

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерных технологий

Лабораторная работа №6
Работа с системой компьютерной вёрстки TEX
Вариант 64

Выполнила:
Павличенко Софья Алексеевна, Р3115

Проверила:
Авксентьева Елена Юрьевна,
к.п.н., доцент факультета ПИиКТ

или, наконец,

$$l_{AC} + l_{A_1C} < \frac{2}{3}AA_1 + \frac{1}{3}LL_1$$

Умножив полученное неравенство на n , мы и получим неравенство (1).

Дальнейшее исследование основного неравенства

Нами установлено, что число π лежит в первой трети интервала (p_n, q_n) при всех $n \geq 3$. Для того чтобы уточнить расположение числа в этом новом интервале, рассмотрим отношение длин интервалов (p_n, π) и (p, q_n) . Вычисления показывают (см. таблицы 1, 2), что это отношение длин, т.е. значения дробей

$$(q_n - \pi)/(\pi - p_n), n = 3, 6, 12, 24,$$

достаточно близки к 2. На основании этих вычислений мы с большой степенью уверенности можем предположить, что в действительности имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (5)$$

Для доказательства соотношения (5) заметим, что (рис.9)

$$p_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{n}, q_n = n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, n \geq 3,$$

и, следовательно,

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{n \sin \frac{\pi}{n} - \pi \cos \frac{\pi}{n}}{\pi - n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Для анализа полученного выражения нам понадобятся неравенства

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0, \quad (6)$$

значительно улучшающие известное не-

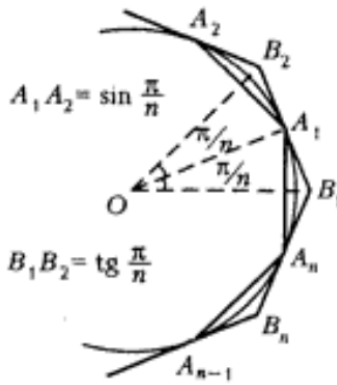


Рис. 9

равенство $\sin x < x$ при $x > 0$. Чтобы доказать левое неравенство в (6), положим

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Тогда имеем

$$g_1(x) = f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$g_2(x) = g_1'(x) = -\sin x + x.$$

Так как $\sin x < x$ при $x > 0$, получим $g_2(x) > 0$ при $x > 0$. Тем самым функция $g_1(x)$ возрастает при $x > 0$. Но $g_1(0) = 0$ и, следовательно, $g_1(x) > 0$ при $x > 0$. Функция $g_1(x)$ является производной для функции $f(x)$, для которой также $f(0) = 0$. Но при $x > 0$ имеем $g_1(x) > 0$, поэтому функция $f(x)$ также возрастает, следовательно, принимает только положительные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x > 0$, что и утверждалось.

Аналогично устанавливается правая часть неравенства (6), а также неравенства

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x > 0. \quad (7)$$

(Докажите их самостоятельно!)

Из неравенств (6) и (7) вытекают следующие приближенные формулы:

$$\sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}, \cos \frac{\pi}{n} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{2n^2}\right)^{-1}.$$

Что и завершает доказательство соотношения (5), так как $\frac{\pi^2}{2n^2}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Равенство (5) позволяет сделать следующий качественный вывод: число π , находясь при любом $n \geq 3$ в интервале $(p_n, \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n)$, при всех достаточно больших значениях n ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.

Формула Гюйгенса и ее эффективность

Архимед использовал для вычисления числа π приближенную формулу $\pi \approx p_n, n \geq 3$.

Гюйгенс в своей работе, в частности, получил другую приближенную формулу $\pi \approx \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, n \geq 3$, т.е. взял в качестве приближения для числа π правую часть неравенства (1).

Большую эффективность формулы Гюйгенса по сравнению с формулой Архимеда можно обнаружить непосредственными вычислениями на микрокалькуляторе (см. табл. 1, 3). Отметим, что провести такие вычисления - увлекательная и непростая задача.

Можно сравнить эффективность формул Архимеда и Гюйгенса другим методом, не производя конкретных вычислений для n и q_n . Можно использовать так называемые априорные оценки для точности этих формул, т.е. такие неравенства, которые позво-

Таблица 1

n	p_n	q_n
3	2,59807621	5,19615242
6	3,00000000	3,46410161
12	3,10582854	3,21539030
24	3,13262861	3,15965994
48	3,13935020	3,14608621
96	3,14103195	3,14271459
192	3,14145247	3,14187304
384	3,14158389	3,14166274
768	3,14158389	3,14161017
1536	3,14159046	3,14159703
3072	3,14159210	3,14159374

Таблица 2

n	$(q_n - \pi)/(\pi - p_n)$
3	3,78012440
6	2,27772383
12	2,06345553
24	2,01552959
48	2,00386204
96	2,00096424
192	2,00024098
384	2,0006024
768	2,0000150
1536	2,00000376
3072	2,00000094

Таблица 3

n	$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$
3	3,464101615137
6	3,154700538379
12	3,142349130544
24	3,141639056219
48	3,141595540408
96	3,14159283380
192	3,141592664850
384	3,141592654293
768	3,141592653633
1536	3,141592653592
3072	3,141592653589

Tautiška giesmė

(National Hymn)

Majestically

Vincas Kudirka



Lie tu va, Tė vy ne mū sų, tu did vy rių že me, iš pra ei ties Ta vo sū nūs
Te gul Ta vo vai kal ei na vien ta kais do ry bės, te gul dir ba Ta vo nau dai

1. te stip ry bę se mia. 2. ir žmo nių gé ry bei. Te gul sau lė Lie tu voj tam su mas pra
Te gul mei lė Lie tu vos de ga mū sų

1. 2. ša li na, ir švie sa, ir tie sa mūs žings nius te ly di žy di!
šir dy se, var dan tos Lie tu vos vie ny bė te

Ноты гимна Литвы

Первые 28 нот гимна Литвы, написанные с помощью пакета MusiXTeX



2 3 4 5 6 7 8