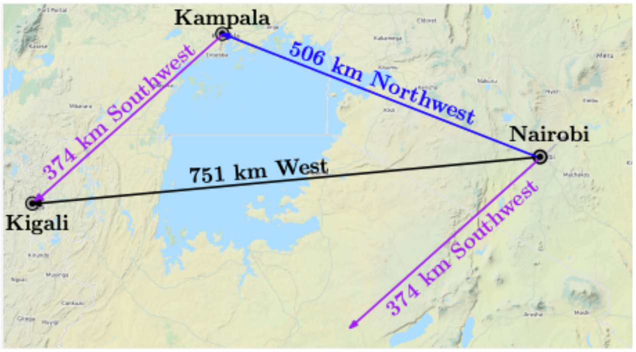
* week1 내용 복습

- linear combination: 벡터 v 를 $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ 이렇게 1 차식의 합으로 표현한 것

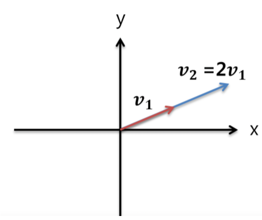


→ 여기서, 751km West 는 374 와 506 의 linear combination 으로 이루어져 있음

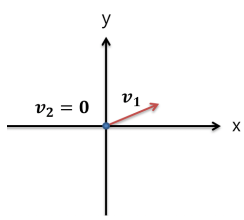
→ 374 와 506 은 서로 다른 vector 를 표현할 수 없기 때문에 linearly independent 하다

- vector 의 independence 의 의미

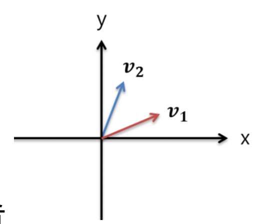
: $x_1, x_2 \cdots x_k$ 의 벡터들이 있을 때, 모든 계수가 0 인 경우를 제외하고, 어떠한 linear combination 으로도 0 을 만들 수 없다면 이 벡터는 independent 하다



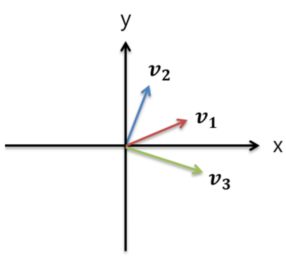
: 종속



: 종속



: 독립(independent)



→종속(2 차원 평면에 3 개의 벡터가 있으면, 종속이다)

- $x_1, x_2 \cdots x_k$ 의 벡터들이 중복이 없는 상태일 때: linearly independent 하다

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ 일 때, $x_1, x_2 \cdots x_k$ 의 벡터들이 linearly independent 하다고 한다.

- 이러한 벡터들의 independence 를 행렬을 통해 확인할 수 있다

2.6 Basis and Rank

2.6.1 Generating set and Basis

Definition 2.13 Generating set and span

vector space $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$, set of vectors $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \subseteq \mathcal{V}$ 가 있을 때,

vector space V 의 모든 vector v 가 집합 A 의 원소들의 linear combination 으로 표현이 되면 A 는 V 를 generate 한다고 한다. 이때, A 의 vector 의 모든 linear combination 들의 집합을 A 의 span 이라 한다.

만약 A 가 V 를 span 하면, $V = \mathrm{span}[\mathcal{A}]$, $V = \mathrm{span}[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$로 표현한다.

* A 가 V 를 span 한다 == V 의 원소들은 A 의 원소들의 linear combination 으로 표현할 수 있다

Definition 2.14 Basis

vector space $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$일 때, A 는 V 를 generate 시키지만, A 에 포함되는 어떠한 부분 집합도 V 를 generate 시키지 못할 때, A 를 minimal 이라고 한다. (A 를 더 작게 할 수 없을 때)
V 를 generate 시키는 linearly independent 한 모든 집합들은 minimal 인데, 이를 basis 라고 한다.

- 3 차원에서 canonical/standard basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- 또 다른 3 차원에서의 basis

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.2 \\ -1.3 \\ 3.5 \end{bmatrix} \right\}$$

→ 하나의 vector space 에서 basis 는 단 1 개인 것은 아님

-

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

→ A 는 linearly independent 하지만, 4 차원의 generating set 은 아니다

* Remark – 모든 vector space V 는 basis B 를 가진다
위의 예제를 보면, 한 vector space V 에 여러개의 bases 가 존재할 수 있다
하지만 그 bases 들을 구성하는 vector 의 개수(element 의 수)는 동일하다

* Remark – vector space 의 차원과 vector 의 element 의 수가 꼭 같아야 하는 건 아니다

2.6.2 Rank

Matric A 의 linearly independent column 의 수와 linearly independent row 의 수는 같고, 이를 rank 라고 하며, Rk(A)로 표현한다

Remark. The rank of a matrix has some important properties:

- $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{A}^\top)$, i.e., the column rank equals the row rank.
- The columns of $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ span a subspace $U \subseteq \mathbb{R}^m$ with $\dim(U) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$. Later we will call this subspace the *image* or *range*. A basis of U can be found by applying Gaussian elimination to $\boldsymbol{A}$ to identify the pivot columns.
- The rows of $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ span a subspace $W \subseteq \mathbb{R}^n$ with $\dim(W) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$. A basis of W can be found by applying Gaussian elimination to $\boldsymbol{A}^\top$.
- For all $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ it holds that $\boldsymbol{A}$ is regular (invertible) if and only if $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = n$.
- For all $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and all $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ it holds that the linear equation system $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ can be solved if and only if $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, where $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ denotes the augmented system.
- For $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ the subspace of solutions for $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ possesses dimension $n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$. Later, we will call this subspace the *kernel* or the *null space*.
- A matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ has *full rank* if its rank equals the largest possible rank for a matrix of the same dimensions. This means that the rank of a full-rank matrix is the lesser of the number of rows and columns, i.e., $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = \min(m, n)$. A matrix is said to be *rank deficient* if it does not have full rank.

2.7 Linear Mapping

Definition 2.18 (Coordinates)**.** Consider a vector space V and an ordered basis $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ of V. For any $\boldsymbol{x} \in V$ we obtain a unique representation (linear combination)

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n \tag{2.90}$$

of $\boldsymbol{x}$ with respect to B. Then $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ are the *coordinates* of $\boldsymbol{x}$ with respect to B, and the vector

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.91}$$

is the *coordinate vector/coordinate representation* of $\boldsymbol{x}$ with respect to the ordered basis B.

Vector space V =(b1,b2,b3…bn)이 있을 때, x 라는 벡터를 b1,b2… 벡터들로 표현할 수 있는데, 순서가 정해져 있기 때문에 각각의 벡터에 곱해져 있는 계수만 확인하면 된다. 이 계수를 차례로 1xn 행렬로 만들 수 있는데, 이를 basis B 에 관한 x 의 좌표라고 함

- Example

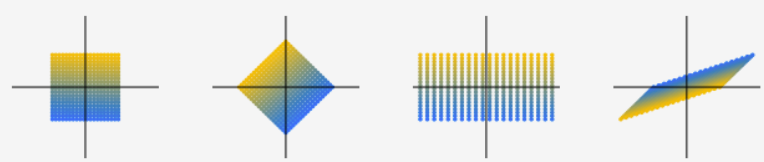
Example 2.21 (Transformation Matrix)
Consider a homomorphism $\Phi : V \to W$ and ordered bases $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_3)$ of V and $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_4)$ of W. With

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{b}_1) &= \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2 + 3\boldsymbol{c}_3 - \boldsymbol{c}_4 \\ \Phi(\boldsymbol{b}_2) &= 2\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2 + 7\boldsymbol{c}_3 + 2\boldsymbol{c}_4 \\ \Phi(\boldsymbol{b}_3) &= 3\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_3 + 4\boldsymbol{c}_4 \end{aligned} \tag{2.95}$$

위의 식을 이용하여

$$\boldsymbol{A}_\Phi = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Example 2.22 Linear Transformations of Vectors



(a) Original data. (b) Rotation by 45°. (c) Stretch along the horizontal axis. (d) General linear mapping.

:(a)의 original data 에 대해 3 가지의 다른 linear mapping

- image kernel

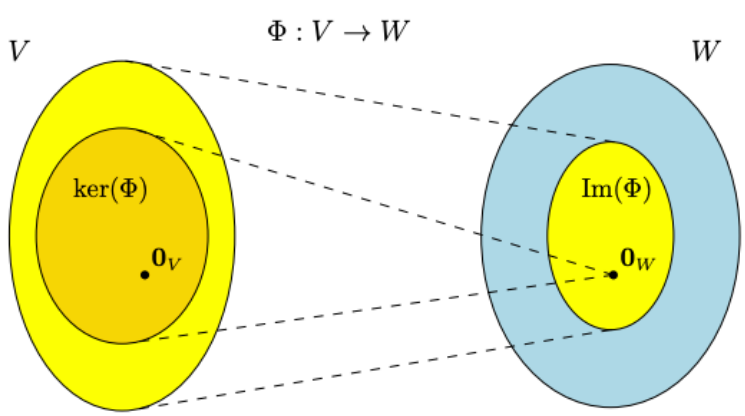
Kernel: vector space V 안에 있는 Subset 이 Vector Space W 로 Mapping 될 때, 0w 이 되는 vector space 이다

$$\ker(\Phi) := \Phi^{-1}(\boldsymbol{0}_W) = \{\boldsymbol{v} \in V : \Phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\}$$

Image: vector space V 전체가 vector space W 안에 있는 Subset 으로 mapping 되는 경우

$$\mathrm{Im}(\Phi) := \Phi(V) = \{\boldsymbol{w} \in W | \exists \boldsymbol{v} \in V : \Phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$$

이를 그림으로 표현해보면,



2.8 Affine Spaces

- Affine subspace

주로 parameter 를 이용해 많이 표현된다

Remark. Consider two affine subspaces $L = \boldsymbol{x}_0 + U$ and $\tilde{L} = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 + \tilde{U}$ of a vector space V. Then, $L \subseteq \tilde{L}$ if and only if $U \subseteq \tilde{U}$ and $\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \in \tilde{U}$.

Affine subspaces are often described by *parameters*: Consider a k-dimensional affine space $L = \boldsymbol{x}_0 + U$ of V. If $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ is an ordered basis of U, then every element $\boldsymbol{x} \in L$ can be uniquely described as

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{b}_k \,, \tag{2.131}$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. This representation is called *parametric equation* of L with directional vectors $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ and *parameters* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. ◇

(이러한 식을 directional vector b1, b2,…,bk 와 매개변수들로 이루어진 parametric equation 이라고 한다)

- Affine Mapping

Vector space 간의 linear mapping 과 비슷하게 2 개의 affine spaces 사이에도 mapping 을 정의할 수 있다. 따라서 linear mapping 에서 알고 있는 많은 성질을 affine mapping 에도 적용할 수 있다

mapping $\Phi : V \to W$, and $\boldsymbol{a} \in W$, the mapping

$$\phi : V \to W \tag{2.132}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a} + \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{2.133}$$

is an *affine mapping* from V to W. The vector $\boldsymbol{a}$ is called the *translation vector* of ϕ.