§6. Определенный интеграл. Приемы вычисления.

- Пусть $y = f(x)$ опр. на $[a; b]$ и на этом отр. произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – выбрано разбиение на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точки c_i, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Интегральная сумма функции $f(x)$ на отр. $[a; b]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \quad , \text{где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

- Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отр. $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего участкового отрезка $\Delta x_i \to 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

- Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то предел существует и не зависит от способа разбиения $[a; b]$ и от выбора точек c_i (теор. сущ-ния опр. инт.). Функция $f(x)$ в данном случае – интегрируемая на $[a; b]$. Если $f(x)$ огр. и непр. на $[a; b]$, то она инт. на отрезке.

Свойства опр. интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (перем. инт-я можно обозн. любой бу...)

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$

7. Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Если $f(x) \leq 0, \forall x \in [a;b]$: $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

8. Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a;b]$: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

9. Если M - max, m - min $f(x)$ на $[a;b]$, то:

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a;b]$ (теор. о среднем)

11. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

12. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$

Формула Ньютона - Лейбница.

- Если для непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ может быть найдена её первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом выч. опр. инт является формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- При интегр.-нии четных и нечетных функций в симметричных пределах полезно использовать:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ - четная ф-я} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ - нечетная ф-я} \end{cases}$$

Интегрирование подстановкой.

- Пусть для вычисления $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$ причем:

$*\, a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, то справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$ - формула замены переменной интегрирования в опр. $\int$

1. $x = \varphi(t)$ должна быть легче изначальной
2. новые пределы находим из соотн. $*$
3. возвращаться к старой пер-ой не нужно
4. $x = \varphi(t)$ $=$ $t = \psi(x)$

Интегрирование по частям.

- Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a; b]$, то:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$ - ф-ла инт-я по частям

Примеры решения опр. интегралов:

9.1.1. $\int_1^4 x^2 dx = [\,x^2 \Rightarrow F(x) = x^3/3\ ;\ F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,] = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$

9.1.2. $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\right] = \arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin(-2/3) = \arcsin\frac{2}{3}$.

9.1.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

9.1.20. $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}dx = \left[\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \Rightarrow \right.$

$\Rightarrow x^4+1 = A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4+1 = (C+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + A$:

$$\begin{cases} C+D=1 \\ B+E=0 \\ A+C=0 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=1,\ B=0,\ C=-1,\ D=2,\ E=0:$$

$$\left. \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \right] =$$

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left(-\frac{1}{2x^2} - \ln x + \ln(x^2+1) \right) \Big|_1^2 =$

$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 1 + \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{4} + \frac{3}{8}$

9.1.26. $\int_0^2 f(x)dx - ?$, если $f(x) = \begin{cases} e^x, 0 \le x < 1 \\ 2, \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Функция имеет одну точку разрыва $x=1$:

$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 2dx = e^x \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2 = e - 1 + 4 - 2 = e+1$

9.1.46. $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2tdt \Rightarrow \right.$

$\Rightarrow$

x	1	9
$t=\sqrt{x}$	1	3

$\Big] = \int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{5}{2t+5}\right)dt =$

$= t\Big|_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln|2t+5| \Big|_1^3 = 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2} \ln \frac{11}{7}$

9.1.51. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left[tg\frac{x}{2} = t,\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2}{t^2+5}dt$

$= \frac{2}{\sqrt5}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt5}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt5}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt5}$

9.1.52. $\int_2^3 x(3-x)^7\,dx = \left[t = 3-x,\ x = 3-t,\ dx = -dt \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \right] = \int_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int_0^1 (t^8 - 3t^7)\,dt =$

$= \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}$

9.1.59. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left[x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & 1/2 \end{array} \right]$

$= \int_1^{1/2} \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int_1^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int_{1/2}^1 \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}} =$

$= \ln\left| t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln\frac{3+2\sqrt3}{2+\sqrt7}$

9.1.61. $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \left[x = 2\,tg\,t,\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \right]$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{\cos^2 t(4+4tg^2t)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{16\cos^2 t\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt =$

$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{64}$

9.1.86. $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx = \Big[u=\ln x,\ dv=(x+1)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow du = \frac{1}{x}dx,\ v=\frac{x^2}{2}+x\Big] = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e -$

$-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-$

$-e+\frac{1}{4}+1 = \frac{e^2+5}{4}$

9.1.91 $\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx = \Big[u=\mathrm{arctg}\,x,\ dv=dx \Rightarrow$

$\Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2},\ v=x\Big] = x\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx =$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi-\ln 4}{4}$

9.1.95. $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u=x^2, & dv=\sin 2x\,dx, \\ du=2x\,dx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$

$\Rightarrow J = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\,2x\,dx = 0+\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx =$

$= \begin{bmatrix} u=x, & dv=\cos 2x\,dx, \\ du=dx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} \Rightarrow J=\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx =$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$