



中国第一所现代大学
FOUNDED IN 1895

天津大学

TIANJIN UNIVERSITY

硕士学位论文 M.S. DISSERTATION

学科专业: 水利工程

作者姓名: 周 晓

指导教师: 李世森 副教授

天津大学研究生院

2015 年 12 月

三维空间 Delaunay 网格剖分技术的研究

Study of three-dimensional Delaunay trigulation technology

学科专业：水利工程

研 究 生：周晓

指导教师：李世森 副教授

天津大学建筑工程学院

二零一五年十二月

摘要

近年来, 由于计算机行业的兴起, 对大型工程问题计算精度的要求也越来越高。在建立数学模型求解的过程中, 模型的网格化是计算必不可少的前提条件, 网格剖分技术的发展速度也日益加快。非结构化的 Delaunay 网格由于其本身的良好特性而得到了普遍应用, 成为了网格剖分技术研究的热点, 俄国数学家德劳内在 1934 年首先提出了 Delaunay 剖分的概念。经过了 80 多年的发展, 二维平面域 Delaunay 网格剖分的研究工作已经基本完成, 形成了比较完整的理论体系。而三维空间 Delaunay 网格剖分中还存在一些难以解决的问题, 值得我们继续进行研究并提出解决方法。

本文主要介绍了 Delaunay 网格剖分技术的发展历程, 总结归纳了国内外现有的二维及三维 Delaunay 网格剖分算法, 对众多算法进行了分类。并对三维中的两种主要类型的代表算法进行了详细阐述, 分析了其在构建四面体网格单元过程中使用的一些优化手段。研究了 Delaunay 角度准则算法的具体实现过程, 并在此基础上提出了一种全新的三维空间共球点集凸包的 Delaunay 四面体网格自动生成算法, 即最小相连点删除算法, 介绍了该算法的详细实现过程, 并分析了其存在的优点。该算法能成功的应用于三维共球点集凸包 Delaunay 四面体网格的构建, 最后, 在 Fortran 平台上成功的运行了剖分程序, 并运用 Tecplot 进行了后处理, 使剖分结果可视化。

关键词: 四面体网格; Delaunay; 多点共球; 凸包

ABSTRACT

In recent years, due to the rising of the computer industry, the requirements of the accuracy of large-scale engineering problems are increasingly high. In the process of building mathematical models, the gridding of the models is an essential precondition. The development speed of mesh generation technology is also accelerating. Delaunay unstructured grid has been widely used due to its good characteristics and becomes a hot topic in the mesh generation technology. Russian mathematician Delaunay first proposed the concept of Delaunay triangulation in 1934. After 80 years of development, the study of Delaunay mesh triangulation in two-dimensional domain has been basically completed, forming a relatively complete theoretical system. But there are some difficult issues about three-dimensional Delaunay triangulation, we should continue to study and propose solutions.

This paper introduces the development process of Delaunay meshing technology, summarizes domestic and international two and three dimensional Delaunay mesh generation algorithms and categorizes them. Two major types of three dimensional representative algorithms are described in detail. It analyzes some optimization means in the construction of tetrahedral mesh cells process. This paper researchs on the specific implementation process of Delaunay angle criterion algorithm and puts forward a new Delaunay tetrahedral mesh generation algorithm in the convex hull of three-dimensional cospherical point set, named the minimum contiguous point deletion algorithm. Then this paper introduces the detailed implementation process of the algorithm and analyzes the advantages of it. The algorithm can be successfully applied in building Delaunay tetrahedral mesh in the convex hull of three-dimensional cospherical point set. Finally, the triangulation program can be successfully run in the Fortran platform. The data is postprocessed with Tecplot and the triangulation results are visible.

KEY WORDS: tetrahedral mesh, Delaunay, Sphere of multi-point, convex hull

目录

第一章 绪论	1
1.1 课题研究的背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.2.1 二维 Delaunay 三角剖分算法的分类	2
1.2.2 三维 Delaunay 三角剖分算法的发展综述	4
1.3 本文研究的主要内容和章节构成	7
第二章 Delaunay 相关理论介绍	9
2.1 凸包的定义和性质	9
2.2 Voronoi 图的定义和性质	11
2.3 二维 Delaunay 三角剖分和三维 Delaunay 四面体剖分	12
2.3.1 二维 Delaunay 三角剖分	12
2.3.2 三维 Delaunay 四面体剖分	16
第三章 三维 Delaunay 网格生成算法	19
3.1 三维 Delaunay 四面体剖分的增量算法	19
3.1.1 增量算法的实现过程	19
3.1.2 增量算法的改进与不足	21
3.2 边界一致的约束三维 Delaunay 四面体网格稳定生成算法	21
3.2.1 随机扰动和延迟插入的增量算法	21
3.2.2 边界一致性处理	22
3.2.3 网格单元质量优化	23
第四章 多点共球点集凸包的 Delaunay 四面体剖分算法	25
4.1 相关说明及理论依据	25
4.2 最小相连点删除算法的主要步骤	25
4.2.1 寻找 N 个共球点所构成的三角形凸外包面	26
4.2.2 寻找相连点数最小的点	29
4.2.3 外包面的重建与内外 Delaunay 面的生成	29
4.2.4 点 P_a 的删除以及程序的循环	36
4.3 算法的总流程图	38
4.4 算法的优点	39
4.5 剖分效果图	39
第五章 结论与展望	41

参考文献	42
发表论文和参加科研情况说明	46
致谢	47

第一章 绪论

1.1 课题研究的背景及意义

近些年,随着计算机网络技术的日益发展,对于大型工程问题的求解精度要求也越来越高,而具有极强适用性和清晰物理概念的有限元法应运而生,也越来越多的应用于物理学、化学、声学、力学、仿真学、流体力学、图像学等各个领域。有限元法求解基本问题的过程包括:离散分析的对象,有限元求解,可视化的应用这三部分。其中,离散化分析对象是整个有限元分析的基础,也是进行有限元计算的前提条件。离散化的具体表现即为有限元网格的剖分,有限元法对网格剖分的基本过程就是将研究对象离散成简单单元的过程。常见的简单单元有:一维杆单元、二维三角形单元、二维四边形单元以及三维四面体单元、三维六面体单元。有限元网格按结构分类可分为结构化网格和非结构化网格。结构化网格在二维和三维中的最小单元分别为四边形和六面体,而非结构化网格在二维和三维中的最小单元为三角形和四面体。

在计算流体力学领域,有限元网格生成技术也是成功完成数值模拟的重要前提之一,网格的质量将直接影响计算结果的精度和收敛性。如果用结构化网格进行计算,因为网格布置的结构性和有序性,不可避免地会出现网格布局不合理,例如该密的地方不密,该疏的地方不疏,不符合流场计算要求。另外在结构化网格中,有时要生成一定次序的网格是及其不易的,也使网格的几何形状不能得到良好的保证。非结构化网格可以很好地解决这个问题,它可以对任何形状复杂的区域进行细分。非结构化网格节点布置没有统一的规则,并且每个节点的相邻点的数量是可变的,具有网格不规则,无序的特殊性能。相比于结构化网格,非结构化网格对复杂的区域具有良好的适应性,具有局部加密灵活性和方便性的优势,能很好地模拟流场边界及复杂的水下地形,这对于结构化网格而言是很难实现的。因此非结构网格在计算流体力学的数值模拟中得到了越来越广泛的应用。

非结构化网格的生成方法,主要有三种形式:一种是四叉树法^[1],基本思想是用树状的矩形或立方体结构单元覆盖整个流场,再将其切割成三角形或四面体单元,缺点是生成网格的质量较差;另一种是前沿推进法^[2],基本思想是从边界处进行网格单元布置,再向内部拓展逐步生成整体网格划分,缺点是生成网格的效率低。

最后一种就是本文要研究的 Delaunay 三角剖分法,依据的准则是空外接

圆（球）准则^[3]，基本解释为，任何二维网格中的三角形单元外接圆不包含给定区域或点集中的其他节点。同样地，在三维空间 Delaunay 网格的任何四面体单元外接球不包含其他节点。Delaunay 网格布置图是空间或平面 Voronoi 图的对偶图^[4]，在第二章将详细介绍它们之间的关系。Delaunay 三角剖分方法网格生成效率高，质量好，网格具有严格的数学理论基础，因此得到了广泛应用。根据分割对象分类，Delaunay 剖分问题可分为两类：一类是对指定区域的分割，另一类是对点集的分割。由维度分类，可以划分成二维 Delaunay 剖分，三维 Delaunay 剖分和高维 Delaunay 剖分。三角形是二维空间 Delaunay 网格的最小单元；四面体是三维空间 Delaunay 网格的最小单元。目前，二维 Delaunay 三角剖分算法已经比较成熟，但三维 Delaunay 四面体剖分算法还存在一些亟待解决的问题。由于三维 Delaunay 四面体剖分算法无法保证角度优化标准，分割可能无法获得最佳的四面体网格，畸形四面体单元出现的概率大大增加，从而影响网格的质量。其次，在三维空间中有算法速度慢，稳定性差的问题，这也严重制约了四面体网格技术的推广和应用。近年来，三维 Delaunay 四面体网格自动生成方法的研究也取得了一定程度的进展，对网格质量的改进，提高算法的计算效率等方面的研究^[5-7]也越来越多。

Delaunay 网格剖分具有良好的特性，同时也是 CFD，图形，气象，仿真学的重要研究内容之一。因此，三维 Delaunay 四面体剖分算法的研究和改进，不仅有重大的理论意义，而且具有很高的应用价值。

针对上述问题，本文主要研究 Delaunay 网格剖分相关理论，总结了二维和三维 Delaunay 三角剖分中的主要方法，详细介绍两种典型的三维 Delaunay 算法，讨论并分析其优点和缺点。分析了文献[8]中 Delaunay 角度准则算法在多点共球情形存在的一些问题，在此基础上，提出了构建三维共球点集凸包 Delaunay 网格的新算法，即最小相连点删除算法，分析了点集内部的结构组成以及算法的中针对不同点位置进行的不同程序处理。结合实际剖分结果，分析了算法的优点以及不足之处。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 二维 Delaunay 三角剖分算法的分类

在 1934 年，俄国数学家德劳内首次提出了 Delaunay 剖分的概念。经过了 80 多年的发展，至今已有多多种算法被人们所接受。二维平面域 Delaunay 三角剖分的研究进展迅速、成果丰硕，已经形成了比较完整的理论体系，后续的工作也是在原有算法上进行一些细节上的优化。二维中最主要的算法大

致可分为以下三类:

逐点插入法: 首先, 定义一个包含所有数据点的大三角形单元或大多边形单元, 构建初始 Delaunay 网格, 然后插入数据点进行网格重构, 找到数据点所在三角形的位置, 并将该数据点与三角形的每个顶点连接, 关于内部结构的调整, 使用 Lawson 局部优化法, 然后添加下一数据点, 再进行局部优化, 依次循环, 直到所有的数据点被输入。这种方法首先由 Lawson^[9]在 1977 年提出, 后来 Bowyer、Sloan、Macedonia 等^[10-14]对算法进行了改善优化。此方法实现的过程是比较容易的, 计算内存要求较小, 空间效率较高, 但它具有较低的时间效率, 时间复杂性最坏情况为 $O(N^2)$ 。然而, 如果插入点是随机的, 那么将能提高时间复杂性到 $O(N\log N)$ 。由于算法的需要, 时间复杂性不可以进一步提高。

分割合并法: 基本思路是根据点坐标对点集进行排序, 将排序后的点集分为两个相对独立的子集, 每个子集分成易于产生三角网的子块, 子块将被合并, 优化, 以产生最终的三角网。再用 Delaunay 准则将分化的两个子集整合为全部的 Delaunay 网格, 整合过程包括四个步骤: 上线和底线的整合, 删除不符合 Delaunay 准则的三角形, 生成满足条件的三角形, 边界数据点形成单元的重构工作。方法由 Shamos 和 Hoey^[15]在 1975 年第一次提出, Lewis 和 Robinson^[16]将该方法应用到实际的网格生成中。此后, Lee 和 Schachter^[17]提出了优化算法。分割合并算法具有较高的时间效率, 最坏情况下的时间复杂度能达到 $O(N\log N)$, 最好情况下其复杂度甚至能达到 $O(N\log \log N)$ 。但是分割合并算法程序复杂, 其中存在大量递归运算, 所以运行起来需要内存较大, 空间效率较差。在数据量庞大的网格构建中, 计算速度慢, 适用性较差。

三角网生长法: 基本思路是任取数据点集中的一点 M_1 , 找出与此点距离最近的点 M_2 形成初始基线, 为第一条 Delaunay 边, 定义方向由 M_1 到 M_2 。由初始基线根据 Delaunay 准则在基线右侧 (左侧) 寻找点集中的第三个点 M_3 , 新形成一个 Delaunay 三角形和两条 Delaunay 边, 定义两条边的方向分别为由 M_1 到 M_3 、由 M_3 到 M_2 , 再由这两条边根据 Delaunay 准则在基线右侧 (左侧) 进行三角网的拓展, 直到生成全部 Delaunay 三角形。此方法由 Green 和 Sibson^[18]在 1978 年首先提出, 随后 Brassel、Reif、Macullagh 等人^[19-21]对其进行了修正。传统的三角网生长法构建网格时间长、效率差, 改进的算法在一定程度上优化了三角网生长法, 提高了生成网格的效率。

由于上述三类方法均存在不足之处, 一些学者提出综合三类方法的混合 Delaunay 网格构建方法, 取长补短, 提高算法的准确性和效率。目前研究较

多的是结合逐点插入法和分割合并法的优点的耦合算法^[22-23]，将逐点插入法较高的空间效率和分割合并法较高的时间效率综合利用，由于三角网生长法在数据规模较小时的良好特性，所以当前在分割合并法的子三角块网格生成时也可将三角网生长法运用其中，这方面的研究也开始出现。因此，如何将已有的方法进行合理的组合来提高构建 Delaunay 网络的质量和效率，既是二维 Delaunay 网络生成领域中的研究热点，也是该领域下一步研究的主要方向。

1.2.2 三维 Delaunay 三角剖分算法的发展综述

因为空间中点、线、面的关系比平面更复杂，Delaunay 算法由二维平面推广到三维空间的过程，并不是简单地几何推广的过程，其存在着诸多需要克服的难关。并且在三维空间中无法依据二维中的最大最小角准则对四面体网格单元进行判定，又给三维 Delaunay 四面体剖分技术的研究带来难度。近些年来，一些科学家在三维 Delaunay 算法的研究上做出了突出的贡献，推动了三维 Delaunay 四面体剖分技术的发展。

国外主要研究成果：

80 年代时，三维 Delaunay 四面体剖分技术已有了一定的发展，1981 年，Watson^[24]提出了应用 Voronoi 多面体计算 n 维 Delaunay 剖分的相关问题。 n 维空间的 Delaunay 剖分是 n 个单维图形的集合体，也是常用的 Voronoi 多面体的对偶形式，在之前划分二维 Voronoi 多边形的工作基础上，利用计算机进行了一些 Delaunay 剖分的数值模拟。1985 年，Shenton 和 Cendes^[25]介绍了一种新的三维有限元网格 Delaunay 剖分算法。这种方法是 Delaunay 三角剖分法向三维的拓展，网格的生成过程是在剖分对象内部自动进行的过程，同时比较了二维与三维 Delaunay 网络生成方法的不同，完善了现有的网格生成法。1986 年，Lawson 介绍了 n 维三角剖分的性质，分析了任意 n 维有限空间点集凸包的简单剖分问题，研究了关于构建三角剖分问题的一些数学结论。研究的结果有以下几个：1) 在 n 维空间里 $n+2$ 个点构成的点集最多可以有两种不同的剖分方式，在这两种剖分中利用球准则可以筛选出满足 Delaunay 条件的剖分。2) 对于一个剖分，可以由局部球准则的性质推出整体球准则的性质。3) 一个满足整体球准则的剖分是 n 维狄利克雷剖分的对偶，即它是 Delaunay 剖分。1989 年，Baker^[26]运用约束 Delaunay 剖分法进行了三维复杂域的网格自动生成。描述了一种生成四面体网格的方法，这种方法以 Delaunay 剖分为基础，可以对研究对象进行复杂域上的剖分。为了保留研究对象的表面边界，当数据点接近边界时可能导致局部点不满足 Delaunay 准则，这种情

况下,重新定义了剖分形式,提出了约束 Delaunay 网格剖分方法并讨论了控制网格点分布和四面体质量的技术。同年,Joe^[27]提出了三维剖分的局部变换法,具有划时代的意义和价值。依据外接球准则利用局部变换法将三维点集进行 Delaunay 四面体剖分,很好的将 Lawson 提出的二维 Delaunay 局部变换法推广到三维。这种方法的时间复杂度为 $O(N^{4/3})$, 优于之前的构建三维 Delaunay 网的方法。

90 年代,由于在实际应用中,三维 Delaunay 四面体剖分中存在的一些非常棘手的问题,技术发展比较缓慢,导致 Delaunay 四面体剖分的创造性成果较少。研究较多的还是在原算法基础上的一些改进算法。1991 年,Kanaganathan 和 Goldstein^[28]从时间复杂度和产生单元质量的方面对四种不同的三维四面体网格的插点法进行了测试和比较,证明了在网格生成质量上,Watson 提出的方法是最优的。同年,Joe^[29]提出了利用最大最小固体角剖分算法来构建三维高质量网格。三维 Delaunay 剖分是最常见的三维网格剖分形式,但是由于 Sliver (薄四面体)的存在,Delaunay 剖分并不一定满足生成四面体的高质量要求,提出了一种构建高质量网格的方法,即最大最小固体角剖分算法。这种方法利用局部变换法将给出的 Delaunay 剖分转化为质量更优的剖分。网格生成的实验结果证明,这种方法在去除 Sliver 四面体和规整网格形状的方面要优于 Delaunay 剖分。1997 年,Karasick 和 Lieber 提出了三维 Delaunay 网格的可视化方法。介绍了一种新的在标准扫描投影上快速显示三维 Delaunay 网格的方法,这种方法不需要使用图形硬件,既可以显示网格的内部结构也可以显示网格表面形状。并且不要求网格域是凸的和连通的。同时计算了网格单元的发展序列,发展序列可以用来显示网格的等值面。1999 年,Mucke 提出了平面或空间随机点的快速 Delaunay 剖分方法。这种算法省略了初始点的定位步骤,算法中研究了 Delaunay 剖分的第一步过程中点的位置问题,利用随机方法选择一个合适的起始点,然后通过程序进行扫描并寻找剖分的后续点,并将分析结果由二维拓展到了三维。通过试验验证了程序在二维和三维的准确性。

进入新世纪,三维 Delaunay 四面体剖分技术取得了突破性的进展。2006 年,Thierry、Marcvan 和 Marten 提出了利用高阶 Delaunay 三角剖分生成实际地形的方法。这种方法对于河道模型的应用而言,地形模型不会出现局部变化较大的情况,并且河道边界与剖分网格的边界保持了一致。2011 年,Si 和 Gartner^[30]研究了限定 Delaunay 四面体的三维边界恢复问题。介绍一种解决边界恢复的方法,这种方法的基础是通过约束条件来建立严格的 Delaunay 四面体,并且仅在线段上添加辅助点(称之为 Steiner 点)。分析了这种算法

的时间复杂度,应用该方法解决了许多实际问题。同年,Devillers 和 Teillaud^[31]提出了 Delaunay 四面体剖分的扰动法,在输入的点集是退化的时候,Delaunay 四面体剖分并不是唯一确定的,此时运用一种新的扰动法以特定的方式来唯一限定剖分。在这个确定的 Delaunay 四面体网格中不存在薄四面体,这种扰动算法容易通过编程来实现。Buchin、Devillers 和 Mulzer^[32]在 2013 年提出三维 Delaunay 的顶点删除法,介绍了如何在规定的时间内从三维 Delaunay 网格中删去一个顶点 q ,来进行 Delaunay 网络的构建。其中 P 是点 q 邻域上点的集合, C 是外接球包含 q 的四面体数量的最大值,这个值在 DT 构建中是不断增大的。实验证明这种方法比起之前的方法要更有效率。2014 年,Lo^[33]提出了非均匀点分布的三维 Delaunay 算法。均匀点分布的 Delaunay 结构生成一般采用规则网格插入法,对于非均匀点分布的三维 Delaunay 四面体剖分,讨论了剖分中的难点,提出了增强 k -d 树插入法,多重网格插入法。增强 k -d 树插入法在构建基础四面体方面更有效率,但是很容易产生大量的薄四面体。相比之下,在网格构建时间等方面,多重网格插入法是最稳定和高效的。同年,他还提出了三维 Delaunay 的边界恢复法,通过添加辅助点来进行边界线和边界面的恢复。然而,对于严格约束的 Delaunay 三角剖分,这些辅助点需要向区域的内部移动来实现边界线和边界面的恢复,研究表明边界上的点比随机点移动更有序化。同年,Nanjappa 和 Tan 提出了利用 GPU 加速三维 Delaunay 网络的生成算法,提出了在 GPU 上进行 Delaunay 剖分的方法,传统的 flipping 法在 GPU 上只适用于构建 2D-Delaunay 网格和 3D 凸包,在构建 3D 网格时会出现无法运行的情况。因此该方法运用大量并行点的插入和 flipping 法的相互转化,并找出合适的点的插入顺序,可以获得一个接近 Delaunay 的三角剖分。介绍了几种 GPU 加速网络生成的方法,利用 GPU 加速方法构建接近 Delaunay 的结构并在 CPU 上实现三维 Delaunay 的转化。Bruno^[34]提出了 Delaunay 三维等级网格划分方法。考虑了最优 Delaunay 三角剖分方法并在此基础上提出在目标函数中加入密度函数的方法,将局部优化和全局优化结合,具有更快的收敛速度,避免了由于局部变化较大而出现计算崩溃的结果

2 国内主要研究成果:

国内关于网格剖分课题的研究起步较晚,90 年代以前还没有相关的理论可供参考,90 年代以后陆续有新的创新性研究成果出现。1995 年,崔汉国、胡瑞安等人^[35]在已有算法的基础上,提出了一种新的三维点集 Delaunay 三角剖分的自动生成及其动态修改算法。动态修改算法可以处理仅在局部添加或减少一点的情况,同时证明了算法的可行性,有极强的实用性。2000 年,胡

于进、赵虎跃、赵建军^[36]提出了改进的三维网格自动插点算法,该算法充分利用 Delaunay 的空外接圆准则来计算新点的位置并插入新点,使生成的四面体网格和实体边界相互协调,该算法生成的四面体具有较好的形状和良好的密度分布。2004 年,赵建军、王启付^[37]提出的边界一致的 Delaunay 四面体网格稳定生成算法,是国内三维 Delaunay 剖分算法研究中最具代表性的算法,克服了现有三维 Delaunay 四面体生成算法中的许多不足。针对现有算法的稳定性问题,提出了随机扰动以及延迟插入的增量算法,提高了稳定性;针对边界一致问题,优化了约束边和约束面恢复算法,使之能够适应各类型边界;针对质量问题,将局部变换法和插点法相结合,有效地去除了 sliver 单元。2007 年,骆冠勇、曹洪、房营光^[38]提出了三维 Delaunay 四面体网格的逐点插入算法,此方法具有表面网格与体内网格同步划分,结点与单元同时生成,自适应性好等特点。2009 年,杨旭波、顾丽旭等人提出了依据泰森多边形法则进行三维医学影像的 Delaunay 网格重建法。利用质心泰森多边形法来生成医学影像的网格剖分,取代了以前比较常见的方法。并将剖分结果运用在 CT 图像的处理上,该方法适用于重建复杂的物体边界和生成高质量的网格,以及解剖结构模型的建立。2011 年,陈民斌提出了一种并行的三维 Delaunay 三角剖分算法。这种并行网格的生成过程利用了区域分解法,进行了大量四面体的合并运算。方法中减少了子程序间的联系,合并子块四面体的时候适当的调整了影响域的范围。2012 年,刘岩、昌继海、关振群^[39]提出的改进的三维 ODT 四面体网格质量优化算法。对于非均匀的四面体网格,将内部的节点作为核心,周围的点形成一个星型结构。核心节点的最佳位置是应用传统的 ODT 方法获得的,最佳位置通过均值坐标转化成空间坐标。通过以上步骤,所有内部节点的排列是最优化的,四面体网格的质量也得到了提高。此外,王磊、聂玉峰等人^[40]提出的 Delaunay 四面体网格并行生成算法;杨忱瑛、陈文亮^[41]提出的三维限定 Delaunay 四面体网格划分的算法;均有一定的理论指导作用和广泛的适用性。

1.3 本文研究的主要内容和章节构成

本文共包括五章,分别为:

第 1 章 绪论。本章主要介绍课题的研究背景和意义,分析了国内外关于二维和三维 Delaunay 网格剖分方法的研究理论成果。同时,对本论文所做的研究工作进行了简要叙述

第 2 章 Delaunay 相关理论介绍。本章主要阐述 Delaunay 剖分的相关理论知识,包括凸包、Voronoi 图、二维 Delaunay 三角剖分、三维 Delaunay 四

面体剖分、Delaunay 空圆（球）准则、最大最小角准则等相关概念及其性质。

第 3 章 空间两种主要类型的 Delaunay 网格生成算法。本章详细介绍了两种典型的空间 Delaunay 网格生成算法，以及它们在构建空间网格上的优点，也分析了其存在的某些不足，

第 4 章 分析了 Delaunay 角度准则算法在多点共球情况下存在的问题，在此基础上提出了三维多点共球点集的 Delaunay 四面体剖分算法，即最小相连点删除算法，详细介绍了该算法的实现过程，分析了点在不同位置类型时的不同处理方法，论述了其在构建网格过程中的优点，成功将其在 Fortran 平台上进行了运行，并应用 Tecplot 使之可视化。

第 5 章 总结与展望。对工作中取得的一些成果进行了总结，同时，对工作中存在的问题进行了分析并提出了展望。

第二章 Delaunay 相关理论介绍

在构建 Delaunay 网格之前，我们有必要了解二维及三维 Delaunay 剖分的相关概念和性质，也为后面的工作提供了理论基础。接下来我们依次介绍凸包、Voronoi 图、二维 Delaunay 三角剖分、三维 Delaunay 四面体剖分以及 Delaunay 空圆（球）准则、最大最小角准则等相关概念及其性质。

2.1 凸包的定义和性质

凸包是计算几何中的概念，是研究三角剖分理论的基础，下面给出平面点集情况下凸包的定义：

定义 2.1 平面上的非空点集 S ，如果 S 中任意两点连线上的点均在 S 中，则点集 S 是平面上的凸集。线段、三角形、圆、平面都是凸集。

定义 2.2 平面点集 M 的凸包是指所有包含点集 M 的凸集的交集。直观上，平面点集 M 的凸包是指由点集中的部分点构成的凸多边形，满足 M 中的任意点在凸多边形边上或者在其内部，如图 2-1 所示。

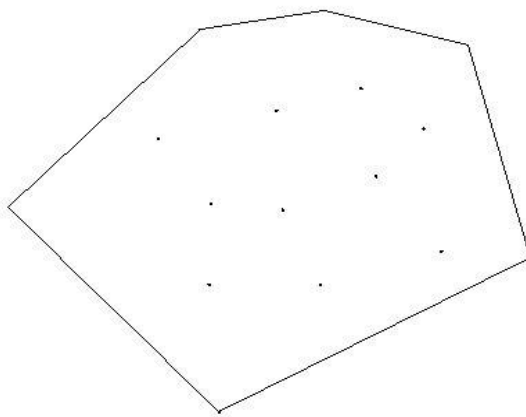


图 2-1 点集的凸包

性质 2.1 平面任意点集所构成的凸包是唯一的。

证明：对于任意平面点集 M ，因为二维平面是一个凸集，故点集 M 可用二维平面覆盖，又因为空集不包含点集 M ，从而包含该点集的所有凸集的交集非空，即凸包存在。假设点集 M 有两个凸包 M_1 与 M_2 ，则 $M_1 \cap M_2$ 也能覆盖点集 M ，且 $M_1 \cap M_2 \in M_1$ ，但 M_1 是 A 的凸包，故 $M_1 \in M_1 \cap M_2$ ，故 M_1

$\cap M_2 = M_1$ 。同理 $M_1 \cap M_2 = M_2$ ，即 $M_1 = M_2$ 。平面凸包具有唯一性

平面凸包的求法：二维凸包最常用的算法是 **Graham** 扫描法，具体方法为：

在点集 M 中选取 y 坐标最小的点作为基点。然后按照基点到其它各点构成的向量与 x 轴的夹角进行排序。若出现夹角相同的情况，则按与基点的距离排序，只保留与基点距离最大的点。从基点开始，夹角由小到大进行逆时针扫描，凸包上每条相邻的线段的旋转方向应该一致，并与扫描的方向相同。可用两个向量外积的正负来表示。如果发现新加的点使得新线段与上线段的旋转方向发生变化，则可判定上一点必然不在凸包上。用新加入的点替换前一个点，再进行前一步旋转方向的验证。如图 2-2，向量 \overrightarrow{DE} 与向量 \overrightarrow{CD} 的旋转方向与之前不同，用点 E 代替 D ，再验证向量 \overrightarrow{CE} 与向量 \overrightarrow{BC} 的旋转方向，依次进行循环。按照上述步骤进行扫描，直到点集中所有的点都扫描到，并且经验证满足条件。即得到点集 M 的凸包。

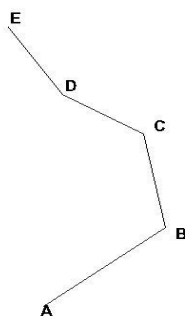


图 2-2 旋转方向

空间中凸集、凸包的概念和性质与平面类似，证明方法和求解算法也基本相同。

性质 2.2 如果空间点集 M 的凸包边界由若干平面三角形组成，这些三角形被称为凸包的侧面，三角形的边称为凸包的棱(或边)，三角形的顶点称为凸包的顶点。由欧拉公式知，凸包的顶点数 v ，棱数 e 和侧面数 f 满足下列公式：

$$v - e + f = 2 \quad (2-1)$$

$$e = 3v - 6 \quad (2-2)$$

$$f = 2v - 4 \quad (2-3)$$

2.2 Voronoi 图的定义和性质

Voronoi 图的概念首先由俄国著名数学家 M.G.Voronoi 在 1908 年提出,它是计算几何学中非常著名的理论之一,被广泛地应用于各个领域。对 Voronoi 图的研究也由二维领域逐渐发展到三维领域甚至多维领域。Voronoi 图,又叫泰森多边形或 Dirichlet 图,是自然界中的宏观物体和微观物体以空间距离相互作用所形成的一种网格结构。Voronoi 图的本质是由物体本身唯一确定的,不是运用外界方法强加上去的,从 Voronoi 图的数字角度来看,它是针对平面或空间 n 个离散点而言的,把平面或空间分为 n 个区域,每个区域只包含 1 个点,该点所在的区域就是到该点距离最近的点的集合。下面,从几何角度来给出 Voronoi 图的相关定义

m 维空间内任意两点 $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$ 的距离公式为:

$$\text{dis}(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2} \quad (2-4)$$

一般我们只研究 $m=2$ 或 3 的情形。

定义 2.3 m 维点集 $P\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ (点集中的点互异) 对应的 Voronoi 图是将点集 P 划分为 n 个区域,这 n 个区域满足下述条件:每个点对应一个区域,点集中任一点 p_i 对应的区域中的所有点 M 满足 $\text{dis}(p_i, M) \leq \text{dis}(p_j, M) (j \neq i)$ 。如图 2-3 所示

将与 P 对应的 Voronoi 图记作 $\text{Vor}(P)$,与 p_i 对应的区域记为 $V(p_i)$ 。将构成 Voronoi 图的凸多边形或凸多面体的顶点叫做 Voronoi 顶点,将凸多边形或凸多面体的边叫做 Voronoi 边,将凸多面体的面叫做 Voronoi 面。

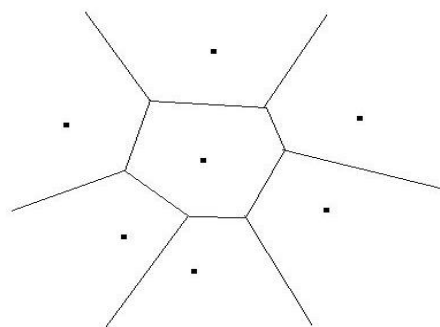


图 2-3 Voronoi 图

对于 m 维点集 $P\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, Voronoi 图有如下相关性质。

性质 2.3 $\text{Vor}(P)$ 将 m 维空间划分成 n 个凸域,每个凸域 $V(p_i)$ 包含且仅包含 P 中的一个点 p_i 。

性质 2.4 在二维中, $\text{Vor}(P)$ 的边是 P 中某两点的中垂线,此中垂线或为线

段或为射线；在三维中， $\text{Vor}(P)$ 的边是 P 中某两点的中垂面，表现为一个多边形或者半无限平面。

性质 2.5 Voronoi 图至多有 $2n-5$ 个 Voronoi 顶点和 $3n-6$ 条 Voronoi 边。

性质 2.6 在平面中，每个 Voronoi 顶点恰好是三条 Voronoi 边的交点(假设任何四点都不共圆)，此三条 Voronoi 边是点集 P 中的三个点形成的三条中垂线，此 Voronoi 顶点就是这三点形成三角形的外接圆圆心，而且此外接圆不包含 P 中的其他点。

证明：如图 2-4，点 A 是点集 P 中的 Voronoi 顶点，也是点集 P 中的点 p_1 、 p_2 、 p_3 组成三角形的外接圆圆心，假设点集 P 中的任一点 $p_i(i \neq 1, 2, 3)$ 在圆 A 内，则有 $\text{dis}(p_i, A) < \text{dis}(p_i, A)$ ，与定义 2.3 矛盾，故圆 A 中不包含点集 P 中其他点。

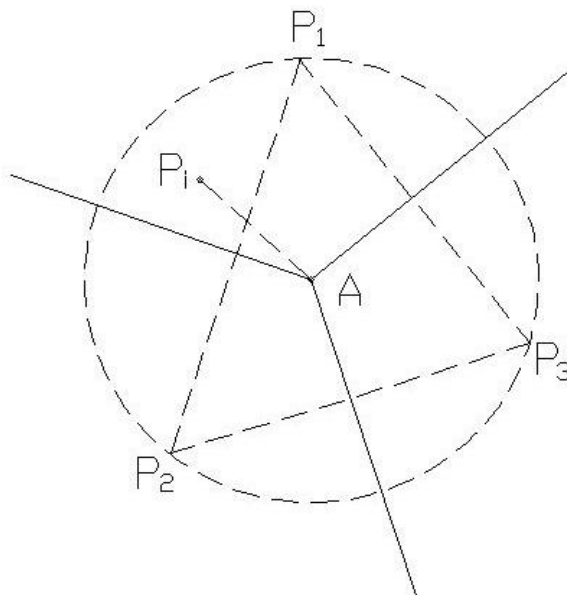


图 2-4 Voronoi 图的性质

性质 2.7 Voronoi 图是 Delaunay 网格的对偶图。

2.3 二维 Delaunay 三角剖分和三维 Delaunay 四面体剖分

2.3.1 二维 Delaunay 三角剖分

前文中我们介绍了 Voronoi 图的相关概念，在性质 2.7 中我们提到了 Delaunay 网格与 Voronoi 图的关系，所谓对偶图也可称为正交图，即 Delaunay 三角网格与 Voronoi 图是正交的。由 Voronoi 顶点相连的三条 Voronoi 边所对应的三个点构成的三角形，称为 Delaunay 三角形。

定义 2.4 存在平面点集 P 和平面线段集合 L ，其中 L 中的线段是由点集 P 中的点作为端点所构成的，如果由点集 P 和线段集 L 所构成的平面图满足下列条件：

- 1) 平面图中所有的面都是三角形，且所有三角面的并集是点集 P 的凸包。
- 2) 所有线段均不相交。
- 3) 点集中所有点均以线段端点的形式出现，即不存在线段上的点和孤立的点。

那么称此平面图为点集 P 凸包上的一个三角剖分，记作 $T_2(P)$ ，下标 2 表示二维剖分

上文中我们给出了三角剖分的相关定义，在所有三角剖分中，Delaunay 三角剖分因其独特的性质应用最多，下面我们来介绍 Delaunay 三角剖分的相关概念。

定义 2.5 在定义 2.4 的三角剖分中，如果满足点集 P 中所有点均不在剖分中任一三角形的外接圆内部，则此三角剖分就叫做 Delaunay 三角剖分。记作 $DT_2(P)$

分析平面互异不共线四点构成凸包内的 Delaunay 三角剖分情况，已知平面点集 $P=\{A, B, C, D\}$

先找出 A, B, C, D 四点构成的凸包，分情况讨论。

情况一：凸包为三角形，可设三角形的三个顶点为 A, B, C ，则 D 的位置可能有两种。

1) D 点在 $\triangle ABC$ 内部，如图 2-5，则三角剖分形式只有一种， $T_2(P)=\triangle ABD+\triangle ACD+\triangle BCD$ ，可知这三个三角形的外接圆都不包含其他点，此剖分为 Delaunay 三角剖分， $DT_2(P)=\triangle ABD+\triangle ACD+\triangle BCD$

2) D 点在 $\triangle ABC$ 的边上，可设 D 点在 BC 边上，如图 2-6，则可连接 A, D 。因为，线段 BD 是 $\triangle ABD$ 外接圆上的弦，所以 C 点一定在 $\triangle ABD$ 的外接圆外，同理可知， B 点在 $\triangle ACD$ 的外接圆外，因此 $DT_2(P)=\triangle ABD+\triangle ACD$ ，剖分形式只有一种。

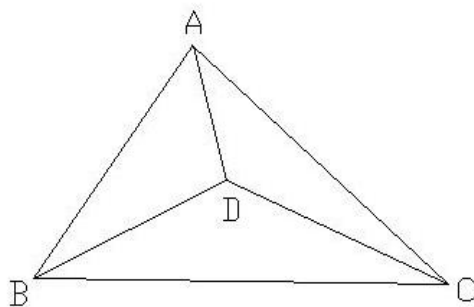


图 2-5 凸包类型一 A

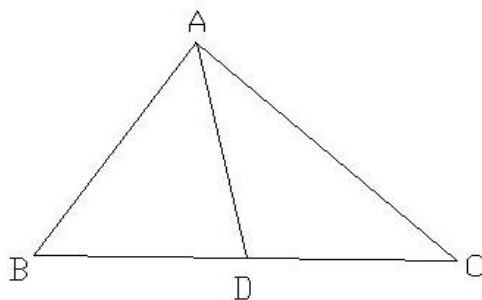


图 2-6 凸包类型一 B

情况二，凸包为四边形，此凸四边形为 $ABCD$ ，三角剖分形式只有两种，即连接 AC 或连接 BD ，如图 2-7，可以首先连接 AC ，判断点 D 与 $\triangle ABC$ 外接圆的关系。

1) 点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆外，如图 2-8，可证点 B 也在 $\triangle ACD$ 外接圆外，所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是点集的 Delaunay 三角剖分， $DT_2(P) = \triangle ABC + \triangle ACD$ ，剖分形式只有一种。

2) 点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆上，如图 2-9， A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，每点均在其他三点构成三角形的外接圆上，Delaunay 三角剖分形式有两种， $DT_2(P_1) = \triangle ABC + \triangle ACD$ 和 $DT_2(P_2) = \triangle ABD + \triangle BCD$ 。

3) 点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆内，如图 2-10，则用线段 BD 替换线段 AC ，可证 A 点在 $\triangle BCD$ 外接圆外， C 点在 $\triangle ABD$ 外接圆外。 $DT_2(P) = \triangle ABD + \triangle BCD$ ，剖分只有一种形式。

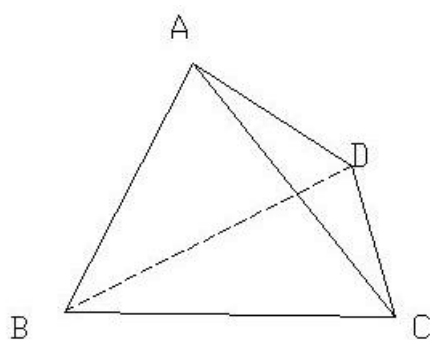


图 2-7 凸包类型二

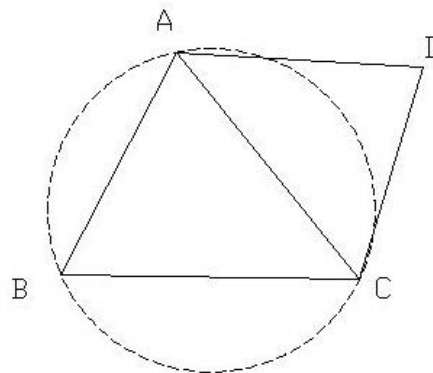


图 2-8 D 点的位置 1

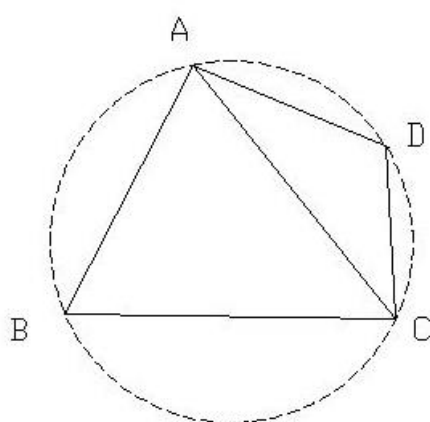


图 2-9 D 点的位置 2

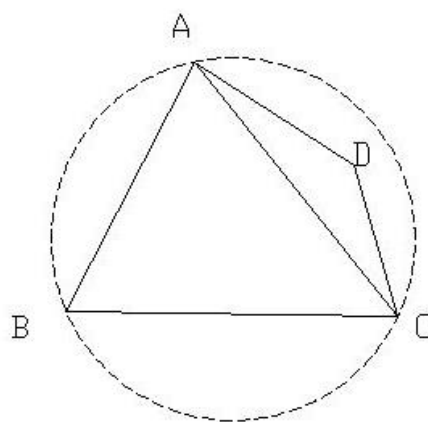


图 2-10 D 点的位置 3

综上所述，当凸包为四边形时，存在两种三角剖分形式，当第一种剖分形式不是 Delaunay 三角剖分时，交换对角线形成另一种剖分形式，则满足 Delaunay 三角剖分条件，这就是 Lawson 提出的著名的局部优化准则 LOP(Local Optimization Procedure)，一般三角网经过 LOP 处理，即可确保成为 Delaunay 三角网。

下面介绍 Delaunay 三角剖分中两个重要的准则：

Delaunay 空圆准则：在 Delaunay 三角剖分中，任一三角形的外接圆内部均不包含剖分点集中的任何点。这也是判定 Delaunay 三角剖分的最主要标准

最大最小角准则：在平面点集可能形成的所有三角剖分中，Delaunay 三角剖分所形成的三角形的最小角是最大的。从这个意义上讲，Delaunay 三角形最接近等边三角形，是最规则化的三角剖分。

Delaunay 三角剖分的有关性质

性质 2.8 就近原则：以最近的三点形成三角形，便于采取较简便的算法。

性质 2.9 唯一性：不论从区域何处开始构建，最终生成的网格形式只有一种(排除局部四点共圆的情况，如上述情况二)。

性质 2.10 最优性：任意两个相邻三角形构成的凸四边形的对角线互换，那么这两个三角形六个内角中最小角不会变大。

性质 2.11 局部性：增加、删除或移动某一个三角形顶点时只会影响附近的单元。

性质 2.12 具有凸边界：生成的 Delaunay 三角网的边界是一个凸多边形。

2.3.2 三维 Delaunay 四面体剖分

三维 Delaunay 四面体剖分是二维 Delaunay 三角剖分在空间中的延伸，但是由于空间中复杂的几何关系，使得很多在二维中适用的性质无法拓展到三维中。给我们的研究带来的极大的困难，也是三维 Delaunay 四面体剖分发展较慢的原因，下面我们来探讨三维中 Delaunay 网格的一些定义和性质。

与二维三角剖分相类似，三维点集 P 的四面体剖分为 $T_3(P)$ ，下标 3 表示三维情况

定义 2.5 在 $T_3(P)$ 中，若点集 P 中任何点均不在 $T_3(P)$ 中四面体的外接球内，则 $T_3(P)$ 为三维 Delaunay 四面体剖分，记为 $DT_3(P)$

在空间中，不共面的四点可形成一个四面体，分析空间五点构成凸包内的 Delaunay 四面体剖分情况，空间点集 $P=\{a, b, c, d, e\}$ 。分情况讨论。

情况一：四点共面，可设 b, c, d, e 四点共面， a 点不在此平面上。则可针对 b, c, d, e 进行二维中的 Delaunay 三角剖分，再将各点与 a 点相连，可形成两个或三个四面体，即为三维 Delaunay 四面体。分析见上文中平面四点三角剖分情形。

情况二：任意四点不共面，可以先找出 5 点构成的凸包。

1) 凸包为六面体，则可形成两种形式的四面体剖分，即 $T_3(P_1)=T_{abcd}+T_{abce}$ (如图 2-11) 和 $T_3(P_2)=T_{abde}+T_{acde}+T_{bcde}$ (如图 2-12)，其中 T_{abcd} 表示四面体 $abcd$ 。与二维情况类似，当 a, b, c, d, e 五点共球时，两种剖分均为 Delaunay 四面体剖分。当五点不共球时，这两种形式有且仅有一种为 Delaunay 四面体剖分，当一种情形不满足 Delaunay 条件时，比如 $T_3(P_1)$ 中点 e 在 T_{abcd} 的外接球内部，不满足 Delaunay 条件，则可将 F_{abc} 换为 F_{ade} 、 F_{bde} 、 F_{cde} ，其中 F_{abc} 代表面 abc 。形成 $T_3(P_2)$ 中的三个四面体，必然满足 Delaunay 条件。这就是著名的三维中的局部变换准则，也叫 Flip 变换，由 Barry Joe 在 1989 年最先提出。

2) 凸包为四面体，即其中一点在另外四点所构成的凸包内部，如图 2-13，点 a 在 $bcde$ 构成的凸包内部，则四面体剖分形式只有一种，即 $T_3(P)=T_{abcd}+T_{abce}+T_{abde}+T_{acde}$ ，且符合 Delaunay 条件。

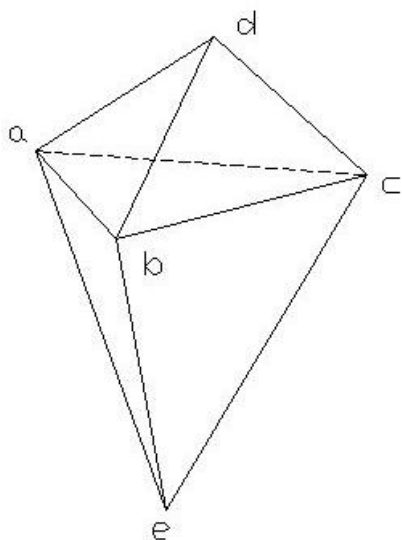


图 2-11 六面体剖分 1

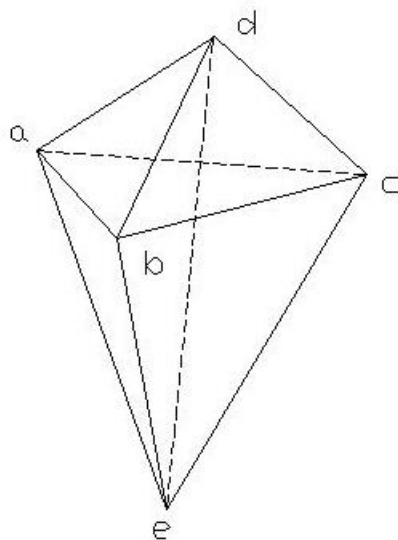


图 2-12 六面体剖分 2

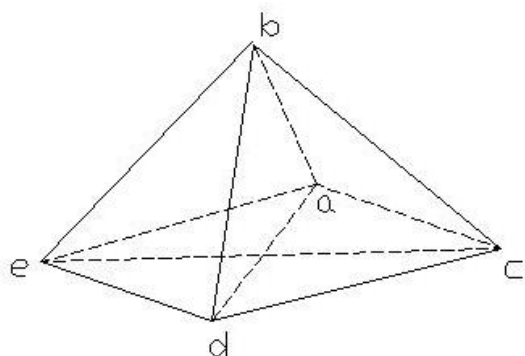


图 2-13 四面体剖分

综上所述,任意四点不共面的条件下,空间五点的 **Delaunay** 四面体剖分,根据凸包形状不同有两种形式,当凸包为四面体时,则可剖分为四个四面体。当凸包为六面体时,则可剖分为两个四面体或者三个四面体。

下面介绍三维 **Delaunay** 四面体剖分的判定准则。

Delaunay 空球准则: 在三维 **Delaunay** 四面体剖分中,任一四面体的外接球内部均不包含剖分点集中的任何点。这也是判定三维 **Delaunay** 四面体剖分的唯一标准。

三维 **Delaunay** 网格与二维相比,最主要的不同就在于三维 **Delaunay** 剖分中不存在二维中的最大最小角准则,即无法在空间中找到如平面角、二面

角、固体角等夹角使得在任意四面体剖分中，其中最小的角度在 Delaunay 四面体剖分中保持最大。这样就导致在空间中的网格剖分可能会出现薄四面体 (sliver)，大大影响网格的质量，消除薄元也是近些年来我们研究 Delaunay 四面体剖分中的热点话题。

第三章 三维 Delaunay 网格生成算法

三维 Delaunay 四面体剖分目前研究的重点主要集中在两个方面,第一个方面是关于点集和凸包的剖分实现算法,另一方面主要研究域的剖分,即给定边界条件下区域的剖分算法。本章我们分别介绍这两种剖分类型中的代表方法,并探讨其实现过程。

3.1 三维 Delaunay 四面体剖分的增量算法

在三维点集和凸包的 Delaunay 四面体剖分研究中,Barry Joe 作出的巨大贡献,首先,他成功地将 Lawson 关于二维 Delaunay 三角剖分的局部变换法应用到三维空间;其次,在 1989 年,Barry Joe 证明了将三维空间点集任意四面体化,不能保证通过一系列的换面操作即 Flip 变换使之成为 Delaunay 网格,这就导致 Lawson 在二维中从任意三角网转化为 Delaunay 三角网的算法无法成功推广到三维。最后,他在 1991 年又成功的证明了将不属于点集中的一个点插入到原来点集的 Delaunay 四面体网格中,可以通过 Flip 变换生成新的 Delaunay 四面体网格。这个证明也成为后来增量算法的理论依据。

3.1.1 增量算法的实现过程

我们主要介绍 Bowyer/Watson 算法,该方法利用了 Delaunay 空洞的性质。过程如下:

算法 3.1 Bowyer/Watson 算法

- 1 输入三维点集 $P\{p_i(i=1,2,\dots)\}$
- 2 构造一个包含点集 P 中所有点的大四面体作为初始 Delaunay 四面体,记下四面体的顶点 $D_i(i=1,2,3,4)$
- 3 将点集中的点依次插入到初始四面体中,执行以下操作。
- 4 找出外接球包含 p_i 的所有四面体,保留这些四面体所组成的边界,并删除这些四面体,形成 Delaunay 空洞。
- 5 将 p_i 与空洞边界上的所有顶点相连形成多个新的四面体,这些四面体与周围的四面体均符合 Delaunay 空球准则,即均是 Delaunay 四面体
- 6 当点集中的点插入完毕,删去包含初始四面体顶点 D_i 的四面体。

该算法的示意图如下:(图中为二维情况,三维情形与之类似)

图 3-1 到图 3-2 为插点改变内部结构的过程

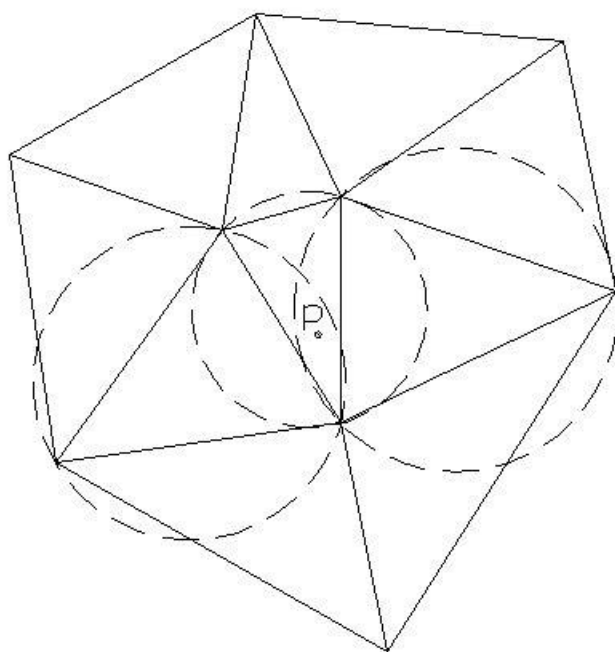


图 3-1 p 点的插入

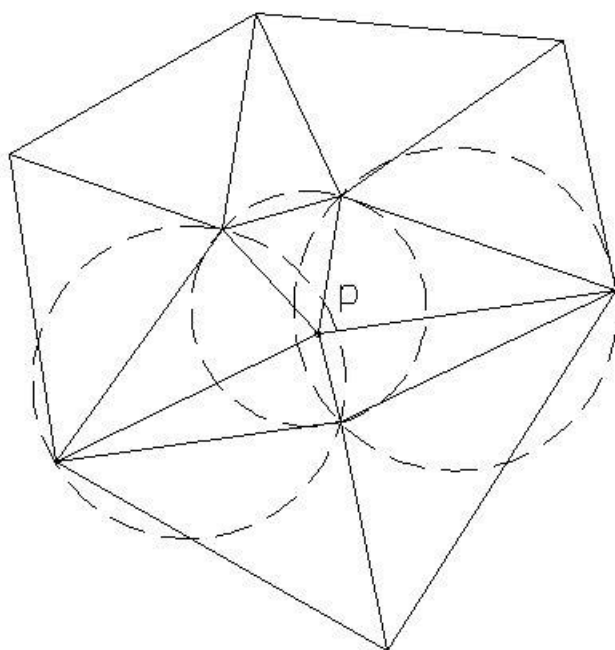


图 3-2 Delaunay 网格的重构

3.1.2 增量算法的改进与不足

本算法中的主要计算步骤有两个：第一个是寻找外接球包含插入点的四面体的过程，第二个是将插入点与 Delaunay 空洞的个顶点相连构成多个四面体的过程。如果已经形成的 Delaunay 网格中的点分布比较均匀，则再插入点形成的四面体数量较少，为了加快算法的计算速度，可以按一定顺序将点进行排列，使形成的 Delaunay 网格始终比较对称，提高了网格生成的效率，经过此处理的时间复杂度可达到 $O(N \log N)$ ，一定程度上简化了算法。

由于增量算法中点插入的随机性，当插入点在 Delaunay 网格中的特殊位置(点在 Delaunay 面上或者 Delaunay 边上)时，会影响算法的稳定性，也是 Bowyer/Watson 算法的缺点。

3.2 边界一致的约束三维 Delaunay 四面体网格稳定生成算法

复杂区域的剖分问题向来具有较大难度，主要问题可以概括为以下三个方面。

稳定性问题：这也是所有几何算法的共同问题，当剖分域内点处于特殊位置时，很可能导致判断上的误差，使程序运行出错，影响程序的稳定性。

边界一致问题：一个有效的剖分形式应该满足其给定边界条件，可是当输入点集完成 Delaunay 剖分后，也只是对其凸包的剖分，而输入边界的情形往往与凸包不重合，不满足其拓补结构关系。也就是说，输入的边界边和边界面并不一定存在于 Delaunay 网格中的。此问题长期以来没有得到很好解决。

单元质量问题：由于三维中不存在二维最小角最大化准则，在三维 Delaunay 网格生成中可能会出现某个角度极小的四面体，也叫 Sliver 四面体，其特征为体积几乎为 0，四个顶点几乎在一个平面上。

基于上述问题，赵建军，王启付在 2004 年提出了边界一致的约束三维 Delaunay 四面体网格稳定生成算法，针对上述三个问题对增量算法做了三个方面的改进。

3.2.1 随机扰动和延迟插入的增量算法

Bowyer/Watson 的增量算法在插点时，由于点位置关系，很容易导致结构拓扑错。导致程序无法运行。本算法通过对点的随机扰动，稍微改变点所处的位置。因为试验表明，处于特殊位置的点是影响稳定性的原因。这里的特殊位置，主要指两种，一是点的插入使五个点或五个点以上共球，这些点

容易导致局部优化过程产生错误;二是指四点或四点以上共面的位置,这些点容易导致点定位操作时发生错误。通过对点进行随机扰动,大大减少了点处于特殊位置的可能性。除此之外,再对特殊位置点的插入进行延迟处理,细小的尺度也很容易导致点的定位出错。算法如下

算法 3.2 扰动延迟算法(点集 P)

- 1 对点集 P 中的点进行随机扰动。
- 2 构造初始四面体 T_0 , 点集中的点在四面体 T_0 内部。
- 3 对于点集中的每一点 p_i , 定位点 p_i 所在的四面体 T_i 。
- 4 计算点 p_i 距 T_i 各顶点的距离,若距离小于设定值,则将 p_i 点加入延迟插入点序列,否则转下一步。
- 5 运用上文中提到的 Delaunay 空洞算法,形成多个四面体单元。
- 6 对延迟插入序列的点调用第 4、5 步。
- 7 删除所有与以初始四面体顶点为顶点的四面体单元。

3.2.2 边界一致性处理

在 Delaunay 网格生成后,是否满足边界要求也是检验网格的标准之一,如果给定的边界边和边界面没有出现在 Delaunay 网格中(一般均不会完全一致),提出一种边界恢复算法,即通过在边界或内部添加辅助点,根据 Delaunay 网格的就近原则,每个点都会和与之最近的点有连接,使边界线段和边界面出现在 Delaunay 网格中。如果边界为曲线和曲面,则运用边界离散算法使其离散为线段和平面,顺序为先离散边界边,结果作为边界面的输入,再进行边界面离散,接下来进行边界恢复算法。然而,在边界边恢复过程中,由于插入新点时的局部变换可能会破坏已恢复线段。为了避免这种重复过程,只要线段恢复后就不允许再进行交换,该线段就永远存在于 Delaunay 网格中。由于边界线段位置确定,其并不一定满足 Delaunay 条件,边界处的 Delaunay 准则不一定得到保证。本算法采用在需要恢复的线段中点进行插点的方法,提高了算法的效率,边恢复的算法如下:

算法 3.3 边恢复(ab)

- 1 在 ab 中点 c 处插入点。
- 2 如果线段 ac 没有恢复,则 c 替换 b , 执行第一步。
- 3 如果线段 bc 没有恢复,则 c 替换 a , 执行第一步。

如果边界边为曲线,则在所有边界边都恢复之后,执行一次投影操作,将所有新插入的点都投影在离散前的曲线上,如图 3-3 所示。

边界面的恢复算法中,插入点的位置选择为该边界面的外接圆圆心,大

大提高了恢复速度，其算法与边界边恢复算法类似，这里不详细介绍。

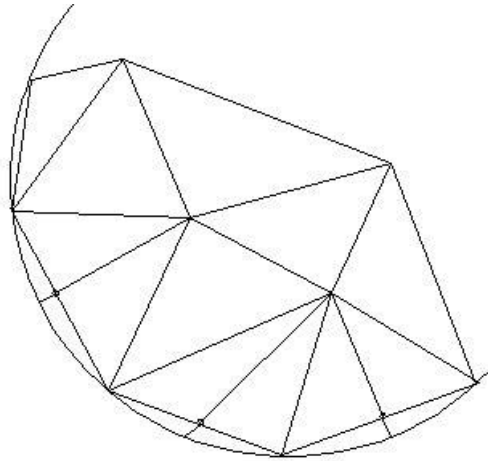


图 3-3 插入点的投影

3.2.3 网格单元质量优化

四面体质量的判定标准有多种，这里我们采用 **Shewchuk** 质量标准，即当四面体的外接球半径与最短边长之比大于某一限值 A 时，则称此四面体质量较差，规定为质量标准 A 。为了提高网格单元质量，提出在外接球的球心附近添加新的辅助点来进行分割四面体单元，进而达到改善网格质量的目的。

算法中，在 **Delaunay** 网格中每插入一个新点，测试一次新生成的四面体，如果有的四面体质量不符合质量要求，则把它添加到质量差的四面体序列中。如果先对 A 值较大的四面体在其内部添加辅助点，可以大大缩短计算时间，提高程序的效率。

算法 3.4 质量优化算法(质量保准 A)

1 每一步的算法过程中，将 **Delaunay** 网格中所有质量标准大于 A 的四面体找出，放入质量差的四面体序列中。

2 比较每个四面体 A 值的大小，按从大到小的顺序分别在四面体外接球球心处插点，重新生成 **Delaunay** 四面体，去除质量差的单元。

四面体网格生成中经常会出现的一些形状差单元，一般的畸形单元可分为四种类型，其中包括针状四面体、楔形四面体、帽形四面体和 **Sliver** 四面体。针状四面体、楔形四面体和帽形四面体都具有较大的 A 值，在其形成后都可以通过添加辅助点来进行去除。**Sliver** 四面体与这三种不同，它的 A 值比较小，所以通过以上算法无法将其删除，这时我们可以利用它与附近四面体的结构拓补关系，通过插点和三维局部变换来改变四面体的构成方式，来达到改善质量的目的。

通过以上三个方面的改进算法，在一些弱化的条件下，可生成边界一致的三维 Delaunay 四面体网格。优化了 Bowyer 和 Watson 的增量算法，推动了三维 Delaunay 四面体剖分技术的发展。

第四章 多点共球点集凸包的 Delaunay 四面体剖分算法

我们研究了文献[8]中 Delaunay 角度准则算法的具体实现过程,在由扩展三角形搜索空间数据点时,需要计算数据点与三角形形成的 DL 角并找出最大的角度值来。如果存在多个这样的点与三角形形成的 DL 角最大,程序运行时会反复寻找这几个点,重复性大大增强,影响了计算效率,提高了计算误差;而且在形成四面体的时候,会发生三角形内交的情形。基于上述问题,我们寻找一种解决方法:即将具有此类特征的点放入同一个集合中,形成一个多点共球的局部,将这个共球点局部进行整体上的 Delaunay 四面体剖分,我们将此剖分算法叫做最小相连点删除算法。

4.1 相关说明及理论依据

1 相关说明

(1) 本算法程序中“0”的规定:由于计算机存在计算误差,在进行实型变量运算时不会出现计算结果完全等于 0 的情况,在本算法中我们认为当计算结果的绝对值小于 10^{-5} 时,计算结果为 0。

(2) 本章所说的外包面均指点集的凸外包面。

2 理论依据

性质 4.1 空间中三角形外包面的点与线的连接关系:

当空间点集的所有外包面均为三角形时,由 2.1 中的性质 2.2 可知,外包面的顶点数 v 与棱数 e 满足关系式: $e = 3v - 6$ 。若分别统计每个顶点的相连点数 $N_i (i=1,2,\dots,v)$,则有 $\sum_{i=1}^v N_i = 2e = 6(v - 2)$,平均每点的相连点数为 \bar{N} ,有 $\bar{N} = (6v - 12)/v = 6 - 12/v < 6$,若其中相连点数最少的顶点为 a ,可知所连点数 N_a 小于 6,又因为空间中的结构关系,有 N_a 不小于 3,所以 N_a 的范围为 $3 \leq N_a \leq 5$ 。

4.2 最小相连点删除算法的主要步骤

初始条件: N 个共球点的坐标 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i=1,2,\dots,N)$

输出数据: N 个共球点构成凸包的一个 Delaunay 四面体剖分,以剖分面数组 fe 表示

4.2.1 寻找 N 个共球点所构成的三角形凸外包面

1 算法的主要步骤

输入数据: N 个空间共球点的坐标 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, \dots, N)$

输出数据: N 个空间共球点所构成的三角形凸外包面数组 $ff(S, 3)$

对于任意 i, j, k 进行循环($i=1, N-2; j=i+1, N-1; k=j+1, N$), 求出共球点集中的 3 个数据点 $P_i(x_i, y_i, z_i), P_j(x_j, y_j, z_j), P_k(x_k, y_k, z_k)$ 所确定的平面方程 $F: Ax + By + Cz + D = 0$ 的系数 A, B, C, D 。判断共球点集除 P_i, P_j, P_k 三点外的剩余点 $P_L (L=1, 2, \dots, N \text{ 且 } L \neq i, j, k)$ 与平面 F 的位置关系, 其中点 P_L 的坐标为 (x_L, y_L, z_L) , 计算代数式 $Ax_L + By_L + Cz_L + D$ 的值, 记作 ao , 分以下情况进行处理:

a) 若所有 P_L 点计算出的 ao 值符号均相同(全部大于 0 或者全部小于 0), 则所有 P_L 点均在平面 F 的一侧, 可判定 $\Delta P_i P_j P_k$ 是共球点集的一个三角形外包面。并将其加入外包面数组 ff 中。

b) 若 P_L 点计算出的 ao 值中, 既存在大于 0 又存在小于 0 的值, 则点 P_L 在平面 F 两侧均有分布, 可判定 $\Delta P_i P_j P_k$ 不是共球点集的三角形外包面。

c) 若 P_L 点计算出的 ao 值中, 一部分等于 0, 另一部分符号相同, 找出结果等于 0 的点 $P_{L1}, P_{L2}, \dots, P_{LQ} (1 \leq Q \leq N-4)$, 这些点与 P_i, P_j, P_k 三点在同一平面上, 共球关系在平面上表现为共圆关系, 所以点 $P_i, P_j, P_k, P_{L1}, P_{L2}, \dots, P_{LQ}$ 构成平面上的多点共圆。分为以下两个步骤进行操作:

多点共圆的处理程序: 将这些点按顺时针或逆时针顺序进行排列, 并进行查重处理(下文将给出详细说明)。

多点共圆的剖分程序: 查重处理后, 进行二维多点共圆情况下的 Delaunay 三角剖分^[42], 剖分后形成的多个 Delaunay 三角形共同构成共球点集的三角形外包面, 将这些三角形外包面加入到外包面数组 $ff(S, 3)$ 中。

2 算法的详细说明

(1) 对于 1 中三角形凸外包面的求法, 首先, 利用空间中任意 3 个共球点不在同一条直线上的性质, 可求出任意 3 个空间共球点确定的平面方程。计算平面方程时, 我们引入了“ $i=1, N-2; j=i+1, N-1; k=j+1, N$ ”的循环, 保证了点号 $i < j < k$, 避免了重复计算的可能。然后根据凸包的性质, 即点集中的所有点均在点集凸包的内侧或凸包上, 利用其它点与三角形所在平面的位置关系进行判断。

(2) c) 中多点共圆处理程序中共圆点排序的实现过程: 将所有共圆点放入共圆点数组中。利用 P_i, P_j, P_k 三点坐标求出共圆点的圆心坐标 O , 取共圆点中点号最小的点 P_{\min} 与圆心形成的向量 $\overrightarrow{OP_{\min}}$ 作为基向量, 分别计算圆心到

其余共圆点的向量与向量 $\overrightarrow{OP_{\min}}$ 的外积 $\vec{n}(x_n, y_n, z_n)$ ，判断向量 \vec{n} 的方向，选取不为 0 的向量分量进行判定，若向量的 3 个分量均为 0，则可判定此向量与向量 $\overrightarrow{OP_{\min}}$ 的夹角为 180° ，对应的点在直线 OP_{\min} 上。其它点必存在计算出的 \vec{n} 中某一分量不为 0 的情况。假设计算出的 x_n 不为零，将共圆点分为两个集合，其中一个集合的点满足 $x_n > 0$ ，另一个集合中的点满足 $x_n < 0$ ；再计算圆心到除 P_{\min} 外其余共圆点的向量与基向量的内积，其中 $x_n > 0$ 的集合中的点按内积从大到小的顺序进行排列， $x_n < 0$ 集合中的点按内积从小到大的顺序进行排列（由于向量的长度均等于圆的半径，所以比较夹角的大小可以直接转化为比较内积值的大小），整体上的排列顺序为： P_{\min} 、 $x_n > 0$ 的点集、直线 OP_{\min} 上的点、 $x_n < 0$ 的点集。如图 4-1 所示。其中若点 P_1, P_2, P_3 的 x_n 值大于零，按内积从大到小的排列为 P_1, P_2, P_3 ，点 P_5, P_6, P_7 的 x_n 值小于零，按内积从小到大的排列为 P_5, P_6, P_7 ，其中 P_4 为直线 OP_{\min} 上的点。整体上的排列顺序为 $P_{\min}, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ，将其加入共圆点排序数组。

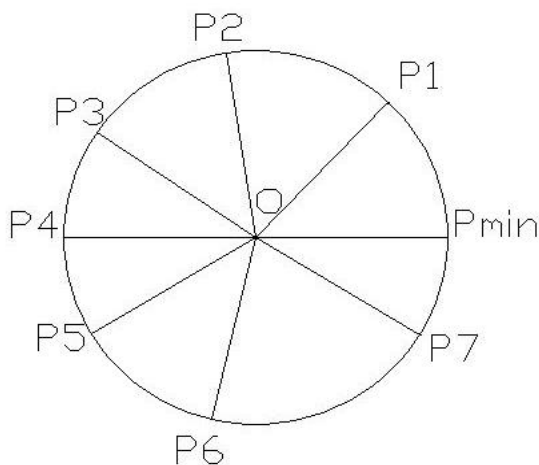


图 4-1 共圆点的排序

(3) c) 中多点共圆处理程序中查重程序的实现过程：外包面中存在多点共圆的情况时，当输入不同的 i, j, k ，会出现多次进入剖分该共圆面的情况。以四点共圆为例，如图 4-2 所示，当输入点为 P_i, P_j, P_k 时，会寻找到 P_L 点形成四点共圆外包面，而当输入点为 P_i, P_j, P_L ，同样地，会寻找到 P_k 点形成四点共圆外包面，也就是说，当出现外包面上四点共圆时，剖分该平面的次数为 C_4^3 ， N 点共圆时，剖分的次数为 C_N^3 。虽然上述的共圆点排序以及二维多点共圆剖分程序保证了剖分结果的唯一性。但是，多点共圆面上的每个三角形外包面均被记录了 C_N^3 次，这样将无法进行下面的程序。因此，本算法进行了查重处理。将每次进入多点共圆处理程序时输出的共圆点排序数组与之前

的共圆点排序数组进行比较,如果数组相同,则不进行多点共圆的剖分程序。如果数组不同,则进行多点共圆的剖分程序。

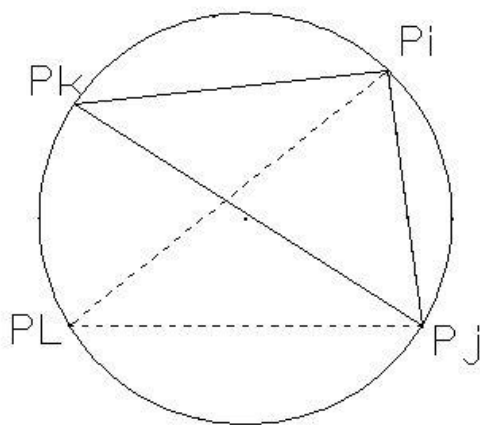


图 4-2 四点共圆剖分的重复

3 三角形凸外包面的效果图

下图为不同类型点集生成三角形凸外包面的效果图:

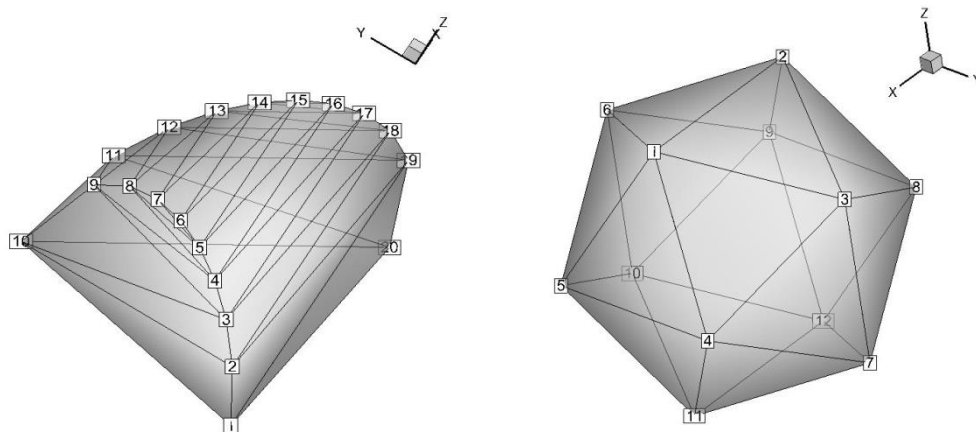


图 4-3a 局部多点共圆的三角形凸外包面 图 4-3b 正 20 面体的三角形凸外包面

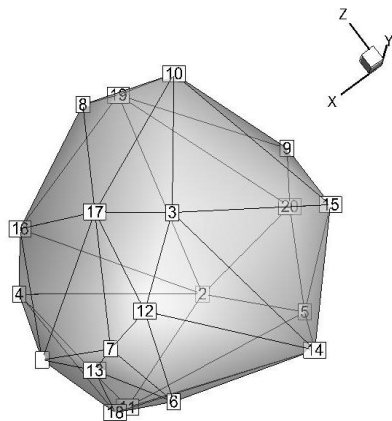


图 4-3c 随机点的三角形凸外包面

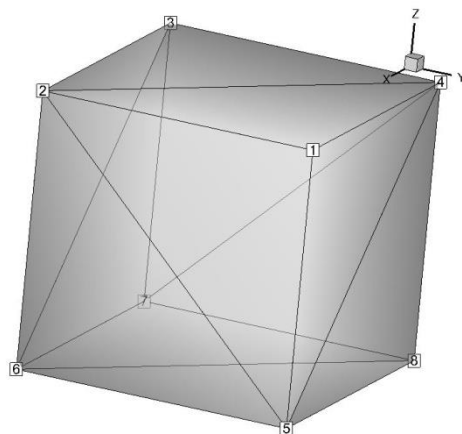


图 4-3d 正方体的三角形凸外包面

4.2.2 寻找相连点数最小的点

1 算法步骤

输入数据：共球点集的三角形外包面数组 $ff(S,3)$ 。

输出数据：相连点数最小的点 P_a 以及点数 M_a ， P_a 相连点数组 $da(i)=P_{ai}(i=1,2,\dots,M_a)$ ， P_a 相关外包面数组 $fa(M_a,3)$ 。

我们把包含点 P_a 的三角形外包面叫做 P_a 相关外包面。

(1) 对于任意 i, j 循环($i=1, N-1; j=i+1, N$)，若 i 与 j 出现在数组 ff 的同一行，则 P_j 是 P_i 的相连点(我们将验证两点是否在面数组中同一行的操作叫做同行检验)。将点 P_j 加入到点 P_i 的相连点数组中，点 P_i 的相连点数 $M_i=M_i+1$ (M_i 的初值为 0)。同理，将点 P_i 加入到点 P_j 的相连点数组中，点 P_j 的相连点数 $M_j=M_j+1$ (M_j 的初值为 0)。循环结束即可求出所有点的相连点数以及相连点数组。

(2) 找出 M_i 值最小的点 P_a ， $M_a \leq M_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。由性质 4.1 可知， $3 \leq M_a \leq 5$ 。 P_a 相连点为 $P_{ai}(i=1, 2, \dots, M_a)$ ，在数组 ff 中寻找点 P_a 所在的行，将所在行输出生成 P_a 相关外包面数组 $fa(M_a, 3)$ 。

2 算法说明

算法中，外包面数组 ff 中的每一行表示一个外包面三角形的三个顶点，我们利用数组 ff 中每行的点一定是相连点的性质，找出各点与之同行的点并统计个数，以便找出相连点数最小的点。

4.2.3 外包面的重建与内外 Delaunay 面的生成

1 算法的主要步骤

(1) P_a 相关外包面的重建以及外部 Delaunay 面的生成

输入数据：点 P_a ， P_a 相连点数组 $da(i)=P_{ai}(i=1,2,\dots,M_a)$ ， M_a 、 M_{ai} 的值， P_a 相关外包面数组 $fa(M_a,3)$ ，总的外包面数组 $ff(S,3)$

输出数据： P_a 相连点数组 $da(i)=P_{ai}(i=1,2,\dots,M_a)$ ， M_a 、 M_{ai} 的值，生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(M_a,3)$ ，总的外包面数组 $ff(S,3)$

先将 P_a 相关外包面数组 $fa(M_a,3)$ 从总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中拿出。

分别对 M_a 的值等于 3、4、5 的情况进行分析。其中 P_a 点的坐标为 (x_a, y_a, z_a)

a) 如果 $M_a=3$ ，令生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(3,3)$ 等于 P_a 相关外包面数组 $fa(3,3)$ 。

b) 如果 $M_a=4$ ，对于任意 j, k, L 循环($j=1,2; k=j+1,3; L=k+1,4$)，求出点 P_{aj} 、 P_{ak} 、 P_{aL} 确定的平面方程的系数 A_1, B_1, C_1, D_1 ，计算 $A_1x_a+B_1y_a+C_1z_a+D_1$ 的值，记为 bo 。若 bo 为 0，记录此时的 j, k, L ，执行 P_a 相关外包面的四点共面处理并跳出循环体，直接执行(2)的程序（由于 j, k, L 改变时，点 P_a 最多只能在其中的一个平面上， bo 为 0 的次数最多只有一次，可以跳出循环）。若能结束循环，在循环结束后，令生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(4,3)$ 等于 P_a 相关外包面数组 $fa(4,3)$ 。

P_a 相关外包面的四点共面处理：

点 P_a 在点 P_{aj}, P_{ak}, P_{aL} 所确定的平面上，在 P_a 相关外包面数组 $fa(4,3)$ 中进行点 P_{aj}, P_{ak}, P_{aL} 的同行检验，检验出的不同行的两点为 P_{ai1}, P_{ai2} ，另一点为 P_{ai3} 。用 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 替换 P_a 相关外包面中的 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai3}$ 、 $\Delta P_a P_{ai2} P_{ai3}$ ，与数组 $fa(4,3)$ 中的其它两个三角形一起加入生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(3,3)$ 中，此时 $M_a=3$ 。将 $\Delta P_{ai3} P_{ai1} P_{ai2}$ 加入到总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中，将 P_{ai3} 从 P_a 相连点数组 da 中去除。如图 4-4 所示。

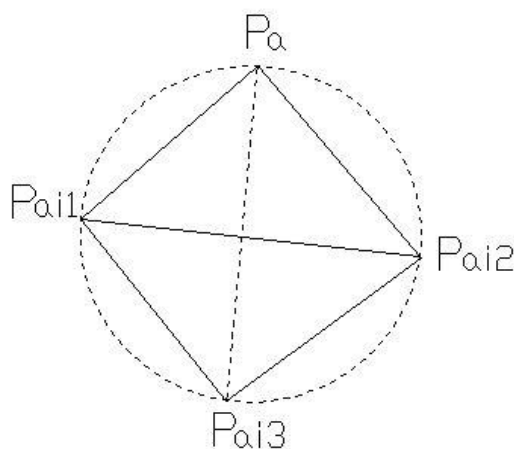


图 4-4 包含 P_a 点的四点共面处理

c) 如果 $M_a=5$, 对于任意 j, k, L 循环($j=1,3; k=j+1,4; L=k+1,5$), 求出点 P_{aj}, P_{ak}, P_{aL} 确定的平面方程的系数 A_2, B_2, C_2, D_2 , 计算 $A_2x_a+B_2y_a+C_2z_a+D_2$ 的值, 记为 co 。若 co 为 0, 记录次数 $NN=NN+1$ (NN 的初值为 0), 以及所在面数组 $fs(NN,3)$ (其中 $fs(NN,1)=j, fs(NN,2)=k, fs(NN,3)=L$)。经理论分析, NN 的值可能为 0、1、2、4。

c1) 当 $NN=0$ 时, 表示点 P_a 不在 $P_{ai}(i=1\sim5)$ 中任意三点所确定的平面上, 此时, 令生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(5,3)$ 等于 P_a 相关外包面数组 $fa(5,3)$ 。

c2) 当 $NN=1$ 时, 表示点 P_a 相关外包面上只存在一组四点共面, 则执行 b) 中 P_a 相关外包面的四点共面处理, 生成外部 Delaunay 面数组 $fw(4,3)$ 。 $M_a=4$, 同时令 $M_{ai1}=M_{ai1}+1, M_{ai2}=M_{ai2}+1$ 。

c3) 当 $NN=2$ 时, 表示点 P_a 相关外包面上存在两组四点共面, 则分别对这两个面执行 b) 中 P_a 相关外包面的四点共面处理, 生成外部 Delaunay 面数组 $fw(3,3)$, $M_a=3$ 。

c4) 当 $NN=4$ 时, 表示点 P_a 相关外包面上存在五点共面, 进行 P_a 相关外包面的五点共面处理。

P_a 相关外包面的五点共面处理:

寻找到与 P_a 点相连的不在此五点平面上的点 P_{aT} , 在 P_a 相关外包面数组 $fa(5,3)$ 中进行点 P_{aT} 的同行检验, 找出与之同行的两点(非 P_a)分别为 P_{ai1}, P_{ai2} , 将 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 、 $\Delta P_a P_{ai1} P_{aT}$ 、 $\Delta P_a P_{ai2} P_{aT}$ 加入到数组 $fw(3,3)$ 中, 此时 $M_a=3$, 再在数组 $fa(5,3)$ 对点 P_{ai1} 进行同行检验, 找出与之不同行的其中一点(非 P_{ai2}) P_{ai3} , 最后一点为 P_{ai4} , 将 $\Delta P_{ai1} P_{ai2} P_{ai3}$ 、 $\Delta P_{ai1} P_{ai3} P_{ai4}$ 加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中, 将 P_{ai3} 、 P_{ai4} 从 P_a 相连点数组 da 中去除。如图 4-5 所示。

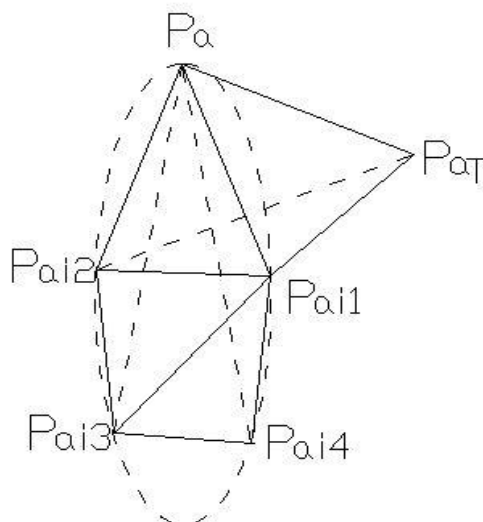


图 4-5 包含 P_a 点的五点共面处理

(2) 总的三角形外包面的重建以及内部 Delaunay 面的生成

输入数据：点 P_a ， M_a 的值，点 P_a 相连点数组 $da(i)=P_{ai}(i=1,2,\dots,M_a)$ ，总的外包面数组 $ff(S,3)$ ，生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(M_a,3)$

输出数据：总的外包面数组 $ff(S,3)$ 、生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(M_a-3,3)$

对 M_a 值等于 3、4、5 的情况进行处理：

a) 当 $M_a=3$ 时，将点 P_a 相连点数组 da 中三个点构成的 $\Delta P_{a1}P_{a2}P_{a3}$ 加入到总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中。

b) 当 $M_a=4$ 时，对于任意 j, k, L 循环($j=1,2; k=j+1,3; L=k+1,4$)，求出点 P_{aj} 、 P_{ak} 、 P_{aL} 确定的平面方程的系数 A_3, B_3, C_3, D_3 ，与 P_a 相连的另一点为 P_{aQ} ，坐标为 (x_{aQ}, y_{aQ}, z_{aQ}) 。计算 $A_3x_a+B_3y_a+C_3z_a+D_3$ 的值，记为 do 。计算 $A_3x_{aQ}+B_3y_{aQ}+C_3z_{aQ}+D_3$ 的值，记为 eo 。若 eo 为 0 则执行 b1) 并跳出循环体，直接执行 4.2.4 的程序；否则，执行 b2)。

b1) 此情况表示 $P_{ai}(i=1\sim4)$ 四点共面，进行平面上的三角剖分。在点 $P_{ai}(i=1,2,3,4)$ 中找出 M_{ai} 值最小的点，记为点 P_{amin} 。在生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(4,3)$ 中对点 P_{amin} 进行同行检验，找出与之同行的两点(非 P_a) P_{ai1}, P_{ai2} ，另一点为 P_{ai3} ，将 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 加入到生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(1,3)$ 中，将 $\Delta P_{ai1} P_{ai2} P_{amin}$ 、 $\Delta P_{ai1} P_{ai2} P_{ai3}$ 加入到总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中。如图 4-6 所示。

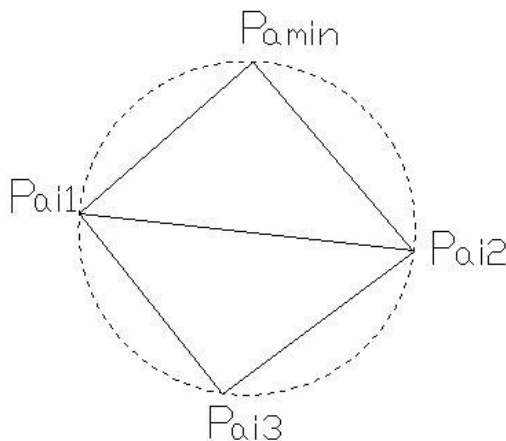


图 4-6 P_a 相连点的四点共面处理

b2) 此情况表示 $P_{ai}(i=1\sim4)$ 四点不共面，找出这四个点中与 P_a 相关外包面一起构成凹域的两个三角形面，这样保证了对于剖分点集中除 P_a 的其它点，这两个三角形面为凸外包面。若 do 与 eo 异号，记录 j, k, L 的值，将 $\Delta P_{aj} P_{ak} P_{aL}$

加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中。

循环结束后, 将有两个这样的三角形满足条件, 找出这两个三角形的公共顶点 P_{ai1}, P_{ai2} , 将 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 加入到生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(1,3)$ 中。

c) 当 $M_a=5$ 时, 对于任意 j, k, L 循环($j=1,3; k=j+1,4; L=k+1,5$), 求出点 P_{aj}, P_{ak}, P_{aL} 确定的平面方程的系数 A_4, B_4, C_4, D_4 , 与 P_a 相连的另两点分别为 P_{aQ}, P_{aT} 。坐标分别为 $(x_{aQ}, y_{aQ}, z_{aQ}), (x_{aT}, y_{aT}, z_{aT})$ 。分别计算 $A_4 x_a + B_3 y_a + C_3 z_a + D_4$ 的值 do 、 $A_4 x_{aQ} + B_3 y_{aQ} + C_3 z_{aQ} + D_4$ 的值 eo 、 $A_4 x_{aT} + B_3 y_{aT} + C_3 z_{aT} + D_4$ 的值 fo 。如果 eo 与 fo 同时为 0, 则执行 c1) 并跳出循环体, 执行 4.2.4 的程序; 如果 eo, fo 中一个为 0, 另一个与 do 异号, 计算结果为 0 的点记作点 P_{as} , 另一点记作 P_{ar} , 此时分两种情况: 1) 生成三角形面个数 NT 为 0, 则执行 c2) 并跳出循环, 执行 4.2.4 的程序; 2) 生成三角形面个数 NT 为 1, 则执行 c3) 并跳出循环, 执行 4.2.4 的程序; 否则, 执行 c4)。

c1) 此情况表示 $P_{ai}(i=1\sim5)$ 五点共面, 进行平面上的三角剖分。在点 $P_{ai}(i=1,2,3,4,5)$ 中找出 M_{ai} 值最小的点, 记为点 P_{amin} 。在生成的外部 Delaunay 面数组 $fw(5,3)$ 中对点 P_{amin} 进行同行检验, 找出与之同行的两点(非 P_a) P_{ai1}, P_{ai2} , 再对 P_{ai1} 在数组 $fw(5,3)$ 中进行同行检验, 找出与之不同行的其中一点(非 P_{ai2}) P_{ai3} , 最后一点为 P_{ai4} 。如果 $M_{ai3} > M_{ai4}$, 执行操作一: 将 $\Delta P_{amin} P_{ai1} P_{ai2}$ 、 $\Delta P_{ai1} P_{ai2} P_{ai3}$ 、 $\Delta P_{ai1} P_{ai3} P_{ai4}$ 加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中, 将 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 、 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai3}$ 加入到生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(2,3)$ 中; 如果 $M_{ai3} < M_{ai4}$, 执行操作二: 将 $\Delta P_{amin} P_{ai1} P_{ai2}$ 、 $\Delta P_{ai1} P_{ai2} P_{ai4}$ 、 $\Delta P_{ai2} P_{ai3} P_{ai4}$ 加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中, 将 $\Delta P_a P_{ai1} P_{ai2}$ 、 $\Delta P_a P_{ai2} P_{ai4}$ 加入到生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(2,3)$ 中。如图 4-7 所示。

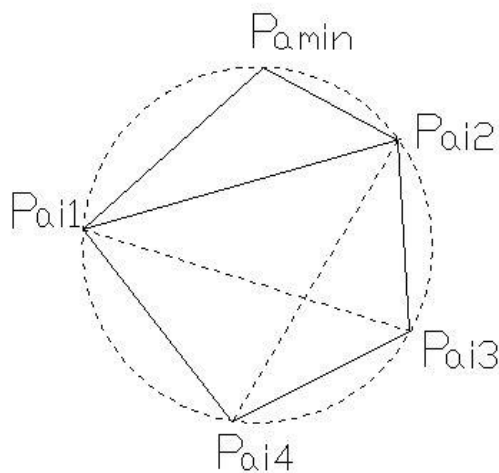


图 4-7 P_a 相连点的五点共面处理

c2) 此情况表示 $P_{ai}(i=1\sim5)$ 中有四点共面, 且另一点与 P_a 在平面的异侧。因此该平面可以作为除 P_a 外其余点的外包面, 是我们要进行剖分的平面。此时, 经分析, $P_{ai}(i=1\sim5)$ 中还存在一个三角形可以作为除 P_a 外其余点的外包面。若四点平面先于此三角形外包面被找出, 则同时进行四点共面与三角形面的处理工作。用点 P_{ar} 取代 c1) 中的 P_{amin} 。点的寻找以及排列顺序与 c1) 相同, 令 $M_{ai1} = M_{ai1} + 1$, $M_{ai2} = M_{ai2} + 1$ 。找出 $M_{aij}(j=1,2,3,4)$ 中最小的值对应的点。若此点为 P_{ai2} 或 P_{ai4} , 则执行 c1) 程序中的操作一; 若此点为 P_{ai1} 或 P_{ai3} , 则执行 c1) 程序中的操作二。

c3) 若四点平面后于此三角形外包面被找出, 则仅进行四点共面的处理工作。除了不将 $\Delta P_{ar}P_{ai1}P_{ai2}$ 加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中, 其它处理方式与 c2) 相同。

c4) 在 $P_{ai}(i=1\sim5)$ 中找出可以作为除 P_a 外其余点外包面的三角形(此面上只有 3 个点)。若 eo 与 fo 同号且均与 do 异号, 记录 j,k,L 的值, 将 $\Delta P_{aj}P_{ak}P_{aL}$ 加入总的外包面数组 $ff(S,3)$ 中, 每生成一个 $\Delta P_{aj}P_{ak}P_{aL}$, $NT = NT + 1$ (NT 的初值为 0)。

循环结束后, 有三个这样的三角形满足条件, 找出这三个三角形的两个公共边 $P_{ai1}P_{ai2}$ 与 $P_{ai1}P_{ai3}$, 将 $\Delta P_aP_{ai1}P_{ai2}$ 、 $\Delta P_aP_{ai1}P_{ai3}$ 加入到生成的内部 Delaunay 面数组 $fn(2,3)$ 中。

2 P_a 相关外包面重建的原因与具体过程

(1) 进行 P_a 相关外包面重建的目的是防止新生成的三角形外包面 ff 与原有的 P_a 相关外包面发生内交。以 $M_a=4$ 为例, $da(i)=P_{ai}(i=1,2,3,4)$ 。如图 4-4a 所示, P_a 点与 P_{a1}, P_{a2}, P_{a3} 共面时, 若不进行外包面重建工作, 当去掉点 P_a 进行外包面数组 ff 的重建时, 会生成 $\Delta P_{a1}P_{a3}P_{a4}$ 与原始的 P_a 相关外包面 $\Delta P_aP_{a1}P_{a2}$ 、 $\Delta P_aP_{a2}P_{a3}$ 发生内交, 为避免这种情形的发生, 我们进行如图 4-4b 的处理, 用 $\Delta P_aP_{a1}P_{a3}$ 、 $\Delta P_{a1}P_{a2}P_{a3}$ 替换 $\Delta P_aP_{a1}P_{a2}$ 、 $\Delta P_aP_{a2}P_{a3}$, 此时, M_a 变为 3, 数组 da 中的元素变为 P_{a1}, P_{a3}, P_{a4} 。

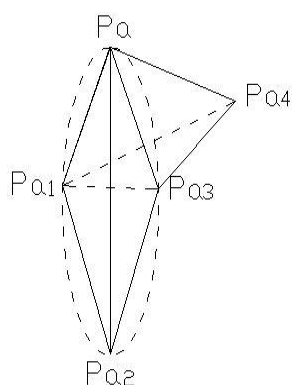


图 4-4a 重建前的外包面

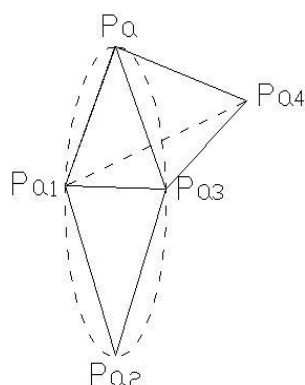


图 4-4b 重建后的外包面

(2) $M_a=5$ 时的三种特殊情况的处理, $da(i)=P_{ai}(i=1,2,3,4,5)$, 如图所示: 情况一: 对应算法中 $NN=1$ 的情况。图 4-5 表示点 P_a 仅与 P_{a1}, P_{a2}, P_{a3} 形成一种四点共面关系时的交换外包面处理。处理后 M_a 变为 4。

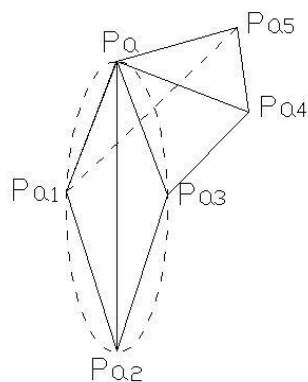


图 4-5a 情况一处理前

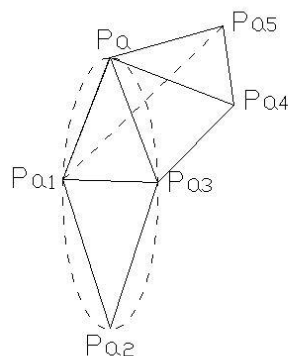


图 4-5b 情况一处理后

情况二: 对应算法中 $NN=2$ 的情况。图 4-6 表示点 P_a 与 P_{a1}, P_{a2}, P_{a3} 和 P_{a4}, P_{a5} 均形成四点共面关系时的交换外包面处理。处理后 M_a 变为 3。

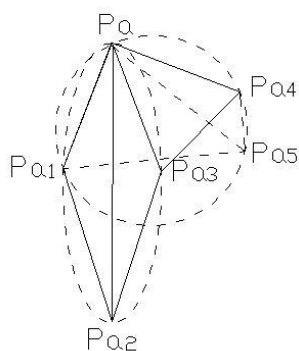


图 4-6a 情况二处理前

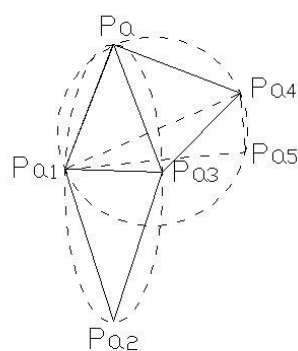


图 4-6b 情况二处理后

情况三：对应算法中 $NN=4$ 的情况。图 4-7 表示点 P_a 与 $P_{a1}, P_{a2}, P_{a3}, P_{a4}$ 形成五点共面关系时的交换外包面处理。处理后 M_a 变为 3。

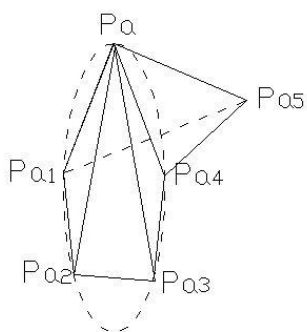


图 4-7a 情况三处理前

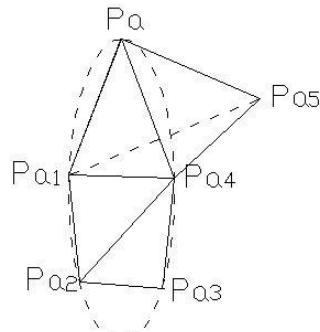


图 4-7b 情况三处理后

3 内部 Delaunay 面生成过程中选取 M_{ai} 值最小的点 P_{ai} 的原因

在内部 Delaunay 面的生成过程中，在 P_a 相连点中若存在 4 点或 5 点共面情形(且此平面是除 P_a 点的点集外包面时)，此平面记为 F_1 ，寻找此面上 M_{ai} 值最小的点 P_{amin} ，进行此平面三角剖分时遵循点 P_{amin} 在此平面上只与两个点相连的原则。这样处理的目的是，在进行下一个 P_a 点的寻找时，如果 P_a 点在 F_1 上，则只可能为点 P_{amin} ，此时则不会进行该平面上的交换处理。避免了改变面 F_1 并导致其与原有的内部 Delaunay 面内交的情形。

4.2.4 点 P_a 的删除以及程序的循环

当记录下新生成的外包面数组 ff 、外部 Delaunay 面数组 fw 、内部 Delaunay 面数组 fn 后，暂时将点 P_a 从点集中删除，重新定义一个不包含点

P_a 的剖分点数组, 重复 4.3.2 与 4.3.3 的两个过程, 每次循环后剖分点的数量 $N_s = N_s - 1$ 。当剖分点的数量 $N_s = 3$ 时, 终止循环。记录最后的三个点, 组成三角形加入到数组 fw 中。将每一步生成的 fw 、 fn 数组累加起来, 最终的剖分形式为 $fe = fw + fn$ 。

4.3 算法的总流程图

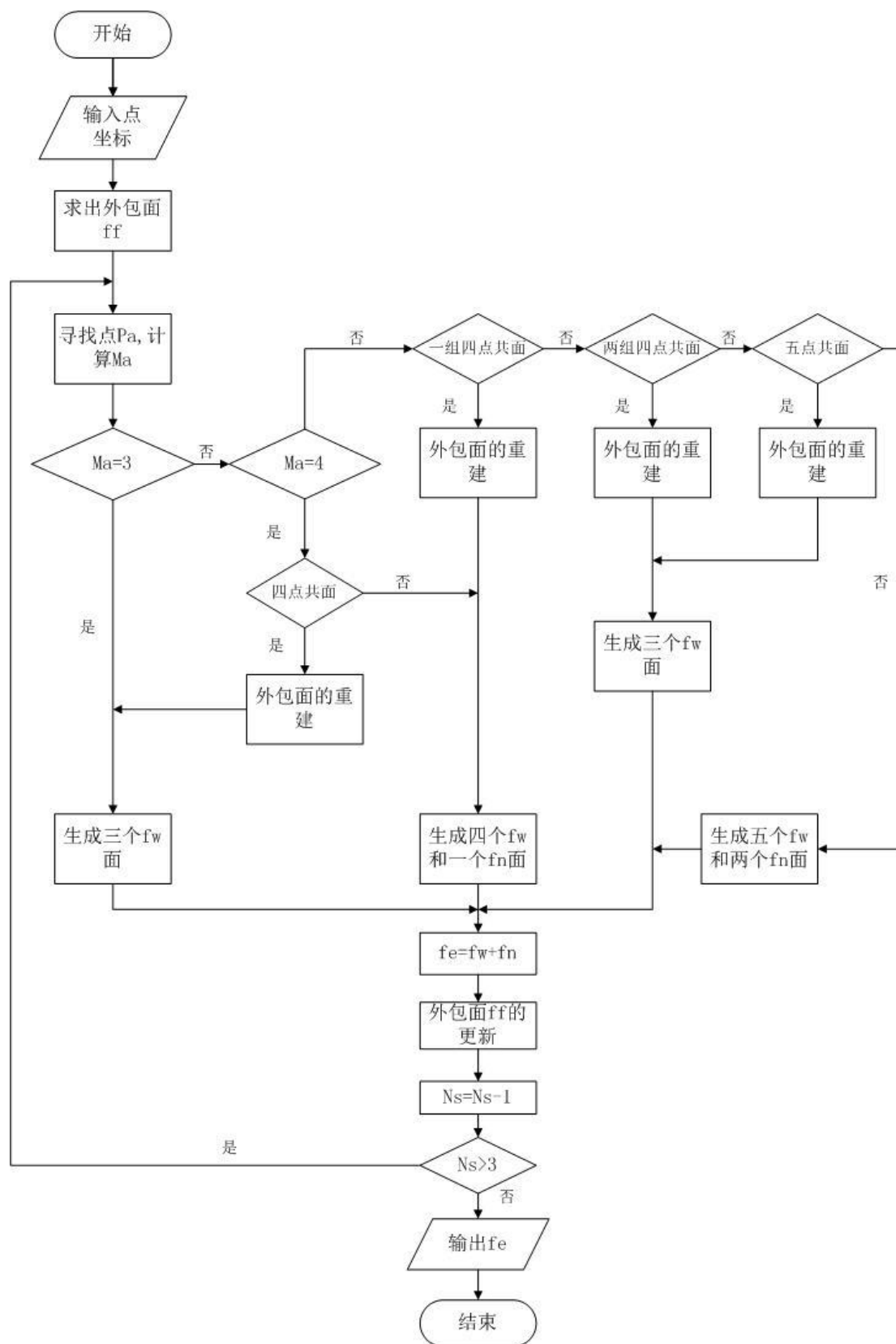


图 4-8 算法的总流程图

4.4 算法的优点

本算法采用了一种不同于以往的 Delaunay 网格构建模式,以点和点的连接、点和面的位置关系分析为基础,探讨了共球点集中各种位置关系的网格剖分处理方法。主要的优点如下:

1 证明了空间中三角形外包面上最小相连点数不大于 5 的性质,并以此作为算法的理论基础进行程序设计,最多分析至空间 6 点剖分情形。比起用随机点删除进行外包面重构的方法,此方法更加简洁、时间效率更高。

2 传统的三维 Delaunay 网格生成方法大多在算法设计中加入很多的内交判定,程序较复杂,本算法在生成网格之前采取了面的交换以及控制剖分形式的方法,有效的避免了内部内交情形的发生。

3 算法中的每一步的 ff 数组更新,以及内外 Delaunay 面的生成过程,剖分出的 1~3 个四面体所组成的空间区域均为凹域,同时保证了 ff 外包面对于点集中其它点均为凸,程序每次均进行凸域上的剖分处理,保证了程序的可循环性。

4.5 剖分效果图

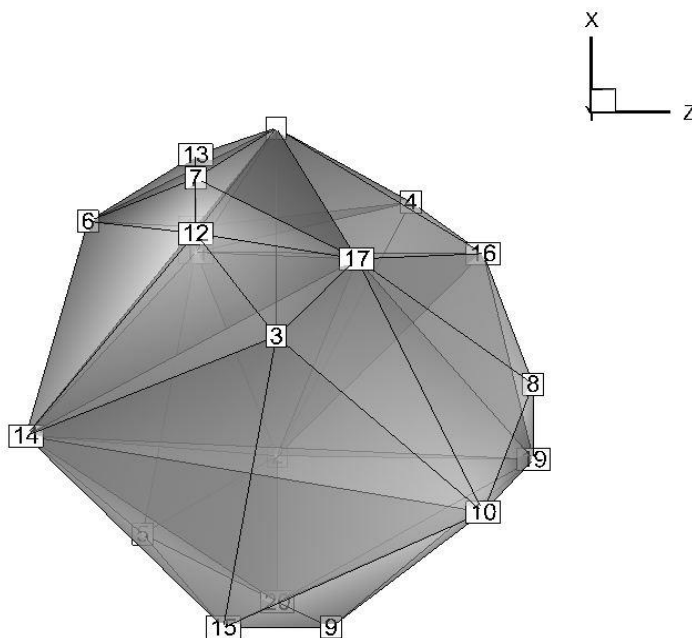


图 4-9 20 个随机点的内部剖分效果图

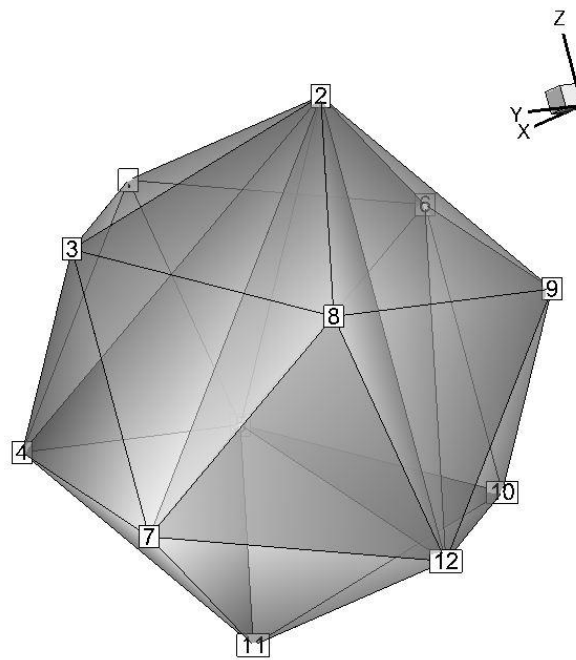


图 4-10 正 20 面体的内部剖分效果图

由图中可以看出，剖分内部具有良好的四面体网格结构，剖分程序可以成功运行。

第五章 结论与展望

对本文所做的主要研究进行总结,并对未来进一步的研究方向做以展望。

本文针对 Delaunay 网格剖分,主要做了以下工作:

1、通过阅读大量文献,总结归纳了国内外关于 Delaunay 网格剖分的研究成果,详细阐述了 Delaunay 网格剖分技术的发展史、发展现状和发展趋势。全面介绍了不同类型的 Delaunay 网格生成算法,分析了各类算法的优缺点。

2、介绍了二维及三维 Delaunay 网格、Voronoi 图的相关理论和性质,并根据理论和性质分析了简单的二维和三维剖分单元。

3、提出了三维共球点集的 Delaunay 四面体剖分算法,最小相连点删除算法,详细介绍了算法的主要步骤及算法的优点。对于空间球域的剖分问题起到了很好的补充作用,具有很强的指导意义。

4、将算法程序化,实现了算法的循环并成功对共球点集进行了四面体剖分,在 Fortran 平台上成功地运行了程序,并通过 Tecplot 的后处理使之可视化。

对最小相连点删除算法下一步工作的展望:

1、在计算机中由于存在计算误差,我们限定了“0”的范围是介于两个绝对值相同的正负极小值之间。在计算中,当点非常接近平面时,由于计算结果可能在“0”的范围内,我们认为点在平面上而其实际上不在平面上,会出现外包面中局部微小凹陷或 sliver 四面体的情况,对剖分过程造成影响,这是我们下一步要解决的主要问题。

2、在进行 P_a 相关外包面重建的过程中, P_a 相关外包面出现 5 点共面时的程序设计比较复杂,经过实际剖分各类型的共球点时发现,在这一过程中没有出现进入 5 点共面处理的情况,是否可以用理论证明此情况是不存在的,从而减少这一过程的程序设计。

3、在多点共球情况下的四面体网格剖分由于没有规定特殊的剖分方式,生成的四面体单元质量无法得到保证,不规则形状出现的可能性大大增加,能否在多种剖分形式中寻找到最佳的剖分类型,定义一种规范四面体形状的特殊剖分,也是我们接下来应探讨的问题之一。

4、算法中我们进行了 M_a 等于 3、4、5 三种情况的讨论,是否可以设计一个对任意 M_a 值都适用的程序,将问题简化,是值得我们思考的问题。

参考文献

- [1] 董春华, 胡建平, 基于四叉树的 Delaunay 三角网的快速构建, 天津城市建设学院学报, 2007, 13 (4): 298~301
- [2] 修荣荣, 徐明海, 黄善波, 一种改进的二维平面区域三角形化的前沿推进法, 石油大学学报, 2003, 27 (5): 73~80
- [3] Lawson, C. L. Properties of n-dimensional triangulations. Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(4): 231~246
- [4] Bowyer, A. Computing Dirichlet tessellations. Computer Journal, 1981, 24(2): 162~166
- [5] Joe, B. Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations. SIAM Journal on Scientific Computing, 1995, 16(6): 1292~1307
- [6] 陈学工, 潘懋, 空间散点集 Delaunay 四面体剖分切割算法, 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14 (1): 93~95
- [7] 徐永安, 杨钦, 吴壮志, 三维约束 Delaunay 三角化的实现, 软件学报, 2001, 12 (1): 103~110
- [8] 邵铁政, 李世森, 凸包内空间散乱点集 Delaunay 四面体角度剖分算法, 水道港口, 2013, 34 (1): 89~92
- [9] Lawson, C. L. Software for C^1 surface interpolation. Rice J. Mathematical Software III. Pasadena, California: California Institute of Technology, 1977: 161~194
- [10] Bowyer, A. Computing Dirichlet Tessellations. Computer Journal, 1981, 24(2): 162~166
- [11] Sloan, S. W. A fast algorithm for constructing Delaunay triangulation in the plane. Advances Engineering Software, 1987, 9(1): 34~55
- [12] Macedonia, G., Pareschi, M. T. An algorithm for the triangulations of arbitrarily distributed points applications to volume estimate and terrain fitting. Computers and Geosciences, 1991, 17(7): 859~874
- [13] Floriani, L. D., Puppo, E. An on-line algorithm for constrained Delaunay triangulation. Graphical Models and Image Processing, 1992, 54(4): 290~300

- [14]Tsaiv, J. D. Delaunay triangulations in TIN creation an over view and a Linear-time algorithm. International Journal of Geographical Information Science,1993,7(6):501~524
- [15]Shamos, M. I., Hoey, D. Closest-point problems. Proceeding of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science. Los Angeles,California:IEEE,1975:151~162
- [16]Lewis, B. A., Robinson, J. S. Triangulation of planar regions with applications. The Computer Journal,1978,21(4):324~332
- [17]Lee, D. T., Schachter, B. J. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. International Journal of Computer and Information Science, 1980,9(3):219~242
- [18]Green, P. J., Sibson, R. Computing Dirichlet tessellations in the plane. The Computer Journal,1978,21(2):168~173
- [19]Brassel, K. E., Reif, D. A procedure to generate Thiessen polygons. Geophysical Analysis,1979,2(11):289~303
- [20]Macullagh, M. T., Ross, C. G. Delaunay triangulation of a random dataset is arithmic mapping. Cartographic Journal,1980,17(2):93~99
- [21]Maus, A. Delaunay triangulation and the convex hull of n-points inexpected linear time. BIT,1984,24(2):151~163
- [22]武晓波, 王世新, 肖春生, 一种生成 Delaunay 三角网的合成算法, 遥感学报, 2000, 4 (1): 32~35
- [23]武晓波, 王世新, 肖春生, Delaunay 三角网的生成算法研究, 测绘学报, 1999, 28 (1): 28~35
- [24]Watson, D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. Computer Journal,1981,24(2):167~172
- [25]Shenton, D. N., Cendes, Z. J. Three-dimensional finite element mesh generation using Delaunay Tessellation. IEEE Transactions On Magnetics, 1985,21(6):2535~2538
- [26]Baker, T. J. Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained Delaunay triangulation. Engineering with Computers,1989(5):161~175
- [27]Joe, B. Three-dimensional triangulations from local transformation. Society for Industrial and Applied Mathematics,1989,10(4):718~741

- [28] Kanaganathan, S., Goldstein, N. B. Comparison of four-point adding algorithms for Delaunay-type three-dimensional mesh generators. *IEEE transactions on magnetics*, 1991, 27(3): 3444~3451
- [29] Joe, B. Delaunay versus max-min solid angle triangulations for three-dimensional mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 31(5): 987~997
- [30] Si, H., Gartner, K. 3D boundary recovery by constrained Delaunay tetrahedralization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 2011, 85(11): 1341~1364
- [31] Devillers, O., Teillaud, M. Perturbations for Delaunay and weighted Delaunay 3D triangulations. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2011, 44(3): 160~168
- [32] Buchin, K., Devillers, O., Mulzer, W. Vertex deletion for 3D Delaunay triangulations. *Lecture Notes in Computer Science*, 2013, 125: 253~264
- [33] Lo, S. H. 3D Delaunay triangulation of non-uniform point distributions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2014, 90: 113~130
- [34] Bruno, L. Revisiting optimal Delaunay triangulation for 3D graded mesh generation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2014, 36(3): 930~945
- [35] 崔汉国, 胡瑞安, 金端峰, 三维点集 Delaunay 三角剖分的自动生成与修改算法, *工程图学学报*, 1995 (2): 1~7
- [36] 胡于进, 赵虎跃, 赵建军, 基于 Delaunay 准则的三维网格自动插点算法, *华中理工大学学报*, 2000, 28 (5): 7~9
- [37] 赵建军, 王启付, 边界一致的 Delaunay 四面体网格稳定生成算法, *机械工程学报*, 2004, 40 (6): 100~106
- [38] 骆冠勇, 曹洪, 房莹光, 用逐点插入法生成 Delaunay 四面体自适应网格, *计算力学学报*, 2007, 24 (6): 917~922
- [39] 刘岩, 昌继海, 关振群, 改进的三维 ODT 四面体网格质量优化算法, *计算机辅助设计与图形学学报*, 2012, 24 (7): 949~953
- [40] 王磊, 聂玉峰, 李义强, Delaunay 四面体网格并行生成算法研究进展, *计算机辅助设计与图形学学报*, 2011, 23 (6): 923~932
- [41] 杨忱瑛, 陈文亮, 三维限定 Delaunay 四面体网格划分的算法, *现代设计与先进制造技术*, 2009, 38 (7): 49~54

- [42]李世森, 周玥, 任意多点共圆平面的 Delaunay 三角剖分在水动力数值模拟中的应用, 港工技术, 2012, 49 (1): 1~3
- [43]Lawson, C. L. Transforming triangulations. Discrete Mathematics, 1972, 3(4):365~372
- [44]杨钦, 限定 Delaunay 三角网格剖分技术, 北京: 电子工业出版社, 2005, 10~12

发表论文和参加科研情况说明

发表的论文：

[1] 李世森，周晓，三维四面体剖分在局部多点共球情况下的 Delaunay 角度优化算法，港工技术，2015（录用待刊）

参与的科研项目：

- [1] 三亚旅游产业园一期工程防波堤建设的物理模型断面实验。
- [2] 使用 SMS 构建数学模型，通过计算检测曹妃甸中心渔港区的防波堤挡浪效果、码头泊稳情况。

致谢

本论文的工作是在我的导师李世森副教授的悉心指导下完成的，李老师严谨的治学态度和科学的工作方法给了我极大的帮助和影响，也给我们树立了良好的榜样。在实验室工作及撰写论文期间，李老师对于我的科研工作和论文都提出了许多的宝贵意见，在学习上和生活上也都给予了我很大的关心，在此向李老师表示衷心的感谢。

在实验室工作及撰写论文期间，实验室的张睿、张超同学对我也给予了很大的帮助，他们孜孜不倦的科研精神也值得我学习。在这两年半的实验室生活中，感谢他们的陪伴与鼓励。

同时感谢我的父母及家人对我在学业和生活上的关心，你们的支持也是我前进的动力，谢谢对我默默支持的家人们。

天津大学
硕士学位论文

TIANJIN UNIVERSITY
M.S.DISSERTATION



2013201156