Handout 02:
Lineare Funktionen (Teil 2)

Hausaufgabe

Bitte lest zur nächsten Präsenzstunde die Seiten 20 bis 24 im Buch und bearbeitet damit die Aufgaben 1-6 dieses Handouts. Mit ✰ gekennzeichnete Aufgaben sind etwas komplizierter.

Wie immer optional könnt ihr - wie besprochen - die (handschriftlichen) Ausarbeitungen zu den folgenden Aufgaben dieses Handouts auch in digitaler Form (pdf) bis zum 3.9. auf Nextcloud oder LANIS hochzuladen. Achtet dabei, die Dateien sinnvoll (ohne Umlaute) und mit einem Bezug zum Handout zu benennen. **Wichtig:** Vergesst nicht, den Haken in LANIS zu setzen, wenn ihr die Hausaufgabe bearbeitet habt.

Zudem gibt es wieder eine, diesmal aber verpflichtende Umfrage zu Thema „Videokonferenzsysteme“ https://t1p.de/keti.

Übungen

1. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem (von Hand):

   a) $f(x) = 3x - 4$
   b) $f(x) = -x + 2$
   c) $f(x) = 0{,}5x$
   d) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$
   e) $f(x) = \frac{3}{7}x - 3$
   f) $f(x) = -\frac{11}{4}x + 6$

   Lösung: ⇒ könnt Ihr selbst mit Geogebra überprüfen. Die Strategie zum Zeichnen ist immer die gleiche: Zuerst wird der Schnittpunkt mit der y-Achse markiert. Von diesem aus wird die Steigung abgetragen. Dabei rechnet man die Steigung immer in einen Bruch um (bei ganzen Zahlen ist der Nenner einfach 1) und geht dann zuerst den Nenner (das ist unten) nach rechts zur Seite (zählen in Kästchen oder Zentimeter) und dann den Zähler (also oben) hoch, wenn die Steigung positiv ist und runter, wenn sie negativ ist. Dort angekommen markiert man einen zweiten Punkt. Beide Punkte verbinden ⇒ fertig :-)

2. Welche Bedingung müssen die beiden Steigungen m_1 und m_2 erfüllen, damit die Geraden g_1 und g_2 mit $g_1 : y = m_1 \cdot x + b_1$ und $g_2 : y = m_2 \cdot x + b_2$ parallel verlaufen?

Lösung: Zwei Geraden g_1 und g_2 verlaufen parallel, falls ihre Steigungen gleich sind, falls also $m_1 = m_2$ gilt.

3. Welche Bedingung müssen die beiden Steigungen m_1 und m_2 erfüllen, damit die Geraden g_1 und g_2 mit $g_1 : y = m_1 \cdot x + b_1$ und $g_2 : y = m_2 \cdot x + b_2$ orthogonal verlaufen?

Lösung: Zwei Geraden g_1 und g_2 verlaufen orthogonal, falls das Produkt ihrer beiden Steigungen -1 ergibt, falls also $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.

4. Bestimme **rechnerisch** jeweils die Zuordnungsvorschrift der Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

   a) geht durch A$(-1\,|\,-2)$ und B$(3\,|\,6)$

   b) geht durch Q$(2\,|\,5)$ und hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$

   c) schneidet die y-Achse bei $y = 7$ und steht senkrecht auf $g(x) = 5x + 2$

   d) schneidet die Koordinatenachsen bei $x = -3$ und $y = -1$

   e) verläuft parallel zu $h(x) = 2x$ und geht durch P$(-3\,|\,4)$

   f) ✰ steht senkrecht auf $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und geht durch den Schnittpunkt von $i(x) = x - 2$ und $k(x) = -x + 6$

   g) ✰ schneidet die x-Achse bei N$(8\,|\,0)$ unter dem Winkel $\alpha = 71{,}6°$

Lösung:

a) geht durch A$(-1\,|\,-2)$ und B$(3\,|\,6)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{3-(-1)} = 2$$

$$y = mx + b$$
$$6 = 2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$f(x) = 2x$$

b) geht durch Q$(2\,|\,5)$ und hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$

$$y = mx + b$$
$$5 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 3{,}5$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x + 3{,}5$$

c) schneidet die y-Achse bei $y = 7$ und steht senkrecht auf $g(x) = 5x + 2$

$$m = -\frac{1}{5}$$

$$b = 7$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}x + 7$$

d) schneidet die Koordinatenachsen bei $x = -3$ und $y = -1$

$$y = mx + b$$
$$0 = m \cdot (-3) - 1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

e) verläuft parallel zu $h(x) = 2x$ und geht durch $\mathrm{P}(-3 \mid 4)$

$$m = 2$$

$$y = mx + b$$
$$4 = 2 \cdot (-3) + b \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$f(x) = 2x + 10$$

f) ✰ steht senkrecht auf $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und geht durch den Schnittpunkt von $i(x) = x - 2$ und $k(x) = -x + 6$

Wir nennen den Schnittpunkt von i und k $\mathrm{S}(x_\mathrm{S} \mid y_\mathrm{S})$. Um die Koordinaten des Schnittpunktes zu ermitteln, setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$x_\mathrm{S} - 2 = -x_\mathrm{S} + 6$$
$$x_\mathrm{S} = 4$$
$$y_\mathrm{S} = 4 - 2 = -4 + 6 = 2$$

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

$$y = mx + b$$
$$2 = -3 \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = 14$$

$$f(x) = -3x + 14$$

g) ✰ schneidet die x-Achse bei $\mathrm{N}(8 \mid 0)$ unter dem Winkel $\alpha = 71{,}6°$

$$m = \tan(71{,}6°) = 3$$

$$y = mx + b$$
$$0 = 8 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = -24$$

$$f(x) = 3x - 24$$

5. **Berechne** die Schnittwinkel der Geraden aus Aufgabe 1:

   a) b) und c) b) b) und d) c) a) und c)

Lösung: Hier betrachten wir kurz allgemein Winkel zwischen zwei Funktionen. Es gibt drei Fälle, wie Geraden zueinander liegen können: Beide Steigungen sind positiv, beide Steigungen sind negativ, eine Steigung ist positiv, eine negativ. Die Berechnung der Schnittwinkel kann man in den folgenden Graphiken nachvollziehen:

$m_1 > 0,\ m_2 > 0$	$m_1 < 0,\ m_2 < 0$	$m_1 > 0,\ m_2 < 0$
$\varphi = \lvert\alpha_1 - \alpha_2\rvert$	$\varphi = \lvert\alpha_1 - \alpha_2\rvert$	$\varphi = 180° - \lvert\alpha_1 - \alpha_2\rvert$

Dabei betrachten wir immer die Beträge der Winkel, die der Taschenrechner ausgibt. Der Winkel zwischen zwei Funktionen wird oft mit dem griechischen Buchstaben φ („Phi“) bezeichnet, Ihr könnt natürlich auch jeden anderen griechischen Buchstaben verwenden.

Grundsätzlich könnt Ihr Euch also merken, dass man die einzelnen Winkel subtrahiert, wenn die Vorzeichen der Steigungen gleich sind und addiert, wenn die Vorzeichen verschieden sind. Außerdem gibt es ja beim Schnitt von zwei Geraden immer zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwinkel wird immer der kleinere von beiden definiert. Sollte also der errechnete Winkel größer sein als 90°, dann müsst Ihr ihn noch von 180° subtrahieren, um den eigentlichen Schnittwinkel zu erhalten.

a) b) und c)

$$m_b = -1 \Rightarrow \alpha_b = 135°$$
$$m_c = 0{,}5 \Rightarrow \alpha_c = 26{,}6°$$
$$\varphi = 180° - \lvert\alpha_b - \alpha_c\rvert$$
$$= 71{,}6°$$

b) b) und d)

$$m_b = -1 \Rightarrow \alpha_b = 135°$$
$$m_d = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_d = 146{,}3°$$
$$\varphi = \lvert\alpha_b - \alpha_d\rvert = 11{,}3°$$

c) a) und c)

$$m_a = 3 \Rightarrow \alpha_a = 71{,}6°$$
$$m_c = 0{,}5 \Rightarrow \alpha_c = 26{,}6°$$
$$\varphi = \lvert\alpha_a - \alpha_c\rvert = 45°$$

6. Bei welchen der im Folgenden abgebildeten Zuordnungen handelt es sich um Graphen einer quadratischen Funktion?

Lösung: a) und b)

Tipp: Die zu dem Thema zugehörige Playlist von Daniel Jung lautet Lineare Funktionen (Geraden), y=m*x+n[1], siehe auch Lesezeichen auf Nextcloud.

Feedback: https://t1p.de/f5hg

[1] https://t1p.de/ni5e