiind un invariant ortogonal deducem că

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22}-\lambda \end{vmatrix},$$

adică $P_O(\lambda)$ este un semiinvariant ortogonal al lui f. □

13.2 Teorema de reducere izometrică a polinoamelor de gradul doi în două variabile

Teorema 13.4. *Faţă de un reper cartezian ortonormat convenabil ales funcţia polinomială f are una din formele următoare:*

1. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta}$, *dacă* $\delta \neq 0$;
2. $Iy''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}x''$, *dacă* $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$;
3. $Iy''^2 + \frac{K}{I}$, *dacă* $\delta = \Delta = 0$.

În procesul de reducere a funcţiilor polinomiale de gradul doi, matricea simetrică $[f]_R$ se diagonalizează cu ajutorul unei baze de vectori proprii ai acestei matrici. Direcţiile vectorilor unei astfel de baze, adică spaţiile generate de ei, se numesc *direcţii principale* ale funcţiei polinomiale în discuţie.

Demonstraţia teoremei 13.4. Fie λ_1, λ_2 rădăcinile ecuaţiei (polinomului caracteristic) $P(\lambda) = 0$, adică valorile proprii ale matricii simetrice

$$[f]_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

şi $\overrightarrow{i}'(p_1, q_1)$, $\overrightarrow{j}'(p_2, q_2)$ vectori proprii asociaţi valorilor proprii λ_1 respectiv λ_2 care formează o bază ortonormată a lui $\overrightarrow{\pi}$. Notând cu T matricea ortogonală

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

de trecere de la baza ortonormată iniţială $b = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ la baza ortonormată $b' = [\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}']$, obţinem formulele de trecere de la reperul iniţial $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la reperul $R' = (O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$, $[M]_R = T[M]_{R'}$.

Aşadar, au loc relaţiile

$$p_i p_j + q_i q_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

şi

$$[f]_R \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix},$$

$i, j, k \in \{1, 2\}$. Folosind reprezentarea lui f faţă de R,

$$f(M) = a_{00} + 2(a_{10}, a_{20})[M]_R + [M]_R^t \cdot [f]_R \cdot [M]_R.$$

şi relaţiile de trecere $[M]_R = T[M]_{R'}$ obţinem reprezentarea lui f faţă de reperul R'

$$f(M) = a_{00} + 2(a_{10}, a_{20}) \cdot T[M]_{R'} + [M]_{R'}(T^t \cdot [f]_R \cdot T)[M]_{R'}.$$

Folosind proprietatea de ortogonalitate a matricii T precum şi faptul că $\overrightarrow{i}'(p_1, q_1)$, $\overrightarrow{j}'(p_2, q_2)$ sunt vectorii proprii ai matricii $[f]_R$ asociaţi valorilor proprii λ_1, λ_2 se poate uşor verifica relaţia

$$T^t \cdot [f]_R \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

şi astfel deducem reprezentarea lui f faţă de reperul R'

$$f(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

unde $b_{10} = a_{10}p_1 + a_{20}q_1$, $b_{20} = a_{10}p_2 + a_{20}q_2$. Aşadar $I = \lambda_1 + \lambda_2$ şi $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ deoarece I, δ sunt invarianţi ortogonali ai lui f.

(1) $\delta \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$ şi $\lambda_2 \neq 0$ şi deci putem scrie

$$f(M) = c_{00} + \lambda_1\Big(x' + \frac{b_{10}}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2}\Big)^2,$$

unde $c_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{b_{20}^2}{\lambda_2}$. Făcând schimbarea de reper cartezian ortonormat dată de relaţiile

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \tfrac{b_{10}}{\lambda_1} \\ y'' &= y' + \tfrac{b_{20}}{\lambda_2} \end{aligned}$$

obţinem reprezentarea lui f în forma

$$f(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{00},$$

de unde rezultă $\Delta = \begin{vmatrix} c_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = c_{00} \cdot \delta,$

adică $c_{00} = \frac{\Delta}{\delta}$. Prin urmare, reprezentarea finală a lui f este

$$f(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

(2) $\delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ sau $\lambda_2 = 0$. Dacă $\lambda_1 = 0$ rezultă că $I = \lambda_2 \neq 0$. În acest caz reprezentarea lui f faţă de reperul R' este $f(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + Iy'^2$, sau, altfel,

$$f(M) = I\left(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_{10}x' + b_{00},$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{20}^2}{\lambda_2}$, iar discriminantul lui f are forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{10} & b_{20} \\ b_{10} & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & I \end{vmatrix} = -b_{10}^2 I.$$

De aici deducem că $b_{10} \neq 0$ şi $b_{10} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}$. Deci f poate fi pusă sub forma

$$f(M) = I\Big(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2}\Big)^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}\Big(x' + \frac{b_{00}}{2b_{10}}\Big).$$

Făcând schimbarea de reper cartezian ortonormat dată de relaţiile

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_{00}}{2b_{10}} \\ y'' = y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

obţinem reprezentarea finală a lui f în forma

$$f(M) = Iy''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}x''.$$

(3) Deoarece $\delta = 0$, presupunem ca mai sus că $\lambda_1 = 0$ de unde rezultă $\lambda_2 = I \neq 0$. În acest caz reprezentarea lui f faţă de reperul R' este

$$f(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + Iy'^2.$$

Relaţia $\Delta = 0$ este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & 0 & 0 \\ b_{20} & 0 & I \end{vmatrix} = 0$$

sau, echivalent $-b_{10}^2 I = 0$, de unde deducem $b_{10} = 0$ şi astfel reprezentarea lui f faţă de R' este

$$f(M) = a_{00} + 2b_{20}y' + Iy'^2,$$

sau, echivalent,

$$f(M) = I\Big(y' + \frac{b_{20}}{I}\Big)^2 + a_{00} - \frac{b_{20}^2}{I}.$$

Cum însă K este semiinvariant ortogonal şi reperele R şi R' au aceeaşi origine, rezultă că valoarea sa nu se schimbă atunci când trecem de la R la R'. Prin urmare avem

$$K = \begin{vmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & b_{02} \\ b_{20} & I \end{vmatrix} = a_{00}I - b_{20}^2 = I\left(a_{00} - \frac{b_{20}^2}{I}\right),$$

adică $a_{00} - \frac{b_{20}^2}{I} = \frac{K}{I}$. Făcând translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{b_{20}}{I} \end{cases}$$

obţinem reprezentarea finală a lui f sub forma

$$f(M) = Iy''^2 + \frac{K}{I}.$$

$\square$

Teorema 13.5. *(Teorema de reducere izometrică a conicelor) Dată fiind conica*

$$Q: \ a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

există un reper cartezian ortonormat convenabil ales astfel încât ecuaţia acesteia să aibă una din formele următoare:

1. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, *dacă* $\delta \neq 0$;
2. $Iy''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}x'' = 0$, *dacă* $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$;
3. $Iy''^2 + \frac{K}{I} = 0$, *dacă* $\delta = \Delta = 0$.

$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$I\Delta > 0$	elipsă imaginară	
		$I\Delta < 0$	elipsă reală	conice nedegenerate
	$\delta < 0$	hiperbolă		
	$\delta = 0$	parabolă		
$\Delta = 0$	$\delta > 0$	două drepte secante imaginare		
	$\delta < 0$	două drepte secante reale		conice degenerate
	$\delta = 0$	$K > 0$	două drepte paralele imaginare	
		$K < 0$	două drepte paralele reale	
		$K = 0$	două drepte reale confundate	

Demonstraţia teoremei de reducere a polinoamelor de gradul doi in două variabile sugerează o metodă de a aduce conicele la forma canonică, numită metoda *valorilor şi a vectorilor proprii.* În continuare vom prezenta o metodă alternativă de a găsi reperul $R' = (O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$, faţă de care ecuaţia unei conice cu centru unic (ex. elipsă, hiperbolă) are forma are forma redusă.

Originea O' este centrul conicei. Aşadar, coordonatele sale date de unica soluţie a sistemului

$$\begin{cases} \frac{1}{2}F'_x(x,y) = 0 \\ \frac{1}{2}F'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{20} + a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \tag{13.3}$$

Dacă $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}')$, atunci coordonatele lui $\overrightarrow{i}'$ în raport cu baza iniţială $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$ sunt $(\cos\theta, \sin\theta)$ iar coordonatele lui $\overrightarrow{j}'$ sunt $(-\sin\theta, \cos\theta)$. Vectorii $\overrightarrow{i}'$, $\overrightarrow{j}'$ fiind direcţiile principale corespunzătoare valorilor proprii λ_1 respectiv λ_2, coordonatele lor sunt soluţiile sistemelor

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\cos\theta + a_{12}\sin\theta = 0 \\ a_{12}\cos\theta + (a_{22} - \lambda_1)\sin\theta = 0 \end{cases} \tag{13.4}$$

$$\begin{cases} -(a_{11} - \lambda_2)\sin\theta + a_{12}\cos\theta = 0 \\ -a_{12}\sin\theta + (a_{22} - \lambda_2)\cos\theta = 0. \end{cases} \tag{13.5}$$

Prin urmare

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{12}\mathrm{tg}\theta, \ \ \lambda_2 = a_{11} - a_{12}\mathrm{ctg}\theta. \tag{13.6}$$

Adunând relaţiile (13.6) şi ţinând seama de relaţia $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$, deducem relaţia

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\theta + (a_{11} - a_{22})\mathrm{tg}\theta - a_{12} = 0. \tag{13.7}$$

Schimbând eventual rolul lui λ_1 cu cel al lui λ_2, baza $[\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}']$ poate fi astfel alesă încât unghiul rotaţiei să fie între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Acest fapt împreună cu relaţia 13.7 determină în mod unic θ (cu excepţia cazului $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, când conica este un cerc şi θ poate lua orice valoare) care este *unghiul rotaţiei axelor de coordonte*. Ecuaţia 13.7 este echivalentă cu ecuaţia $(a_{11} - a_{22})\mathrm{tg}\theta = a_{12}(1 - \mathrm{tg}^2\theta)$ sau cu ecuaţia

$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{13.8}$$

Pantele direcţiilor asimptotice sunt date de ecuaţia

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0. \tag{13.9}$$

Notând cu m_1, m_2 cele două rădăcini ale ecuaţiei 13.9, ecuaţiile asimptotelor sunt:

$$F'_x + m_i F'_y = 0,\ i \in \{1, 2\} \tag{13.10}$$

ecuaţia globală a celor două asimptote este

$$F(x, y) = \frac{\Delta}{\delta} \tag{13.11}$$

13.3 Probleme

1. Să se calculeze invarianţii şi semiinvarianţii ortogonali ai polinoamelor de gradul 2:
   (a) $\alpha x^2 + 2\beta xy - (\alpha - 2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0;$
   (b) $(\alpha - 1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha + 1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (\alpha + 1) = 0,$

   α, β fiind coordonatele unui punct din plan.

   Soluţie.

□

2. Să se calculeze invarianţii şi semiinvarianţii ortogonali ai polinoamelor de gradul 2:

   (a) $-2 + 16x - 8y + 9x^2 - 4xy + 6y^2$;

   (b) $-36 + 16x + 12y + 4xy + 3y^2$;

   (c) $1 - 6x + 2y + x^2 - 4xy + 4y^2$.

   Soluţie.

3. Să se calculeze invarianţii şi semiinvarianţii ortogonali ai polinoamelor de gradul 2

   (a) $m + nx - py + m^2x^2 - mnxy + 6p^2y^2$;

   (b) $-n + px + qy + npxy + q^2y^2$;

   (c) $m - px + qy + m^2x^2 - 4mp + n^2y^2$,

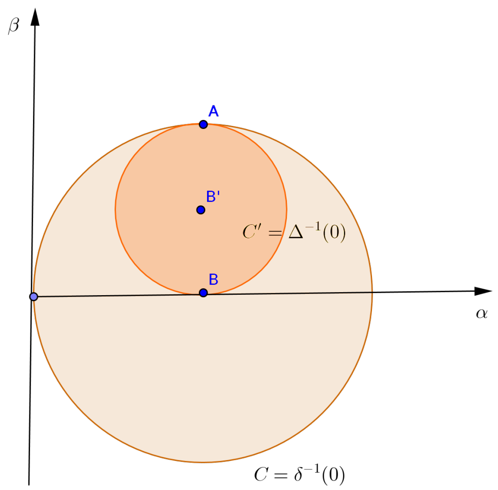
   unde $\overline{mnpq}$ este numărul dumneavoastră matricol.

4. Să se discute natura conicei $(Q_{\alpha,\beta})$ $\alpha x^2 + 2\beta xy - (\alpha - 2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$, α, β fiind coordonatele unui punct din plan.

   Soluţie. Amintim că invarianţii ortogonali I, δ şi Δ sunt $I = 2$,

$$\delta = 2\alpha - \alpha^2 - \beta^2, \text{ şi } \Delta = -2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - \beta + 1),$$

   iar semiinvariantul ortogonal este $K = 2$. Observăm că $\delta = 0$ ddacă $M(\alpha, \beta)$ aparţine cercului $C := \mathcal{C}(B, 1)$, unde $B(1, 0)$. De asemenea $\Delta = 0$ ddacă $M(\alpha, \beta)$ aparţine cercului $C' := \mathcal{C}(B', \frac{1}{2})$, unde $B'(1, \frac{1}{2})$.



Poziţia lui $M(\alpha,\beta)$	δ	Δ	K	I	$I\Delta$	Natura conicei
$\text{Int}(C')$	+	+		+	+	Elipse imaginare
$C' \setminus A(1,1)$	+	0				Pereche de drepte secante imaginare
În A	0	0	+			Pereche de drepte paralele imaginare
$\text{Int}(C) \cap \text{Ext}(C')$	+	-		+	-	Elipse reale
Pe $C \setminus A$	0	-				Parabole
$\text{Ext}(C)$	-	-				Hiperbole

5. Să se discute natura conicei

$$(Q'_{\alpha,\beta}) \ \ (\alpha - 1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha + 1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (\alpha + 1) = 0,$$

   α, β fiind coordonatele unui punct din plan.

Demonstraţie.

□

6. Să se discute natura conicei $\overline{mnpq}$ = numărul matricol $R=(O,\vec{i},\vec{j})$

$$(Q_{\alpha,\beta})\;\; (n\alpha-2)x^2+2(p\beta+1)xy-n\alpha y^2+2(n\alpha-1)x+2(p\beta+1)y-n\alpha=0,$$

α, β fiind coordonatele unui punct din plan.

Soluţie. $\overline{mnpq} = 2761$

$$Q_{\alpha\beta}: (7\alpha-2)x^2+2(6\beta+1)xy-7\alpha y^2+\underline{2(7\alpha-1)x+2(6\beta+1)y-7\alpha}=0$$

$$\delta=\det[f]_R=\begin{vmatrix} 7\alpha-2 & 6\beta+1 \\ 6\beta+1 & -7\alpha \end{vmatrix} = -49\alpha^2+14\alpha-(6\beta+1)^2$$

$$= -49\alpha^2+14\alpha-36\beta^2-12\beta-1 = -\underline{49\alpha^2}-\underline{36\beta^2}+\underline{14\alpha}-\underline{12\beta}-1$$

$$= -(49\alpha^2-14\alpha+1)-(36\beta^2+12\beta+1)+1+1-1$$

$$= -(7\alpha-1)^2-(6\beta+1)^2+1 = -49\left(\alpha-\frac{1}{7}\right)^2-36\left(\beta+\frac{1}{6}\right)^2+1$$

$$I=\mathrm{Tr}[f]_R = 7\alpha-2-7\alpha=-2<0$$

$$\Delta=\det[[f]]_R=\begin{vmatrix} -7\alpha & 7\alpha-1 & 6\beta+1 \\ 7\alpha-1 & 7\alpha-2 & 6\beta+1 \\ 6\beta+1 & 6\beta+1 & -7\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7\alpha & 7\alpha-1 & 6\beta+1 \\ 14\alpha-1 & -1 & 0 \\ 6\beta+1 & 6\beta+1 & -7\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -7\alpha & 14\alpha-1 & 6\beta+1 \\ 14\alpha-1 & -14\alpha & 0 \\ 6\beta+1 & 0 & -7\alpha \end{vmatrix} = -2\cdot 7^3\alpha^3+14\alpha(6\beta+1)^2+7\alpha(14\alpha-1)^2$$

□

$$= 7\alpha\left(-\underbrace{2\cdot 49\alpha^2} + 2(36\beta^2+12\beta+1) + \underline{196\alpha^2} - 28\alpha + 1\right)$$

$$= 7\alpha\left(-98\alpha^2 + 196\alpha^2 + 72\beta^2 + 24\beta + 2 - 28\alpha + 1\right)$$

$$= 7\alpha\left(98\alpha^2 + 72\beta^2 - 28\alpha + 24\beta + 3\right)$$

$$= 7\alpha\left(98\left(\alpha^2 - \frac{28}{98}\alpha + \left(\frac{14}{98}\right)^2\right) + 72\left(\beta^2 + 2\,\frac{12}{72}\beta + \left(\frac{12}{72}\right)^2\right) + 3 - \frac{196}{98} - \frac{144}{72}\right) = 7\alpha\left(98\left(\alpha - \frac{14}{98}\right)^2 + 72\left(\beta + \frac{12}{72}\right)^2 - 1\right)$$

$$K = \begin{vmatrix} -7\alpha & 7\alpha-1 \\ 7\alpha-1 & 7\alpha-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7\alpha & 6\beta+1 \\ 6\beta+1 & -7\alpha \end{vmatrix} = -49\alpha^2 + 14\alpha - (49\alpha^2 - 14\alpha + 1)$$

$$+ 49\alpha^2 - (6\beta+1)^2 = -49\alpha^2 + \underline{14\alpha} - \cancel{49\alpha^2} + \underline{14\alpha} - 1 + \cancel{49\alpha^2}$$

$$- 36\beta^2 - 12\beta - 1 = -49\alpha^2 + 28\alpha - 36\beta^2 - 12\beta - 2 =$$

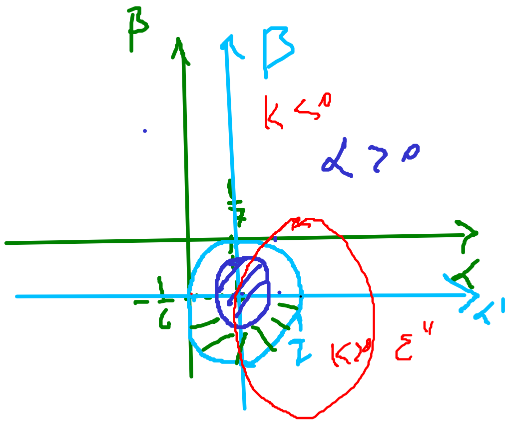
$$= -49\left(\alpha^2 - 2\,\frac{2}{7}\,\alpha + \left(\frac{2}{7}\right)^2\right) - 36\left(\beta^2 + 2\,\frac{1}{6}\beta + \frac{1}{36}\right) + 4 + 1 - 2$$

$$= -49\left(\alpha - \frac{2}{7}\right)^2 - 36\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2 + 3$$

$$\delta = 0 \iff -49\left(\alpha - \frac{1}{7}\right)^2 - 36\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\iff \frac{\left(\alpha - \frac{1}{7}\right)^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} + \frac{\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - \frac{1}{7} \\ \beta' = \beta + \frac{1}{6} \end{cases} \qquad \frac{\alpha'^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} + \frac{\beta'^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 1$$

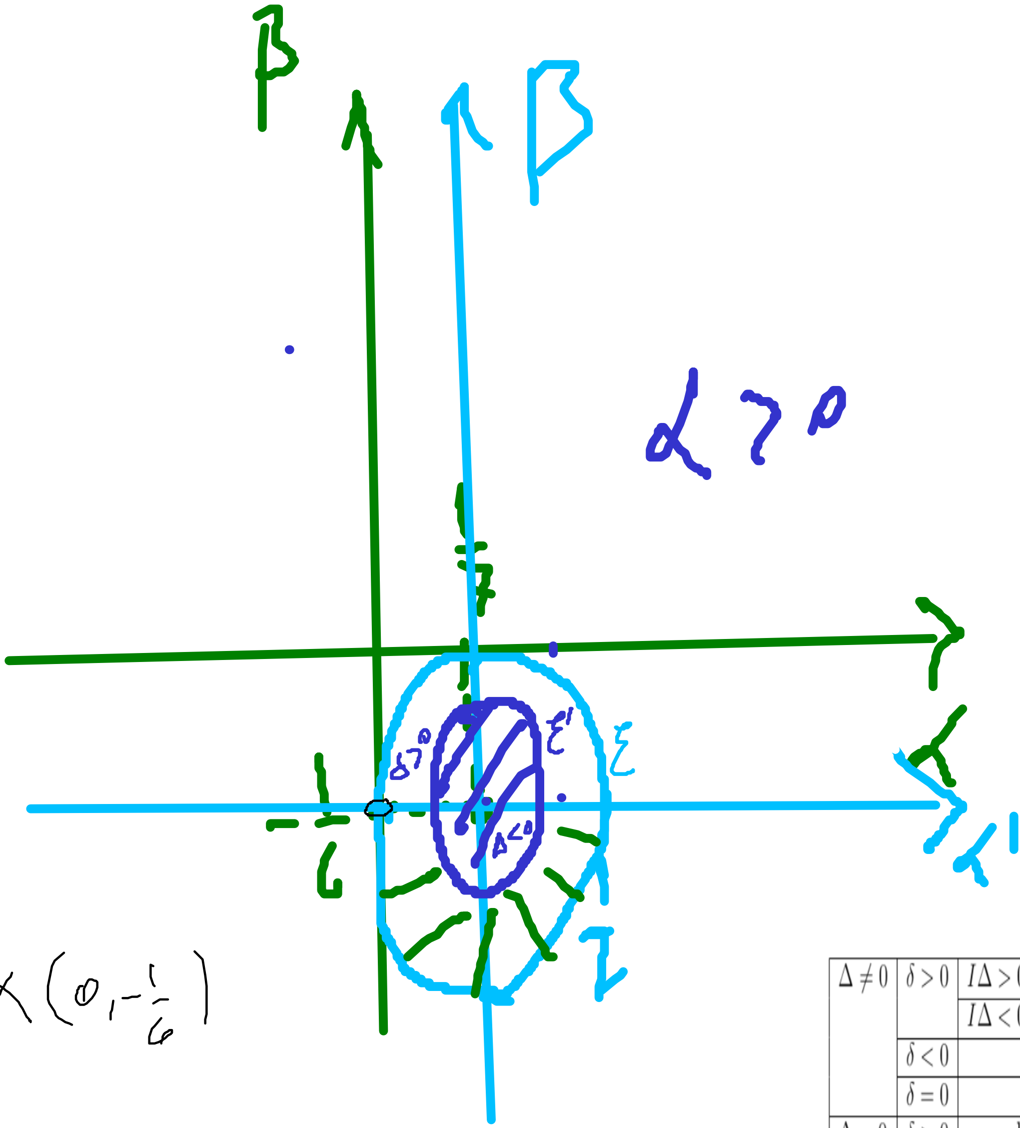


$$\Delta = 0 \iff 7\alpha\left(98\left(\alpha - \frac{14}{98}\right)^2 + 72\left(\beta + \frac{12}{72}\right)^2 - 1\right) = 0 \iff \alpha = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{\left(\alpha - \frac{1}{7}\right)^2}{\left(\frac{1}{7\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$K = 0 \iff -49\left(\alpha - \frac{2}{7}\right)^2 - 36\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2 + 3 = 0$$

$$\iff \frac{\alpha - \frac{2}{7}}{\left(\frac{1}{7\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\beta + \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$



$X(0, -\frac{1}{6})$

$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$I\Delta > 0$	elipsă imaginară	conice nedegenerate
		$I\Delta < 0$	elipsă reală	
	$\delta < 0$		hiperbolă	
	$\delta = 0$		parabolă	
$\Delta = 0$	$\delta > 0$		două drepte secante imaginare	conice degenerate
	$\delta < 0$		două drepte secante reale	
	$\delta = 0$	$K > 0$	două drepte paralele imaginare	
		$K < 0$	două drepte paralele reale	
		$K = 0$	două drepte reale confundate	

$7\alpha\,(\quad)$ >0

Poziţia lui $M(\alpha, \beta)$	δ	Δ	K	I	$I\Delta$	Natura conicei
$M \in \operatorname{int} \varepsilon'$	+	−		−	+	elipsă imaginară
$M \in \varepsilon'$	+	0		−		două drepte secante imaginare
$M \in \operatorname{int} \varepsilon \cap \operatorname{ext} \varepsilon'$	+	+		−	−	elipsă reală
$M \in \varepsilon \setminus \{X\}$	0	+		−		parabolă
$M = X$	0	0		−		două drepte paralele reale
$M \in (\alpha > 0) \cap \operatorname{ext} \varepsilon$	−	+		−	+	hiperbolă
$M \in O\beta \setminus X$	−	0		−		două drepte secante reale
$M \in (\alpha < 0)$	−	−		−	+	hiperbolă

7. Să se scrie ecuaţia redusă a conicei $9x^2 - 25y^2 - 18x + 50y - 241 = 0$.

   Soluţie.

8. Să se aducă la forma redusă izometrică şi să se reprezinte grafic conicele:

   (a) $Q_1 : -2 + 16x - 8y + 9x^2 - 4xy + 6y^2 = 0$.

   (b) $Q_2 : -36 + 16x + 12y + 4xy + 3y^2 = 0$.

   (c) $Q_3 : 1 - 6x + 2y + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

   Soluţie (8a) (*Metoda valorilor şi a vectorilor proprii*) Notăm cu f funcţia polinomială de gradul doi care defineşte conica Q_1 şi cu R reperul cartezian iniţial. Dacă M este un punct al planului de coordonate (x, y) faţă de R, atunci

$$f(M) = -2 + 16x - 8y + 9x^2 - 4xy + 6y^2 = 0$$

şi deci

$$[f]_R = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ şi } [[f]]_R = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 8 & 9 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 50$$

şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 8 & 9 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 8 & 9 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4(-27+16+16-36+2-96) = -4 \cdot 125 = -500.$$

Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt rădăcinile polinomului său caracteristic, adică

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 10 \text{ şi } \lambda_2 = 5.$$

Prin urmare ecuaţia canonică a conicei Q_1 este

$$10x''^2 + 5y''^2 - \frac{500}{50} \Leftrightarrow \frac{x''^2}{1^2} + \frac{y''^2}{\sqrt{2}^2} = 1 \tag{13.12}$$

şi ea reprezintă o elipsă[5].

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 10$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 9-10 & -2 \\ -2 & 6-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = -2v.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 10$ este $\overrightarrow{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 5$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 9-5 & -2 \\ -2 & 6-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u - 2v = 0 \\ -2u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = 2u.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 5$ este $\overrightarrow{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$.

Matricea ortogonală a primei schimbări de coordonate este

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ iar schimbarea de coordonate este } \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Faţă de reperul $R' = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ funcţia f are forma

$$\begin{aligned} f(M) &= -2 + [16 \ \ -8] \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 10x'^2 + 5y'^2 \\ &= -2 + \frac{1}{\sqrt{5}}[40 \ 0] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 10x'^2 + 5y'^2 = -2 + 8\sqrt{5}x' + 10x'^2 + 5y'^2 \\ &= 10\left(x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5y'^2 - 10. \end{aligned}$$

A doua schimbare de coordonate este

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'' = y', \end{cases}$$

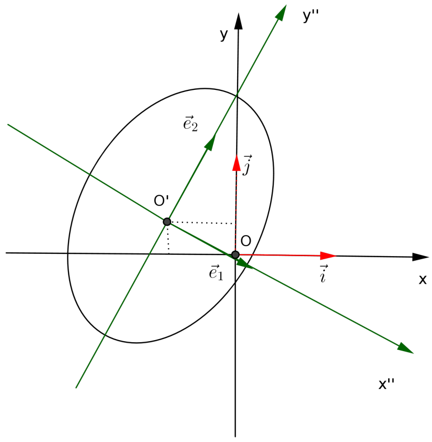
iar originea reperului faţă de care funcţia are forma redusă are coordonatele

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases},$$

adică originea O' a reperului faţă de care funcţia f are forma redusă are, faţă de reperul iniţial R, coordonatele $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. Faţă de reperul $R'' = (O', \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ conica Q_1 are ecuaţia (13.12). Amintim faptul că originea O' a reperului R'' coincide cu centrul elipsei Q_1 şi deci coordonatele sale se pot găsi şi rezolvând sistemul liniar.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0. \end{cases}$$

[5] Aici se încheie studiul naturii conicei Q_1. Consideraţiile ulterioare au în vedere reprezentarea sa.



(*Metoda unghiului şi a centrului unic*) Unghiul vectorilor $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{f}_1$ este dat de ecuaţia

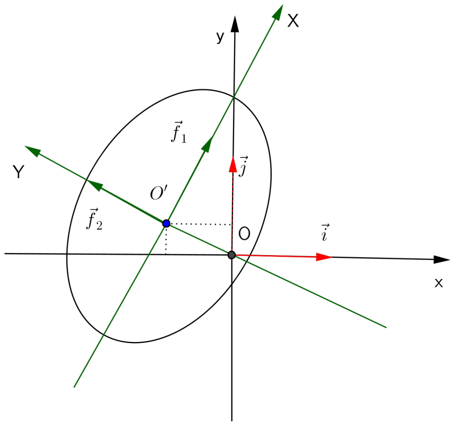
$$a_{12}\text{tg}^2\theta + (a_{11} - a_{22})\text{tg}\theta - a_{12} = 0 \Longleftrightarrow -2\text{tg}^2\theta + 3\text{tg}\theta + 2 = 0,$$

iar aceasta are rădăcinile $\text{tg}\theta_1 = 2$ şi $\text{tg}\theta_2 = -\frac{1}{2}$. Alegem soluţia din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\text{tg}\theta_1 = 2$. Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt $\mu_1 = a_{11} + a_{12}\text{tg}\theta_1 = 9 - 4 = 5$ şi $\mu_2 = a_{11} - a_{12}\text{ctg}\theta_1 = 9 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 10$. Aşadar ecuaţia redusă a elipsei este

$$\frac{X^2}{\sqrt{2}} + \frac{Y^2}{1^2} = 1.$$

În sfârşit, coordonatele centrului elipsei sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 16x + 18x - 4y = 0 \\ -8 - 4x + 12y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -\frac{4}{5},\ y = \frac{2}{5}.$$



(8b) Notăm cu f funcţia polinomială de gradul doi care defineşte conica Q_2 şi cu R reperul cartezian iniţial. Dacă M este un punct din spaţiu de coordonate (x, y) faţă de R, atunci $f(M) = -36 + 16x + 12y + 4xy + 3y^2$ şi deci

$$[f]_R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ şi } [[f]]_R = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} -36 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -18 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -9 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8(12+12+18-24) = 8 \cdot 18 = 144.$$

Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt rădăcinile polinomului său caracteristic, adică

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad & \Leftrightarrow -\lambda(3-\lambda) - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \text{ şi } \lambda_2 = -1. \end{aligned}$$

Prin urmare ecuaţia canonică a conicei Q_2 este

$$4x''^2 - y''^2 - \frac{144}{4} \Leftrightarrow \frac{x''^2}{3^2} - \frac{y''^2}{6^2} = 1 \tag{13.13}$$

şi ea reprezintă o hiperbolă[6].

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 4$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2u - v = 0 \Leftrightarrow v = 2u.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 4$ este $\overrightarrow{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \overrightarrow{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \overrightarrow{j}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u + 2v = 0 \Leftrightarrow u = -2v.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este $\overrightarrow{e}_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \overrightarrow{j}$.

Matricea ortogonală a primei schimbări de coordonate este

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ iar schimbarea de coordonate este } \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Faţă de reperul $R' = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ funcţia f are forma

$$\begin{aligned} f(M) &= -36 + [16\ 12] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4x'^2 - y'^2 \\ &= -36 + \begin{bmatrix} \frac{40}{\sqrt{5}} & -\frac{20}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4x'^2 - y'^2 \\ &= -36 + \tfrac{40}{\sqrt{5}}x' - \tfrac{20}{\sqrt{5}}y' + 4x'^2 - y'^2 \\ &= 4\left(x'^2 + \tfrac{10}{\sqrt{5}}x' + 5\right) - 20 - \left(y'^2 + 4\sqrt{5}y' + 20\right) + 20 - 36 \\ &= 4\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 - \left(y' + 2\sqrt{5}\right)^2 - 36 \end{aligned}$$

[6]Aici se încheie studiul naturii conicei Q_2. Consideraţiile ulterioare au în vedere reprezentarea sa.

A doua schimbare de coordonate este

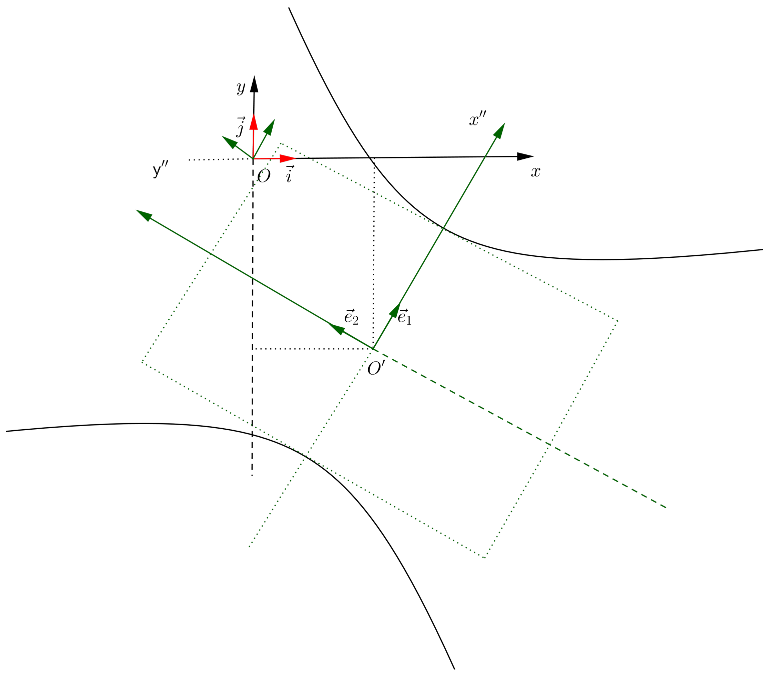
$$\begin{cases} x'' &= x' + \sqrt{5} \\ y'' &= y' + 2\sqrt{5}, \end{cases}$$

iar originea reperului faţă de care funcţia are forma redusă are coordonatele

$$\begin{cases} x''=0 \\ y''=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\sqrt{5} \\ y'=-2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} + 2\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5} \\ y &= -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5} - 2\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= -4 \end{cases},$$

adică originea O' a reperului faţă de care funcţia f are forma redusă are, faţă de reperul iniţial R, coordonatele $(3,-4)$. Faţă de reperul $R''=(O',\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$ conica Q_2 are ecuaţia (13.13). Amintim faptul că originea O' a reperului R'' coincide cu centrul hiperbolei Q_2 şi deci coordonatele sale se pot găsi şi rezolvând sistemul liniar.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0. \end{cases}$$



(*Metoda unghiului şi a centrului unic*) Unghiul vectorilor $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{e}_1$ este dat de ecuaţia

$$a_{12}\text{tg}^2\theta + (a_{11}-a_{22})\text{tg}\theta - a_{12} = 0 \Longleftrightarrow -2\text{tg}^2\theta + 3\text{tg}\theta + 2 = 0,$$

iar aceasta are rădăcinile $\text{tg}\theta_1 = 2$ şi $\text{tg}\theta_2 = -\frac{1}{2}$. Alegem soluţia din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, adică $\text{tg}\theta_1 = 2$. Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt $\lambda_1 = a_{11} + a_{12}\text{tg}\theta_1 = 0 + 4 = 4$ şi $\lambda_2 = a_{11} - a_{12}\text{ctg}\theta_1 = 0 - 2\cdot\frac{1}{2} = -1$. Aşadar ecuaţia redusă a hiperbolei este

$$4x''^2 - y''^2 - \frac{144}{4} \Leftrightarrow \frac{x''^2}{3^2} - \frac{y''^2}{6^2} = 1.$$

În sfârşit, coordonatele centrului hiperbolei sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 16 + 4y = 0 \\ 12 + 4x + 6y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 3,\ y = -4.$$

(8c) Notăm cu f funcţia polinomială de gradul doi care defineşte conica Q_3 şi cu R reperul cartezian iniţial. Dacă M este un punct din spaţiu de coordonate (x, y) faţă de R, atunci $f(M) = 1 - 6x + 2y + x^2 - 4xy + 4y^2$ şi deci

$$[f]_R = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ şi } [[f]]_R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 6 - 1 - 4 - 36 = -25$$

Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt rădăcinile polinomului său caracteristic, adică

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5 \text{ şi } \lambda_2 = 0.$$

Prin urmare ecuaţia canonică a conicei Q_2 este

$$5y''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{-25}{5}}x'' = 0 \Leftrightarrow y''^2 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x'' = 0 \tag{13.14}$$

şi ea reprezintă o parabolă[7].

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1-0 & -2 \\ -2 & 4-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = 2v.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este $\overrightarrow{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 5$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1-5 & -2 \\ -2 & 4-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2u - v = 0 \Leftrightarrow v = -2u.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 5$ este $\overrightarrow{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$.

Matricea ortogonală a primei schimbări de coordonate este

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ iar schimbarea de coordonate este } \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

[7] Aici se încheie studiul naturii conicei Q_3. Consideraţiile ulterioare au în vedere reprezentarea sa.

Faţă de reperul $R' = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ funcţia f are forma

$$\begin{aligned} f(M) &= 1 + [-6\ 2] \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 5y'^2 \\ &= 1 - \tfrac{10}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{10}{\sqrt{5}}y' + 5y'^2 \\ &= 5(y'^2 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y' + \tfrac{1}{5}) - 1 - \tfrac{10}{\sqrt{5}}x' + 1 \\ &= 5\left(y' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{5}x' \end{aligned}$$

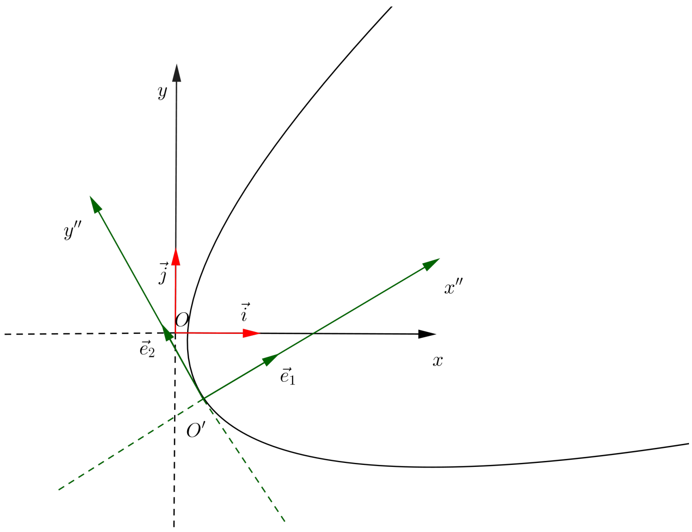
A doua schimbare de coordonate este

$$\begin{cases} x'' &= x' \\ y'' &= y' + \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

iar originea reperului faţă de care funcţia are forma redusă are coordonatele

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{5} \\ y &= -\frac{2}{5} \end{cases},$$

adică originea O' a reperului faţă de care funcţia f are forma redusă are, faţă de reperul iniţial R, coordonatele $\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Faţă de reperul $R'' = (O', \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ parabola Q_3 are ecuaţia $y''^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}x'$.



14 Funcţii polinomiale în trei variabile

O funcţie $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte funcţie polinomială dacă există un reper cartezian $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ al lui $\mathcal{P}$ şi un polinom $G \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ astfel încât pentru orice punct $N \in \mathcal{P}$ de coordonate carteziene (x, y, z) faţă de R să avem

$$g(M) = G(x, y, z),$$

adică g este un polinom în coordonatele lui N faţă de R. Observăm că noţiunea de funcţie polinomială nu depinde de alegerea reperului cartezian R. Întradevăr, dacă S este un alt reper cartezian şi $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ este un polinom în coordonatele lui N faţă de R, atunci f este un polinom de acelaşi grad şi în coordonatele lui N faţă de S, deoarece formulele de trecere de la reperul R la reperul S sunt polinoame de gradul întâi reversibile.

Prin urmare gradul polinomului G este invariant la schimbarea reperului şi se numeşte *gradul lui g*. Alegerea convenabilă a reperului poate conduce la o cea mai simplă formă a polinomului de reprezentare a lui g.

14.1 Funcţii polinomiale de gradul doi şi cuadrice. Reprezentări matriceale

Fie $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul doi care, faţă de reperul cartezian $R = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ al lui $\mathcal{P}$, are reprezentarea

$$\begin{aligned} g(N) &= a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ &\quad + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz \\ &\quad + a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz \\ &\quad + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2 \end{aligned}$$

pentru orice $N(x, y, z) \in \mathcal{P}$.

Definiţia 14.1. Dacă $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul doi, atunci preimaginea $Q = g^{-1}(0)$ se numeşte *cuadrică*.

Funcţie polinomială $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ de gradul doi se poate reprezentă matriceal astfel:

$$g(N) = a_{00} + 2(a_{10}\, a_{10}\, a_{30})[N]_R + [N]_R^t A[N]_R \quad ,$$

unde

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricea A poate fi aleasă simetrică deoarece g admite şi reprezentarea

$$g(N) = a_{00} + 2(a_{10}\, a_{10}\, a_{30})[N]_R + [N]_R^t \frac{A + A^t}{2}[N]_R.$$

Notăm cu $[g]_R$ matricea A, atunci când A este simetrică, adică

$$\begin{aligned} g(N) &= a_{00} \; +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ &\qquad\quad +2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &\qquad\quad +a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ &= a_{00} \; +2(a_{10}\, a_{20}\, a_{30})[N]_R + [N]_R^t \cdot [g]_R \cdot [N]_R, \end{aligned}$$

unde

$$[g]_R := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{ij} = a_{ji}, \; 1 \leq i, j \leq 3.$$

Dacă $R' = (O', \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}')$ este un alt reper cartezian, atunci $[N]_R = T[N]_{R'} + [O']_R$, unde T este matricea de trecere de la baza $b = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ la baza $b' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}']$, fapt care arată că

$$g(N) = b_{00} + 2(b_{10}\, b_{20}\, b_{30})[N]_{R'} + [N]_{R'}^t (T^t [f]_R T)[N]_{R'},$$

unde

$$b_{00} = a_{00} + 2(a_{10}\, a_{10}\, a_{30})[O']_R + [O']_R^t \cdot [f]_R[O']_R = f(O')$$

$$(b_{10}\, b_{10}\, b_{30}) = (a_{10}\, a_{10}\, a_{30})T + \frac{1}{2}[O']_R^t([f]_R + [f]_R^t)T.$$

Aşadar $[g]_{R'} = T^t[g]_R T$.

O altă matrice importantă legată de reprezentarea funcţiei polinomiale f faţă de reperul R este

$$[[g]]_R := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ unde } a_{ij} = a_{ji},\ i = \overline{0,3}.$$

Într-adevăr avem

$$g(N) = (1\ x\ y\ z)[[g]]_R \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dacă $[N]_{R'}^t = (x'\ y'\ z')$, atunci avem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \beta_2 & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \beta_3 & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

unde

$$[O']_R = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \text{ şi } T = (t_{ij})_{1\le i,j\le 3}.$$

Prin urmare avem

$$g(N) = (1\ x'\ y'\ z')(S^t[[g]]_R S) \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \beta_2 & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \beta_3 & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix},$$

fapt care arată că $[[g]]_{R'} = S^t[[g]]_R S$.

14.1.1 Invarianţi şi semiinvarianţi ortogonali

Fie $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ o funcţie polinomială de gradul doi reprezentată faţă de reperul cartezian ortonormat $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ prin

$$\begin{aligned} g(N) &= a_{00} && +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ & && +2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & && +a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ &= a_{00} && +2(a_{10}\, a_{20}\, a_{30})[N]_R + [N]_R^t \cdot [g]_R \cdot [N]_R, \end{aligned}$$

unde

$$[g]_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ a_{ij} = a_{ji}.$$

Dacă $R' = (O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$ este un alt reper cartezian ortonormat, amintim că $[g]_{R'} = T^t \cdot [g]_R \cdot T$, unde T este matricea ortonormată de trecere de la baza $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ la baza $[\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}']$. Aşadar, rangul matricii $[g]_R$ nu depinde de alegerea reperului cartezian ortonormat R şi se notează cu r. De altfel nici rangul matricii

$$[[g]]_R = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

nu depinde de alegerea reperului cartezian ortonormat R şi se notează cu r', deoarece $[[g]]_{R'} = S^t \cdot [[g]]_R \cdot S$, unde S are forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & T \end{pmatrix}$. Este uşor de verificat că $r' \in \{r, r+1, r+2\}$. Amintim că pe lângă invarianţii numerici r şi r' asociaţi funcţiei polinomiale $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} g(N) & = & a_{00} & +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ & & & +2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & & & +a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ & = & a_{00} & +2(a_{10}\, a_{20}\, a_{30})[N]_R + [N]_R^t \cdot [g]_R \cdot [N]_R, \end{array},$$

un alt invariant numeric al său asociat lui g este *indicele pozitiv de inerţie* i al formei pătratice

$$2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2,$$

adică numărul valorilor proprii > 0 ale matricii $[g]_R$.

Definiţia 14.2. O aplicaţie $\Phi : \mathbb{R}^{10} \to X$ se numeşte *invariant ortogonal* al funcţiei polinomiale

$$\begin{array}{rl} g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, \ g(M) = a_{00} & +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ & +2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & +a_{11}x^2 + 2a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \end{array}$$

dacă valoarea

$$\Phi(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{11}, a_{22}, a_{33}) \tag{14.1}$$

nu se schimbă atunci când schimbăm reperul cartezian ortonormat. Aplicaţia Φ se numeşte *semiinvariant ortogonal* al funcţiei polinomiale g dacă valoarea (14.1) nu se schimbă atunci când schimbăm reperul cartezian ortonormat, fără a schimba originea sa.

Propoziţia 14.1. *Polinomul caracteristic*

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = I_0 - I_1\lambda + I_2\lambda^2 - \lambda^3,$$

unde $a_{ji} = a_{ij}$*, este invariant ortogonal al lui* g*, adică*

$$\begin{array}{rcl} I_0 & = & \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ I_1 & = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ I_2 & = & a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{array}$$

sunt invarianţi ortogonali ai lui g. De asemenea determinantul

$$\Delta = \det[[g]]_R = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

este invariant ortogonal al lui g numit discriminantul *lui g.*

Propoziţia 14.2. *Polinomul*

$$\begin{aligned} P_O(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \Delta - K_1\lambda + K_2\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned} \tag{14.2}$$

este un semiinvariant ortogonal al lui g, adică

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{13} \\ a_{30} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} & a_{03} \\ a_{20} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ K_2 &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{14.3}$$

sunt semiinvarianţi ortogonali ai funcţiei polinomiale g.

Observaţia 14.1. *Dacă funcţia polinomială $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ nu conţine variabila z când spaţiul $\mathcal{P}$ este raportat la reperul cartezian ortonormat $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, atunci $\Delta = 0$ iar K_1 este un invariant ortogonal. De asemenea dacă g nu conţine variabilele y, z, atunci $\Delta = K_1 = 0$ iar K_2 este un invariant ortogonal.*

Într-adevăr, dacă $g(M) = a_{00} + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, atunci

$$K_1 = \delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{14.4}$$

este invariant ortogonal al conicei

$$\begin{cases} g(M) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Fie $R' = (O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ un alt reper cartezian ortonormat, unde $O'(\alpha, \beta, \gamma)$. Valoarea lui K_1 nu se schimbă prin trecerea de la reperul R la reperul $R_1 = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, unde $O_1(\alpha, \beta, 0)$, deoarece K_1 este un invariant ortogonal al conicei

$$\begin{cases} g(M) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

De asemenea valoarea lui K_1 nu se schimbă prin trecerea de la reperul R_1 la reperul $R_2 = (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ deoarece forma funcţiei polinomiale g nu se schimbă prin această trecere. În sfârşit, valoarea lui K_1 nu se schimbă prin trecerea de la reperul R_2 la reperul R' deoarece K_1 este un semiinvariant ortogonal al funcţiei g. Analog se arată că semiinvariantul K_2 este un invariant ortogonal dacă funcţia polinomială g nu conţine variabilele y, z.

14.2 Teorema de reducere izometrică a polinoamelor de gradul doi în trei variabile

Teorema 14.3. *Faţă de un reper cartezian ortonormat convenabil ales funcţia polinomială g are una din formele următoare:*

1. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta}$, *dacă* $\delta \neq 0$;
2. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}} z''$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 \neq 0,\ \Delta \neq 0$;
3. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{K_1}{I_1}$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 \neq 0,\ \Delta = 0$;
4. $I_2 x''^2 + 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}} y''$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 = 0,\ K_1 \neq 0$;
5. $I_2 x''^2 + \frac{K_2}{I_2}$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 = 0,\ K_1 = 0$.

Demonstraţie. Fie $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3$ rădăcinile ecuaţiei (polinomului caracteristsic) $P(\lambda) = 0$, adică valorile proprii ale matricii simetrice $[g]_R$ şi $i'(p_1, q_1, r_1), j'(p_2, q_2, r_2), j'(p_3, q_3, r_3)$ vectori proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1,\ \lambda_2\ \lambda_3$ care formează o bază ortonormată a lui $\mathcal{V}$. Aşadar, sunt îndeplinite relaţiile

$$p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i=j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

şi

$$A \cdot \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix} \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Notând cu T matricea ortogonală

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

de trecere de la baza ortonormată iniţială $b = [i, j, k]$ la baza ortonormată $b' = [i', j', k']$, obţinem formula $[M]_R = T[M]_{R'}$ de trecere de la reperul iniţial $R = (O, i, j, k)$ la reperul $R' = (O, i', j', k')$. Folosind reprezenntarea lui g faţă de R,

$$g(M) = a_{00} + 2(a_{10}, a_{20}, a_{30})[M]_R + [M]_R^t \cdot [g]_R \cdot [M]_R$$

şi relaţiile de trecere $[M]_R = T[M]_{R'}$ obţinem reprezentarea lui g faţă de reperul R'

$$g(M) = a_{00} + 2(a_{10}, a_{20}, a_{30}) \cdot T[M]_{R'} + [M]_{R'}(T^t \cdot [g]_R \cdot T)[M]_{R'}.$$

Folosind proprietatea de ortogonalitate a matricii T precum şi faptul că

$$i'(p_1, q_1, r_1),\ j'(p_2, q_2, r_2), r'(p_3, q_3, r_3)$$

sunt vectori proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3$ se poate uşor verifica relaţia

$$T^t \cdot [g]_R \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

şi astfel deducem reprezentarea lui g faţă de reperul R'

$$g(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + 2b_{30} + \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

unde $(b_{10}, b_{20}, b_{30}) = (a_{10}, a_{20}, a_{30})T$. Valorile $I_0 = \delta$, I_1 şi I_2 fiind invarianţi ortogonali ai lui g rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \ I_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \ I_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

1) $\delta \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0, \ \lambda_3 \neq 0$ şi deci putem scrie

$$f(M) = b_{00} + \lambda_1 \left(x' + \frac{b_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(z' \frac{b_{30}}{\lambda_3}\right)^2,$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{b_{20}^2}{\lambda_2} + \frac{b_{30}^2}{\lambda_3}$. Făcând o nouă schimbare a reperului ortonormat dat de translaţia

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \tfrac{b_{10}}{\lambda_1} \\ y'' &= y' + \tfrac{b_{20}}{\lambda_2} \\ z'' &= z' + \tfrac{b_{30}}{\lambda_3} \end{aligned}$$

obţinem reprezentarea lui g în forma

$$g(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 b_{00},$$

de unde rezultă

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = b_{00} \cdot \delta,$$

adică $b_{00} = \frac{\Delta}{\delta}$. Prin urmara, reprezentarea finală a lui g este

$$f(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

2) $\delta = 0, \ I_1 \neq 0, \ \Delta \neq 0$. Deoarece $\delta = 0$ şi $I_1 \neq 0$ rezultă, in acest caz, că exact două dintre valorile proprii sunt nenule iar cealaltă este nulă. Presupunem că $\lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0$ şi $\lambda_3 = 0$, adică $I_1 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. În acest caz reprezentarea lui g faţă de reperul R' este $g(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + 2b_{30}z' + \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Deci discriminantul lui f are forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{10} & b_{20} & b_{03} \\ b_{10} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ b_{20} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_{30} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_{30}^2 I_1.$$

De aici deducem că $b_{10} \neq 0$ şi $b_{10} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}}$. Deci g poate fi pusă sub forma

$$g(M) = \lambda_1 \left(y' + \frac{b_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2}\right)^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}} \left(z' + \frac{b_{00}}{2b_{30}}\right),$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{b_{20}^2}{\lambda_2}$ Făcând translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_{10}}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2} \\ z'' = z' + \frac{b_{00}}{2b_{30}} \end{cases}$$

obţinem reprezentarea finală a lui g în forma

$$g(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}}.$$

3) $\delta = 0$, $I_1 \neq 0$ şi $\Delta = 0$. Spre deosebire de cazul 2), în acest caz $b_{30} = 0$ deoarece $0 = \Delta = -b_{30}^2 I_1$. Prin urmare g are reprezentarea

$$g(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Deoarece polinomul de reprezentare nu conţine variabila z', rezultă că semiinvariantul ortogonal K_1 este un invariant ortogonal.

$$g(M) = \lambda_1 \left(x' + \frac{b_{10}}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2} \right) + b_{00},$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{b_{20}^2}{\lambda_2}$. Făcând translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_{10}}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \frac{b_{20}}{\lambda_2} \\ z'' = z' \end{cases}$$

obţinem noua reprezentare a lui g sub forma

$$g(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + b_{00}.$$

Aşadar, K_1 are forma

$$\begin{vmatrix} b_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = b_{00}\lambda_1\lambda_2 = b_{00}I_1, \text{ adică } b_{00} = \frac{K_1}{I_1}.$$

Prin urmare reprezentarea finală a lui g este

$$g(M) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{K_1}{I_1}.$$

4) $\delta = 0$, $I_1 = 0$ şi $K_1 \neq 0$. În acest caz exact două dintre valorile proprii sunt nule iar cealaltă este nenulă. De exemplu $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi $I_2 = \lambda_1 \neq 0$. Deci funcţia polinomială g are reprezentarea

$$g(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + 2b_{30}z' + I_2 x'^2, \text{ sau, echivalent}$$

$$g(M) = I_2 \left(x' + \frac{b_{10}}{I_2} \right)^2 + 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}} \left(\sqrt{-\frac{I_2}{K_1}} b_{20} + \sqrt{-\frac{I_2}{K_1}} b_{30} z' \right) + b_{00},$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}}{I_2}$. K_1 fiind semiinvariant ortogonal, valoarea sa este dată de

$$\begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & I_2 & 0 \\ b_{20} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{03} \\ b_{10} & I_2 & 0 \\ b_{30} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I_2(b_{20}^2 + b_{30}^2).$$

Făcând schimbarea de reper ortogonal dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_{10}}{I_2} \\ y'' = \sqrt{-\frac{I_2}{K_1}}b_{20} + \sqrt{-\frac{I_2}{K_1}}b_{30}z' \\ z'' = -\sqrt{-\frac{I_2}{K_1}}b_{30} + \sqrt{-\frac{I_2}{K_1}}b_{20}z' \end{cases}$$

obţinem reprezentarea finală a lui g

$$g(M) = I_2 x''^2 + 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}}y''.$$

5) $\delta = I_1 = K_1 = 0$. Şi în acest caz avem exact două valori proprii nenule iar cealaltă nulă. De exemplu $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi $I_2 = \lambda_1 \neq 0$. Aşadar, reprezentarea lui g faţă de reperul R' are, în acest caz, forma

$$g(M) = a_{00} + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + 2b_{30}z' + I_2 x'^2.$$

Deoarece $K_1 = 0$ rezultă că $-I_1 2(b_{20}^2 + b_{30}^2) = 0$, adică $b_{20} = b_{30} = 0$. Prin urmare

$$g(M) = a_{10}x' + 2b_{10}x' + I_2 x'^2 = I_2\left(x' + \frac{b_{10}}{I_2}\right)^2 + b_{00},$$

unde $b_{00} = a_{00} - \frac{b_{10}^2}{I_2}$. Deoarece variabilele x', y' nu apar în ultima reprezentare a lui g rezultă că semiinvariantul ortogonal K_2 este invariant ortogonal. Făcând schimbarea de reper ortogonal dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_{10}}{I_2} \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$$

obţinem noua reprezentare a lui g dată de

$$g(M) = I_2 x''^2 + b_{00}$$

şi deci invariantul ortogonal K_2 are valoarea $K_2 = \begin{vmatrix} b_{00} & 0 \\ 0 & I_2 \end{vmatrix} = b_{00}I_2$, adică $b_{00} = \frac{K_2}{I_2}$. Prin urmare reprezentare ortogonală a lui g are forma finală

$$g(M) = I_2 x''^2 + \frac{K_2}{I_2}.\square$$

Matricea T din demonstraţia teoremei 14.3 fiind ortogonală $\det T \in \{-1, 1\}$. De obicei astfel vectorii $\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'$ sunt aleşi încât $\det T = 1$, adică bazele $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$ şi $[\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}']$ să fie la fel orientate. Dată fiind o funcţie polinomială de gradul doi $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, un invariant ortogonal al lui g se numeşte şi *invariant ortogonal* al cuadricei $g^{-1}(0)$. Observăm de asemenea un semiinvariant ortogonal al lui g se numeşte şi *semiinvariant ortogonal al cuadricei* $g^{-1}(0)$.

Teorema 14.4. *(Teorema de clasificare a cuadricelor) Dată fiind cuadrica*

$$\begin{aligned} Q:\ a_{00}\ & +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ & +2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & +a_{11}x^2 + 2a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0 \end{aligned}$$

există un reper cartezian ortonormat convenabil ales astfel încât ecuaţia acesteia să aibă una din formele următoare:

1. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, *dacă* $\delta \neq 0$;
2. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}}z'' = 0$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 \neq 0,\ \Delta \neq 0$;
3. $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 \neq 0,\ \Delta = 0$;
4. $I_2 x''^2 + 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}}y'' = 0$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 = 0,\ K_1 \neq 0$;
5. $I_2 x''^2 + \frac{K_2}{I_2} = 0$ *dacă* $\delta = 0,\ I_1 = 0,\ K_1 = 0$.

r'	r	i	(Semi)invarianţi	Denumirea cuadricei	ecuaţia canonică
4	3	3	$\Delta > 0$	elipsoid imaginar	
			$\Delta < 0$	elipsoid real	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$
		2	$\Delta > 0$	hiperboloid cu o pânză	
			$\Delta < 0$	hiperboloid cu două pânze	
	2	2		paraboloid eliptic	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{I_1}}z = 0$
		1		parabolid hiperbolic	
3	3	3		punct dublu	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$
		2		con	
	2	2	$K_1 I_1 > 0$	cilindru eliptic imaginar	
			$K_1 I_1 < 0$	cilindru eliptic real	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$
		1		cilindru hiperbolic	
	1	1		cilindru parabolic	$I_2 x^2 + 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}}y = 0$
2	2	2		dreaptă dublă	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$
		1		pereche de plane secante	
	1	1	$K_2 > 0$	pereche vidă de plane	
			$K_2 < 0$	pereche de plane paralele	$I_2 x^2 + \frac{K_2}{I_2} = 0$
1	1	1		plan dublu	$x^2 = 0$

14.3 Probleme

1. Să se studieze natura cuadricelor, să se aducă la forma redusă şi să se reprezinte în spaţiul tridimensional cuadricele:
   (a) $\mathfrak{Q}_1 : 335 - 216x + 8y + 20z + 4yz + 36x^2 + 8y^2 + 5z^2 = 0$;
   (b) $\mathfrak{Q}_2 : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$;
   (c) $\mathfrak{Q}_3 : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$;

(d) $\mathfrak{Q}_4 : x^2 + y^2 - z^2 - 4xy - 4xz - 6x = 0$.

Soluţie. Vom trata aici doar punctele (1b) şi (1c), celelalte tratându-se analog.

(1b) Notăm cu f funcţia polinomială de gradul doi care defineşte cuadrica $\mathfrak{Q}_2$ şi cu R reperul cartezian iniţial. Dacă M este un punct din spaţiu de coordonate (x, y, z) faţă de R, atunci $f(M) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8$ şi deci

$$[f]_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } [[f]]_R = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \text{ şi } \Delta = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Valorile proprii ale matricii $[f]_R$ sunt rădăcinile polinomului său caracteristic, adică

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0.$$

Prin urmare ecuaţia canonică a cuadricei $\mathfrak{Q}_2$ este

$$x''^2 - y''^2 + 4z''^2 = 1 \Leftrightarrow x''^2 - y''^2 + \frac{z''^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \tag{14.5}$$

şi ea reprezintă un hiperboloid cu o pânză[8].

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + 2w = 0 \\ 2v - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = w = 0.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{i}(1, 0, 0)$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = -1$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = 0 \\ 4v + 2w = 0 \\ 2v + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0 \ \& \ w = -2v.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este $\overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{k}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 4$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3u = 0 \\ -v + 2w = 0 \\ 2v - 4w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0 \ \& \ v = 2w.$$

[8] Aici se încheie studiul naturii cuadricei $\mathfrak{Q}_2$. Consideraţiile ulterioare au în vedere reprezentarea sa.

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 4$ este $\overrightarrow{e}_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{k}$.

Matricea ortogonală a primei schimbări de coordonate este

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ iar schimbarea de coordonate este } \begin{cases} x &= x' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{\sqrt{5}}z'. \end{cases}$$

Faţă de reperul $R' = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ funcţia f are forma

$$\begin{aligned} f(M) &= 8 + [-6\ 8\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + x'^2 - y'^2 + 4z'^2 \\ &= 8 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + +x'^2 - y'^2 + 4z'^2 \\ &= x'^2 - 6x' + 9 - 9 - \left(y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{5}\right) + \frac{16}{5} + 4\left(z'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}z' + \frac{16}{5}\right) - \frac{16}{5} + 8 \\ &= (x'-3)^2 - \left(y - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

A doua schimbare de coordonate este

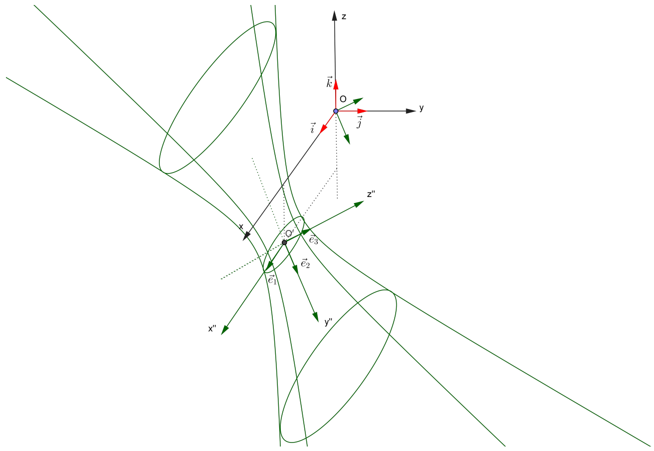
$$\begin{cases} x'' &= x' - 3 \\ y'' &= y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \\ z'' &= z' + \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

iar originea reperului faţă de care funcţia are forma redusă are coordonatele

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ z' = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{cases},$$

adică originea O' a reperului faţă de care funcţia f are forma redusă are, faţă de reperul iniţial R, coordonatele $(3, 0, 2)$. Faţă de reperul $R' = (O'.\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ cuadrica $\mathfrak{Q}_2$ are ecuaţia (14.5). Amintim faptul că originea O' a reperului R' coincide cu centrul hiperboloidului cu o pânză $\mathfrak{Q}_2$ şi deci coordonatele sale se pot găsi şi rezolvând sistemul liniar.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0. \end{cases}$$



(1c)

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 6$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 2 & 2-6 & -2 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6u + 2v - 4w = 0 \\ +2u - 4v - 2w = 0 \\ -4u - 2v - 6w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + w \\ v = -w \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -w.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 6$ este $\overrightarrow{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -4$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2+4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 2v - 4w = 0 \\ 2u + 6v - 2w = 0 \\ -4u - 2v + 4w = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -2u + 2w \\ u - 6u + 6w - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = w \\ v = 0. \end{cases}$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -4$ este $\overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = -4$ este soluţia generală a sistemului

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v - 4w = 0 \\ 2u + 2v - 2w = 0 \\ -4u - 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = -2u = 2w.$$

Aşadar, un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = 0$ este $\overrightarrow{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k}$.

Matricea ortogonală a primei schimbări de coordonate este şi schimbarea de coordonate sunt:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Faţă de reperul $R' = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ funcţia f are forma

$$\begin{aligned}
f(M) &= 8 + [6\ 0\ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 6x'^2 - 4y'^2 \\
&= -5 + 6\left(\frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}'\right) + 6x'^2 - 4y'^2 \\
&= 6\left(x'^2 + 2\frac{1}{2\sqrt{3}}x' + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{2} - 4\left(y'^2 - 2\frac{3}{4\sqrt{2}}y' + \frac{9}{32}\right) + \frac{9}{8} + \sqrt{6}z' - 5 \\
&= 6\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{6}\left(z' - \frac{35}{8\sqrt{6}}\right).
\end{aligned}$$

A doua schimbare de coordonate este

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ y'' = y' - \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ z'' = z' - \frac{35}{8\sqrt{6}}, \end{cases}$$

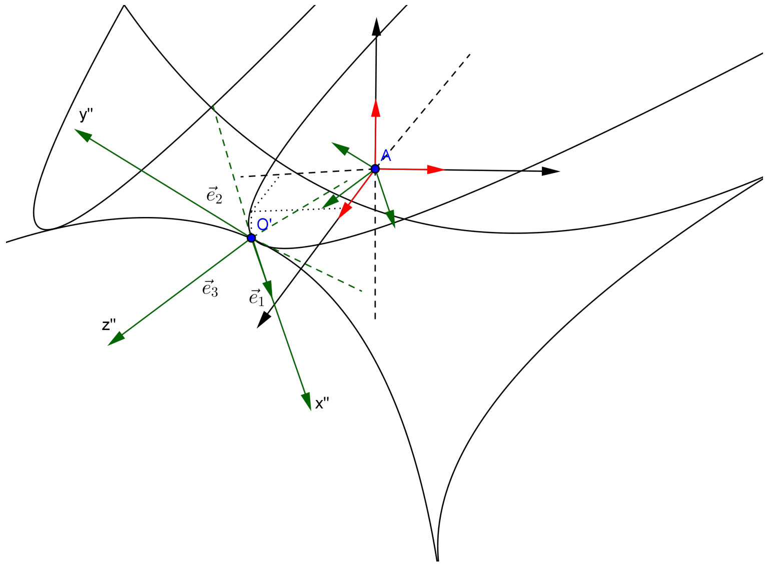
iar originea reperului faţă de care funcţia are forma redusă are coordonatele

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ y' = \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ z' = \frac{35}{8\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{35}{8\sqrt{6}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{35}{8\sqrt{6}} \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{35}{8\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{39}{24} \\ z = -\frac{3}{8}, \end{cases}$$

adică originea O' a reperului faţă de care funcţia f are forma redusă are, faţă de reperul iniţial R, coordonatele $\left(\frac{3}{4}, -\frac{39}{24}, -\frac{3}{8}\right)$. Faţă de acest reper paraboloidul hiperbolic $\mathfrak{Q}_3$ are ecuaţia

$$6x''^2 - 4y''^2 + \sqrt{6}z'' = 0.$$



References

[1] Andrica, D., Ţopan, L., Analytic geometry, Cluj University Press, 2004.

[2] Galbură Gh., Radó, F., Geometrie, Editura didactică şi pedagogică-Bucureşti, 1979.

[3] Pintea, C. Geometrie. Elemente de geometrie analitică. Elemente de geometrie diferenţială a curbelor şi suprafeţelor, Presa Universitară Clujeană, 2001.

[4] Radó, F., Orban, B., Groze, V., Vasiu, A., Culegere de Probleme de Geometrie, Lit. Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1979.

