LUYỆN ĐỀ ĐH 2020

# KĨ THUẬT CHỌN HÀM TRONG CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN TỪ NB-TH ĐẾN VD-VDC

HÀ NỘI, 15 THÁNG 7 NĂM 2020

DƯƠNG ĐÌNH TUẤN

# LỜI NÓI ĐẦU

**Tích phân** là một trong những phần quan trọng bậc nhất của môn Toán, nó cũng là một phần quan trọng trong đề thi THPT Quốc gia. Sau loga thì có lẽ tích phân là phần mình yêu thích nhất, nó khá phong phú về dạng bài cũng như đòi hỏi tư duy tốt. Trong thời gian ôn thi THPT QG mình đã tích lũy được rất nhiều kĩ năng để giải tích phân, một trong số đó là kĩ thuật chọn hàm. Đây là một kĩ thuật rất hay trong đề thi trắc nghiệm hiện giờ của Bộ giáo dục. Nó giúp đưa một bài toán có thể cực khó về một bài toán chọn hàm đơn giản, rút ngắn được thời gian giải bài.

Nói thêm một chút về tích phân thì để nắm vững tích phân các bạn có thể tham khảo cách học của mình như sau.

+ Một phân hay đưa vào phần VDC trong đề thi thử của các trường hiện nay đó là BĐT Tích Phân. Phần nay mình cũng đã viết một tài liệu nói sơ qua rồi. (Có thể inbox facebook của mình)

+ Cuốn sách “Chuyên đề: TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG” của thầy Nguyễn Đăng Ái là một trong những cuốn sách theo đánh giá của mình là ổn nhất hiện nay. Nó viết khá đầy đủ về tích phân, phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm của bộ. Học hết sách này tin răng bạn tự tin 99% về khả năng làm tích phân của mình.

+ Ngoài ra bạn có thể tham khảo thêm cuốn sách “TUYỂN TẬP CÁC CHUYÊN ĐỀ & KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN" của thầy Trần Phương. Cuốn sách này viết khá đầy đủ về tích phân, nó là tiền đề đầu tiên cho các tựa sách tích phân sau này ra đời. Học sách này thì các bạn nên biết chọn lọc để học, tránh học những phần không cần thiết. (Nếu ai cần link PDF inbox mình)

Quảng Bình, 15 tháng 07 năm 2020

Dương Đình Tuấn

# KĨ THUẬT CHỌN HÀM

Để làm rõ khái niệm thế nào là "chọn hàm" thì chúng ta cùng thử giải quyết bài toán Tích phân mức VD trong đề thi THPT QG 2019 vừa rồi để hiểu qua về nó.

**Bài toán:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-25$. **B.** $15$. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** $23$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

**Chọn A**

Đặt $t=5x \Rightarrow \begin{cases} dx=\frac{dt}{5} \\ x=\frac{t}{5} \end{cases}$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=5$.

Khi đó: $\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \int_0^5 \frac{t}{5}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{5}=1 \Leftrightarrow \int_0^5 t.f(t)\,\mathrm{d}t=25 \Leftrightarrow \int_0^5 x.f(x)\,\mathrm{d}x=25 \quad (*)$

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}.f(x)\Big|_0^5-\frac{1}{2}\int_0^5 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=25$

$\Leftrightarrow \frac{25}{2}-\frac{1}{2}\int_0^5 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=25 \Leftrightarrow \int_0^5 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=-25$.

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Gọi hàm cần tìm là $f(x)=ax+b$

Ta có

$$\begin{cases} f(5)=1 \\ \int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=1 \\ \int_0^1 x(a.5x+b)\,\mathrm{d}x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=1 \\ \left(\frac{5ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right)\Big|_0^1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=1 \\ \frac{5a}{3}+\frac{b}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-3}{5} \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy hàm cần tìm có dạng $f(x)=-\frac{3}{5}x+4$

Khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 x^2\left(-\frac{3}{5}\right)dx=-25$

***Nhận xét: Có thể thấy rằng từ một bài toán nhìn khá phức tạp với một số bạn thì từ phương pháp chọn hàm này ta đưa về một bài toán khá đơn giản về khoản tính toán và tư duy, nó sẽ giúp một số bạn giải quyết bài toán nhanh hơn và bớt phức tạp hơn.***

# BÂY GIỜ CHÚNG TA SẼ ĐI VÀO CỤ THỂ TỪNG DẠNG TOÁN CHỌN HÀM

## DẠNG 1. Hàm hằng

Với bài toán đưa ra chỉ có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=a=const$

**Các ví dụ:**

**[TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018].** Cho $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó

$J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $2$. **B.** $6$. **C.** $8$. **D.** $4$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

Ta có $J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x=4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-3\int_0^2\mathrm{d}x=4.3-3x\Big|_0^2=6$.

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Như ta thấy đề ra chỉ có một giả thuyết nên ta chọn hàm $f(x)=a$

Khi đó $I=\int_0^2 adx=3 => ax\,|_0^2=3\Leftrightarrow 2a=3\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$

Vậy $f(x)=\dfrac{3}{2}$ Suy ra $J=\int_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left[4.\dfrac{3}{2}-3\right]dx=6$

**(THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;+\infty)$ và $\int_0^5 f\left(\sqrt{x+4}\right)\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int_3^2 x.f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=8$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-16$. **D.** $I=-4$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

Đặt $\sqrt{x+4}=t\Rightarrow x=t^2-4$.

Khi $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=5\Rightarrow t=3 \end{cases}\Rightarrow 8=\int_2^3 f(t)\mathrm{d}\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow\int_2^3 2t.f(t)\mathrm{d}t=8$.

Mà $\int_2^3 2t.f(t)\mathrm{d}t=\int_2^3 2x.f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_2^3 x.f(x)\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=4$.

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Như ta thấy đề ra chỉ có một giả thuyết nên ta chọn hàm $f(x)=a$

Khi đó $\int_0^5 a dx=8\Rightarrow a=\frac{8}{5}$ Suy ra $I=\int_3^2 x.f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{8}{5}xdx=4$

## DẠNG 2. Hàm bậc nhất

Với bài toán đưa ra có hai giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=ax+b$

**Các ví dụ:**

**(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

**A** . $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

Đặt $t=\sqrt{x}$ , ta có: $t^2=x$ và $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=4\Rightarrow t=2$.

$I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2tf'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u=2t;\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t$; $v=f(t)$.

Khi đó: $I=\left(2tf(t)\right)\Big|_0^2-2\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t\ =4f(2)-2.1=4.(-2)-2=-10$.

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Như ta thấy đề ra có hai giả thuyết nên ta chọn hàm $f(x)=ax+b$

Khi đó $\begin{cases} f(2)=-2 \\ \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ \left(\dfrac{ax^2}{2}+bx\right)\Big|_0^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-5}{2} \\ b=3 \end{cases}$

Vậy $f(x)=\dfrac{-5}{2}x+3$

Suy ra $I=\int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 -\dfrac{5}{2}dx=-10$

**(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30$. Tính $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $20$. **B.** $-30$. **C.** $-20$. **D.** $70$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

Đặt $\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f(x) \end{cases}$

$\int\limits_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x=\left(x.f(x)\right)\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30=5f(5)-\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=5f(5)-30=20$.

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Như ta thấy đề ra có hai giả thuyết nên ta chọn hàm $f(x)=ax+b$

Khi đó $\begin{cases} f(5)=10 \\ \int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=10 \\ \left(\dfrac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^5=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+b=10 \\ \dfrac{25}{2}a=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{12}{5} \\ b=-2 \end{cases}$

Vậy $f(x)=\dfrac{12}{5}x-2$ suy ra $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^5\left(\dfrac{12}{5}x-2\right)dx=20$

## DẠNG 3. Hàm bậc hai

Với bài toán đưa ra có ba giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=ax^2+bx+c$

*Lưu ý: Với các bài mà có ba giả thiết thì ta nên làm theo hướng tự luận sẽ nhanh hơn so với làm cách chọn hàm vì nó khó nhiều dữ kiện, nếu bí quá thì mới dùng đến chọn hàm

**Đối với dạng bài ba giả thiết người ta ít ra trong các đề thi nên hơi khó kiếm ví dụ phần này -_-**

## DẠNG 4. Hàm chẵn

## Dạng 4.1. Hàm chẵn một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm chẵn và có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=a$

**Các ví dụ:**

Cho $f(x)$ là hàm chẵn, $\int\limits_0^2 f(x)dx=10$. Tính $\int\limits_{-2}^2 f(x)dx$

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $-10$. **D.** $-20$.

**Cách 1 (Theo hướng tự luận)**

Đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^{-2} f(-t).-dt = \int_{-2}^0 f(-t)dt = \int_{-2}^0 f(t)dt$$

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx = 20$$

**Cách 2 (Theo hướng chọn hàm)**

Như ta thấy đề ra có giả thuyết hàm là hàm chẵn một giả thiết nên ta chọn hàm $f(x) = a$

Khi đó $\int_0^2 f(x)dx = 10 \Leftrightarrow a = 5$

Vậy $\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 5dx = 20$

***Ngoài các cách trên ra thì ta cũng có thể áp dụng một công thức nhanh đối với tích phân hàm chẵn. Cái này mình sẽ nhắc ở phần cuối của tài liệu này.***

## Dạng 4.2. Hàm chẵn hai giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm chẵn và có hai giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x) = 3ax^2 + b$

**Các ví dụ:**

Cho hàm số $f(x)$ là hàm chẵn và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $\int_0^2 f(x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(2x)dx = -3$. Hãy xác định tích phân: $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$?

**A.** $I = -4$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = -1$. **D.** $I = 1$.

Nhận thấy hàm là hàm chẵn và có hai giả thiết ta chọn hàm $f(x) = 3ax^2 + b$

Khi đó $\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3ax^2+b)dx = a+b=2 \\ \int_0^2 f(2x)dx = \int_0^2 \left(3a(2x)^2+b\right)dx = 32a+2b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{30} \\ b=\dfrac{67}{30} \end{cases}$

Suy ra $f(x)=\dfrac{-21x^2+67}{30}$

Vậy $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{4} \dfrac{-21x^2+67}{30}dx = -4$

# DẠNG 5. Hàm lẻ

## Dạng 5.1. Hàm lẻ một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm lẻ và có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=2ax$

**Các ví dụ:**

Cho $f(x)$ là hàm lẻ và $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(-x)dx$

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $-10$. **D.** $-20$.

Nhận thấy hàm có dạng hàm lẻ và có một giả thiết nên ta chọn hàm $f(x)=2ax$

Khi đó $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 10 \Leftrightarrow \int_{-2}^{0} 2axdx = 10 \Rightarrow a=\dfrac{-5}{2}$

Suy ra $f(x)=-5x$

Vậy $\int_0^2 f(-x)dx = \int_0^2 5xdx = 10$

## Dạng 5.2. Hàm lẻ hai giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm lẻ và có hai giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=4ax^3+2bx$

**Các ví dụ:**

Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và $\int_0^3 f(-x)=3;\int_1^3 f(-3x)dx=9$. Tính $\int_0^9 f(x)dx$

**A.** $100$. **B.** $270$. **C.** $-100$. **D.** $-270$.

Nhận thấy hàm có dạng hàm lẻ và có một giả thiết nên ta chọn hàm $f(x)=4ax^3+2bx$

Khi đó

$$\begin{cases}\int_0^3 f(-x)dx=\int_0^3\left(-4ax^3-2ax\right)dx=-81a-9b=3\\ \int_1^3 f(-3x)dx=\int_1^3\left(4a(-3x)^3+2a(-3x)\right)dx=\left(-3x^4-3x^2\right)|_1^3=-240a-24b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{24}\\ b=\dfrac{1}{24}\end{cases}$$

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x$

Vậy $\int_0^9 f(x)dx=\int_0^9\left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x\right)dx=-270$

## DẠNG 5. Hàm tuần hoàn với chu kì T một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm tuần hoàn với chu kì $T$ và có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=a\cos\frac{2\pi}{T}x$

## DẠNG 6. Hàm tuần hoàn với chu kì T và là hàm lẻ một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm tuần hoàn với chu kì $T$ và là hàm lẻ có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x)=a\sin\frac{2\pi}{T}x$

## DẠNG 7. Hàm tuần hoàn với chu kì T và là hàm chẵn một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm tuần hoàn với chu kì T và là hàm chẵn có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x) = a\cos\frac{2\pi}{T}x$

## DẠNG 8. Hàm tuần hoàn với chu kì T và là hàm lẻ một giả thiết

Với bài toán đưa ra hàm là hàm tuần hoàn với chu kì T và là hàm lẻ có một giả thiết thì ta có cách chọn hàm như sau:

Chọn hàm $f(x) = a\sin\frac{2\pi}{T}x$

## DẠNG 9. Với bài toán có giả thiết như sau

$$f(x) = f(a+b-x), \int_b^a f(x)dx = c$$

Với bài toán có giả thiết như trên ta chọn hàm như sau

Chọn hàm $f(x) = c(const)$

**Các ví dụ:**

Cho $f(x) = f(2-x), \int_0^2 f(x)dx = 10$. Tính $\int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x)dx$

**A.** $20$. **B.** $10$. **C.** $-10$. **D.** $-20$.

Chọn $f(x) = c$

Khi đó $\int_0^2 f(x)dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 cdx = 10 \Rightarrow c = 5$

Suy ra $f(x) = 5$

Vậy $\int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x)dx = \int_0^2 5(x^3 - 3x^2)dx = -20$

## DẠNG 10. Với bài toán có giả thiết như sau

$$f(x).f(a+b-x) = g(x) > 0$$

Với bài toán có giả thiết như trên ta chọn hàm như sau

Chọn hàm $f(x)=\sqrt{g(x)}$

**Các ví dụ:**

Cho $f(x)>0$, đạo hàm liên tục trên $[0;2]$; $f(0)=1$; $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với $\forall x\in[0;2]$. Tính $\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

A. $\frac{-16}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. C. $-\frac{5}{16}$. D. $\frac{5}{16}$.

Chọn hàm $f(x)=\sqrt{e^{2x^2-4x}}=e^{x^2-2x}$

Khi đó $\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2).(2x-2)e^{x^2-2x}}{e^{x^2-2x}}dx=\frac{-16}{5}$

***Rất nhanh đúng không ạ, trong khi đó nếu làm tự luận thì nó sẽ khá phức tạp như sau***

Ta có: $\begin{cases} I=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx \\ I=\int_0^2 \frac{\left((2-x)^3-3(2-x)^2\right)f'(2-x)}{f(2-x)}dx=\int_0^2 \frac{(-x^3+3x^2-4)f'(2-x)}{f(2-x)}dx \end{cases}$

$$2I=\int_0^2\left(x^3-3x^2\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(2-x)}{f(2-x)}\right]\right)dx-4\int_0^2\frac{f'(2-x)}{f(2-x)}dx$$

Đạo hàm hai vế giả thiết:

$$f'(x).f(2-x)-f(x).f'(2-x)=(4x-4).e^{2x^2-4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x).f(2-x)-f(x).f'(2-x)}{f(x).f(2-x)}=\frac{(4x-4).e^{2x^2-4x}}{f(x).f(2-x)}=4x-4$$

$$-4\int_0^2\frac{f'(2-x)dx}{f(2-x)}=4\int_0^2\frac{d\left(f(2-x)\right)}{f(2-x)}=4\ln f(2-x)\Big|_0^2=4\ln\frac{f(0)}{f(2)}=0$$

$$2I=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right)(4x-4)dx=\frac{-32}{5}\Rightarrow I=\frac{-16}{5}$$

## DẠNG 10. Với bài toán có giả thiết như sau

$\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx=\alpha;\int_a^b f(x).g(x)dx=\beta$ thì ta có cách chọn hàm như sau

Chọn hàm $f(x)$ sao cho $f(x)\equiv kg(x)$ từ đó thay lại giả thiết ban đầu để tìm $k$

**Các ví dụ:**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\int_0^1\left(f(x)\right)^2dx=21;\int_0^1(x+1)f(x)dx=7$. Hãy tính tích phân $\int_0^1 e^x.f(x)dx$

**A.** $e$. **B.** $-e$. **C.** $-3e$. **D.** $3e$.

Ta thấy giả thiết $\int_0^1\left(f(x)\right)^2dx=21;\int_0^1(x+1)f(x)dx=7$ có thể suy ra $f(x)=k(x+1)$

Dựa vào giả thiết: $\int_0^1(x+1)f(x)dx=7=\int_0^1(x+1)k(x+1)dx\Leftrightarrow 7=k.\frac{7}{3}\Leftrightarrow k=3$

Suy ra $f(x)=k(x+1)=3(x+1)\rightarrow\int_0^1 e^x f(x)dx=3\int_0^1 e^x(x+1)dx=3e$

***Trên đây là 11 dạng cơ bản mà mình soạn ra cho các bạn tham khảo, ngoài ra thì tùy từng bài toán khác nhau mà ta còn có nhiều cách chọn hàm khác nữa dựa vào tư duy của các bạn thôi. Chọn hàm giúp ta giải toán nhanh hơn tuy nhiên đừng quá lạm dụng nó để rồi rời xa bản chất của bài toán.***

# MỘT SỐ THỦ THUẬT GIẢI NHANH CÁC DẠNG TOÁN TÍCH PHÂN

1. Tính chất tích phân dựa vào phép biến đổi biến và cận tích phân

- $I=\int_a^b f(x)dx$
- Đổi biến $x=a+b-t$

$$\boxed{\Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx}$$

2. Tính chất của tích phân dựa trên phép đổi biến

- Nếu $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-a;a]$, tức $f(x)=f(-x)$ thì ta có

  * $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

  * $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=2\int_{-a}^{0} f(x)dx$

  * $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{b^x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx$

- Nếu $f(x)$ là hàm lẻ trên $[-a;a]$, tức $f(x)=-f(-x)$ thì ta có

  * $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$

  * $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

- Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì $T$, , tức $f(x+T)=f(x)$ thì ta có

* $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx$
* $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$
* $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$

3. Áp dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ vào các bài toán

- Viết hai lần $I$

$$\begin{cases} I = \int_a^b f(x)dx \\ I = \int_a^b f(a+b-x)dx \end{cases}$$

- Cộng lại theo vế suy ra $2I = \int_a^b \left[ f(x) + f(a+b-x) \right] dx$
- Thông thường $f(x) + f(a+b-x)$ rút gọn về dạng đơn giản
- $f(x).f(a+b-x) = c(c>0) \Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c} + f(x)} dx = \frac{b-a}{2\sqrt{c}}$