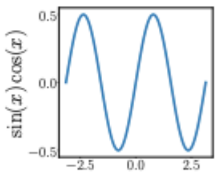
3.7 Inner Product of Functions

두 function 의 inner product 는

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx$$

* Example 3.9 Inner Product of Functions

u = sin(x), v = cos(x)이고, f(x) = u(x)v(x)일 때, f(x)는 아래 그림과 같이 이 function 은 odd 이다

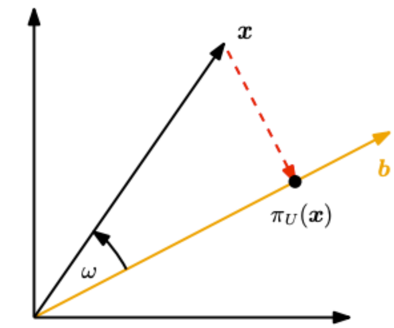


f(-x) = -f(x)

이 product evaluates 는 0 이므로 sin 과 cos 은 orthogonal function 이다

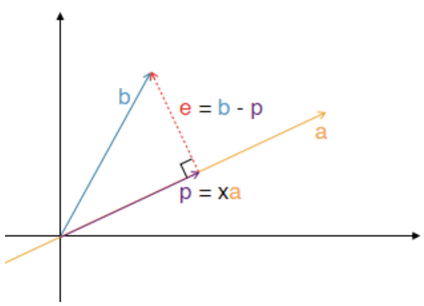
3.8 Orthogonal Projections

2 차원 벡터공간(평면)에서 부분공간(선)으로의 projection



(a) Projection of $x \in \mathbb{R}^2$ onto a subspace U with basis vector b.

벡터 x 를 벡터 b 에 projection



→ vector b 를 vector a 에 projection 한 벡터 p

P = xa 이고, a 는 e 와 수직을 이룸

$$\mathbf{a}^T\mathbf{e} = 0$$
$$\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - x\mathbf{a}) = 0$$
$$x\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$$
$$x = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{p} = x\mathbf{a} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

위 식에서 b 를 p 로 projection 하는 행렬 P 를 구할 수 있음

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

* 행렬 P 의 특징

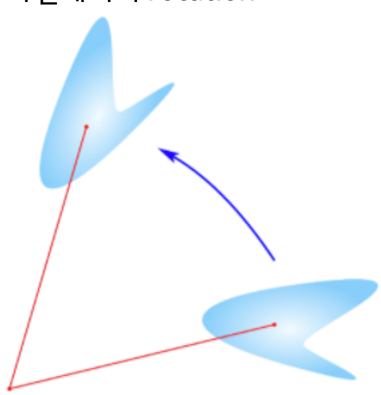
$P^T = P$: 식 (1) 의 분모는 scalar 상수이고, 분자는 $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ 이므로 대칭행렬이다.
$P^2 = P$: 두 번 projection 한 결과는 처음과 같다.

3.9 Rotations

https://elementary-physics.tistory.com/19#:~:text=%EB%AC%BC%EB%A6%AC%EC%97%90%EC%84%9C%20%EA%B0%80%EC%9E%A5%20%EC%89%BD%EA%B2%8C%20%EB%B3%BC,%EB%A7%8C%ED%81%BC%20%EC%9D%B4%EB%8F%99%EC%8B%9C%ED%82%A4%EB%8A%94%20%EA%B2%83%EC%9D%84%20%EB%A7%90%ED%95%9C%EB%8B%A4.

Rotation=한 선을 중심으로 모든 점들을 기준선과의 거리는 유지한 채 일정한 각도만큼 이동시키는 것

- 2 차원에서의 rotation



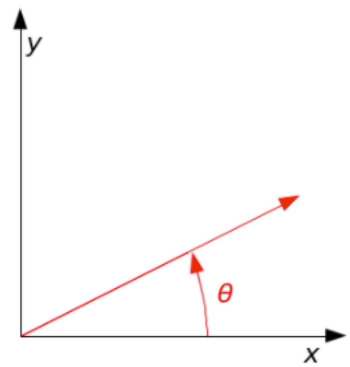
방향이 명시되지 않은 경우 일반적으로 반시계 방향으로 회전을 의미함

Linear transformation 의 matrix representation 을 찾기 위해서는 우선 ordered basis 가 있어야 한다

Basis 로 standard basis 사용

$\mathbf{e}_1 = (1, 0)$

$\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ ==MML 책 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



R_θ의 matrix representation 을 찾기 위해 basis 가 R_θ에 의해 어떻게 변환되는지 확인하면,
위 그림과 같이

$$R_\theta \mathbf{e}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\,(1,0) + \sin\theta\,(0,1)$$

$$R_\theta \mathbf{e}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta\,(1,0) + \cos\theta\,(0,1)$$ 로 변환된다

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_{-\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ 임을 알 수 있다

→ 이는 좌표축을 θ 만큼 반시계 방향으로 회전시키는 것은 모든 점을 θ 만큼 시계 방향으로 회전시키는 것과 같을 것이라는 예상과 일치하는 결과

- 3 차원에서 z 축을 중심으로 rotation
: 3 차원의 경우 가능한 회전축이 무수히 많다. 여기서는 일단 z 축을 기준으로 한 회전
축을 기준으로 θ 만큼 회전시킨다 == 임의의 점을 z 축과 직각이 되는 평면(즉, xy 평면과 평행한 평면) 상에서 오른손 법칙에 따라(엄지손가락이 회전축의 방향, 다른 손가락들이 접히는 방향이 회전의 방향) 반시계 방향으로 회전시키는 것

$$Z_\theta \mathbf{e}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$Z_\theta \mathbf{e}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$Z_\theta \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$ 이고

따라서, Z_θ의 matrix representation 은

$$[Z_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

같은 방식으로, x 축을 중심으로, y 축을 중심으로 하는 회전은

$$[X_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad [Y_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$