Логинова Софья 3пг. Домашняя работа.

Матричные уравнения.

1.4.50.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-2) + 0\cdot 3/2 & 0\cdot 1 - 1/2 \cdot 0 \\ 0\cdot(-2) + 0\cdot 3/2 & 0 \cdot 1 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.51.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = -16 + 15 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 0\cdot(-5) & 1\cdot 3 - 0\cdot 4 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot(-5) & 0\cdot 3 - 1\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

1.4.52

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A^{-1}$ не существует.

Т.к $\det A = 0$, то ур-ние не имеет решения.

1.4.53.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A^{-1}$ не существует.

Т.к $\det A = 0$, то ур-ние не имеет решения.

1.4.54.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\det C = -25 + 24 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

2. $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. $$X = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 & -0,6 \cdot 1 + 0,2 \cdot 3 \\ -0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 & 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 & -0,6 + 0,6 \\ -0,4 + 0,4 & 0,4 + 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) - 0 \cdot 4 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 5 \\ -0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

1.4.55.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. $\det A = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\det C = 10 - 8 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $X = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \underset{1}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{2}{\cdot} \begin{pmatrix} 2,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 & -0,6 \cdot 1 + 0,2 \cdot 3 \\ -0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 & 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2{,}5 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0{,}2{,}5 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.56.

$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. $\det A = 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2. $\Gamma = (A \mid E)$

$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \underline{II} : 2 \\ \underline{III} : 3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1/3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1/3 \\ 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1/3 \end{pmatrix} =$

4 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.57.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = 3 - 12 + 0 - 0 - 2 + 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \underline{II} - 2\underline{I} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) : 7 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + 2\underline{II} \\ \\ \underline{III} + 2\underline{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4/7 & 2/7 & 1 \end{array}\right) : -1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -2/7 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{I} - \underline{III} \\ \underline{II} + \underline{III} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/7 & 4/7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -2/7 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $$X = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/7 \cdot 2 - 4/7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 2/7 \cdot 2 + 1/7 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 4/7 \cdot 2 + 2/7 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 - 4/7 + 3 \\ 4/7 + 1/7 - 3 \\ 8/7 + 2/7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/7 + 3 \\ 5/7 - 3 \\ 10/7 - 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (21-6)/7 \\ -(21-5)/7 \\ -(21-10)/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$$

1.4.58.

6 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

1. $\det A = 3 - 12 + 0 - 0 - 2 + 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\det C = 0 + 96 + 84 - 105 - 48 - 0 = 180 - 153 = 27 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$ (получено в пред. ур-нии)

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 48 = -48$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 42) = 42$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 24) = 24$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \tilde{C} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48/27 & 24/27 & -3/27 \\ 42/27 & -21/27 & 6/27 \\ -3/27 & 6/27 & -3/27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

3. $$X = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \overset{1}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \overset{2}{\cdot} \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/7 + 16/7 + 7 & -2/7 + 20/7 + 8 & -3/7 + 24/7 \\ 2/7 - 4/7 - 7 & 4/7 - 5/7 - 8 & 6/7 - 6/7 \\ 4/7 - 8/7 - 7 & 8/7 - 10/7 - 8 & 12/7 - 12/7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7\ 15/7 & 8\ 18/7 & 21/7 \\ -7\ 2/7 & -8\ 1/7 & 0 \\ -7\ 4/7 & -8\ 2/7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\ 1/7 & 10\ 4/7 & 3 \\ -7\ 2/7 & -8\ 1/7 & 0 \\ -7\ 4/7 & -8\ 2/7 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 9\ 1/7 & 10\ 4/7 & 3 \\ -7\ 2/7 & -8\ 1/7 & 0 \\ -7\ 4/7 & -8\ 2/7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_{11} = 64/7 \cdot (-16/9) + 74/7 \cdot 14/9 - 3 \cdot 1/9 = -\frac{1024}{63} + \frac{148}{9}^{\,7} - \frac{1}{3}^{\,21} =$$

$$= \frac{-1024 + 1036 - 21}{63} = \frac{-9}{63} = -\frac{1}{7}$$

$$X_{12} = 64/7 \cdot 8/9 + 74/7 \cdot \left(-7/9\right) + 3 \cdot 2/9 = \frac{512}{63} - \frac{74}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$$

$$X_{13} = 64/7 \cdot \left(-1/9\right) + 74/7 \cdot 2/9 + 3 \cdot 1/9 = -\frac{64}{63} + \frac{148}{63} - \frac{1}{3} = 1$$

$$X_{2} = -\frac{51}{7} \cdot \left(-16/9\right) + \left(-57/7\right) \cdot 14/9 = \frac{272}{21} - {}^{7}\frac{38}{3} = \frac{272 - 266}{21} = \frac{2}{7}$$

$$X_{22} = -\frac{51}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{57}{7} \cdot \frac{7}{9} = -\frac{136}{21} + {}^{7/}\frac{19}{3} = \frac{-136 + 133}{21} = -\frac{1}{7}$$

$$X_{23} = -\frac{51}{7} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{57}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{17}{21} - \frac{38}{21} = -1$$

$$X_{31} = \frac{53}{7} \cdot \frac{16}{9} - \frac{58}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{848}{63} - \frac{812}{63} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7}$$

$$X_{32} = -\frac{53}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{58}{7} \cdot \frac{7}{9} = -\frac{424}{63} + \frac{406}{63} = -\frac{18}{63} = -\frac{2}{7}$$

$$X_{33} = \frac{53}{7} \cdot \frac{1}{9} - \frac{58}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{53}{63} - \frac{116}{63} = -1.$$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$$