Линал – 6

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2 - 1\cdot 2 \\ 3 - 1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{3x_4 - 4}{2} \\ 5x_4 = -2 - \dfrac{3x_4 - 4}{2} + x_2 \\ x_1 = 2x_4 - \dfrac{3x_4 - 4}{2} - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{3x_4 - 4}{2} = \dfrac{3a - 26}{13} \\ x_4 = \dfrac{2a}{13} \\ x_1 = \dfrac{1}{2}x_4 - a + 4 = \dfrac{52 - 12a}{13} \end{cases}, \text{ при } x_2 = a,\ a \in R$$

Система имеет бесконечное множество решений.

2) а.) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 24 & 0 & 72 \end{array}\right)$$

система совместна, одно решение

б.) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \to$$ система несовместна, решений нет

в.) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{4 - 5x_3 - x_1}{2} \\ 3x_1 + \dfrac{4 - 5x_3 - x_1}{2} - 8x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{14 - 23x_3}{5} \\ x_1 = \dfrac{21x_3 - 8}{5} \end{array}$$

Система совместна и имеет бесконечное множество решений при ~~пр~~ $x_3 \in R$

③ $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы, а также равен числу неизвестных, соответственно, система линейных уравнений совместна и определена, будет иметь 1 решение.

④ $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$

Система будет несовместна при условии: $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \tilde{A}$

Ранг Матрицы $\tilde{A}$ равен 3 (3 линейно независимые строчки и столбцы)

Получается, что нам необходимо, чтобы ранг матрицы A тоже был равен 3

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$, теперь ранг матрицы стал равен 2 (почему-то ~~но это~~

$b-4a \neq c-7a$ ~~b-c~~ $3a \neq c-b$

Возьмём $a=1, b=2, c=3$ – должно сработать

Линал-7

① a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4+6 = 2$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4+14 = 10$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7-3 = 4$

$x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{10}{2} = 5$

$x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{4}{2} = 2$

б.) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 43$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 86$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -43$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 43$

$x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = 2$

$x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = -1$

$x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = 1$