Giả thuyết Frankl và giải thuật liệt kê các tập thuộc họ hợp đóng

Kim Đình Sơn, MSSV: 20102089, K55

Ngành Khoa học máy tính, Viện Công nghệ thông tin và truyền thông,

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Báo cáo Project 2, Mã HP: IT 3920, Mã lớp: 53697

Người hướng dẫn: TS. Trần Vĩnh Đức

Tóm lược

Trong bài báo cáo này, sẽ đề cập đến ba vấn đề: giả thuyết Frankl, giả thuyết các tập hợp đóng tương ứng trong đồ thị và giải thuật liệt kê các tập thuộc họ hợp đóng.

Giả thuyết Frankl được Péter Frankl phát biểu vào năm 1979 (còn được gọi là giả thuyết các tập hợp đóng, nguyên bản tiếng Anh: *Union-closed sets conjecture*). Giả thuyết được phát biểu như sau: *trong một họ hữu hạn các tập hợp đóng $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$, có ít nhất một phần tử thuộc vào ít nhất một nửa trong số các tập thuộc $\mathcal{F}$.*

Phần thứ hai, đề cập đến phiên bản đồ thị của giả thuyết các tập hợp đóng. Với các tiếp cận này, ta có một cách nhìn khác về tập hợp ở dạng đồ thị, trong đó có sự ánh xạ giữa các tập hợp, các phần tử đến các đỉnh, cạnh trong đồ thị tương ứng. Nghiên cứu trên các lớp bài toán đồ thị cho phép ta biểu diễn giả thuyết các tập hợp đóng dễ dàng hơn, đồng thời cho những kết quả mới và thú vị.

Phần thứ 3, là giải thuật liệt kê các tập thuộc họ các tập hợp đóng, với các phần tử hữu hạn xác định, nhằm kiểm tra giả thuyết Frankl trên máy tính. Bài báo cáo cũng đề cập đến bài toán tìm các tập độc lập cực đại, sử dụng giải thuật quay lui.

1 Mở đầu

Ta xác định một số bài toán và định nghĩa dưới đây:

Định nghĩa 1.1. Một họ các tập hợp $\mathcal{F}$ được gọi là hợp đóng nếu hợp của hai tập bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ cũng là một tập thuộc $\mathcal{F}$.

Với định nghĩa này, giả thuyết Frankl có thể được phát biểu như sau:

Giả thuyết Frankl. *Xét họ $\mathcal{F} = \bigcup S$ (S là tập các phần tử), khi đó $\exists x \in \bigcup \mathcal{F}$ sao cho x thuộc vào ít nhất $|\mathcal{F}|/2$ tập thuộc $\mathcal{F}$.*

Nếu họ $\mathcal{F}$ là hợp đóng, người ta còn định nghĩa họ các tập bù của các tập trong $\mathcal{F}$ là tập giao đóng[1] (closed under intersection). Khi đó phần tử thuộc vào ít nhất một nửa các tập thuộc $\mathcal{F}$ sẽ tương ứng thuộc vào tối đa một nửa các tập thuộc vào các tập bù. Do đó, phát biểu tương đương với giả thuyết Frankl là:

Giả thuyết 1.1. *Mọi họ giao đóng của các tập chứa hơn một tập, tồn tại một phần tử thuộc vào nhiều nhất một nửa các tập trong họ.*

Ý tưởng này được khai thác trong phiên bản đồ thị của giả thuyết các tập hợp đóng mà ta đề cập tới. Trước tiên, ta nhắc lại khái niệm tập ***ổn định*** cực đại (hay tập độc lập cực đại).

Gọi $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng, $V \neq \emptyset$, $E \subseteq \{\{u, v\}: u, v \in V, u \neq v\}$. Ta sẽ chỉ xét trên lớp đồ thị vô hướng. Xác định bù của G là đồ thị $\bar{G} = \left(V, \bar{E} = \left\{\{u, v\} \in V \times V: u \neq v, \{u, v\} \notin E\right\}\right)$.

Định nghĩa 1.2. Tập các đỉnh thuộc tập đỉnh của một đồ thị được gọi là *ổn định* nếu tập đó không có hai đỉnh nào kề nhau.

Tập ổn định còn được gọi là tập độc lập sẽ được nhắc lại trong phần 4 của báo cáo.

Định nghĩa 1.3. Tập ổn định *cực đại* là tập ổn định mà mọi đỉnh nằm ngoài đều kề với một đỉnh nào đó trong tập.

Với 2 định nghĩa trên, M. El-Zahar phát biểu trong [8] đưa ra phiên bản đồ thị cho giả thuyết họ các tập hợp đóng.

Giả thuyết 1.2. *Gọi G là đồ thị hữu hạn với ít nhất một cạnh. Khi đó sẽ có hai đỉnh kề nhau mà mỗi đỉnh thuộc vào tối đa một nửa số các tập ổn định cực đại.*

Để kiểm tra tính đúng đắn các giả thuyết này, người ta sử dụng phương pháp liệt kê tất cả các tập hợp đóng (giao đóng) hoặc các tập ổn định cực đại trong phiên bản đồ thị tương ứng. Khi ấy, ta lại xét đến các bài toán thuộc lớp NP-khó, *bài toán tìm tập độc lập cực đại* (maximal independdent set). Định nghĩa tập độc lập tương đương với tập ổn định ở trên, nhưng trong các tài liệu nghiên cứu người ta thường đề

[1] Đặt $A = \bigcup A_i$, trong đó A_i là các tập thuộc họ các tập hợp đóng. Khi đó, ta xác định $B_i = A - A_i$ là các tập giao đóng, đồng thời $B = \bigcup B_i$ họ các tập giao đóng.

cập đến tập độc lập trong đồ thị. xác định tập các đỉnh kề của $u \in V$ và $S \subseteq V$ của G là: $Adj(u) = \{v : \{u, v\} \in E\}$, $Adj(S) = \bigcup_{x \in S} Adj(x)$.

Định nghĩa 1.4. tập các đỉnh M ⊆ G là độc lập nếu $Adj(M) \cap M = \emptyset$ hay $\{u,v\} \neq E$ với mọi $u,v \in$ M.

Định nghĩa 1.5. tập độc lập Q được gọi là maximal (MIS) nếu $Adj(S) \cap S \neq \emptyset$, mọi S ⊃ Q.

Định nghĩa 1.6. tập các đỉnh K thỏa mãn với mọi $u,v \in$ K, $\{u,v\} \in$ E được gọi là một *Clique*. Nếu với mọi Q ⊃ K (K là một clique), Q không là một clique thì khi đó K là *Clique cực đại* (MC).

Định nghĩa 1.7. tập các đỉnh X ⊆ V thỏa mãn $Adj(x) \cap X \neq \emptyset$ với mọi $x \in V \backslash X$, khi đó X được gọi là tập đỉnh *che phủ* (vertex covering). Một tập che phủ T thỏa mãn mọi $S \subset T$, S không là tập che phủ, khi đó T được gọi là tập *che phủ cực tiểu* (MVC).

Trong [2], E. Loukakis trình bày mối liên hệ giữa các tập độc lập cực đại, clique cực đại và tập che phủ cực tiểu. Theo đó, tập độc lập M ⊂ V là MIS của G khi và chỉ khi M là MC của $\bar{G}$. Tập che phủ S ⊂ V là MVC của G khi và chỉ khi V\S là MIS của G. Với mối liên hệ này, ta hoàn toàn có thể tiếp cận bài toán liệt kê các tập hợp đóng theo nhiều hướng khác nhau, trong bài báo cáo này sẽ đi theo hướng tìm và liệt kê các tập clique cực đại với giải thuật quay lui nổi tiếng Bron-Kerbosch (xem thêm [13]).

2 Một số kết quả về giả thuyết Frankl

Cho đến nay, người ta đã chứng minh được giả thuyết Frankl đúng với $n = |\bigcup \mathcal{F}| \leq 11$ (xem thêm [4]) và kéo theo đó là giả thuyết đúng cho mọi họ $\mathcal{F}$ có tối đa 46 tập (chứng minh ở [5]).

Định nghĩa 2.1. xác định *hàm trọng số* $\omega : X \longrightarrow \{x \in R | x \geq 0\}$, thỏa mãn $\omega(a) > 0$, với $a \in X$ nào đó. Khi đó, ta cũng xác định trọng số $\omega(S) = \sum_{x \in S} \omega(x)$ với $S \subseteq X$. Ta gọi số $0.5\omega(X)$ là *trọng số mục tiêu* hay *trọng số trung bình* và ký hiệu là $t(\omega)$.

Bổ đề 2.1. $\mathcal{F}$ là họ Frankl nếu và chỉ nếu hàm trọng số ω của các phần tử của $\bigcup \mathcal{F}$ thỏa mãn,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \omega(S) \geq t(\omega)|\mathcal{F}|$$

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Gọi a là phần tử thuộc vào ít nhất một nửa các tập trong $\mathcal{F}$. Ta lấy hàm trọng số ω thỏa mãn $\omega(a) = 1$ và $\omega(x) = 0$ với mọi $x \neq a$. Khi đó $t(\omega) = 0.5$ và ta có đẳng thức xảy ra.

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{F}$ không là họ Frankl. Đặt $n_a(\mathcal{F})$ là số lần xuất hiện của phần tử a trong các tập thuộc $\mathcal{F}$. Ta lấy một hàm trọng số ω tùy ý. Khi đó

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} \omega(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{a\in S} \omega(a) = \sum_{a\in X} \omega(a) n_a(\mathcal{F}) < \sum_{a\in X} \omega(a)\frac{|\mathcal{F}|}{2} = t(\omega)\,|\mathcal{F}|.$$

■.

Sử dụng bổ đề 2.1 I. Bosnjak và P. Markovic [4] lần lượt khai thác và chứng minh các kết quả với từng trường hợp riêng biệt của họ các tập hợp đóng, từ đó họ đi đến chứng minh trong trường hợp $n = 11$ ([4] Section 3). Dưới đây là một số mệnh đề đã được chứng minh.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $\mathcal{F}$ chứa ba tập 3 phần tử mà đều là tập con của một tập 4 phần tử. Khi đó $\mathcal{F}$ là họ Frankl.*

Ví dụ $\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}$ là ba tập 3 phần tử, chúng đều là tập con của tập $\{a,b,c,d\}$. Mệnh đề 2.1 được chứng minh bởi B. Poonen [1].

Mệnh đề 2.2. Giả sử $\mathcal{F}$ chứa ba tập 3 phần tử mà chúng đều cùng chung 2 phần tử. Khi đó $\mathcal{F}$ là họ Frankl.

Ví dụ $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\}$ là ba tập 3 phần tử, giao của chúng là tập $\{a,b\}$. Mệnh đề 2.2 được chứng minh trong [3] (Section 3).

Định lý 2.1. Nếu $|\bigcup\mathcal{F}| = 11$, khi đó $\mathcal{F}$ là họ Frankl.

Dựa trên định lý 2.1, Roberts và Simpson [5] đã giới hạn được giả thuyết với số tập thuộc họ $\mathcal{F}$, cụ thể giả thuyết đúng với họ các tập hợp đóng không rỗng chứa tối đa 46 tập hợp đóng. Kết quả mà họ thu được được trình bày trong định lý 2.2 dưới đây:

Định lý 2.2. Nếu $q = |\bigcup\mathcal{F}|$ là lực lượng nhỏ nhất trên tất cả các *counterexample* (phản giả thuyết) khi đó với mọi counterexample $\mathcal{A}$ ta có $|\mathcal{A}| \geq 4q - 1$.

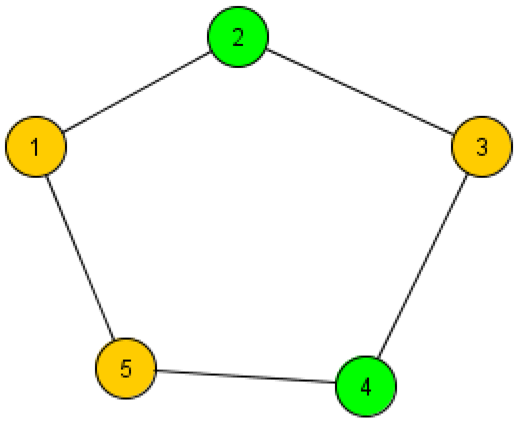
Theo định lý 2.1, ta biết chính xác rằng $q \geq 12$, tuy nhiên ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của q. Từ kết quả của Bošnjak and Marković [4] chứng tỏ rằng $q = 12$ là giá trị nhỏ nhất lực lượng của một counterexample có thể đạt được. Chú ý rằng, định lý 2.1 và định lý 2.2 là hoàn toàn độc lập với nhau.

Ngoài ra, trong trường hợp đặc biệt, một họ Frankl chứa một tập "cực tiểu" gồm một hoặc hai phần tử thì giả thuyết Frankl cũng đúng. Chứng minh điều này rất khá đơn giản. Giả sử họ $\mathcal{F}$ các tập hợp đóng, chứa một tập $A = \{x\}$, do $\mathcal{F}$ là một hợp đóng nên ta có phần tử x thuộc vào tất cả các tập $A \cup S \in \mathcal{F}$, mọi $S \in \mathcal{F}$. Tương tự với trường hợp $A = \{x, y\}$, sử dụng nguyên lý Dirichlet ta có hoặc x hoặc y thuộc vào ít nhất một nửa trong số các tập thuộc họ $\mathcal{F}$.

Định lý 2.3. Nếu họ $\mathcal{F}$ chứa một tập gồm một hoặc hai phần tử thì $\mathcal{F}$ là họ Frankl.

3 Phiên bản đồ thị cho giả thuyết Frankl

Dễ thấy giả thuyết 1.2 đúng cho mọi đồ thị không là *đồ thị hai phần*. Thật vậy, nếu có hai đỉnh u và v kề nhau, không tập độc lập nào chứa hai đỉnh, nên một trong hai đỉnh phải thuộc vào tối đa một nửa trong số các tập ổn định cực đại (trái lại, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một tập độc lập cực đại chứa cả hai đỉnh u và v dẫn tới mâu thuẫn). Do đó, trên một chu trình lẻ sẽ tồn tại hai đỉnh kề nhau mà mỗi đỉnh thuộc vào tối đa một nửa trong số các tập ổn định cực đại.



Hình 1 Ví dụ chu trình lẻ gồm 5 đỉnh, hoặc là các đỉnh 2,4 hoặc là các đỉnh 1,3,5 thuộc nhiều hơn một nửa trong số các tập ổn định cực đại, và ngược lại. Khi đó, hoặc là 1,5 cùng thuộc ít hơn một nửa trong số các tập ổn định cực đại hoặc là các cặp (1,2),(2,3),(3,4) hoặc (4,5) có một cặp mà mỗi đỉnh thuộc ít hơn một nửa số tập ổn định cực đại,

Như vậy, ta chỉ việc xem xét giả thuyết 1.1 trên lớp đồ thị hai phần (có chu trình chẵn). Ta có giả thuyết 1.1 tương đương giả thuyết dưới đây (El-Zahar [8]).

Giả thuyết 3.1. *Gọi G là đồ thị hai phần hữu hạn với ít nhất một cạnh. Khi đó mỗi một trong hai lớp thành phần chứa một đỉnh thuộc vào nhiều nhất một nửa trong số các tập ổn đinh cực đại.*

Trong [2], Section 2 chứng minh giả thuyết 3.1 là tương đương với giả thuyết Frankl. Ở đây, ta sẽ tóm tắt phép chứng minh trên.

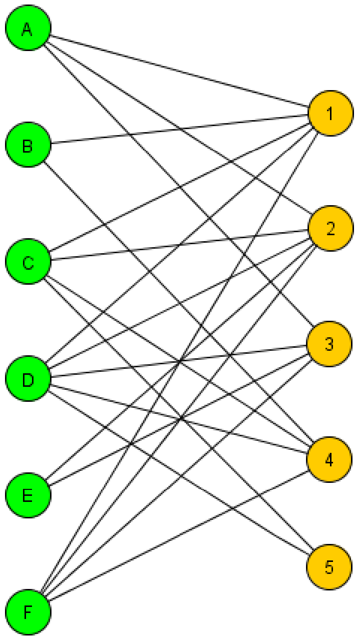
Định lý 3.1. Giả thuyết 3.1 là tương đương với giả thuyết Frankl.

Chứng minh. Gọi $N(S)$ là tập các đỉnh kề với các đỉnh thuộc tập đỉnh S của đồ thị cho trước. Trước tiên, ta xét tới 2 bổ đề sau (không chứng minh):

Bổ đề 3.1. *Gọi G là đồ thị hai phần với thành phần U, W, và S là một tập ổn định cực đại. Khi đó, $S = (U \cap S) \cup (W \backslash N(U \cap S))$.*

Bổ đề 3.2. *Gọi G là đồ thị hai phần với thành phần U, W, gọi S và T là các tập ổn định cực đại. Khi đó, $(U \cap S \cap T) \cup \big(W \backslash N(S \cap T)\big)$ cũng là tập ổn định cực đại.*

Ta xét tập hợp đóng $\mathcal{X} \neq \{\emptyset\}$, không mất tổng quát, ta có thể coi $\emptyset$ là một tập hợp lệ. Đặt $U = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, ta xác định đồ thị hai phần G với tập đỉnh là $U \cup \mathcal{X}$, trong đó tập $X \in \mathcal{X}$ kề với tất cả $u \in X$.

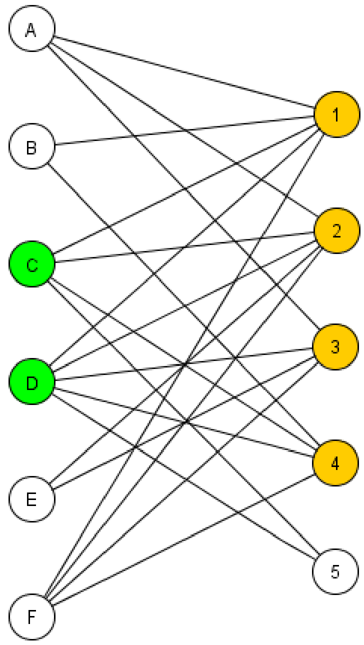


Hình 2 Ví dụ $\mathcal{X} = \{\mathrm{A, B, C, D, E, F}\}$, trong đó $A = \{1{,}2{,}3\}, B = \{1{,}4\}, C = \{1{,}2{,}4{,}5\}, D = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}, E = \{2{,}3\}$ và $F = \{1{,}2{,}3{,}4\}$ là một tập hợp đóng. Khi đó $U = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$. Đồ thị G được xác định bởi hai phần $U \cup \mathcal{X}$, các cạnh kề từ $X \in \mathcal{X}$ tới tất cả các đỉnh $u \in X$.

Với đồ thị G xác định, ta gọi $\mathcal{A}$ là bộ tất cả các tập ổn định cực đại, và với mỗi đỉnh v ta viết $\mathcal{A}_v$ là các tập trong $\mathcal{A}$ chứa v và $\mathcal{A}_{\bar{v}}$ là các tập trong $\mathcal{A}$ mà không chứa v. Đồng thời v được gọi là *không ổn định* nếu $|\mathcal{A}_v| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{A}|$, ngược lại v được gọi là *bền vững.*

Bổ đề 3.3. *Ánh xạ $\tau : S \longmapsto U \backslash S$ là một song ánh giữa $\mathcal{A}$ và $\mathcal{X}$.*

$(\rightarrow)$Thật vậy, với S là một tập ổn định cực đại, ta chứng minh $\tau(S) \in \mathcal{X}$. Đặt $A = U \cap S$, $B = \mathcal{X} \cap S$. Nếu $U \subseteq S$ thì $U \backslash S = \emptyset \in \mathcal{X}$, khẳng định đúng. Xét trường hợp $U \nsubseteq S$, dẫn đến $B \neq \emptyset$. Do S là một tập ổn định cực đại nên $U \backslash S = U \backslash A = N(B)$. Hơn nữa, $N(B)$ là hợp các phần tử kề với $X \in S \cap \mathcal{X} = B$, và τ là một đơn ánh (theo bổ đề 3.1, S xác định $U \cap S$, từ đó xác định $U \backslash S$). $(\leftarrow)$ Xét $X \in \mathcal{X}$, đặt $A = U \backslash N(X)$, khi đó $S = A \cup \big(\mathcal{X} \backslash N(A)\big)$ là một tập ổn định. Mặt khác, $X \in \mathcal{X} \backslash N(A)$ mỗi đỉnh trong $U \backslash A$ kề với $X \in S$, vì vậy S là cực đại. Vậy ta có khẳng định là đúng đắn. ■.



Hình 3 Xét tập $S = \{A, B, E, F, 5\}$ là ổn định cực đại, khi đó $U \backslash S = U \backslash A = N(B) = \{1,2,3,4\}$. Ta có $A = U \cap S = \{5\}$, $B = \mathcal{X} \cap S = \{A, B, E, F\}$. Khi đó, $U \backslash S$ là một tập trong $\mathcal{X}$.

Bây giờ ta giả thiết rằng giả thuyết 3.1 là đúng, khi ấy tồn tại không ổn định $u \in U$, thỏa mãn $|\mathcal{A}_v| \le \frac{1}{2}|\mathcal{A}|$. Hiển nhiên $\mathcal{A}$ là hợp của hai tập rời nhau $\mathcal{A}_v$ và $\mathcal{A}_{\bar{v}}$, kết hợp bổ đề 3.3 ta có,

$$|\tau(\mathcal{A}_{\bar{u}})| = |\mathcal{A}_{\bar{u}}| \ge \frac{1}{2}|\mathcal{A}| = \frac{1}{2}|\mathcal{X}|$$

Như vậy, $u \in \tau(S) \in \mathcal{X}$ cho mỗi $S \in \mathcal{A}_{\bar{u}}$, dẫn đến kéo theo giả thuyết Frankl.

Ngược lại, từ giả thuyết Frankl, ta xét một đồ thị hai phần U, W với ít nhất một cạnh. Xác định $\mathcal{X} \coloneqq \{U \backslash S \mid S \in \mathcal{A}\}$, chú ý rằng $\mathcal{X} \ne \emptyset$, nên G có ít nhất hai tập ổn định cực đại phân biệt. Từ bổ đề 3.3, ta có song ánh giữa $\mathcal{X}$ và $\mathcal{A}$. Hơn nữa, theo bổ đề 3.2, $\mathcal{X}$ là họ Frankl do đó giả thuyết 3.1 được kéo theo.

■.

4 Giải thuật liệt kê các tập thuộc họ hợp đóng

Từ định lý 3.1, để kiểm tra giả thuyết Frankl, ta sẽ kiểm chứng trên giả thuyết 2.2. Điều này đồng nghĩa với việc ta phải xét duyệt trên tất cả các tập ổn định cực đại, hay tên gọi khác là tập độc lập cực đại.

Bài toán 4.1. *Liệt kê các tập độc lập cực đại của một đồ thị cho trước.*

E. Loukakis năm 1982 [2] đã đưa ra một giải thuật (gọi là LMIS) nhanh hơn rất nhiều so với các giải thuật tìm liệt kê các tập độc lập cực đại trước đó như TIAS (bởi Tsukiyama, 1977), B&K (bởi Bron và Kerbosch, 1973) và LTMIS (bởi Loukakis và Tsouros, 1981). Tất cả đều áp dụng giải thuật quay lui trong việc liệt kê các tập ổn định cực đại. Trong báo cáo này, ta chỉ xét đến giải thuật B&K, một giải thuật đơn giản và dễ cài đặt hơn, tuy nhiên nó có những hạn chế chỉ áp dụng cho đồ thị có mật độ thấp.

Như ta đã biết, tập độc lập M ⊂ V là MIS của G khi và chỉ khi M là MC của $\bar{G}$. Thuật toán B&K tìm kiếm và liệt kê các tập clique cực đại, do đó bài toán 4.1 tương đương với bài toán *liệt kê các tập clique của đồ thị bù của một đồ thị cho trước.* Như vậy, nếu đồ thị G có mật độ thấp thì $\bar{G}$ lại có mật độ cao, giải thuật K&B sẽ không hiệu quả. Tuy nhiên, với đồ thị có kích thước nhỏ, ta vẫn có thể áp dụng K&B.

Giải thuật B&K là một thuật toán đệ qui quay lui, với đầu vào là ba tập các đỉnh P,C và X, trong đó P là tập các đỉnh "*tiềm năng*", sẽ trả về kết quả là tập độc lập cực đại, C là tập các đỉnh "*ứng cử viên*" có khả năng sẽ được chọn trong P, và X là tập được khởi tạo ban đầu rỗng, mục đích chứa các đỉnh được coi là *ứng cử viên* đánh dấu điểm quay lui.

Khởi tạo ban đầu $C = V$, các tập P, X rỗng, điều kiện để dừng đệ qui nếu như các đỉnh trong X đều kề với tất cả các đỉnh trong C (vì khi ấy đã thỏa mãn tập clique). Duyệt trên mỗi đỉnh v thuộc C, đồng thời thêm v vào P như một ứng cử viên và loại v khỏi C trong vòng đệ qui. Khi đó nếu C' là tập các đỉnh trong C mà kề với v là rỗng, đồng thời X' tập các đỉnh trong X mà kề với v là rỗng, khi đó P sẽ là một clique cực đại (vì khi ấy sẽ không còn ứng cử viên—kề với tất cả các đỉnh trong P). Nếu P chưa phải là clique cực đại, ta thực hiện tiếp đệ qui với bộ ba ($P \cup v$, C', X'). Để đánh dấu quay lui, ta phải loại bỏ từng ứng cử viên v khỏi P và thêm v vào X để đánh dấu đã duyệt.

Giải thuật B&K: Tìm và liệt kê các tập clique cực đại của đồ thị $\bar{G}$

BronKerbosch(P, C, X):

1. **if** not end find cliques **then**
2. **for** v in C **do**
3. P := P ∪ v
4. **if** C ∩ N(v) = ∅ and X ∩ N(v) = ∅ **then**
5. Report P as a maximal clique
6. **if** otherwise **then**
7. BronKerbosch(P, C ∩ N(v), X ∩ N(v))
8. P := P \ v

9. X := X ∪ v

Thuật toán kiểm tra kết thúc tìm kiếm các tập clique:

endFindCliques(C, X):

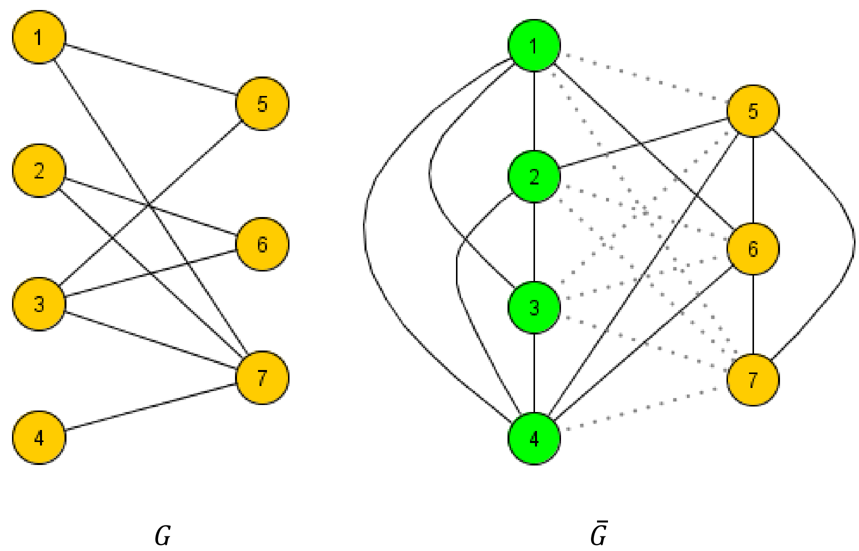
1. **for** v in X **do**

2. **if** v adjacent with all vertex in C **then**

3. report end find

4. otherwise

Ví dụ, xét đồ thị G như hình 4 dưới đây:



Hình 4 Đồ thị G hai phần với 7 đỉnh và đồ thị bù tương ứng $\bar{G}$. Chú ý rằng, thuật toán B&K áp dụng cho mọi đồ thị vô hướng bất kì.

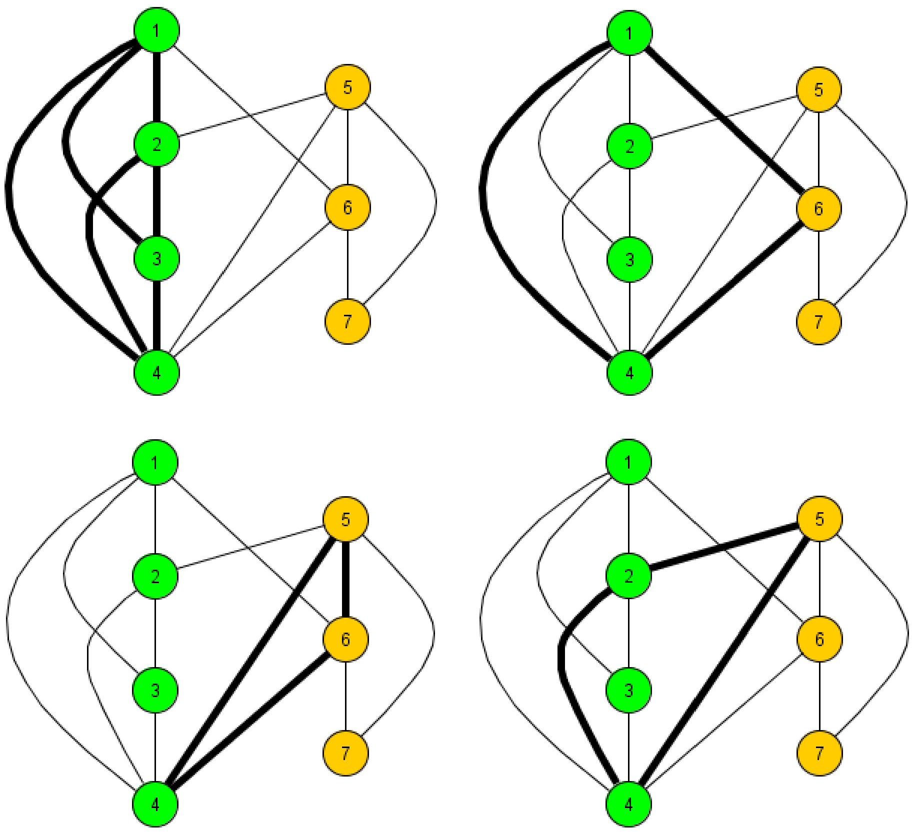
Mô tả giải thuật

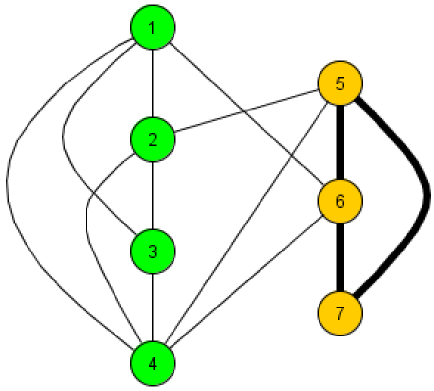
Bảng 1

Steps (recursive)	C	X	P
1	V	∅	∅
2	{ 7 ,5 ,3 ,2 ,4 ,1 }	∅	{ 6 }
3	{ 5 ,4 ,1 }	∅	{ 6,7 }
4	∅	∅	{ 6,5,7 }*
5	{ 4,1 }	{ 7 }	{ 6,5 }
6	∅	∅	{ 6,5,4 }*
7	{ 1 }	{ 5,7 }	{ 6,4 }

8	∅	∅	{ 6,4,1 }*
9	∅	{ 5,7,4 }	{ 6,1 }
10	{ 7 ,5 ,3 ,4 ,1 }	{ 6 }	{ 2 }
11	{ 3,4,1 }	∅	{ 5,2}
12	∅	∅	{ 5,2,4}*
13	{ 4,1 }	{ 5 }	{ 3,2 }
14	{ 1 }	∅	{ 3,2,4 }
15	∅	∅	{ 3,2,4,1 }*
16	{ 1 }	{ 3,5 }	{ 2,4 }
17	∅	{ 3,5 }	{ 2,4,1 }
18	∅	{ 3,5,4 }	{ 2,1 }
19	{ 7,5,4,1 }	{ 6,2 }	{ 3 }
20	{ 1 }	{ 2 }	{ 3,4 }
21	∅	{ 2 }	{ 3,4,1 }
22	∅	{ 2,4 }	{ 3,1 }
23	{ 7,4,1 }	{ 6,2,3 }	{ 5 }
24	{ 4 }	{ 6,2 }	{ 7,5 }
25	∅	{ 6,2,7 }	{ 5,4}
26	{ 4,1 }	{ 6,2,3,5 }	{ 7 }
27	{ 1 }	{ 6,2,3,5,7 }	{ 4 }
28	∅	{ 6,2,3,5 }	{ 4,1 }
29	∅	{ 6,7,5,3,2,4 }	{ 1 }

Các tập clique cực đại: {1,2,3,4}, {1,4,6}, {4,5,6}, {2,4,5}, {5,6,7}





Hình 5 Các tập clique cực đại

Độ phức tạp của giải thuật K&B là $O(3^{n/3})$ [11].

5 Giới hạn số các tập độc lập cực đại của một đồ thị

Miller và Muller [10] và Moon and Moser [9] đã đưa ra cận trên cho số các tập độc lập cực đại.

Định lý 5.1. Giá trị lớn nhất của số các tập MIS của bất kỳ đồ thị n đỉnh cho trước là,

$$\begin{cases} 3^{n/3} & if\ n \equiv 0[3] \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3} & if\ n \equiv 1[3] \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3} & if\ n \equiv 2[3] \end{cases}$$

Để ý rằng, từ định lý 3.1, với mỗi tập độc lập cực đại của đồ thị G, tương ứng với một tập thuộc họ $\mathcal{F}$. Tuy nhiên, theo định lý 2.2, một họ hợp đóng là Frankl khi số lượng các tập trong họ nhỏ hơn $4|V|-1$. Do đó, nếu số các tập MIS tìm được của đồ thị G lớn hơn $4|V|-1$, ta có thể phủ định giả thuyết Frankl trong trường hợp này. Điều này sẽ trở nên dễ dàng hơn trong việc kiểm tra tính đúng đắn của giả thuyết.

6 Tài liệu tham khảo

[1] B. Poonen, Union-Closed Families. J. Combin. Theory Ser. A 59 (1992), no. 2, pp. 253-268.

[2] E. Loukakis, *Anew Backtracking algoruthm for generating the Family of maximal independent sets of a graph*, School of Engineering, Greece , August 1982

[3] Henning Bruhn, Pierre Charbit, and Jan Arne Telle, *The graph formulation of the union-closed sets conjecture*, Mathematics Subject Classifications, Jul 6, 2008

[4] Ivica Bosnjak and Petar Markovic, *The 11-element case of Frankl's conjecture*, Electr. J. Comb. 15 (2008), R88.

[5] Ian Roberts and Jamie Simpson, *A note on the Union-Closed sets conjecture*, Australas. J. Combin, 2010

[6] Jesper Makholm Byskov, *Enumerating maximal independent sets with applications to graph colouring*, Aabogade 34, DK-8200 Aarhus N, Denmark,3 March 2004

[7] J.W. Moon, L. Moser, On cliques in graphs, Israel J. Math. 3 (1965) 23–28.

[8] M. El-Zahar, A graph-theoretic version of the union-closed sets conjecture, J. Graph Theory 26 (1997), 155-163.

[9] R. Morris, *FC-families and improved bounds for Frankl's conjecture European*, J. of Combinatorics, 27(2004), 269-282.

[10] R.E. Miller, D.E. Muller, *A problem of maximum consistent subsets*, Research Report RC-240, IBM Research Center, March 1960.

[11] Search: *Union-closed sets conjecture*, Wikipedia

[12] Search: *Maximal independent set*, Wikipedia

[13] Search: *Bron–Kerbosch algorithm*, Wikipedia