Ch 2.6 Basis and Rank

-복습: 가장 간단한 벡터들의 조합으로 vector space 구성하기 위한 노력

- Definition 2.13(Generating set and span)

Vector space V 의 부분집합인 A 가 존재함. V 의 임의의 원소 v 가 집합 A 의 원소들의 일차 결합으로 표현되면 A 는 V 를 generate 한다고 표현함

A 원소들의 모든 일차 결합을 모아놓은 집합이 span of A

V = span[A]

A 가 V 를 span 하면 V 의 원소들은 A 의 원소들의 일차결합으로 표현할 수 있음

Definition 2.14 (Basis)

A 는 minimal(더 이상 작게 할 수 없음) = Vector space V 와 A 가 있을 때 A 는 V 를 generate 하지만 A 의 어떠한 부분집합도 V 를 generate 하지 못함

V 를 generate 하는 linearly independent 한 모든 집합들은 minimal called basis

유한 차원의 vector space 에 대해서만 다루므로 V 의 dimension 을 basis 에 포함된 vector 들의 개수로 정의. Dim(V)

2.6.2 Rank

정의. 만약 B1, B2 가 vector space V 의 basis 라고 하면 n(B1)=n(B2)

Vector 을 열로 가지는 행렬 A 를 만들었을 때 A 의 linearly independent 한 column 의 개수를 rank 라고 함

= Dim(V)는 vector space 의 basis 개수이며 행렬로는 rank(A)

2.7 Linear Mappings

구조에서 더 나가서 관계로 확장해나감

Linear mapping 은 두 vector space 가 그림자와 같이 연결된 것처럼 보이게 함

V 에서 두 개를 연산한 결과의 Mapping

Definition 2.15

(1) 벡터의 합 조건 : f(v1 + v2) = f(v1) + f(v2)

이처럼 연산 법칙만 그대로 보존하는 mapping 을 homomorphism 이라 부름

(2) 스칼라 곱 조건 : f(cv) = cf(v), 단 c 는 임의의 실수

Definition 2.16

1. Injective(1-1 함수)

2. Subjective(공역과 치역기 같은 함수)

3. 둘 다 만족하면 bijective(1-1 대응. 역함수 존재)

Theorem 2.17. dim 이 같으면 isomorphic(대수적인 구조가 같음)

Dim(V)=dim(W) 라고 한다면 V 와 W 사이에는 linear mapping 이 존재함

+) transformation 이 가능함(mxn 행렬과 mn 개의 tuple 의 vector space(R^mn)는 서로 dimension 이 mn 으로 같음-〉 isomorphim 이 존재함)

2.7.1 Matrix Representation of Linear Mappings

n 차원의 실수 공간과 n 개의 원소로 이루어진 basis 를 가지는 vector space

n 차원에서는 좌표가 중요하니 basis 의 원소도 순서를 지켜 봐야됨 =〉 V 의 ordered basis

Ordered basis: B = (~~)

(Unordered basis): B={~~}

Basis 의 벡터들을 열로 가지는 행렬: B=[~~]

Definition 2.18(Coordinates)

Ordered basis 는 n 차원의 실수 공간과 연결을 시킬 수 있음. 그래서 coordinat 의 개념이 등장함.

Vector space V=(b1, b2, …, bn)이면 x 라는 벡터를 b1, b2, …, bn 이라는 벡터들을 사용해 나타낼 수 있음

순서가 정해져 있으므로 각각의 벡터에 곱해져 있는 계수들만 잘 보면 됨

계수를 차례로 1 투 행렬 만듦 -> basis B 에 관한 x 좌표

같은 벡터더라도 어떤 basis 로 나타내느냐에 따라 좌표가 달라질 수 있음

IF 같은 차원의 V, W 두 개의 vector space 가 구조적으로 같음

각각에 대해 ordered basis 를 가지고 x 의 좌표를 구했고 x 에 대응되는 좌표를 W 에서 찾음

둘의 좌표 사이에는 어떠한 관계가 존재하는가?

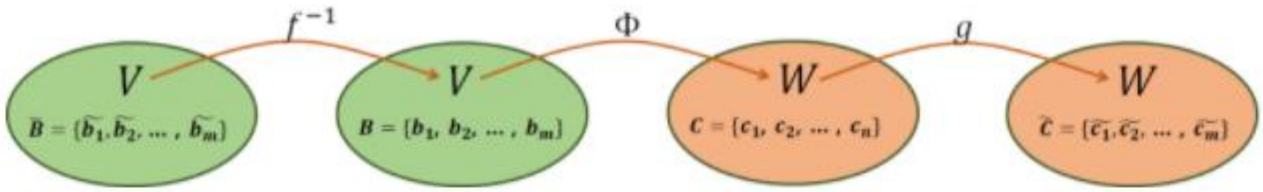
Definition 2.19 (Transformation Matrix)

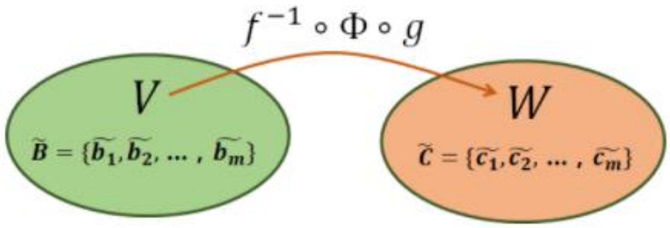
각각의 b1, b2, …, bn 에 대해서 대응되는 좌표들을 행렬의 열로 모으면 이 행렬이 바로 좌표를 변환시켜주는 Transformation Matrix(좌표를 변화시켜주는 행렬)

Mapping 을 어떻게 주느냐에 따라 달라짐

2.7.2 Basis Change

Basis 는 unique 하지 않으므로 다른 basis 도 존재할 수 있음





행렬의 관계에 대해서 언급하는 용어

두 행렬이 동치(equivalent)

결국 V 의 basis 를 W 의 basis 로 옮기는 mapping 인데, 다른 basis 로 바꾼 다음 다시 오는 것임

Equivalent 는 어떤 면에서는 차원이 같다는 것까지는 장담할 수 없지만 유사(similar)하다고 하면 차원까지도 동일

(즉, equivalent 할 때 similar subspace 가 존재함)

2.7.3 Image and Kernel

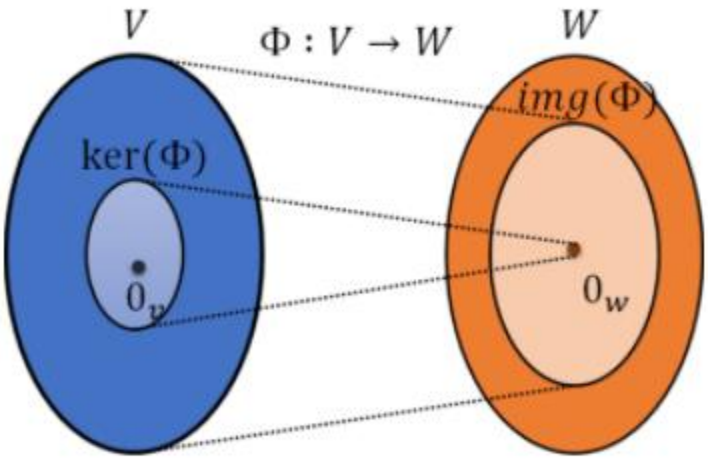
f(v1) = f(v2) ⇔ f(v1)-f(v2) = 0

f(c) = 0 ⇔ v1-v2 = kc (k 는 상수)

Definition 2.23 (Image and kernel)

kernel 은 W 의 identity 원소 0w 로 대응되는 모든 V 의 vector 들의 집합

image 는 치역(값의 영역)



Rank-Nullity Theorem

Vector space V, W 와 linear mapping f:V->W 에 대하여 다음이 성립

Dim(ker(f)+dim(Im(f)) = dim(V)

Ch2.8 Affline Spaces

2.8.1 Affine Subspaces

Dimension 이 k 인 subspace U 에 대하여 affline space L 이 L=x0 + U 라 하고 basis 는 {b1, b2, …, bn}이라고 함

U 의 원소는 basis 의 원소들의 일차결합으로 표현됨

X = x0 + λ1b1 + … +λkbk

Parametic equation consisted of directional vector b1, b2, … 와 매개변수 λ1, λ2, …로 이루어짐

2.8.2 Affine Mappings

Vector spaces 간 linear mapping 처럼 affline spaces 도 mapping 정의 가능

Linear mapping 의 다양한 성질은 affline mapping 에도 적용 가능