Линеал - 1.1.

① $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

$a_1 e^x + a_2 + a_3(x+1) + a_4(x - e^x) = 0$

$e^x(a_1 - a_4) + x(a_3 + a_4) + (a_2 + a_3) = 0$

$\begin{cases} a_1 - a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_3 = -a_4 = 0 \\ a_2 = a_4 = 0 \end{cases}$

Пусть $a_4 = 1$, тогда $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$

$f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + f_4(x) = 0 \Rightarrow$ векторы линейно зависимы

② $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

$2a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4(x+1)^2 = 0$

$2a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^2 + 2a_4 x + a_4 = 0$

$(2a_1 + a_4) + x(a_2 + 2a_4) + x^2(a_3 + a_4) = 0$

$\begin{cases} 2a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 2a_1 \\ a_3 = -2a_1 = 0 \\ a_2 = -4a_1 = 0 \end{cases}$

Пусть $a_1 = 1$, тогда $a_2 = -4$, $a_3 = -2$, $a_4 = 2$

$f_1(x) - 4f_2(x) - 2f_3(x) + 2f_4(x) = 0 \Rightarrow$ векторы линейно зависимы

③ $x = (2, 3, 5) \in R^3$

$b_1 = (0, 0, 10)$ $b_3 = (0, 1, 0)$

$b_2 = (2, 0, 0)$

$x = (2, 3, 5) = 2\frac{b_2}{2} + 3b_3 + 5\frac{b_1}{10} = b_2 + 3b_3 + \frac{1}{2}b_1 \Rightarrow$ координаты $(0.5, 1, 3)$

④ $3x^2 - 2x + 2 \in R^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$

$b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = x^2 \Rightarrow 3b_3 - 2b_2 + 2b_1 \Rightarrow$ координаты $(2, -2, 3)$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$

$b_1 = x^2$, $b_2 = x-1$, $b_3 = 1$

$3x^2 - 2x + 2 = 3x^2 - 2x + 4$

$3b_1 - 2b_2 + 4b_3 \Rightarrow$ координаты $(3, -2, 4)$

Лииал - 1.2.

① а.) $x=(0,-3,6)$
$y=(-4,7,9)$
$(x,y)=0\cdot(-4)+(-3)\cdot7+6\cdot9=33$

б.) $x=(7,-4,0,1)$
$y=(-3,1,11,2)$
$(x,y)=7\cdot(-3)+(-4)\cdot1+0\cdot11+1\cdot2=-23$

② $x=(4,2,4)$
$y=(12,3,4)$

$\|x\|_1=|4|+|2|+|4|=10$ - манхэттенская норма
$\|x\|_2=\sqrt{|4|^2+|2|^2+|4|^2}=6$ - евклидова норма
$\|y\|_1=|12|+|3|+|4|=19$ - манхэттенская норма
$\|y\|_2=\sqrt{|12|^2+|3|^2+|4|^2}=13$ - евклидова норма

$\cos\alpha=\dfrac{x\cdot y}{|x|\cdot|y|}=\dfrac{4\cdot12+2\cdot3+4\cdot4}{|x|\cdot|y|}=\dfrac{70}{78}\approx0,9\approx26°$

③

а.) $(x,y)=(y,x)$
$(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$
$(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$
$(x,x)\geq0$, причём $(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0$

$\bar{u}=(x,y)$, $\bar{v}=(a,b)$
$u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\sqrt{a^2+b^2}$, тогда $(\bar{u},\bar{v})=u\cdot v$

1.) $(\bar{u},\bar{v})=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=(\bar{v},\bar{u})$

2.) $(\lambda\bar{u},\bar{v})=\lambda\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\lambda(\bar{u},\bar{v})$

3.) $\bar{u}_1+\bar{u}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$; $u_1+u_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$
$(\bar{u}_1+\bar{u}_2,\bar{v})=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$
$(\bar{u}_1,\bar{v})=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$
$(\bar{u}_2,\bar{v})=\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$
$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\neq\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ - не выполнена аксиома, значит, пространство не будет евклид

б.) $\bar{u}=(x,y)$, $\bar{v}=(a,b)$
$(\bar{u},\bar{v})=3(x\cdot a+y\cdot b)$
1.) $(\bar{u},\bar{v})=3\cdot(x\cdot a+y\cdot b)=3\cdot(a\cdot x+b\cdot y)=(\bar{v},\bar{u})$
2.) $(\lambda\bar{u},\bar{v})=3\cdot(\lambda\cdot x\cdot a+\lambda\cdot y\cdot b)=3\lambda(x\cdot a+y\cdot b)=\lambda(\bar{u},\bar{v})$
3.) $\bar{u}_1+\bar{u}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
$(\bar{u}_1+\bar{u}_2,\bar{v})=3((x_1+x_2)\cdot a+(y_1+y_2)\cdot b)=3\cdot(x_1\cdot a+x_2\cdot a+y_1b+y_2b)=3(x_1\cdot a+y_1\cdot b)+3(x_2\cdot a+y_2\ldots$
$=(\bar{u}_1,\bar{v})+(\bar{u}_2,\bar{v})$
$(\bar{u},\bar{u})=3(x\cdot x+y\cdot y)=3(x^2+y^2)\geq0$, $x=y=0\Rightarrow\bar{u}=0$ - все аксиомы выполнены, пространство будет евклид