Ausarbeitung im Seminar Schwarmintelligenz
an der Universität Leipzig

An Open Pouring Problem

von:	Sonja Klein
Matrikelnummer:	3794693
Abgabedatum:	30.09.2024

Zusammenfassung

Abstrakt

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung **ii**

1 Das Problem **1**

2 Lösungsansatz **1**

2.1 Der Ablauf innerhalb einer Runde 2
2.2 Berechnung der Hilfswerte r, p und q 2
2.3 Fall 1 2
2.4 Fall 2 3

3 Ein eigenes Beispiel **3**

4 Obere Schranke und Beweis **5**

5 Untere Schranke **5**

6 Experimentelle Ergebnisse **5**

1 Das Problem

Das Open Pouring Problem wird formal wie folgt beschrieben: Es seien drei Krüge mit unterschiedlichen Kapazitäten gegeben, die jeweils eine ganzzahlige Menge an Wasser enthalten. In jedem Schritt darf eine Wassermenge, die höchstens der aktuellen Wassermenge eines Kruges entspricht, von einem Krug in einen anderen gegossen werden. Das Ziel ist es, durch eine Reihe solcher Schritte einen der Krüge vollständig zu leeren, das heißt, seine Wassermenge auf null zu reduzieren.

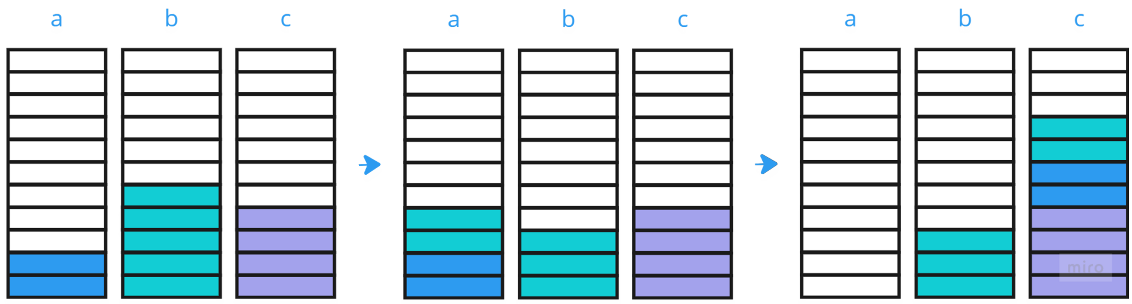

Abbildung 1: Pouring Problem: ein einfaches Beispiel mit zwei, fünf und 4 Litern in der Anfangskonfiguration

Die mathematische Modellierung des Problems erfolgt durch die Definition einer Konfiguration als Tripel (a, b, c), wobei a, b und c die Wassermengen in den drei Krügen darstellen. Das Problem besteht darin, eine Sequenz von Operationen zu finden, die eine Ausgangskonfiguration (a, b, c) in eine Endkonfiguration $(a', b', 0)$ überführt. Die Herausforderung liegt darin, die minimale Anzahl der erforderlichen Schritte zu bestimmen, die in allen möglichen Konfigurationen benötigt werden.

(Frei, Rossmanith und Wehner 2020)

2 Lösungsansatz

Das Paper stellt einen algorithmischen Ansatz vor, der das Problem für eine gegebene Konfiguration löst. Der Algorithmus arbeitet in sogenannten *'Runden'*, wobei jede Runde aus mehreren Schritten besteht. Der Ausgangspunkt jeder Runde ist die Sortierung der Wassermengen in den Krügen, gefolgt von der Berechnung bestimmter Parameter, die die

nächsten Schritte bestimmen.
Es werden zwei Hauptfälle unterschieden, die je nach Verhältnis der Wassermengen in den Krügen unterschiedlich behandelt werden.
Der Algorithmus ist so konstruiert, dass er im schlimmsten Fall eine obere Schranke von $O(logn)$ für die Anzahl der erforderlichen Schritte erreicht, wobei n die Gesamtliterzahl des Wassers in den Krügen ist.

2.1 Der Ablauf innerhalb einer Runde

Eine Runde startet mit einer Anfangskonfiguration (a, b, c) mit $0 < a \leq b \leq c$ und endet mit einer Konfiguration (a', b', c') mit $a' \leq a/2$. Wenn eine der drei Zahlen nach einer Runde 0 ist, ist das Ziel erreicht.
Eine Runde ist immer folgendermaßen aufgebaut:

- Sortieren der Krüge, sodass $a \leq b \leq c$
- die Hilfswerte r, p, q berechnen
- Fall 1 oder Fall 2 ausführen je nachdem ob $b - pa \leq a/2$ gilt.
- Prüfen ob wir unser Ziel erreicht haben

2.2 Berechnung der Hilfswerte r, p und q

Die Hilfswerte werden folgendermaßen berechnet: $r := b/a$, $p := \lfloor r \rfloor$ und $q := \lceil r \rceil$. Dabei können wir etwas festellen. Es gilt: $0 \leq b - pa < a$ und $0 \leq qa - b < a$. Das impliziert dass $min(b - pa, qa - b) \leq a/2$, da $(b - pa) + (qa - b) = (q - p)a \leq a$. Außerdem betrachten wir die kleinsten binären Repräsentationen von p und q: $p_k ... p_0$ und $q_\ell ... q_0$. Diese werden im Ablauf von Fall 1 und Fall 2 relevant.

2.3 Fall 1

Aus den Hilfswerten prüfen wir die Bedingung $b - pa \leq a/2$. Wenn sie eintritt, dann führen wie Fall 1 aus, wenn nicht, dann Fall 2. In Fall 1 führen wir $k + 1$ Schritte für $i = 0, ..., k$ aus, die immer das verdoppeln werden was anfänglich a war. Dazu muss erst a, dann $2a$ und allgemein $2^i a$ von einer der anderen Nummern abgezogen werden. Wir ziehen den benötigten Betrag

- von der zweiten Nummer ab (anfänglich b), wenn $p_i = 1$ und
- von der dritten Nummer ab (anfänglich c), wenn $p_i = 0$.

Nach der Ausführung dieser $k + 1$ Schritte, sind die zweite und die dritte Nummer $b - \sum_{i=0}^{k} p_i 2^i a = b - pa \leq a/2$ bzw. $c - \sum_{i=0}^{k} (1 - p_i) 2^i a$.

2.4 Fall 2

Wird die Bedingung $b-pa \leq a/2$ nicht erfüllt, dann führen wie Fall 2 aus. In Fall 2 führen wir ℓ Schritte für $i = 0, ..., \ell-1$ aus, die immer das verdoppeln werden was anfänglich a war. Dazu muss wie in Fall 1 erst a, dann $2a$ und allgemein $2^i a$ von einer der anderen Nummern abgezogen werden. Anders als in Fall 1 jedoch ziehen wir den benötigten Betrag

- von der zweiten Nummer ab (anfänglich b), wenn $q_i = 1$ und
- von der dritten Nummer ab (anfänglich c), wenn $q_i = 0$.

Nach der Ausführung dieser ℓ Schritte, ist die erste Nummer $2^\ell a$, die zweite $b - \sum_{i=0}^{\ell-1} q_i 2^i a = b-(q-2^\ell)a$ und die dritte Nummer $c - \sum_{i=0}^{\ell-1}(1-q^i)2^i a$.

Anschließend führen wir noch einen $(\ell+1)$-ten Schritt aus. Dieser macht aus $a = 2^\ell a - (b - qa + 2^\ell a) = (-b + qa)$.

Die Runde endet und die erste Numer ist nun genau $qa - b < q/2$.

3 Ein eigenes Beispiel

Um den Algorithmus besser verstehen zu können betrachten wir ihn an einem selbst gewählten Beispiel. Zur besseren Übersicht ist der Ablauf auch in Tabelle 3.1 dargestellt. Wir betrachten eine Konfiguration $(9, 8, 6)$. Der erste Schritt ist das Sortieren und erhalten $(6, 8, 9)$.
Als nächstes berechnen wir die Hilfswerte: $r = b/a = 8/6_{10}$, $p = \lfloor r \rfloor = 1_{10}$ und $q = \lceil r \rceil = 2_{10}$. Daraus ergeben sich $p = 1_2$ und $q = 10_2$.
Als nächstes prüfen wir die Bedingung $b - pa \leq a/2$ und entscheiden aufgrund dessen, ob wir den Fall 1 oder Fall 2 betrachten. In diesem Fall ist die Bedingung erfüllt, also betrachten wir Fall 1.
In Fall 1 führen wir $k + 1$ Schritte aus. Da $p = 1_2$ und $p_k ... p_0$ führen wir also nur einen Schritt, Schritt 0, aus. In diesem Schritt verdoppeln wir was anfänglich a war, also $a' = 2 * a = 2 * 6 = 12$. Dazu müssen wir diese 6 Liter aus einem der beiden anderen Krüge holen und da $p_0 = 1$ ist, holen wir laut der Regeln in Fall 1 die 6 Liter aus Krug b. Die neue Konfiguration ist also $(12, 2, 9)$. Damit haben wir die erste Runde abgeschlossen. Wir prüfen nun ob einer der drei Krüge nun leer ist. Da dies nicht der Fall ist beginnen wir mit Runde zwei.

In der zweiten Runde beginnen wir wieder mit Sortieren und erhalten $(2, 9, 12)$. Nun berechnen wir wieder die Hilfswerte: $r = b/a = 9/2_{10}$, $p = \lfloor r \rfloor = 4_{10}$ und $q = \lceil r \rceil = 5_{10}$. Daraus ergeben sich $p = 100_2$ und $q = 101_2$.

Die Bedingung $b - pa \leq a/2$ ist dieses mal wieder erfüllt und wir betrachten wieder Fall 1. Dieses Mal haben wir jedoch $p = 100_2$ und führen also drei Schritte aus. In Schritt 0 verdoppeln wir wieder a ($a' = 2*a = 2*2 = 4$) und holen die 2 Liter aus Krug c, da $p_0 = 0$. Wir erhalten $(4, 9, 10)$. In Schritt 1 verdoppeln wir wieder a ($a'' = 2 * a' = 2 * 4 = 8$) und holen die 4 Liter aus Krug c', da $p_1 = 0$. Wir erhalten $(8, 9, 6)$. In Schritt 2 verdoppeln wir wieder a ($a''' = 2 * a'' = 2 * 8 = 16$) und holen die 8 Liter aus Krug b", da $p_2 = 1$. Wir erhalten $(16, 1, 6)$. Damit haben wir die zweite Runde abgeschlossen. Auch dieses Mal prüfen wir ob wir unser Ziel erreicht haben, aber noch keiner der drei Krüge ist leer, also brauchen wir noch eine weitere Runde.

In der dritten Runde erhalten wir nach dem Sortieren $(1, 6, 16)$. Die Hilfswerte sind $r = b/a = 6/1_{10}$, $p = \lfloor r \rfloor = 6_{10}$ und $q = \lceil r \rceil = 6_{10}$. Daraus ergeben sich $p = 110_2$ und $q = 110_2$.
Dieses Mal ist die Bedingung $b - pa \leq a/2$ nicht erfüllt, also betrachten wir Fall 2. In Fall 2 führen wir zunächst ℓ Schritte aus und fügen am Schluss noch einen Schritt $\ell + 1$ hinzu. Auch hier verdoppeln wir a, sodass $a' = 2*a = 2$. Da wir uns dieses Mal in Fall 2 befinden, betrachten wir um zu entscheiden aus welchem Krug wir den Liter schütten nun q und nicht mehr p. Da $q_0 = 0$ ist, holen wir den Liter aus Krug c und erhalten $(2, 6, 15)$. In Schritt 1 verdoppeln wir wieder a, sodass $a'' = 2*a' = 4$. Da $q_1 = 1$ holen wir den Liter aus Krug b und erhalten $(4, 4, 15)$. Anschließend führen wir noch einen $(\ell + 1)$-ten Schritt aus. Wir rechnen $a = 2^\ell a - (b - qa + 2^\ell a) = (-b + qa)$, also $a''' = (-6 + 6 * 1) = 0$ und erhalten $(8, 0, 15)$. Damit sind wir fertig mit unserer dritten Runde. Da nun einer der Krüge leer ist, haben wir unser Ziel erreicht.

ROUND 1: (9, 8, 6)
SORTING: (6, 8, 9)
HELPER: $p : 1_{10}$ (1_2), $q : 2_{10}$ (10_2)
CASE 1 (k=1):
Step 0: $p_i = 1 \rightarrow (12, 2, 9)$
ROUND 2: (12, 2, 9)
SORTING... (2, 9, 12)
HELPER: $p : 4_{10}$ (100_2), $q : 5_{10}$ $(101_2$
CASE 1 (k=3):
Step 0: $p_i = 0 \rightarrow (4, 9, 10)$
Step 1: $p_i = 0 \rightarrow (8, 9, 6)$
Step 2: $p_i = 1 \rightarrow (16, 1, 6)$
ROUND 3: (16, 1, 6)
SORTING... (1, 6, 16)
HELPER: $p : 6_{10}$ (110_2), $q : 6_{10}$ (110_2)
CASE 1 (k=3):
Step 0: $p_i = 0 \rightarrow (2, 6, 15)$
Step 1: $p_i = 1 \rightarrow (4, 4, 15)$
Step 2: $p_i = 1 \rightarrow (8, 0, 15)$
DONE in 3 rounds and 7 steps!

Tabelle 3.1: Der Algorithmus benötigt 3 Runden und 7 Schritte um die Konfiguration $(9, 8, 6)$ in die Konfiguration $(8, 0, 15)$ zu überführen.

4 Obere Schranke und Beweis

...

5 Untere Schranke

...