

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda+1)(6-\lambda) + 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \text{ — собственные значения}$$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix},$$

a — любое число

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1.5x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3b \\ -2b \end{pmatrix},$$

b — любое число

$$(2) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Возьмём произвольный вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и рассмотрим как происходит преобразование

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1$$

Вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ явл. собственным вектором данного преобразования, заданного матрицей, соотв. λ собствен. значению $\lambda = -1$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x \Rightarrow \lambda = 2$$

Вектор $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ явл. собственным вектором оператора, заданного матрицей, соотв. собствен. значению $\lambda = 2$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda x = -3x \Rightarrow \lambda = -3$$

Вектор $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ явл. собственным вектором оператора, заданного матрицей, соотв. собствен. значению $\lambda = -3$