**Понятие производной.**

Производная функции - это предел приращения функции в этой точке (если он существует) к приращению аргумента, когда :

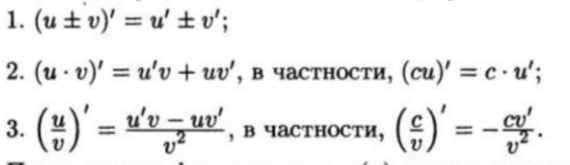
Обозначения:

Дифференцирование функций - вычисление производной.

**Основные правила дифференцирования.**

Пусть c - константа, а u(x) и v(x) имеют производные в некоторой точке х. Тогда функции

также имеют производные в этой точке, причем:

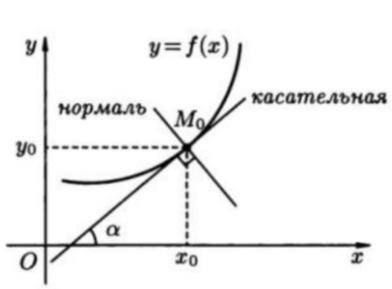


Пусть теперь функция имеет производную в точкеа функция Тогда сложная функция также имеет производную в точке причем:

**Геометрический смысл производной.**

Пусть функция имеет производную в точку Тогда существует касательная к графику этой функции в точке уравнение которой имеет вид:

При этом где угол наклона этой касательной к оси Ox:



Нормаль к кривой - прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной.

Если - касательная горизонтальна, нормаль вертикальна и имеет уравнение x = .

Пусть даны две пересекающиеся в точкекривые причем обе функции имеют производные в точке

Угол между друмя кривыми - угол между касательными к ним, проведенными в точке .

Этот угол можно найти из формулы:

**Логарифмическая прооизводная.**

При нахождении производных от показательно-степенной функции а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

Логарифмической производной от функции называется производная от лограифма этой функции:

Формула для производной показательно-степенной функции:

**Производная неявной функции.**

Пусть функция обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением:

Тогда производную этой функции можно найти продифференцировав уравнение выше (при этом *y* считается функцией от *x*) и разрешая затем полученное уравнение относительно.

**Производные высших порядков.**

Производная первого порядка - производная от .

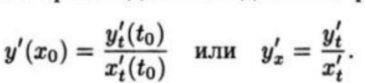
Производная второго порядка - производная от .

Производная третьего порядка - производная от .

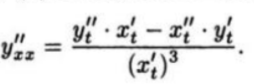
Производная n-ного порядка обозначается .

**Производная функций, заданных параметрически.**

Пусть функция определена парметрически функциями и Тогда елси функции x(t) и y(t) имеют производные в точке имеет производную в точке то эта производная находится по формуле:



Вторая проивзодная находится по формуле:



**Понятие дифференциала.**

Пусть функцияопределена в некоторой окрестности точки . Тогда если существует такое число А, что приращение этой функции в точке , соответствующее приращению аргумента, представимо в виде:

где , то функция называется дифференцируемой в точке . При этом главная, линейная относительно , часть этого приращения, т.е. , называется дифференциалом функции в точке и обозначается *dу* или

Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная при этом . Поэтому , или, если существует на данном интервале (а;b), то

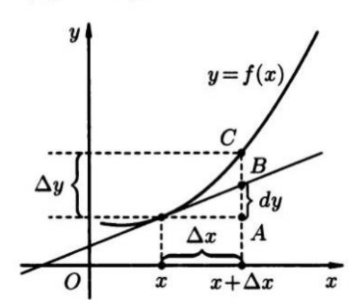
Отсюда т.е. производная функции в точке х равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение аргумента *x* близко к нулю (т.е. достаточно мало), то приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. откуда

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции в точке по известному значению этой функции и ее производной в точке.

**Геометрический смысл и свойства дифференциала.**

Геометрически приращение функции в точке х - есть приращение ординаты точки на кривой , а дифференциал *dy* функции в этой точке - приращение ординаты соответствующей точки на касательной (*dу = АВ*).



Пусть— некоторые функции, дифференцируемые в точке *x.* Тогда:

1. *dC = 0, C*
2. Инвариантность формы дифференциала. Если сложная функция, то

т.е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается у как функция независимой переменной *x* или зависимой переменной *u*.

**Дифференциалы высших порядков.**

Пусть функция *y = f(x)* дифференцируема на интервале *(a,b).* Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал функции *f(x)* назваемый также дифференциалом первого порядка (первым дифференциалом).

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции *y = f(x)* в точке называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции *f(x)* в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается Таким образом, Учитывая, что *dx* - независящая от x константа, получим:

Дифференциал n-ного порядка от функции f(x) в точке x - дифференциал от дифференциала (n - 1)-ого порядка функции f(x) в этой точке:

т.е Отсюда следует, что:

в частности

Для дифференциалов высших порядков свойства инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

**Теоремы о среднем.**

**Теорема Ролля**. Пусть функия *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b],* дифференцируема на интервале *(a;b)* и принимает на концах отрезка равные значения *(f(a) = f(b)).* Тогда сущетсвует по крайней мере одна точка *c* на интервале *(a;b),* для которой

**Теорема Лагранжа**. Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]* и дифференцируема на интервале *(a;b).* Тогда наинтервале *(a;b)* найдется такая точка *с,* что:

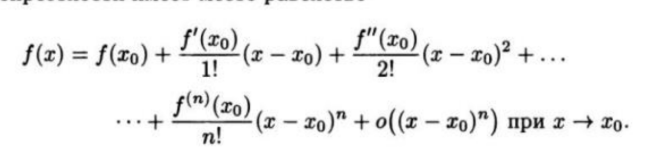
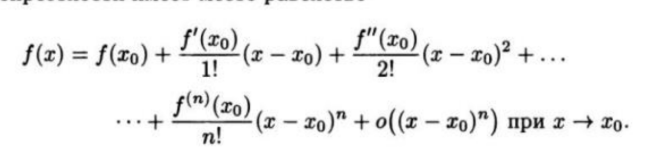
**Теорема Коши.** Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны на отрезке*[a;b]* и дифференцируемы на интервале *(a;b),* причем Тогда найдется такая точка *с* на этом интервале, что:

Первое правило Лопиталя. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируема в некоторой окрестности кроме самой точки, и Тогда если в этом случае говорят, что в и существует , то существует и , причем:

Второе правило Лопиталя. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируема в некоторой окрестности кроме самой точки кроме, быть может, самой этой точки, и Тогда еслив этом случае говорят, что в и существует , то существует и , причем:

Если отношение в свою очередь представляет собой неопределенность вида или , то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции ) можно применять второй раз и т.д.

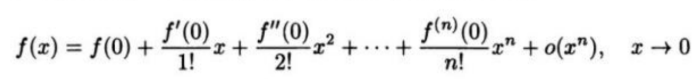
**Формула Тейлора в форме Пеано.** Пусть функция *f(x)* имеет в некоторой окрестности точки производные . Тогда для любой точки *x* из этой окрестности имеет место равенство:



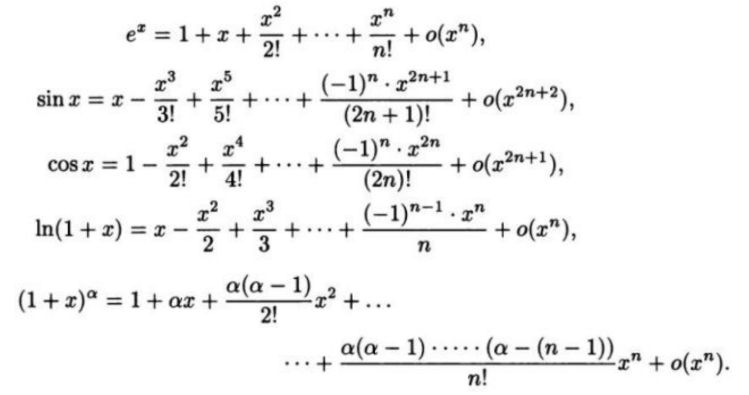
Последнее слагаемое (т.е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде:

Соответствующая формула тогда называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

В случае0 формула Тейлора принимает вид и называется формулой Маклорена.



Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:



**Определение частных производных.**

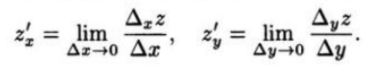
Рассмотрим функцию двух переменных *z =f(x;y)*, определенную и непрерывную в некоторой области *D*. Считаем, что точки с координатами где — приращения аргументов, также принадлежат области *D*.

Частными приращениями функции *z =f(x;y)* по независимым переменным *х* и *у* называются разности

Полным приращением функции *z =f(x;y)*, соответствующим приращениям аргументов называется разность

В общем случае:

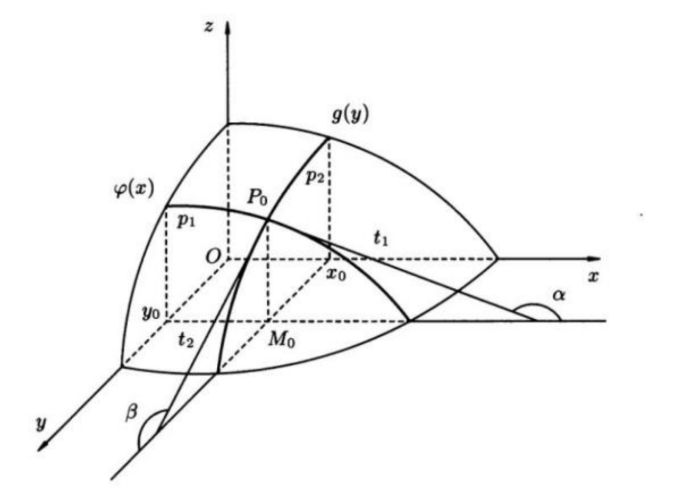
Частной производной функции *z =f(x;y)* по переменным *х* и *у* называется предел отношения соответствующего частного приращения к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:



Приняты также обозначения: 

**Геометрический смысл частной производной.**

Изображен график Г функции *z =f(x;y),* — точка на графике, — проекцияна плоскость *Oxy*,. Через прямую проведены две плоскости параллельна плоскости *Oxy*, параллельна плоскости *Оуz*.



Сечение Г с первой плоскостью представляет собой кривую — функцию переменной *х*, а сечение Г с представляет кривую — функцию переменной *у*.

