2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = -\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x =$

$= -\frac{y'_x(x^2+y^2) + (x^2+y^2)'_x y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0(\quad) + (2x+0)y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = -2yx/(x^2+y^2)^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-y'_y(x^2+y^2)+(x^2+y^2)'_y y}{(x^2+y^2)^2} =$

$= \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

3. $d^2 z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \cancel{2\cdot\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dy^2 + 4c}$

$d^2 z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}dy^2$

"Лекция §7" Определенный интеграл. Несобственные инт. 13.04.2

Повторение:

$f(x)$ – непрерывна в точке $x=a$, если:

1. $f(x)$ – определена в точке $x=a$
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Если хотя бы одно условие не соблюдается, то ф-ция называется разрывной в $x=a$. Точка $x=a$ – точка разрыва.

Все элементарные функции непрерывны на интервалах определенности.

• Классификация точек разрыва.

I Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода ф-ции $y = f(x)$, если:

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = C_1 = const$$

$$\exists \lim_{x \to a-0} f(x) = C_2 = const$$

Если выполняется хотя бы одно из условий, то

если: $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$; $\lim_{x \to a-0} f(x) \neq f(a)$; $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$; $\Rightarrow$ тогда ф-я в точке $x = a$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

Если $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$, при этом пределы не равны $f(a)$, тогда ф-я в точке $x = a$ имеет устранимый разрыв первого рода.

I Точка x_0 наз-тся точкой разрыва второго рода ф-ции $y = f(x)$, если граница справа, т.е $\lim_{x \to a+0}$ или граница слева $\lim_{x \to a-0}$ не сущ или бесконечно:

$$\left[\begin{array}{l} \nexists \lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \\ \nexists \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \end{array}\right.$$

√ Скачком ф-ции в точке разрыва в точке $x=x_0$ называется: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) - \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если данные пределы разные и не равны бесконечности.

• Правила нахождения точек разрыва ф-ции

1. Элементарная ф-ция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной на опр. интервале

2. Элементарная ф-ция может иметь разрыв в точке, где неопределена, при условии, что она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки.

3. Не элементарная функция может иметь разрывы, как в точках где она определена, так и в тех точках, где она не определена:

Например: ф-ция задана несколькими аналитическими выражениями для разных интервалов, тогда на границе стыка может быть разрывной

• Задачи.

1. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ $D(f): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

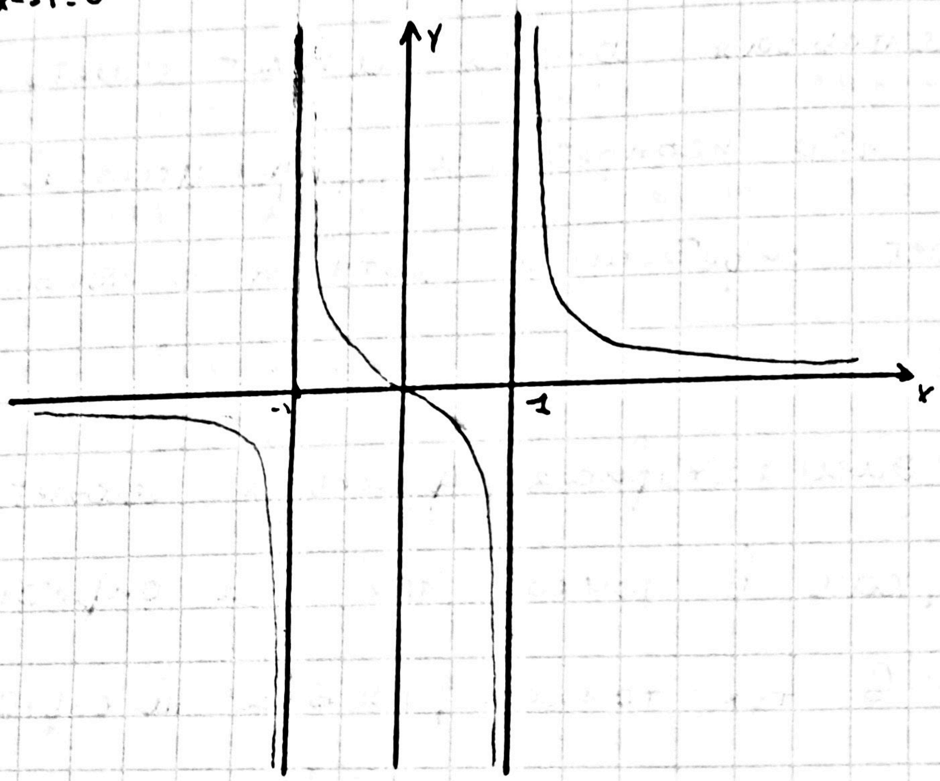
$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to -1+0} \frac{-1}{(-1-1)(-1+1)} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x^2-1} = \lim \frac{-1}{(-1-1)(-1+1)} = \frac{1}{0} = -\infty$$

Т.к $\lim_{x \to 1 \pm 0} = \pm\infty$, то разрыв второго рода.



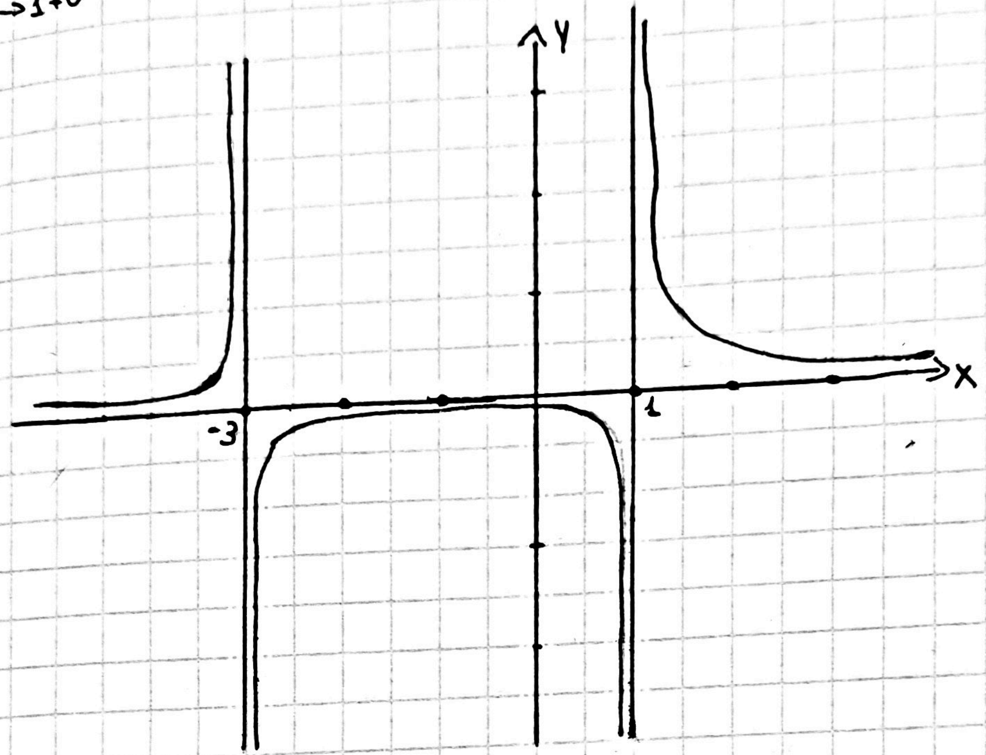
2. $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$ $D(f): (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to -3-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to -3+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{0} = +\infty$$



Т.к $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} = \pm\infty$, то разрыв второго рода.