BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG

Giáo viên: TS. Nguyễn Văn Hiệu

Email: nvhieuqt@dut.udn.vn

Nội dung

- Các khái niệm
- Bài toán luồng cực đại
- Thuật toán Ford –Fulkerson
- Minh họa ví *dụ*

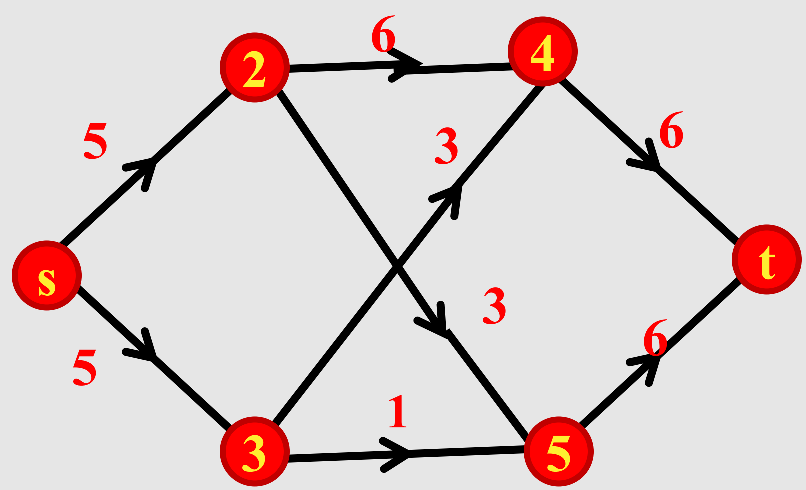
Các khái niệm

Mạng

- Đồ thị có hướng, có trọng số $G = (V, E)$:
  1. $\exists$! đỉnh s: $deg^{-}(s) = 0$,
     s - **đỉnh phát.**
  2. $\exists$! đỉnh t: $deg^{+}(t) = 0$,
     t - **đỉnh thu**.
  3. $\forall (i,j) \in E$: $c_{ij} > 0$,
     c_{ij} - **khả năng thông qua của cung (i,j)**.
  4. Đồ thị liên thông yếu

Ví dụ

- Đồ thị có đỉnh phát **s** và đỉnh thu **t**



- Khả năng thông qua: $c_{s3} = 5$,…

Các khái niệm

Luồng

- Mạng G, khả năng thông qua $c_{ij}\ \forall\ (i,j) \in E, s$ đỉnh phát, t đỉnh thu.
- **Luồng** trên G là hàm

$$f: E \to R^+:$$

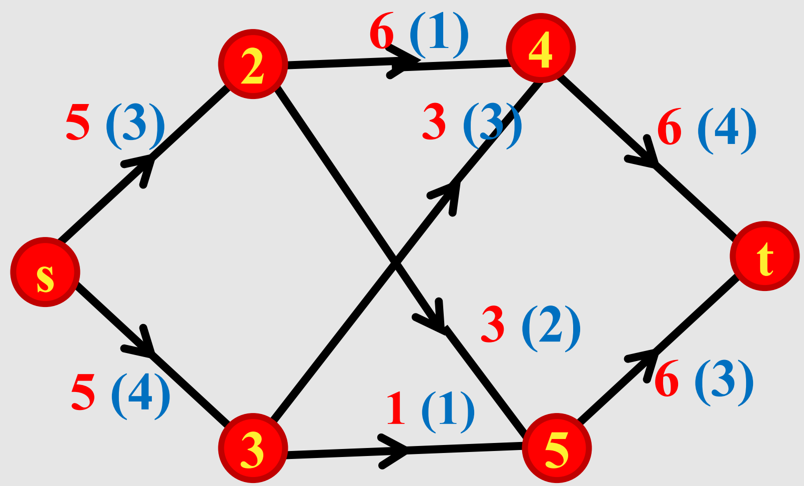
1. $f_{ij} \geq 0, \forall\ (i,j) \in E$

   f_{ij} **:- luồng trên cung (i,j).**
2. $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}\ , \forall\ (i,j) \in E.$
3. $\forall v$: $v \neq$ **s**, $v \neq$ **t**:

   $$\sum_{(i,v)\in E} f_{iv} = \sum_{(v,j)\in E} f_{vj}$$

Ví dụ

- Tập luồng f_{ij} được miêu tả trong ngoặc màu xanh



Các khái niệm

Định lý

- Cho $\{f_{ij}\}$ tập luồng trên mạng G và s đỉnh phát và t là đỉnh thu:

$$\sum_{(si)\in E} f_{si} = \sum_{(i,t)\in E} f_{it}$$

- Nếu $(i,j) \notin E$, thì $f_{ij} = 0$

$$\sum_{j\in V}\sum_{i\in V} f_{ij} = \sum_{j\in V}\sum_{i\in V} f_{ji}$$

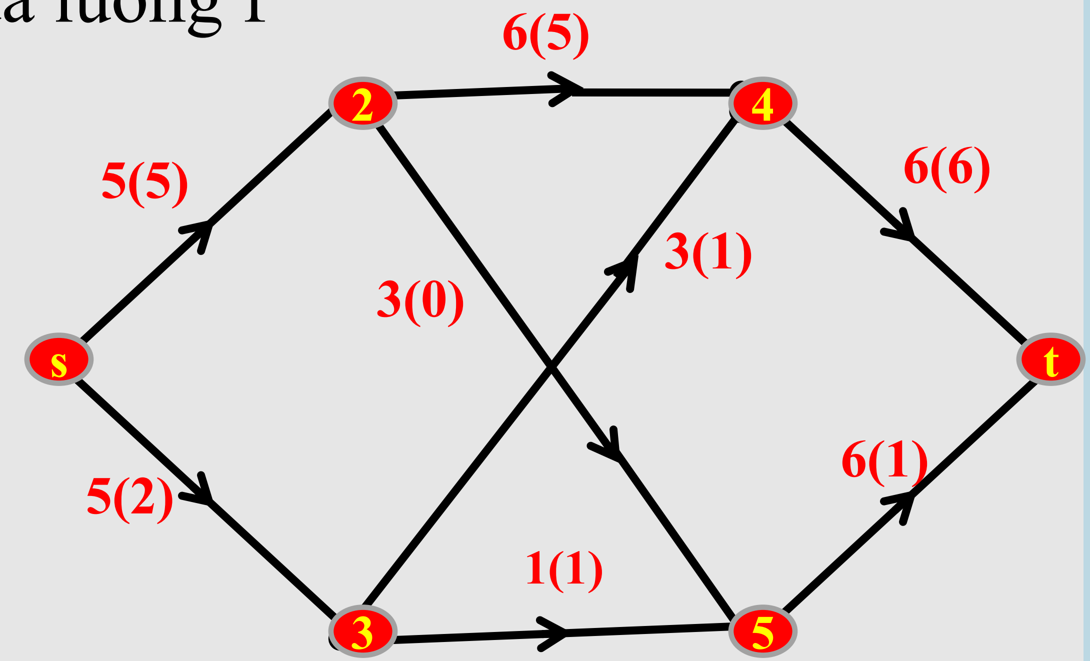
Giá trị của luồng

- Cho luồng f trên G giá trị của luồng được định nghĩa:

$$\mathrm{Val}(f) = \sum_{(si)\in E} f_{si} = \sum_{(i,t)\in E} f_{it}$$

Các khái niệm

- Xác định giá trị của luồng f



- **Val(f) = ?**

Bài toán luồng cực đại

- Mạng G với đỉnh phát s, đỉnh thu là t, và khả năng thông qua là c_{ij} $,\forall\,(i,j) \in E$.
- Trong số các luồng trên mạng G <u>tìm luồng có giá trị lớn nhất</u>

Bài toán luồng cực đại

- Xác định cường độ lớn nhất của dòng vận tải giữa hai nút của một bản đồ giao thông. Bài toán luồng cực đại chỉ ra đoạn đường đông xe nhất.

- Hệ thống đường ống dẫn dầu: ống – cung, s - tàu chở dầu, t - bể chứa, còn những điểm nối giữa các ống là các đỉnh của đồ thị. c_{ij} - diện tích ống. Cần phải tìm luồng lớn nhất để bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa.

Bài toán luồng cực đại

Ý tưởng

- Xuất phát từ một luồng nào đó, ta tìm đường đi (không định hướng) từ s đến t,
- Tiến hành hiệu chỉnh giá trị luồng trên đường đi sao cho luồng mới có giá trị lớn hơn.
- Nếu không tìm được đi như vậy thì luồng đó là cực đại.

Bài toán luồng cực đại

- Ý tưởng

- Giả sử

P = (s, a, ….,i, j , ….,z, t)

$$(i,j) = \begin{cases} (i, j) \in E \\ (j, i) \in E \end{cases}$$

- Ký hiệu:

P_+ là tập cung cùng hướng với P

P_- là tập cung ngược hướng với P

- Nếu (i,j) là cung thì cung đó cùng hướng với P.
- Nếu (j,i) là cung, thì cung đó ngược hướng với P.

Bài toán luồng cực đại

Cơ sở lý luận

- Cho f là luồng trên mạng G
- Giả sử đường đi không định hướng từ s đến t:

  P = (s =a,b,...,i,j,..,z = t)

  - $\forall (i,j) \in P_+$: $\mathbf{f_{ij} < c_{ij}}$
  - $\forall (i,j) \in P_-$: $\mathbf{0 < f_{ij}}$
- Đặt δ:= min {x | x ∈ M }
- M tập các giá trị $c_{ij} - f_{ij}$ với $(i,j) \in P_+$ và các giá trị f_{ij} với $(i,j) \in P_-$

Cơ sở lý luận

- Xây dựng luồng f* như sau:
- $f^* = \begin{cases} \mathbf{f_{ij}} & \forall (i,j) \notin P \\ \mathbf{f_{ij}} + \delta & \forall (i,j) \in P_+ \\ \mathbf{f_{ij}} - \delta & \forall (i,j) \in P_- \end{cases}$
- Giá trị luồng f* sẽ lớn hơn luồng f một đơn vị $\delta > 0$

  Val(f*) = val(f) + $\boldsymbol{\delta}$

Bài toán luồng cực đại

Tính đúng đắn

- f^* là luồng
- $(s,b) \in P_+$

  $f^*_{sb} = f_{sb} + \delta$
- $Val(f^*) = \sum_{(si)\in E} f^*_{si}$

  $= val(f) + \delta$

Thuật toán Ford- Fullkerson

- Input: Mạng G với đỉnh phát s đỉnh thu t, khả năng thông qua $C = (c_{ij}), (i,j) \in E$
- Ký hiệu $s = v_0, \ldots\ldots, v_n = t$
- Output: $F = (f_{ij}), (i,j) \in E$

Thuật toán Ford-Fullkerson

- Tìm luồng cực đại
- **Input:**
  - Mạng G với đỉnh phát s đỉnh thu t, khả năng thông qua C = (c_{ij}), (i,j) ∈ E
  - Ký hiệu s = v0, …..,vn = t
- **Output:**
  - F = (f_{ij}), (i,j) ∈ E

Thuật toán

- **Bước 1** *(khởi tạo luồng ban đầu)*

$$f_{ij} = 0, \forall (i,j) \in E$$

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)

Thuật toán Ford-Fullkerson

Thuật toán

- **Bước 1** *(khởi tạo luồng ban đầu)*

$$f_{ij} = 0, \forall (i, j) \in E$$

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

$$\mathbf{s(\ , \infty)}$$

Thuật toán

- **Bước 3** *(kiểm tra nhãn của đỉnh thu)*
  - Nếu t có nhãn ----> **bước 6**
  - Nếu t chưa có nhãn--->**bước 4**
- **Bước 4** *(xác định đỉnh đánh dấu)*
  - Xét các đỉnh **mang nhãn mà chưa đánh dấu, chọn v: = v_i,** i chỉ số bé nhất.
  - Nếu ∃ v_i, thì **Đánh dấu v.**
  - Nếu ∄ v_i, thì **Kết thúc và F là luồng cực đại.**

Thuật toán Ford-Fullkerson

Thuật toán

- **Bước 5** *(gán nhãn cho các đỉnh chưa có nhãn, kề với v)*
  - Giả sử nhãn của v (α, Δ)
  - Xét cung dạng (v,W) và (W,v) (theo thứ tự *(v,v_0) (v_0,v), (v,v_1) (v_1,v), …)*
  - ✓ Cung dạng **(v,W):**
    - Nếu $f_{vW} < C_{vW}$, **gán nhãn W (v, x) với**

      $x = \min \{\Delta, C_{vW} - f_{vW}\}$
    - Nếu $f_{vW} = C_{vW}$, **không gán nhãn cho W**

Thuật toán

  - ✓ Cung dạng **(W,v):**
    - Nếu $f_{Wv} > 0$, **gán nhãn W (v, x) với**

      $x = \min \{\Delta, f_{Wv}\}$
    - Nếu $f_{Wv} = 0$, **không gán nhãn cho W**
  - **Quay lại bước 3**
- Lưu ý: chỉ xét các W chưa được gán nhãn

Thuật toán Ford-Fullkerson

Thuật toán

- **Bước 6** *(hiệu chỉnh luồng)*
  - Giả sử **(β, δ)** là nhãn của t (đỉnh thu).
    - Đặt $W_0 = t$, $W_1 = \beta$
  - Nếu nhãn của w_i là **($\beta`, \delta`$)**
    - Đặt $W_{i+1} = \beta`$
  - *... (tiếp tục*)
    - Đặt $W_k = s$ (đỉnh phát)

Thuật toán

- Nhận được đường đi P từ s đến t.

  ($s = W_k, W_{k-1}, \ldots, W_1, W_0 = t$)

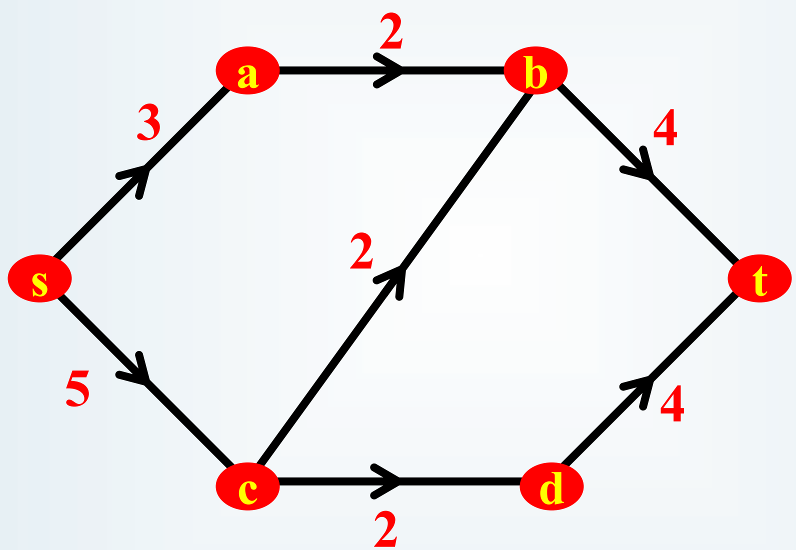
- **Điều chỉnh f trên P:**

$$f = \begin{cases} f_{ij} & \forall (i,j) \notin P \\ f_{ij} + \delta & , \forall (i,j) \in P_+ \\ f_{ij} - \delta & , \forall (i,j) \in P_- \end{cases}$$

- **Xóa tất cả các nhãn trên P và quay lại bước 2**

Ví dụ

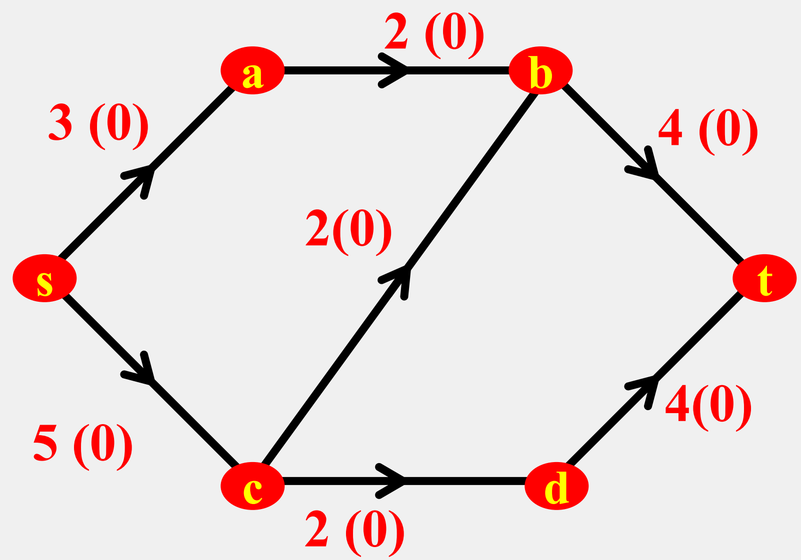
- Tìm luồng cực đại trên mạng G



- Thứ tự các đỉnh: s a b c d t

Ví dụ

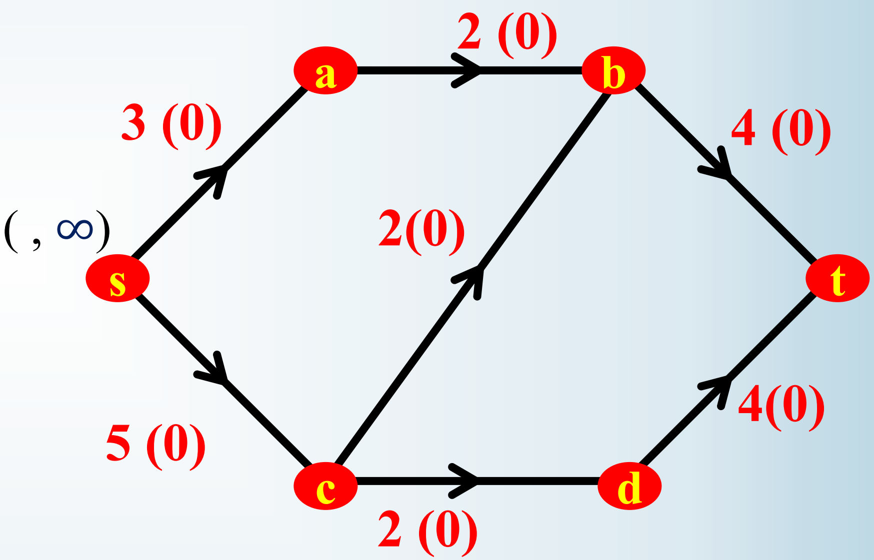
- **Bước 1**(*khởi tạo luồng ban đầu*)
  - $f_{ij} = 0, \forall (i, j) \in E$
  - val (f) = 0



Ví dụ

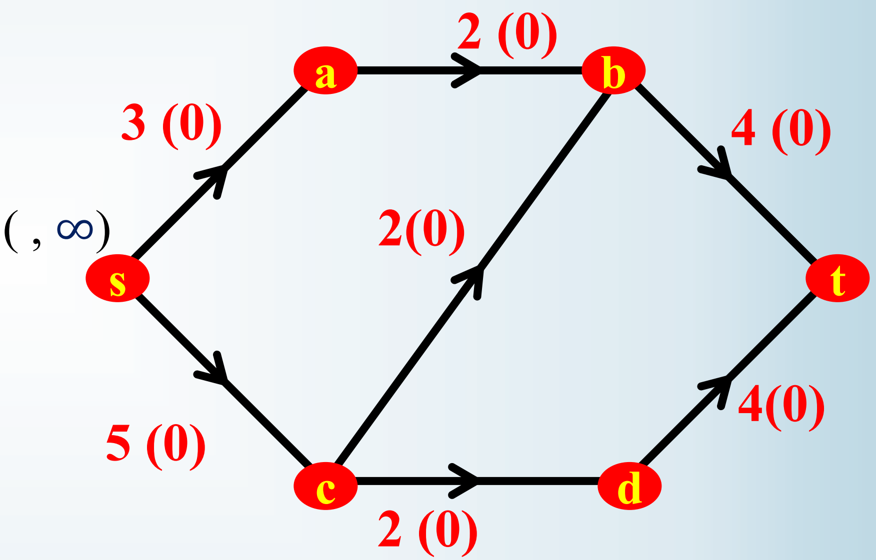
- **<u>Bước 2</u>** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)



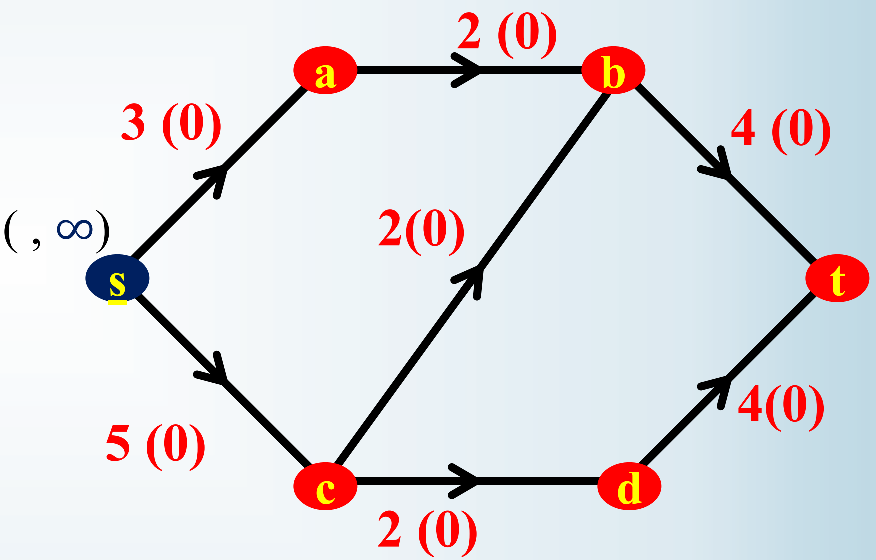
Ví dụ

- **Bước** ***3*** *(kiểm tra nhãn của đỉnh thu)*
  - t chưa có nhãn--->**bước 4**



Ví dụ

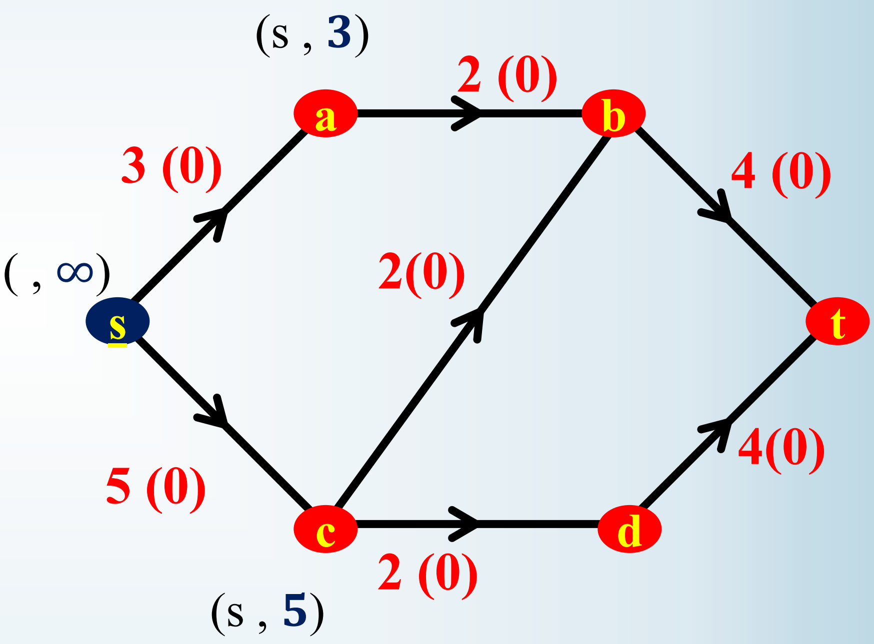
- <u>**Bước 4**</u>*(xác định đỉnh đánh dấu)*
  - Xét các đỉnh **mang nhãn** và **chưa đánh dấu,**
  - **chọn v: = s.**
  - Đánh dấu s (sử dụng màu để đánh dấu)



Vi dụ

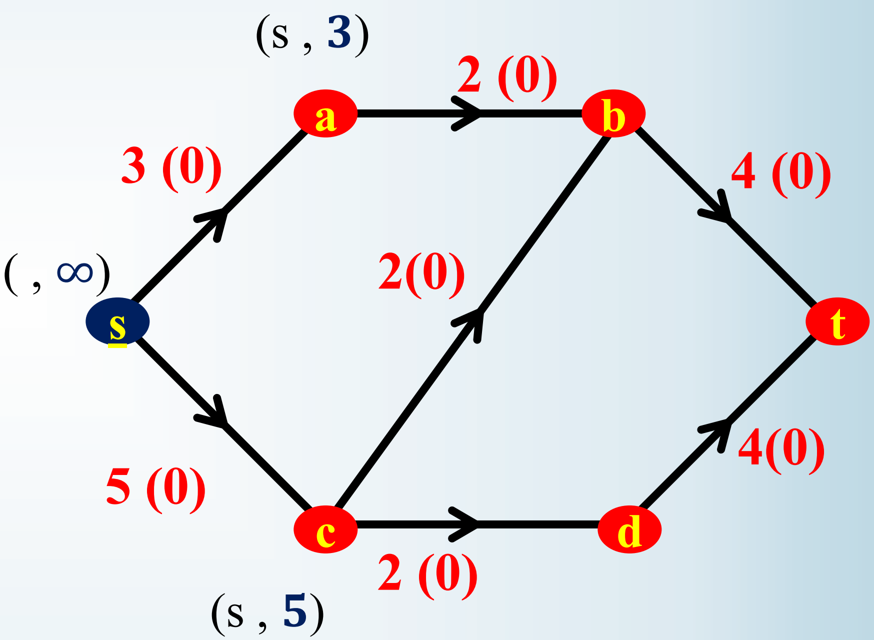
- **Bước 5** *(gán nhãn cho các đỉnh chưa có nhãn, kề với v)*
  - Cung kề với s
  - Cung **(s,a):**
    - $f_{sa} = 0 < C_{sa} = 3$, **gán nhãn a (s, 3) với**

      $x = \min\{\infty, 3 - 0\}$
  - Cung **(s,c):**
    - **gán nhãn c (s, 5) với**
  - **Chuyên sang bước 3**



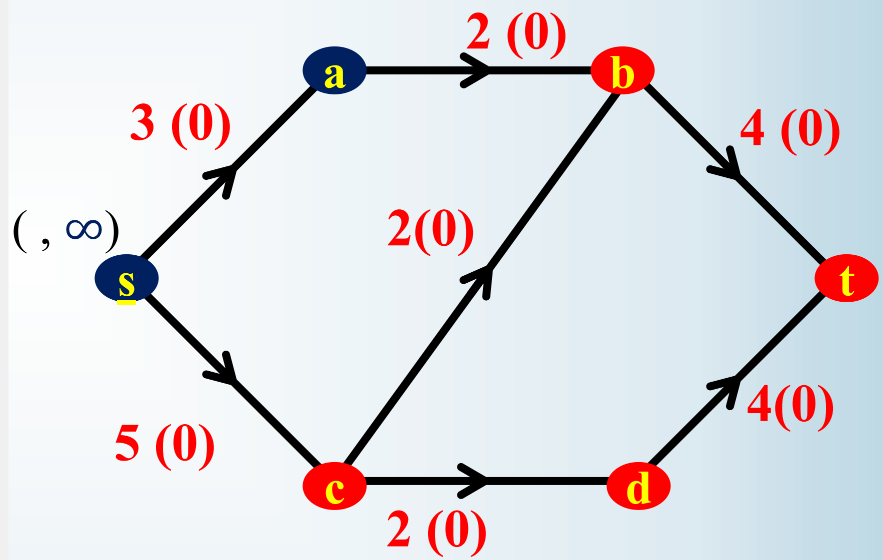
Vi dụ

- **Bước *3*** *(kiểm tra nhãn của đỉnh thu)*
  - t chưa có nhãn--->**bước 4**



Vi dụ

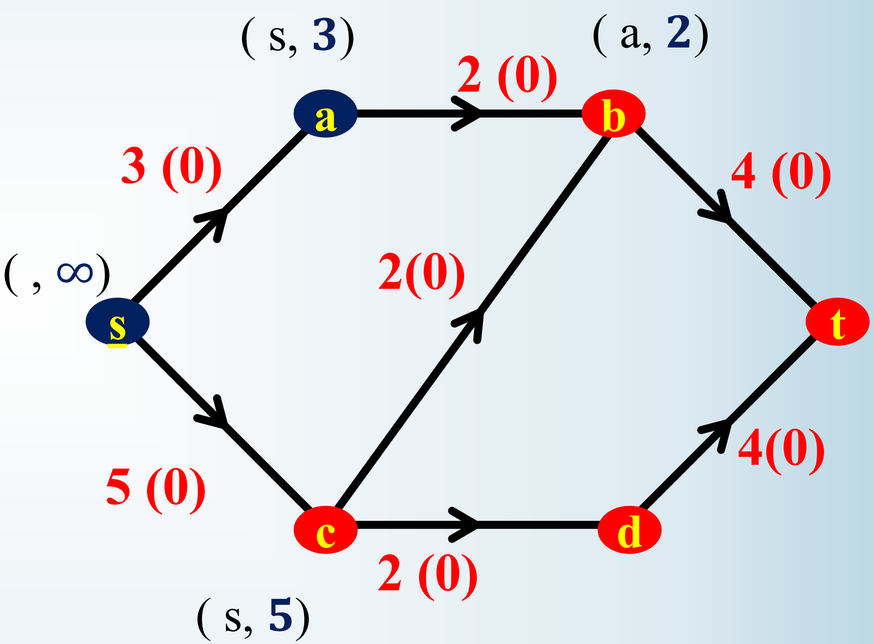
- **Bước 4***(xác đỉnh đỉnh đánh dấu)*
  - Xét các đỉnh **mang nhãn** và **chưa đánh dấu,**
  - **chọn v: = a.**
  - Đánh dấu a (sử dụng màu để đánh dấu)



Vi dụ

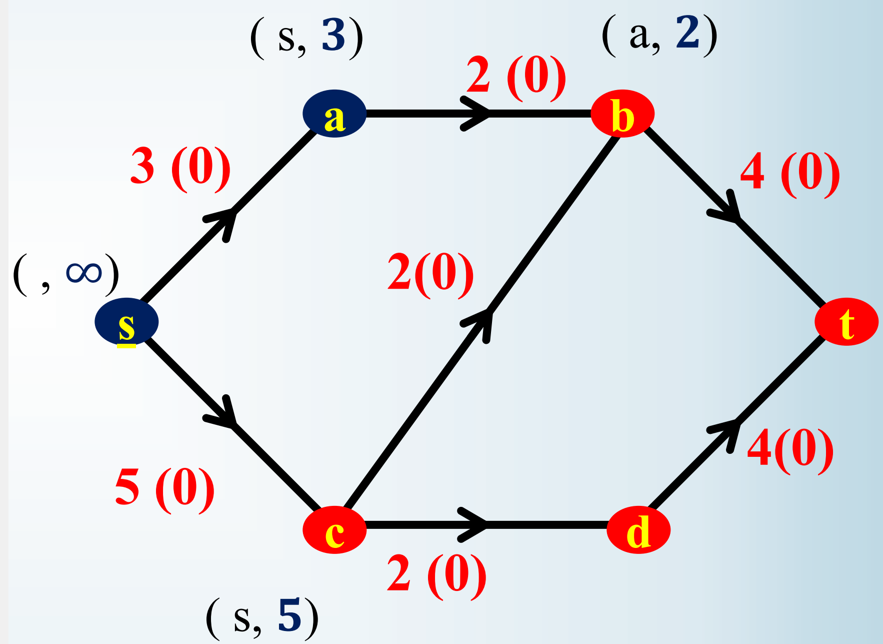
- **Bước 5** *(gán nhãn cho các đỉnh chưa có nhãn, kề với v)*
  - Cung kề với a
  - Cung **(a,b):**
    - $f_{ab} = 0 < C_{ab} = 2$, **gán nhãn b (s, 2)**

      x = min{3, 2-0} =2
  - **Chuyển sang bước 3**



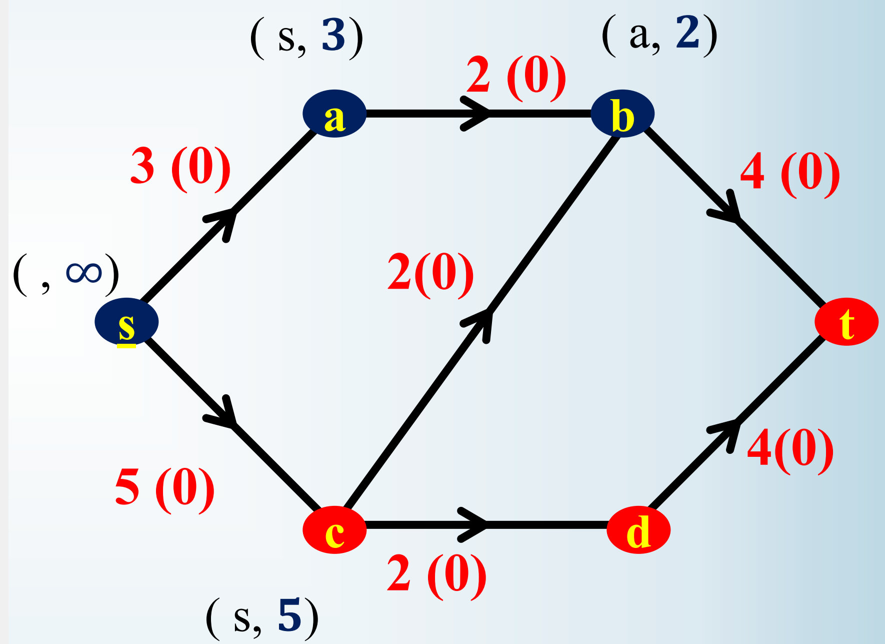
Ví dụ

- **Bước *3*** *(kiểm tra nhãn của đỉnh thu)*
  - t chưa có nhãn--->**bước 4**



Vi dụ

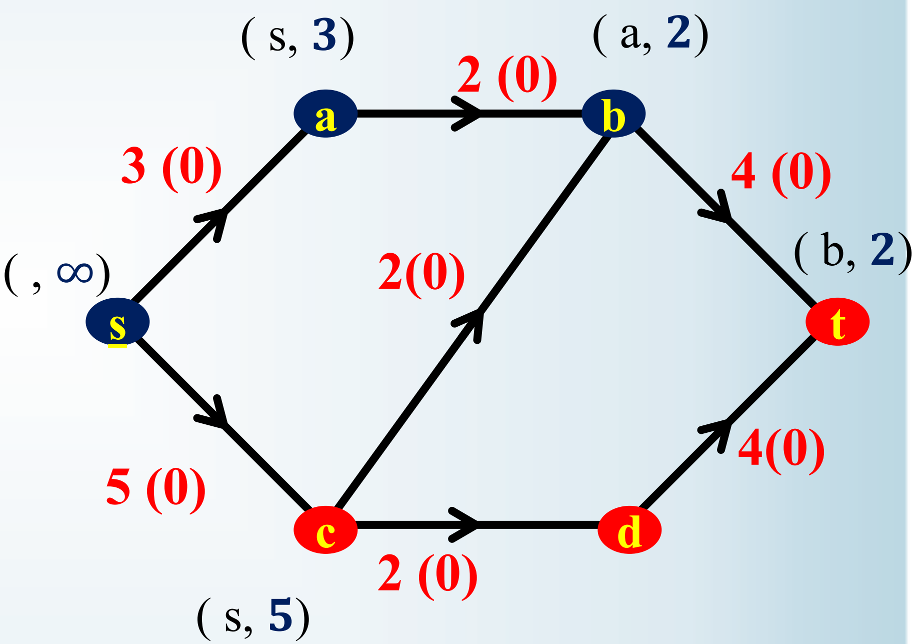
- **Bước 4** *(xác định đỉnh đánh dấu)*
  - Xét các đỉnh **mang nhãn** và **chưa đánh dấu,**
  - **chọn v: =** **b**.
  - Đánh dấu b (sử dụng màu để đánh dấu)



Vi dụ

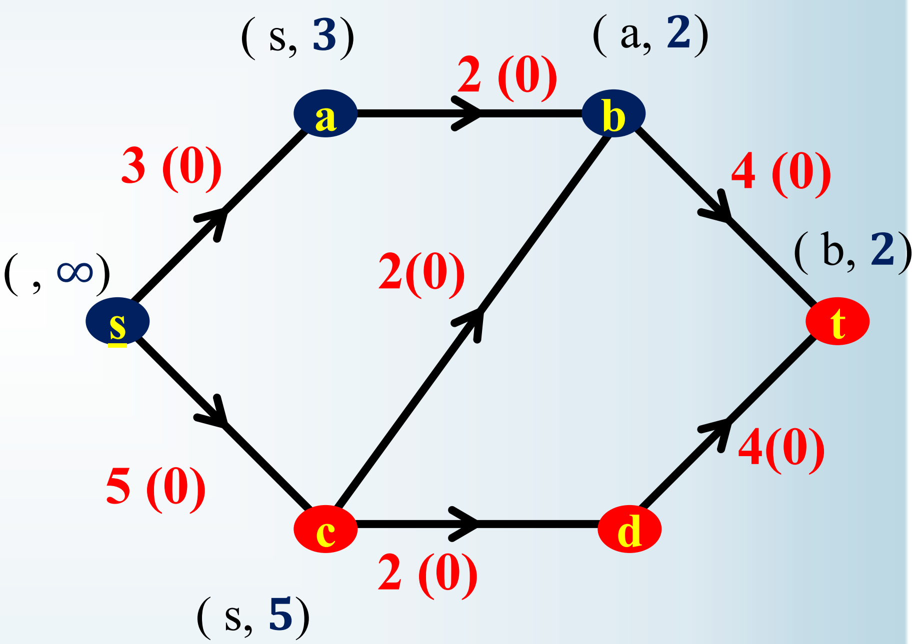
- **Bước 5** *(gán nhãn cho các đỉnh chưa có nhãn, kề với v)*
  - Cung kề với v
  - Cung **(b, t):**
    - $f_{bt} = 0 < C_{bt} = 4$, **gán nhãn t(b, 2)**

      x = min{2, 4-0} =2
  - **Chuyển sang bước 3**



Vi dụ

- **Bước *3*** *(kiểm tra nhãn của đỉnh thu)*
  - t --->**bước 6**



Vi dụ

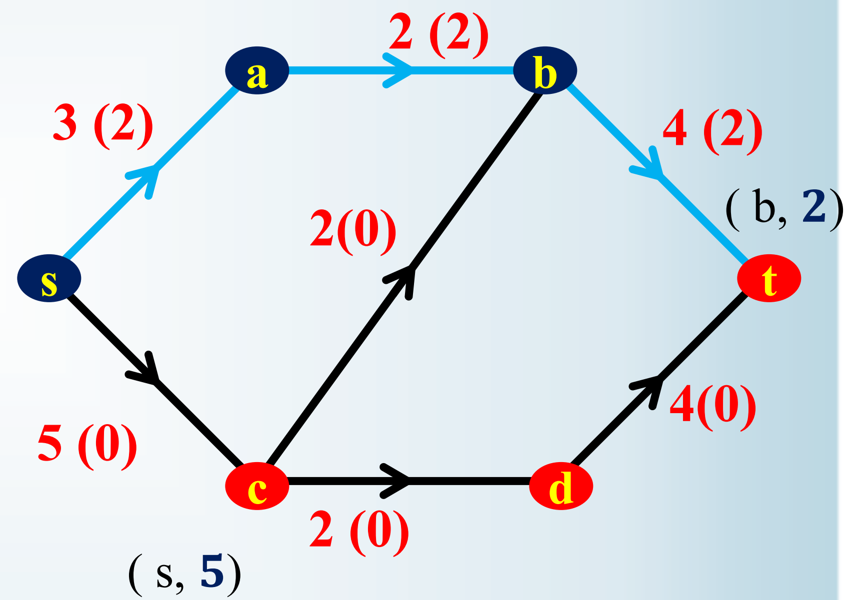
- **Bước 6** *(hiệu chỉnh luồng)*
  - $W_0 = t$, $W_1 = b$
  - $W_2 = a$, $W_3 = s$
- Đường đi P từ s đến t.

(s, a, b, t)

- Điều chỉnh f trên P:

$$f = \begin{cases} \mathbf{f}_{\mathbf{ij}} & \forall\ (i,j) \notin P \\ \mathbf{f}_{\mathbf{ij}} + 2 & ,\forall\ (i,j) \in P_+ \\ \mathbf{f}_{\mathbf{ij}} - 2 & ,\forall\ (i,j) \in P_- \end{cases}$$

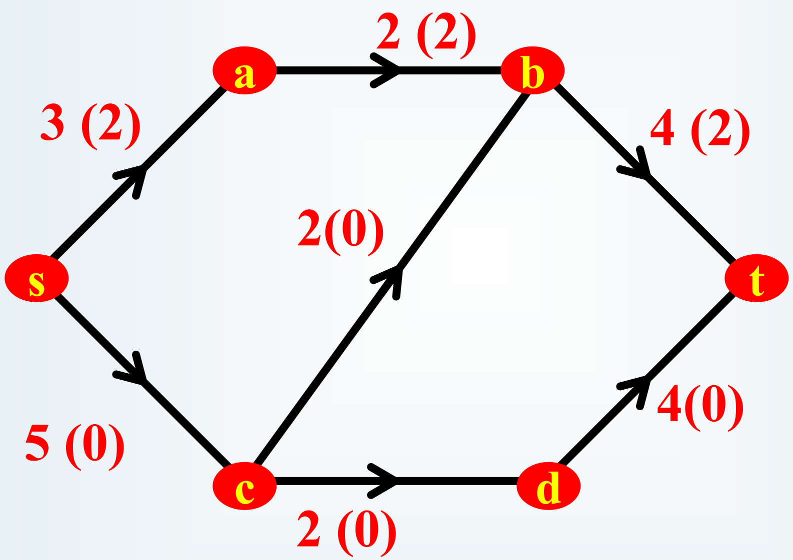
- **Val(f) = 2**
- **Xóa tất cả các nhãn trên P và quay lại bước 2**



Ví dụ

Val(f) = 2

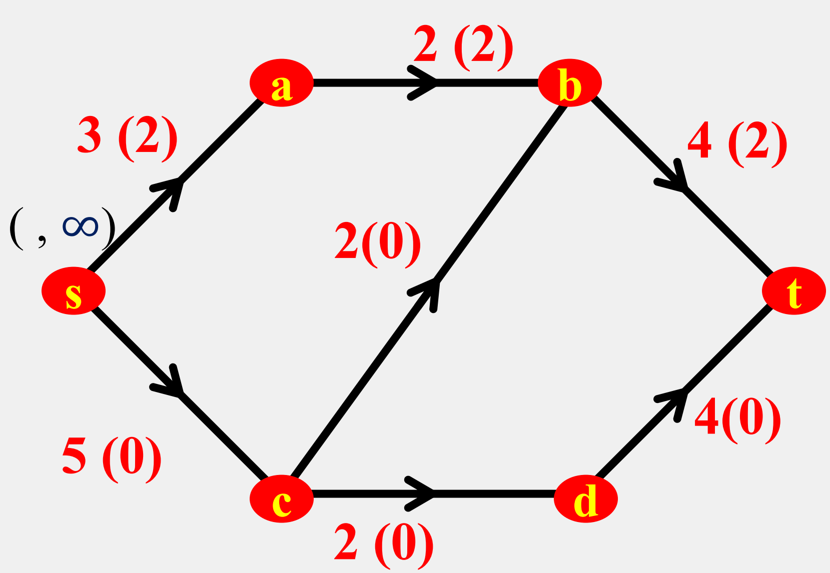
Quay lại bước 2



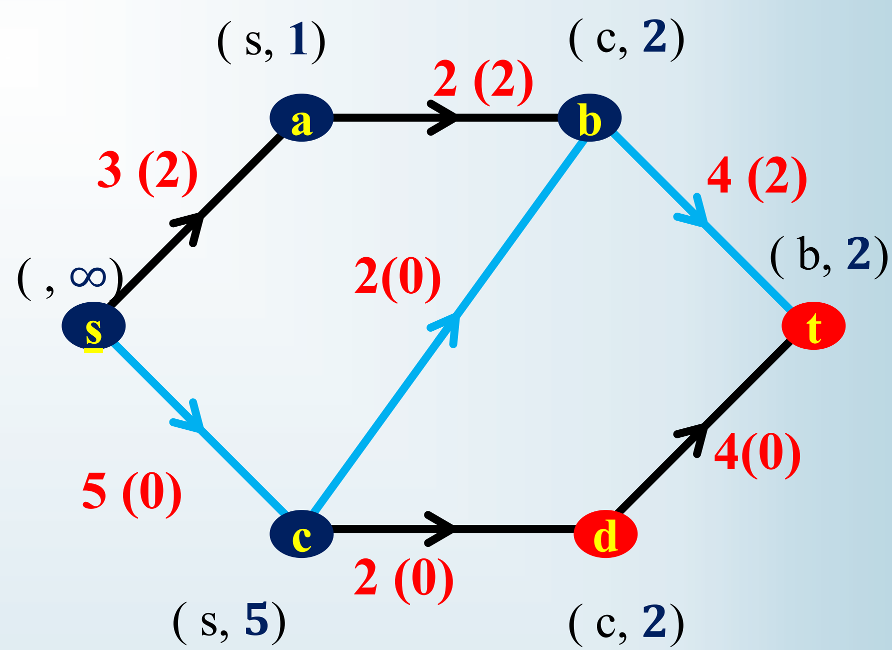
Ví dụ

- **<u>Bước 2</u>** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)



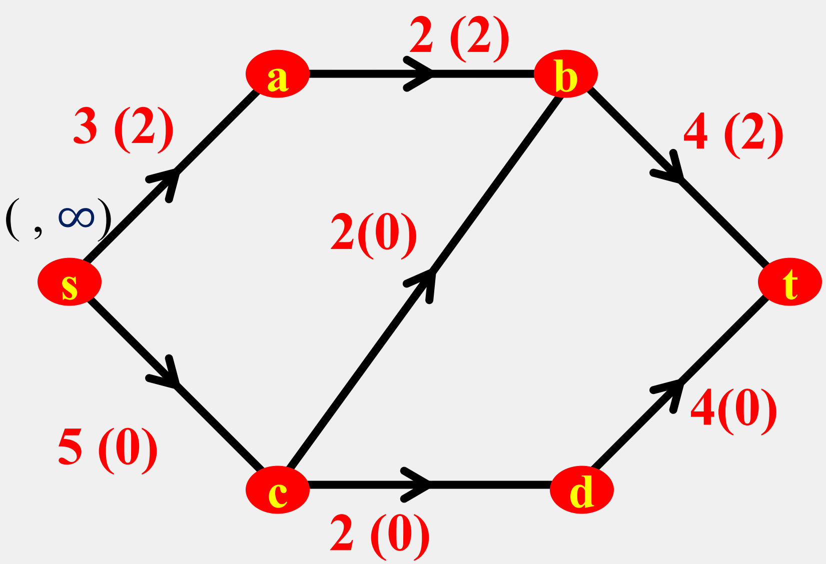
- Tiếp tục lặp quá trình thu được nhãn:



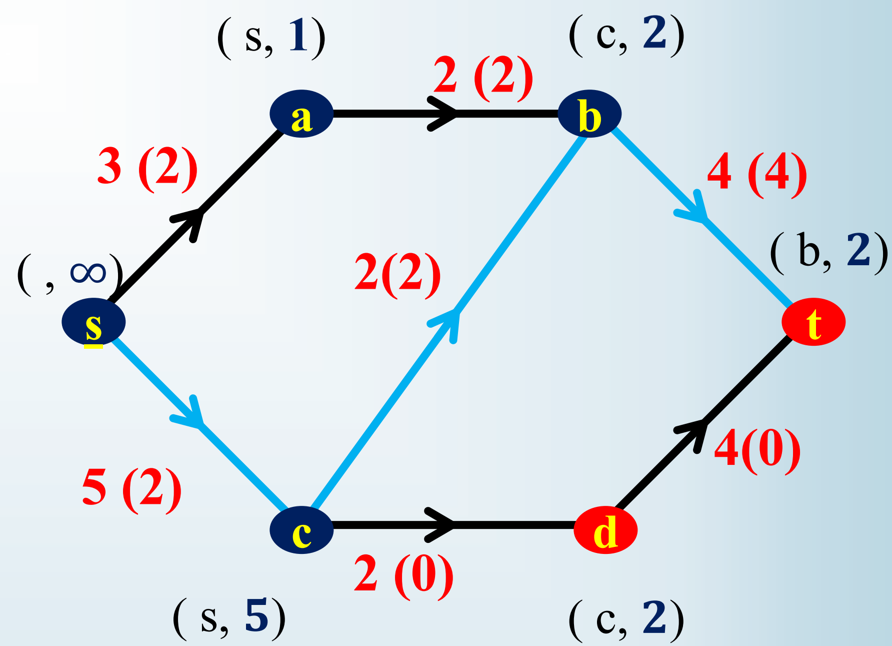
Ví dụ

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)

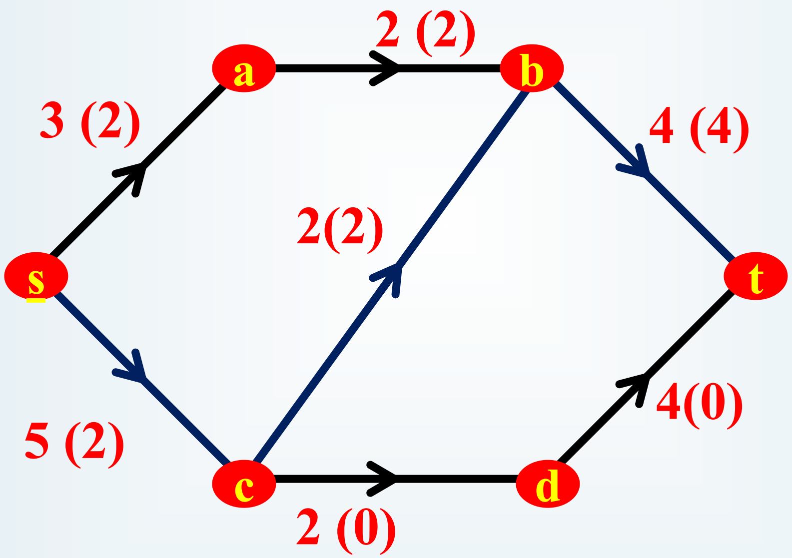


- P = (s, c, b, t) , $\delta = 2$



Ví dụ

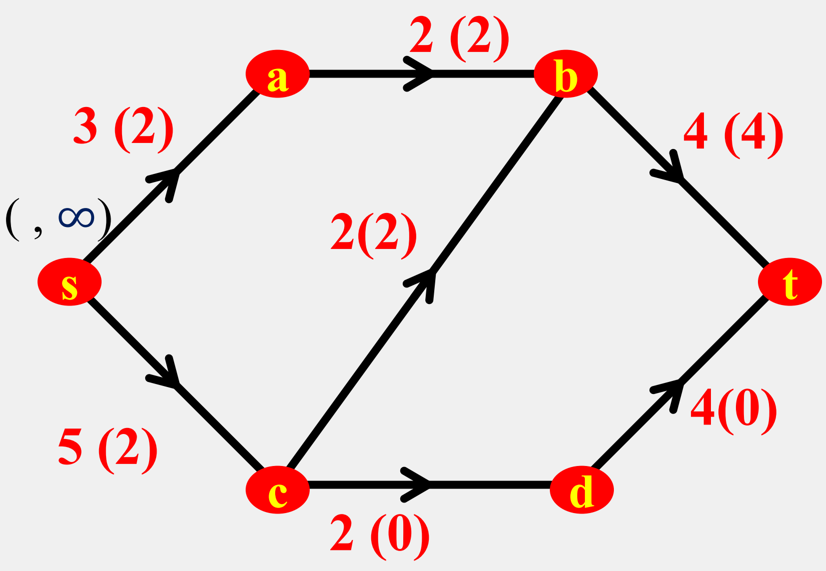
Val (f) = 4
Quay lại bước 2



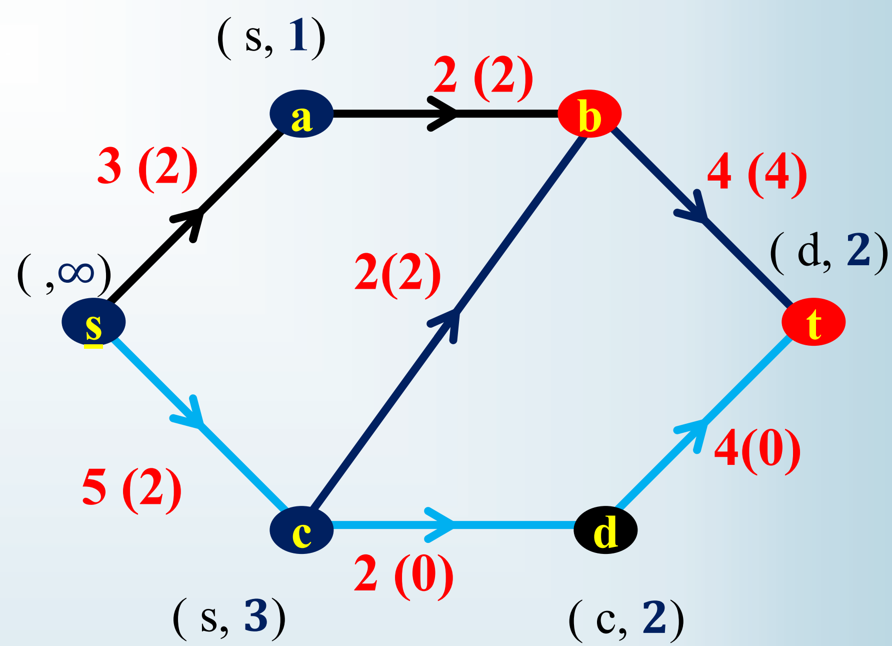
Ví dụ

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)



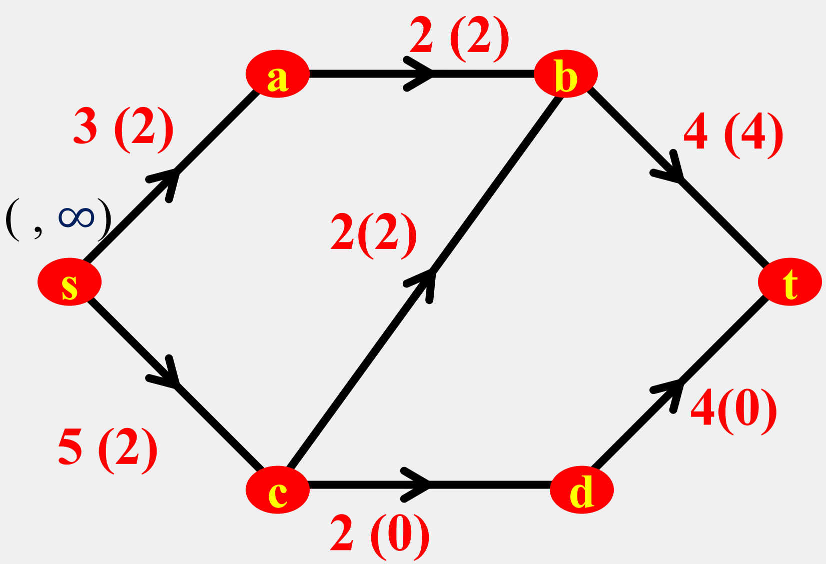
- Tiếp tục lặp quá trình thu được nhãn:



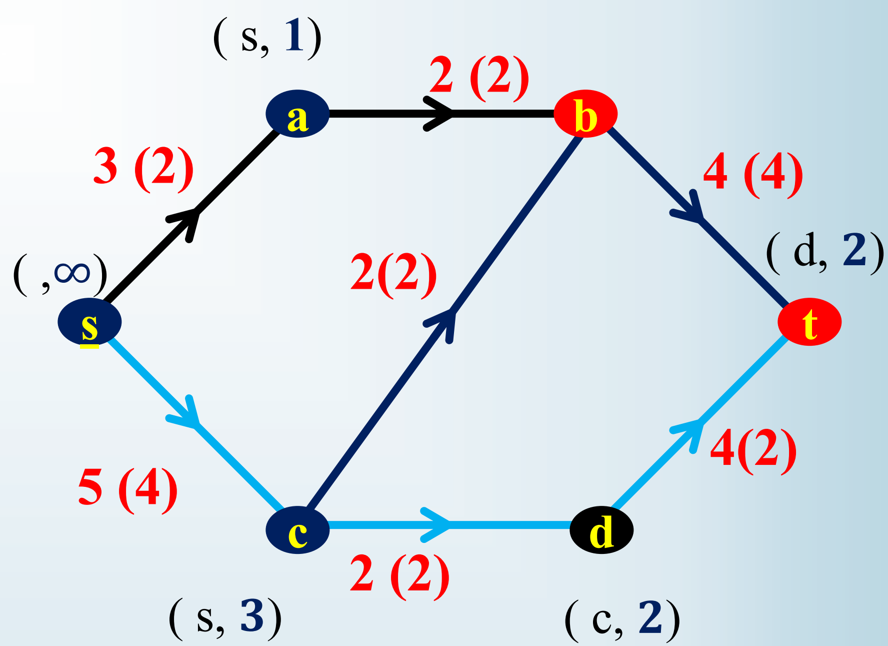
Vi dụ

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

s(, ∞)

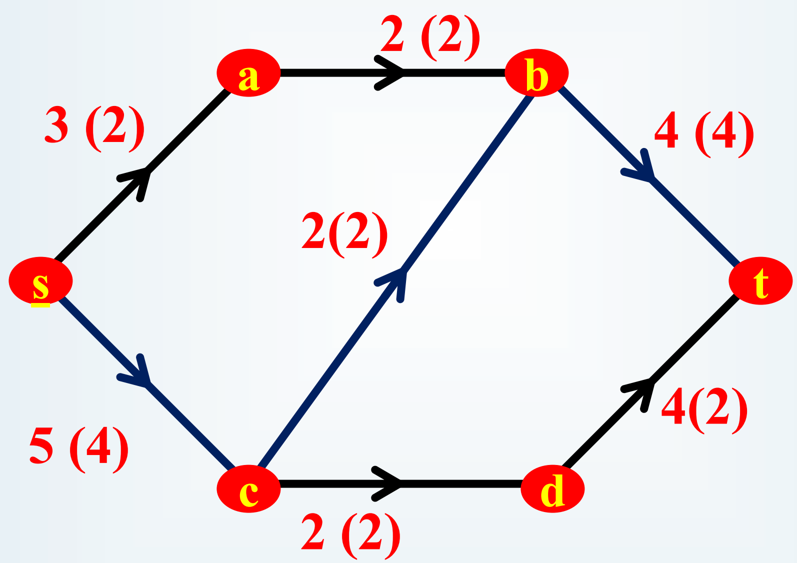


- P = (s, c, d, t) , $\delta = 2$



Ví dụ

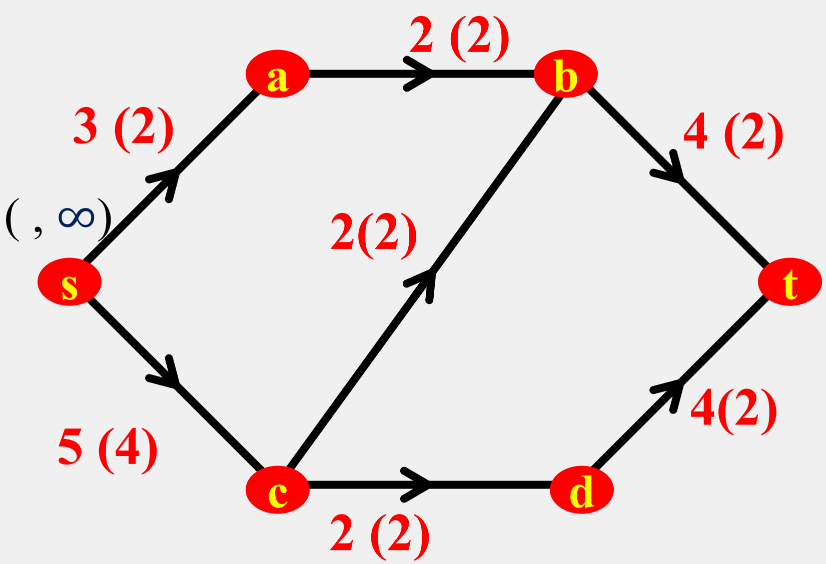
Val (f) = 6
Quay lại bước 2



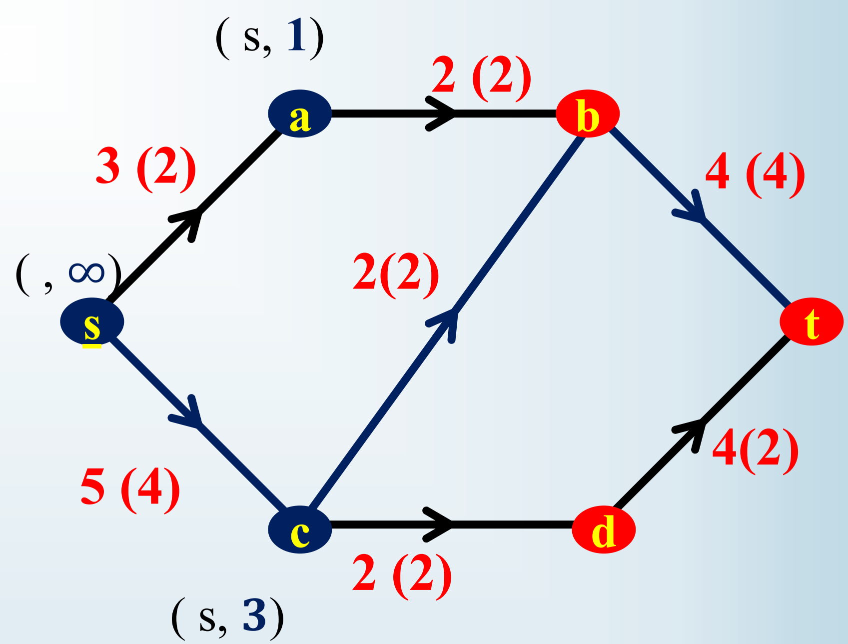
Ví dụ

- **Bước 2** *(gán nhãn cho đỉnh phát)*

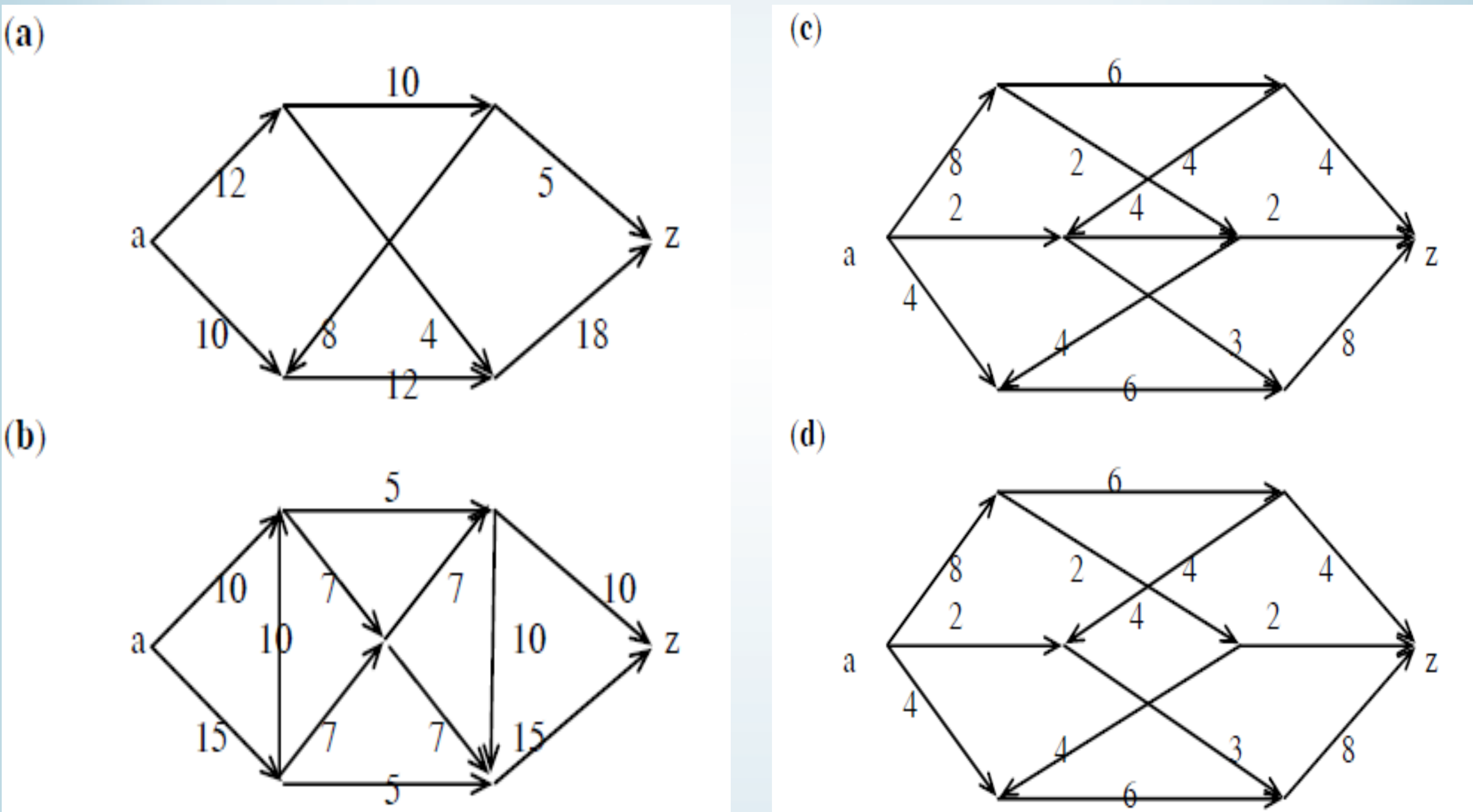
s(, ∞)



- Không tồn tại đỉnh mang nhã mà chưa đánh dấu – KẾT THÚC



Bài tập


(a)
10
12
5
a
z
10
8
4
18
12
(b)
5
10
7
7
a
10
10
z
15
7
7
15
5
(c)
6
8
2
4
4
2
4
2
a
z
4
4
3
8
6
(d)
6
8
2
4
4
2
4
2
a
z
4
4
3
8
6

What NEXT?