8.2.7. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+1} = \left[t = \cos x + 1 \Rightarrow dt = d(\cos x+1) = (\cos x+1)'_x dx = -\sin x\,dx \Rightarrow \sin x\,dx = -dt \right.$

$= \int \frac{-dt}{\cos x+1} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x+1| + C$

8.2.8. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \left[t = x^3+1 \Rightarrow dt = d(x^3+1) = (x^3+1)'_x dx = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3} \right.$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$

8.2.9. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1} = \left[t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow dt = (\operatorname{arctg} x)'_x dx = \right.$

$= \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{x^2+1}dx = \left. \frac{dx}{x^2+1} \right] = \int t\,dt =$

$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$

11.05. **Лекция 7** Продолжение лекции :)

- Несобственные интегралы I рода называются <u>сходящимися</u>, если сущ-ют конечные пределы, стоящие в правых частях. Если же пределы не сущ-ют или бесконечны, то несобственный интеграл называется <u>расходящимся</u>.

- Признаки сходимости и расходимости I рода:

1. Если на промежутке $[a; +\infty]$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовл. условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то

из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

2. Если при $x \in [a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и сущ. кон. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то инт. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, который в этом случае называется абсолютно сходящимся.

9.2.1. $\int_1^{+\infty} dx/x^2 = \lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b dx/x^2 = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx =$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) +$

$+ \lim\limits_{b \to +\infty} (1) = 0 - 1 = -1$ (сходится)

Примечание: интеграл $\int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

9.2.6. $\int_{-\infty}^{0} x \cos x\,dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 x \cos x\,dx = \left[\int_a^b uv'\,dx - \int_a^b u'v\,dx \right] =$

$= [\, u = x \Rightarrow u' = x' = 1,\ v' = \cos x \Rightarrow v = \int v'\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x \,] =$

$= \lim\limits_{a \to -\infty} \left(x \sin x \Big|_a^0 \int_a^0 \sin x\,dx \right) = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(x \sin x \Big|_a^0 + \cos x \Big|_a^0 \right) =$

$= 0 - \lim\limits_{a \to -\infty} a \sin a + 1 - \lim\limits_{a \to -\infty} \cos a$. Т.к $\lim\limits_{a \to -\infty} (a \sin a)$ и $\lim\limits_{a \to -\infty} (\cos a)$ не сущ $\Rightarrow \int$ расходится

∘ Интеграла от неограниченных функций II рода

✓ Если $y = f(x)$ непрерывна в $[a; b)$ и имеет разрыв II рода при $x = b$, то несобственный интеграл от неограниченной функции II рода опр:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

✓ Если предел стоящий в правой части существует, то несобственный инт. II рода - сходящийся, иначе - расходящийся.

✓ Если $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

✓ Если $y = f(x)$ терпит разрыв II рода во внутренней точке $c \in [a; b]$, то несобственный интеграл II рода определяется сл-щим обр:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

✓ В данном случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла сходятся.

Некоторые признаки сходимости и расходимости II рода

1. Если на пром. $[a;b)$ $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x=b$ терпят разрыв II рода и $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^b \varphi(x)\,dx \Rightarrow$ сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx$

2. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b)$ и в $x=b$ терпят разрыв II рода. Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0<k<\infty$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновремен.

3. Если функция $f(x)$ знакопеременная на отрезке $[a;b]$, имеет разрыв в точке $x=b$ и несобственный $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Замечание: В качестве эталона для сравнения ф-ций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$

Можно показать, что несобственный интеграл:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \ (\alpha > 0) \quad \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Это же относится к $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$

9.2.8. $\int_{-\infty}^{+\infty} dx/(1+x^2) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx, \ a$ – число, число $c = 0 \right] =$

$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 dx/(1+x^2) + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b dx/(1+x^2) =$

$= \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^b\right) =$

$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$

$= \lim_{a\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (-0 + \operatorname{arctg} b) =$

$= \lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b) =$

$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (сходится)

9.2.10 $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left[\right.$ т.к $[1; +\infty)$ то разрыва на данном инт. нет $(0 = 0)\left.\right] =$

$= \left[\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^{2/3}}\,dx \Rightarrow \left.\frac{x+2}{x^{2/3}}\right] f(x).$ т.к $x+2 > x^{2/3} \Rightarrow \left.\frac{1}{x^{2/3}}\right] \varphi(x) \left.\right] =$

$\overset{\mathrm{I}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{b\to\infty} 3x^{1/3} \Big|_1^b = 3 \lim_{b\to\infty} b^{1/3} - 3 = \infty$

$\overset{\mathrm{II}}{=} \left[x+2 > \frac{x+2}{x^{2/3}} \right] = \int_1^{+\infty} (x+2)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\int_1^{+b} x\,dx + \int_1^{+b} 2\,dx \right) =$

$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^b + 0 \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) =$

$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b^2}{2} - 0.5 = \infty$ (расходится).