

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 59

Студент  
Павличенко Софья Алексеевна  
Р3115

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

Функция  $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $3 \leq x_1x_2x_3 + x_4x_5 < 7$  и неопределенное значение при  $x_3x_4 = 2$ .

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1x_2x_3$	$x_4x_5$	$x_3x_4$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0	2	1	0
3	0	0	0	1	1	0	3	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0	2	d
5	0	0	1	0	1	1	1	2	d
6	0	0	1	1	0	1	2	3	1
7	0	0	1	1	1	1	3	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	0	0
9	0	1	0	0	1	2	1	0	1
10	0	1	0	1	0	2	2	1	1
11	0	1	0	1	1	2	3	1	1
12	0	1	1	0	0	3	0	2	d
13	0	1	1	0	1	3	1	2	d
14	0	1	1	1	0	3	2	3	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	1
16	1	0	0	0	0	4	0	0	1
17	1	0	0	0	1	4	1	0	1
18	1	0	0	1	0	4	2	1	1
19	1	0	0	1	1	4	3	1	0
20	1	0	1	0	0	5	0	2	d
21	1	0	1	0	1	5	1	2	d
22	1	0	1	1	0	5	2	3	0
23	1	0	1	1	1	5	3	3	0
24	1	1	0	0	0	6	0	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	0	0
26	1	1	0	1	0	6	2	1	0
27	1	1	0	1	1	6	3	1	0
28	1	1	1	0	0	7	0	2	d
29	1	1	1	0	1	7	1	2	d
30	1	1	1	1	0	7	2	3	0
31	1	1	1	1	1	7	3	3	0

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
$m_{16}$	10000	✓	$m_4-m_5$	0010X	✓	$m_4-m_5-m_6-m_7$	001XX	✓
$m_4$	00100	✓	$m_4-m_6$	001X0	✓	$m_4-m_5-m_{12}-m_{13}$	0X10X	✓
$m_3$	00011	✓	$m_4-m_{12}$	0X100	✓	$m_4-m_6-m_{12}-m_{14}$	0X1X0	✓
$m_6$	00110	✓	$m_{16}-m_{17}$	1000X	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$	10X0X	
$m_9$	01001	✓	$m_{16}-m_{18}$	100X0		$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00	
$m_{10}$	01010	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓	$m_4-m_5-m_{20}-m_{21}$	X010X	✓
$m_{17}$	10001	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓	$m_4-m_{12}-m_{20}-m_{28}$	XX100	✓
$m_{18}$	10010	✓	$m_4-m_{20}$	X0100	✓	$m_{12}-m_{13}-m_{14}-m_{15}$	011XX	✓
$m_{24}$	11000	✓	$m_6-m_7$	0011X	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$	01X1X	
$m_5$	00101	✓	$m_5-m_7$	001X1	✓	$m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}$	01XX1	
$m_{12}$	01100	✓	$m_3-m_7$	00X11	✓	$m_6-m_7-m_{14}-m_{15}$	0X11X	✓
$m_{20}$	10100	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_5-m_7-m_{13}-m_{15}$	0X1X1	✓
$m_7$	00111	✓	$m_9-m_{11}$	010X1	✓	$m_3-m_7-m_{11}-m_{15}$	0XX11	
$m_{11}$	01011	✓	$m_{12}-m_{13}$	0110X	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}$	1X10X	✓
$m_{14}$	01110	✓	$m_{12}-m_{14}$	011X0	✓	$m_{12}-m_{13}-m_{28}-m_{29}$	X110X	✓
$m_{13}$	01101	✓	$m_9-m_{13}$	01X01	✓	$m_5-m_{13}-m_{21}-m_{29}$	XX101	✓
$m_{21}$	10101	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓			
$m_{28}$	11100	✓	$m_3-m_{11}$	0X011	✓			
$m_{15}$	01111	✓	$m_5-m_{13}$	0X101	✓			
$m_{29}$	11101	✓	$m_6-m_{14}$	0X110	✓			
			$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
			$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓			
			$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			
			$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			$m_5-m_{21}$	X0101	✓			
			$m_{12}-m_{28}$	X1100	✓			
			$m_{14}-m_{15}$	0111X	✓			
			$m_{13}-m_{15}$	011X1	✓			
			$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓			
			$m_7-m_{15}$	0X111	✓			
			$m_{28}-m_{29}$	1110X	✓			
			$m_{21}-m_{29}$	1X101	✓			
			$m_{13}-m_{29}$	X1101	✓			
$K^3(f)$						$Z(f)$		
$m_4-m_5-m_6-m_7-m_{12}-m_{13}-m_{14}-m_{15}$						0X1XX		
$m_4-m_5-m_{12}-m_{13}-m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}$						XX10X		
						100X0		
						10X0X		
						1XX00		
						01X1X		
						01XX1		
						0XX11		
						0X1XX		
						XX10X		

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы											
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
		0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
		1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
		1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
		3	6	7	9	10	11	14	15	16	17	18	24
	100X0									X		X	
	10X0X									X	X		
	1XX00									X			X
	01X1X					X	X	X	X				
	01XX1				X		X		X				
	0XX11	X		X			X		X				
	0X1XX		X	X				X	X				
	XX10X												

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0XX11 \\ 0X1XX \\ 01XX1 \\ 01X1X \\ 10X0X \\ 100X0 \\ 1XX00 \end{array} \right\}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0XX11 \\ 0X1XX \\ 01XX1 \\ 01X1X \\ 10X0X \\ 100X0 \\ 1XX00 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 21$$

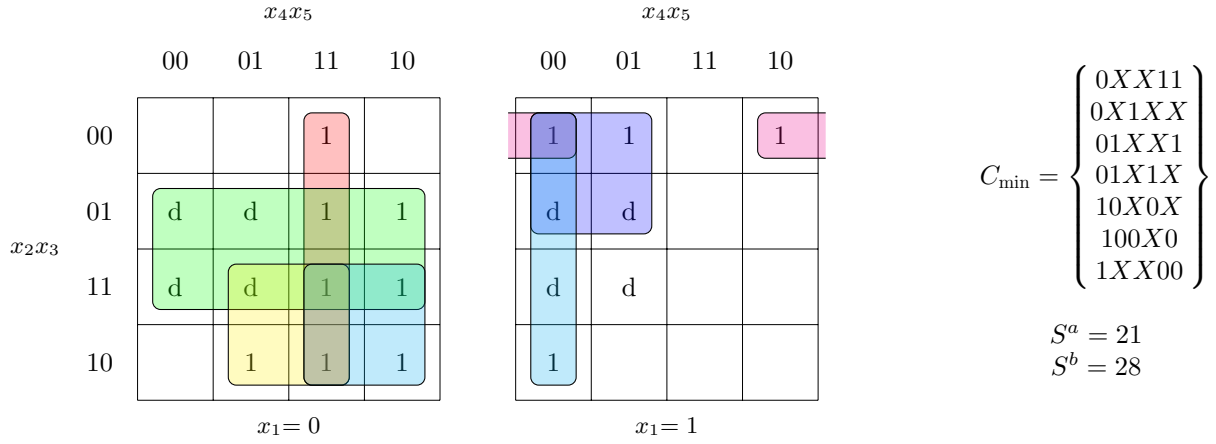
$$S^b = 28$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

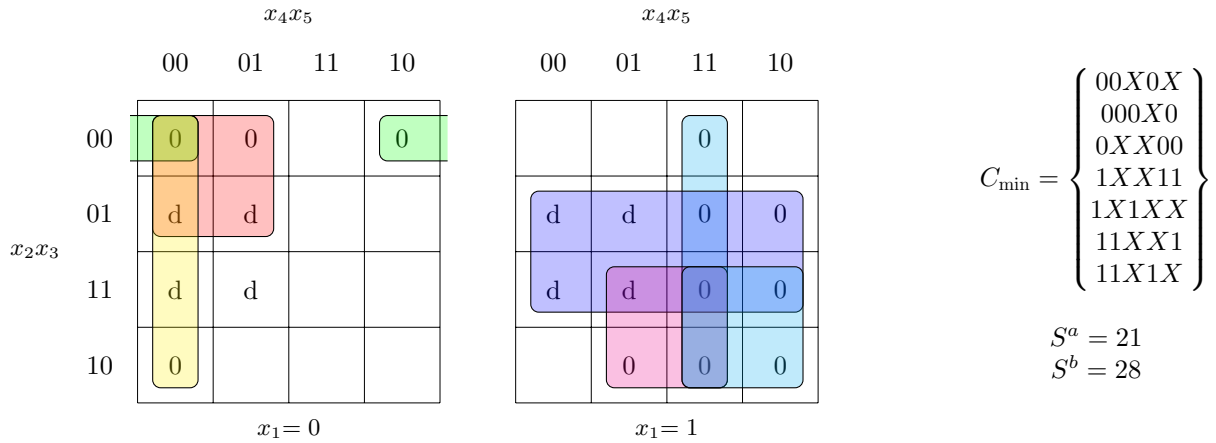
# Минимизация булевой функции на картах Карно

## Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

## Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})$$

# Преобразование минимальных форм булевой функции

## Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \quad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = \overline{x_1} (x_3 \vee x_4 (x_2 \vee x_5) \vee x_2 x_5) \vee x_1 \overline{x_4} (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \quad S_Q = 23 \quad \tau = 5$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = \overline{x_1} (x_3 \vee x_4 (x_2 \vee x_5) \vee \varphi) \vee x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \quad S_Q = 22 \quad \tau = 5$$

## Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_5}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_4 \vee x_2 x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) \quad S_Q = 23 \quad \tau = 5$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_5}$$

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_5}) \overline{\varphi} (x_1 \vee x_4 \vee \varphi) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 5$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \overline{x_1} (x_3 \vee x_4 (x_2 \vee x_5) \vee \varphi) \vee x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \quad (S_Q = 22, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

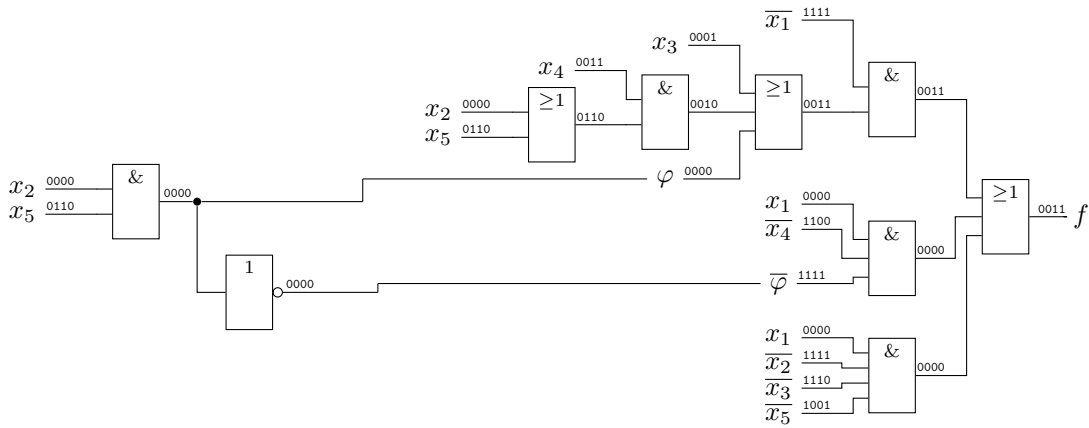
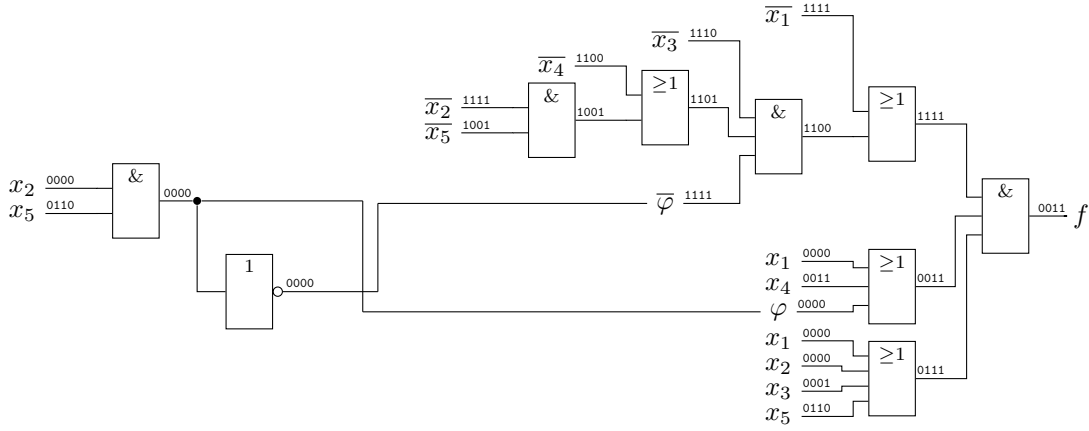


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} (\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_5}) \overline{\varphi}) (x_1 \vee x_4 \vee \varphi) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) \quad (S_Q = 22, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$



## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \overline{x_2} \overline{x_5} \overline{\varphi} x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5}}}}}} \quad (S_Q = 29, \tau = 10)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$

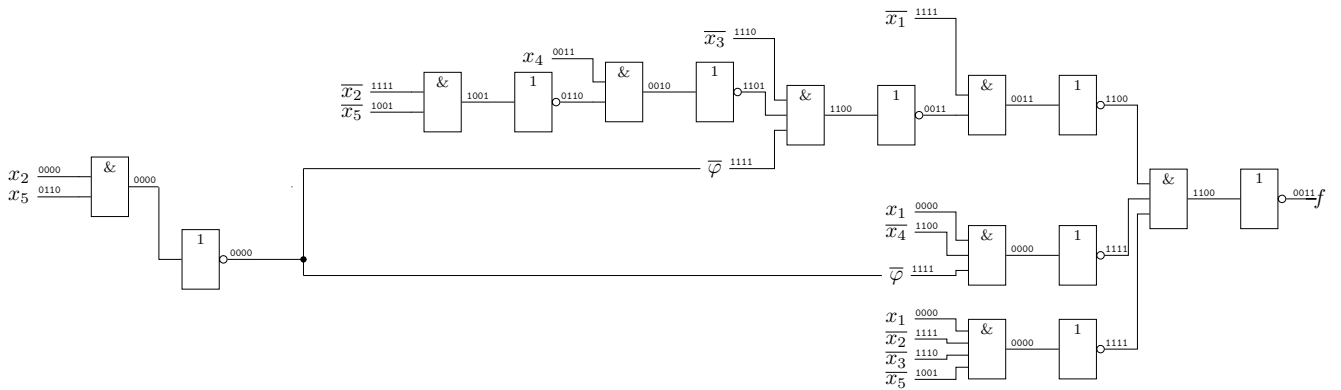
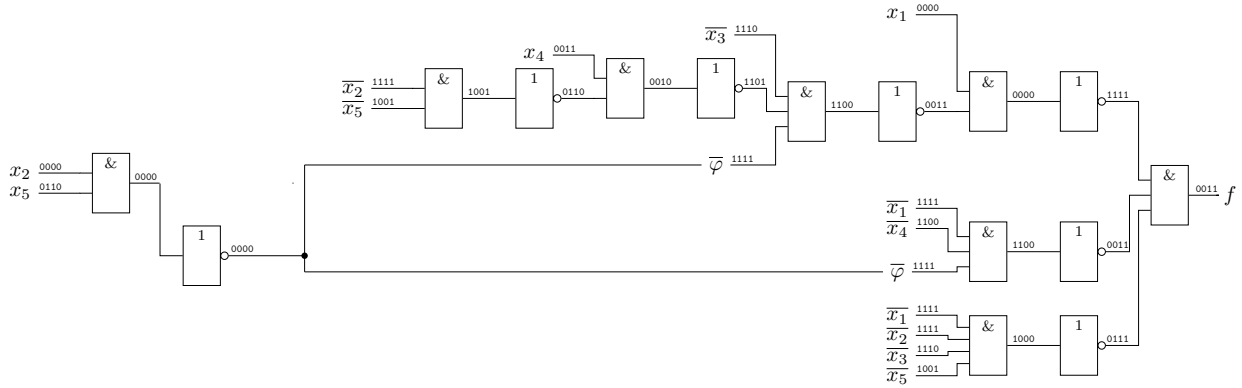


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{x_2} x_5 \overline{\varphi} \overline{x_1} x_4 \overline{\varphi} \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \quad (S_Q = 28, \tau = 9)$$

$$\varphi = x_2 x_5$$



## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{x_3} x_5 \overline{x_4} x_5 \overline{x_1} x_3 x_2 \overline{x_4} x_5 x_4 x_5 \quad (S_Q = 28, \tau = 7)$$

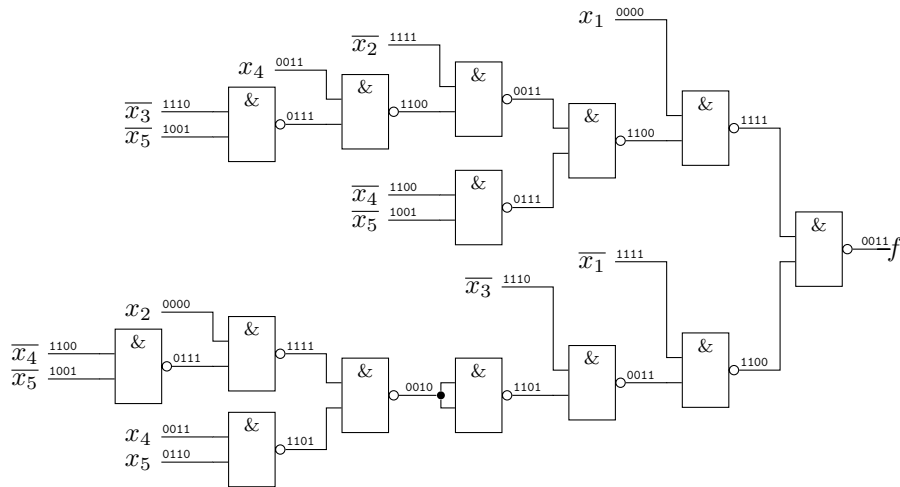




Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_4} \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \overline{x_4} \overline{x_5} \quad (S_Q = 30, \tau = 8)$$

