2. Linear Algebra (선형대수학)

- 벡터
  : 합해도 원래 대상의 범주 안에 있고(덧셈에 의해 닫혀있고),
  : 실수 값인 스칼라를 곱해도 다시 원래 대상의 범주 안에 있는 대상

2.1 Systems of linear equations (연립 선형 방정식)

: 선형대수학의 중심이 되는 파트

: 선형대수학의 중요한 요소

이 선형방정식의 풀이를 systematic 하게 체계적으로 수행하기 위해 Matrix(행렬)라는 개념이 도입

2.2 Matrices

Linear functions, Linear mapping 을 표현할 때 유용하게 쓰이는

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

2.2.1 Matrix Addition and Multiplication

- Addition

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Multiplication

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, k.$$

* Identity Matrix (단위 행렬)

: 대각선 부분만 1, 나머지는 다 0

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- 행렬의 결합법칙(Associativity), 분배법칙(Distributivity), 단위행렬(Identity Matrix)의 연산

$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p \times q} : (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n \times p} : (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{AD}$$
$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{I}_m \neq \boldsymbol{I}_n \text{ for } m \neq n.$$

2.2.2 Inverse and Transpose

- Inverse(역행렬)

: AB = I = BA 인 행렬 A 를 B 의 역행렬이라 하고, A^{-1} 이라고 표현

  * 모든 행렬이 역행렬을 가지지는 않는다

- Transpose(전치)

: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 인 행렬에 대해서, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 이고 $b_{ij} = a_{ji}$ 인 행렬 B 를 A 의 전치행렬이라고 하고 B = $A^\top$

* important properties

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$$
$$(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$$

2.2.3 Multiplication by a Scalar

- *Associativity:*
  $(\lambda\psi)\boldsymbol{C} = \lambda(\psi\boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\lambda(\boldsymbol{BC}) = (\lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{BC})\lambda, \quad \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n \times k}$.
  Note that this allows us to move scalar values around.
- $(\lambda\boldsymbol{C})^\top = \boldsymbol{C}^\top\lambda^\top = \boldsymbol{C}^\top\lambda = \lambda\boldsymbol{C}^\top$ since $\lambda = \lambda^\top$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Distributivity:*
  $(\lambda+\psi)\boldsymbol{C} = \lambda\boldsymbol{C} + \psi\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  $\lambda(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \lambda\boldsymbol{B} + \lambda\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

2.2.4 Compact Representations of System of Linear Equation

연립 선형 방정식의 간결한 표현

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1$$
$$4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 8$$
$$9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2$$

와 같은 연립 선형 방정식을 행렬의 곱셈을 이용하여 표현할 수 있다

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -7 \\ 9 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

→ Ax = b 로 깔끔하게 표현 가능

2.3 Solving Systems of Linear Equation

: 선형 방정식을 행렬로 간단하게 표현하고, 행렬의 연산을 통해 선형 방정식의 해를 구하는 방법

2.3.1 Particular and General Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Particular solution(special solution)
  : Ax = b 의 형태에 대한 해
  : 위의 연산에서 해는 $[42,8,0,0]^T$

- Homogeneous solution
  : Ax = 0 의 형태에 대한 해

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \lambda_1(8\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_3) = \boldsymbol{0}$$, $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \left(\lambda_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \lambda_2(-4\boldsymbol{c}_1 + 12\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_4) = \boldsymbol{0}$$

  : 연산의 결과가 0 이 되게 하는 해를 구한다

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- General solution
  : particular solution 과 homogeneous solution 을 합친 해
  : Ax = b 에 대한 vector space 상의 모든 해

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 42 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

  : 결국 총 3 가지 단계
   1) Ax = b 에 대한 particular solution 을 찾는다
   2) Ax = 0 에 대한 모든 solution 을 찾는다
   3) 위의 두 해들을 combine

2.3.2 Elementary Transformations

- Example 2.6

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & -3 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & a \end{array}$$

(1) 주어진 Ax = b 형태의 선형 방정식을 [A | b]의 형태로 변환

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array}\right]$$

(2) 0 인 3 번째 행과 다른 행들을 더하거나 빼기 위해, 1 번째 행과 3 번째 행의 위치를 변경

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array}\right]$$

(3) 0 이 아닌 상수값을 곱하여 0 번째 행과 더하거나 뺌 → row echelon form(행 사다리꼴) 생성

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ -4R_1 \\ +2R_1 \\ -R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

(4) 그럼 위의 행렬을 다음과 같은 방정식으로 표현된다

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & -2 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ & & & & & & & & 0 & = & a+1 \end{array}$$

(a = -1 이 될 수 밖에 없다)

따라서, particular solution 은

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (구하는 방법은 아래 * 참고)

(5) 2.3.3 을 통해 homogeneous solution 을 구한 후 combine 하면

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

* Row echelon form: basic variable 과 free variable 로 구성되어 있고, 해를 찾을 때 중요한 역할을 함
- pivot: 좌측부터 처음으로 0 이 아닌 값을 값 = basic variable
- pivot 값을 가진 column = pivot column
- pivot column 이 아닌 column = free column
- free column 에 대응하는 x 값 = free variable

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & -2 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ & & & & & & & & 0 & = & a+1 \end{array}$$

여기서 free column : x2, x5

Pivot column : x1, x3, x4

→ particular solution 을 구할 때 free variable 은 0 이 된다

2.3.3. The minus-1 Trick

Homogeneous solution 은 Ax = 0 의 해를 구하는 것으로, the minus-1 trick 을 사용하여 직관적으로 해를 찾을 수 있음

-만약 아래와 같은 reduced row echelon form 이 있다면

(reduced row echelon form =행 전체가 0 으로 구성되지 않은 행이 있다면, 그 행의 pivot 은 1 이어야 한다)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 \end{bmatrix}$$

- (n x n)의 행렬을 만들어준다. 추가된 행은 basic variable 이 없는 행에 추가되며, 행의 basic variable 에 대응하는 위치에 -1, 나머지는 0 을 넣는다

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

- 여기서 homogeneous solution 은 위에서 -1 이 추가된 열이 된다.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : \boldsymbol{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

2.4 Vector Space

2.4.1 Group

$\otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$

1. *Closure* of $\mathcal{G}$ under $\otimes$: $\forall x, y \in \mathcal{G} : x \otimes y \in \mathcal{G}$
2. *Associativity:* $\forall x, y, z \in \mathcal{G} : (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
3. *Neutral element:* $\exists e \in \mathcal{G}\, \forall x \in \mathcal{G} : x \otimes e = x$ and $e \otimes x = x$
4. *Inverse element:* $\forall x \in \mathcal{G}\, \exists y \in \mathcal{G} : x \otimes y = e$ and $y \otimes x = e$, where e is the neutral element. We often write x^{-1} to denote the inverse element of x.

→ Group 은 집합 g 에 대해, g 에 속한 원소 간의 연산이 g 에 속하는 것을 말한다.
(=연산에 대해 닫혀있다)

→ Group 은 결합 법칙이 성립, 항등원 존재, 역원 존재

* $(\mathbb{Z}, +)$ 는 Group 이다: 정수는 덧셈에 대해 닫혀있다
* $(\mathbb{N}_0, +)$ 는 Group 이 아니다:0 을 포함한 자연수는 역원이 존재 X
* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 는 Group 이 아니다: 정수는 항등원(1)을 가지고 있지만, $z \in \mathbb{Z}, z \neq \pm 1$ 인 경우 역원이 존재하지 않는다
* $(\mathbb{R}, \cdot)$ 는 Group 이 아니다: 0 은 곱셈에 대해서 역원이 존재 X

- General Linear Group(일반 선형군)

: invertible 한 정방형 matrix($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$)를 말하며 $GL(n, \mathbb{R})$로 표현

→ 교환 법칙이 성립되지 않기때문에 Group 은 아님

4.2.2 Vector spaces

vector space $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$

$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

- 특징

1. $(\mathcal{V}, +)$ is an Abelian group
2. Distributivity:
   1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V} : \lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y}$
   2. $\forall \lambda, \psi \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V} : (\lambda + \psi) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \psi \cdot \boldsymbol{x}$
3. Associativity (outer operation): $\forall \lambda, \psi \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V} : \lambda \cdot (\psi \cdot \boldsymbol{x}) = (\lambda\psi) \cdot \boldsymbol{x}$
4. Neutral element with respect to the outer operation: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V} : 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ → 곱셈에 대해 항등원이 존재한다.

- R^n : n x n 의 matrix

R^{1xn} : column vector

R^{nx1} : row vector

-x 가 column vector 면, x^T 는 row vector 이다

2.4.3 Vector subspaces

Vector subspaces

: vector space 의 부분 집합

: $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$을 vector space 라 할 때, vector subspaces 는 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{U} \neq \emptyset$인 vector space 의 부분 집합

: $U = (\mathcal{U}, +, \cdot)$이고 vector subspace 라 부른다

조건 1 $\mathcal{U} \neq \emptyset$, in particular: $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$

조건 2 outer operation 과 inner operation 에 대해 닫혀 있어야함

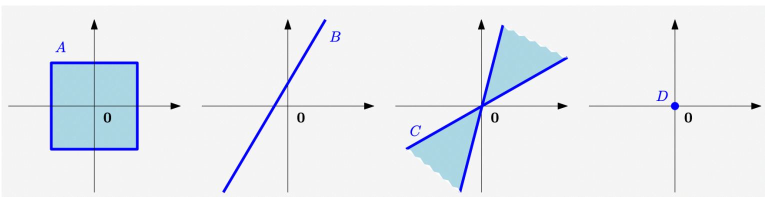
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{U} : \lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{U}.$$

: subspace 의 임의의 원소를 λ 배한 것도 subspace 의 원소일 때

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{U} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{U}.$$

: subspace 의 임의의 원소를 더한 것도 subspace 의 원소일 때

*Example 2.12



A,C 는 조건 2 를 만족하지 못한다 = vector subspace 가 될 수 없다

B 는 0 vector 를 지나지 않으므로 vector subspace 가 될 수 없다

(vector 에 0 을 곱하면 0 vector 가 되므로, 조건 2 를 만족하려면 0 vector 를 지나야한다)

D 는 vector subspace

2.5 Linear Independence

- Linear Combination(선형 결합)

vector space V, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \in V$$

→ 0 vector 는 Linear Combination 에서 항상 성립한다

- Linear (In)dependence

: $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$에서 적어도 하나 이상의 $\lambda_i \neq 0$ 인 경우, vector $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ 는 Linearly dependent(선형 종속)하다

: 위와 같은 상황에서 $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$이면 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ 는 Linearly Independent 하다

참고: http://savanna.korea.ac.kr/wp/?page_id=659, https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=walk_along&logNo=222156889002&proxyReferer=https:%2F%2Fm.facebook.com%2F