Некоторые признаки сходимости и расходимости II рода

1. Если на пром. $[a; b)$ $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x=b$ терпят разрыв II рода и $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^b \varphi(x)\,dx \Rightarrow$ сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx$

2. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a; b)$ и в $x=b$ терпят разрыв II рода. Если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если функция $f(x)$ знакопеременная на отрезке $[a; b]$, имеет разрыв в точке $x=b$ и несобственный $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

√ Замечание: В качестве эталона для сравнения ф-ций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$

Можно показать, что несобственный интеграл:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{array} \right.$$

Это же относится к $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$

• Лекция • Интегрирование. Часть 1.

92.12. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ I способ: $\left[\begin{array}{l} 0 \le f(x) \le \varphi(x) \quad [a; +\infty) \\ \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx - \text{сход} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) \text{ сход} \\ \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \text{расх.} \Rightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x) \text{ расх.} \end{array} \right.$

$f(x) = \frac{1}{x^5}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{1^4} \right) = -\frac{1}{4} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^4} - 1 \right) =$$

$= 1/4$, т.е $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ – сходится

Т.к $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходится, то не можем применить признак сходимости в I способе (?!)

II способ. $f(x) = \frac{1}{x+2+3x^5}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ldots = \frac{1}{3} \Rightarrow$ т.е 1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \exists$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$

Тогда: $\left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0 \end{array} \right| \Rightarrow$ Или оба $\int$ сходятся, Или оба $\int$ расходятся

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ (I способ) $\to$ сходится $\Big| \Rightarrow$ оба $\int$ сходятся