Теория Лекция 1. Производная.

- Пусть функция $y = f(x)$ опр. в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке, если он сущ-ет, к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f'(x_0);\quad y'(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx};\quad f'|_{x=x_0}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- Вычисление произв. называется дифференцированием функции.

Основные правила диф-ния.

- Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют произв. в точке x. Тогда:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$; $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$, где $(v x) \neq 0$

- Пусть $u = \varphi(x)$ им. произв в точке x_0, а функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция: $y = f(\varphi(x))$:

$$y'(x_0) = y'(x_0) \cdot u'(x_0)$$

Геометрический смысл производной:

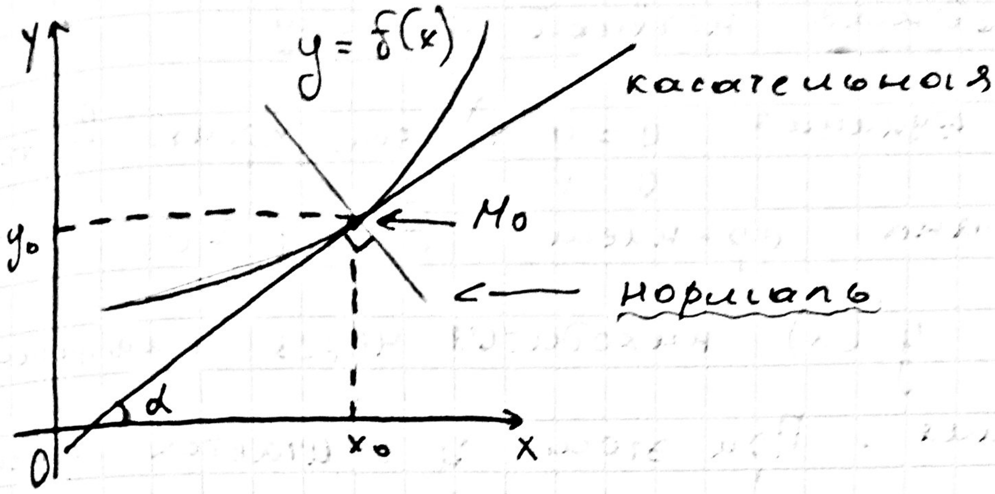
- $y = f(x)$ имеет пр. в точке x_0. Тогда существ. касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0);$$

$f'(x_0) = tg\alpha$, где α – $\angle$ наклона этой касательной к оси Ox.

- Нормаль – $\perp$ к касат. прямая.

$$y - y_0 = -1/f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



- Если $f'(x_0)=0$ (касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и $x=x_0$.
- Даны 2 пересек. в $M_0\ (x_0; y_0)$ кривые $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем обе функции имеют пр-ные в точке x_0. Тогда угол между этими кривыми назыв. угол между кас. к ним, пров. в точке M_0.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$$

Логарифмическая производная.

- Логарифмической производной от функции $y=f(x)$ наз. произ. от лог. этой функции:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y},\ \text{для } u(x)^{v(x)} \Rightarrow$$

$$(u^v)'=u^v\cdot v'\cdot\ln u+u^{v-1}\cdot u'\cdot v.$$

Производная неявной функции.

- Пусть функция $y = y(x)$ обл. произ. в точке x_0 и задана ур-нием $F(x,y) = 0$.

Тогда $y'(x)$ находится через дифференц. уравнения. При этом y считается функцией от x. И полученное ур.-ние реш. через y'.

Производные высших порядков.

- $f'(x)$ – произв. первого порядка.

$f''(x) = (f'(x))'$ – произв. второго порядка.

$f'''(x) = (f''(x))'$ – произв. третьего порядка

$f^n(x)$ – произв. n-ного порядка.

Производные функций, заданных параметрически

- $y = f(x)$ опр. параметрически функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Если $x(t)$ и $y(t)$ имеют произв. в точке t_0, $x'(t_0) \neq 0$, а $y = f(x)$ имеет произв. в точке $x_0 = x(t_0)$, то:

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$