

## MÉTODOS NUMÉRICOS

### Trabajo práctico de integración N°1

### *Ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y aproximación funcional*

#### Ejercicio 1

#### Filtro eléctrico

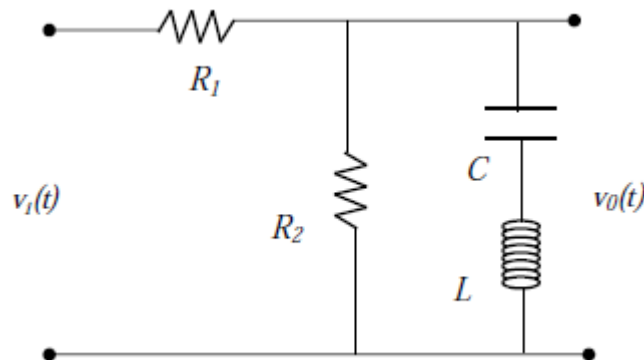


Figura 1- Circuito eléctrico.

Ecuación diferencial que relaciona la salida  $V_0(t)$  y la entrada  $V_i(t)$ :

$$\frac{d^2 V_0(t)}{dt^2} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \frac{d V_0(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_0(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{d^2 V_i(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{(R_1 + R_2) L} V_i(t)$$

Para calcular la tensión de salida se utilizó el método numérico de *Runge-Kutta para orden n* planteando el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$X'(t) = A X(t) + B V_i(t)$$

$$V_0(t) = C X(t) + D V_i(t)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_2^2 R_1}{(R_1 + R_2) L} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}$$

Para los valores  $R_1 = R_2 = 50\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mHy}$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_i(t) = 5 \sin(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 10000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , y una discretización del tiempo en  $M=1000$ , la resolución de la salida del sistema y el cálculo del tiempo de extinción de la salida se realizó de la siguiente manera:

### Algoritmo:

```
function Filtro_Notch()

%Declaración de variables utilizadas para método de Runge-Kutta
%t0, Tf, M, x0

%Resolución de la ecuación
[t,x]=Runge_Kutta_orden_n('Ec_Dif_Filtro_N',t0,Tf,x0,M);

%Declaración de valores de los elementos del circuito
%R1,R2,L,C,V,w0,Vi

%Declaración de coeficientes a1, a0, b2, b1, b2

%Cálculo de matrices C y D
CMATRIZ=[(b0-b2*a0) (b1-b2*a1)]; %La variable C se utilizó
                                   %para la capacitancia
D=[b2];

%Calculo de V0
V0=CMATRIZ*x'+D*Vi;

%Gráfico de función de entrada
figure(1)
subplot(211)
plot(t,Vi,'r')
title 'Funcion de entrada Vi'

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Calculo del tiempo en el que se extingue la salida del circuito
%Cuando V0 alcance un 1% de la entrada máxima => V0 = 0.01*5 = 0.05 V

valor=0.05; %Valor buscado
E1=0.01; %Error
var=0;
i=0;

%Buscar posición del valor 0.05 (con un margen de error de 0.01)
for k=1:M
    var=abs(V0(k)-valor);
    if (var<E1)
        i=k; %Posición en matriz V0 del valor buscado
    end
end

Te=t(i) %Te: Valor del tiempo en donde ocurre la tensión buscada

subplot(212)
plot(t,V0,'g',Te,valor,'*');
title 'Funcion de salida V0'
```

```
function Xp=Ec_Dif_Filtro_N(t,x)

%Declaración de los valores de los elementos
%R1,R2,L,C,V,w0,Vi

%Declaración de coeficientes
%a1,a0,b2,b1,b0

%Cálculo de matriz A
A=[0 1;-a0 -a1];

%Cálculo de matriz B
B=[0;1];

%Resolución
Xp=A*x'+B*Vi;
Xp=Xp';
```

El tiempo de extinción del sistema,  $T_e$ , es de 0.0028 segundos.

Para calcular el mismo se tuvo en cuenta que el vector de  $V_0$  posee  $M$  cantidad de elementos, al igual que el vector de tiempo  $t$ , y que las posiciones de ambos vectores se corresponden entre sí; es decir, el valor de  $V_0$  en una posición  $x$  equivale al valor de la tensión de salida correspondiente al tiempo de la posición  $x$  en el vector  $t$ .

El algoritmo para encontrar  $T_e$  consiste en recorrer el vector  $V_0$  buscando el lugar donde se encuentra un valor de tensión de salida que sea el 1% de la amplitud máxima de la señal, con un error del 0.01. El algoritmo va guardando la posición donde se encuentra ese valor, la cual se va reescribiendo a medida que se recorre el vector. Pero el último valor que queda guardado en la variable *posición* tendrá la información de cuándo fue la última vez que se registró ese valor.

Gráfico obtenido:

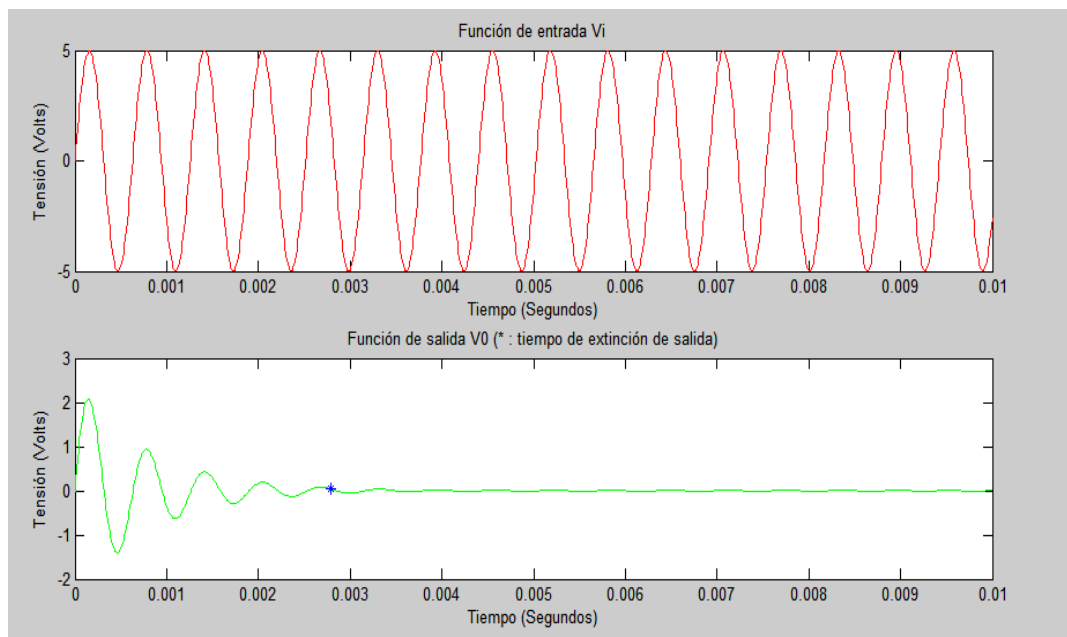


Gráfico 1

Para calcular la frecuencia de oscilación de la salida del filtro también se tuvo en cuenta la relación entre las posiciones de los vectores  $V_0$  y tiempo  $t$ .

Se buscó la posición del primer pico de amplitud de la señal senoidal utilizando el comando **max()**. El período de oscilación corresponde a 4 veces el período transcurrido desde el comienzo hasta el primer pico de amplitud. La frecuencia se obtuvo calculando la inversa del período.

El valor obtenido fue de 1721.3 Hz, similar a  $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1591.5$  Hz. Esto se debe a que la fórmula  $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  equivale a la frecuencia de un oscilador, y el sistema es un amortiguador que cumple esa condición.

Algoritmo:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Calculo de la frecuencia de las oscilaciones de la salida
%Búsqueda del primer máximo y su posición en V0
[m pos]=max(abs(V0));

T= t(pos)*4;
F=1/T

```

Para realizar el gráfico de ubicación de polos y ceros se transformó a Laplace la ecuación del sistema y se obtuvo la función de transferencia del mismo:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} s^2 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2) L C}}{s^2 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} s + \frac{1}{LC}}$$

Se utilizó la función **zplane(num, denom)**, a la cuál se le pasaron como parámetros: num = coeficientes del numerador y denom = coeficientes del denominador.

Algoritmo:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Gráfico de ubicación de polos y ceros

denom=[1 R1*R2/((R1+R2)*L) 1/(L*C)]; %Coeficientes del denominador: Vi
num=[R2/(R1+R2) 0 R2/((R1+R2)*L*C)]; %Coeficientes del numerador: V0

figure(2)
zplane(num,denom)
title 'Gráfico de ubicación de polos y ceros'

```

Gráfico obtenido:

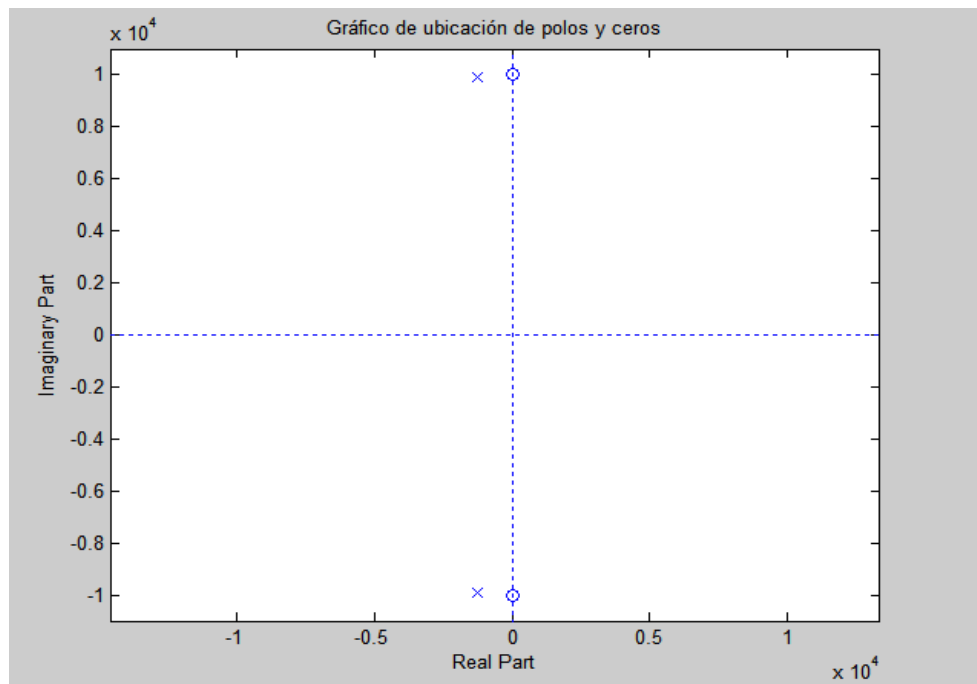


Gráfico 2

Para realizar el gráfico de BODE del sistema, se utilizaron los comandos ***tf(num, denom)*** y ***bode(sys)***. ***tf(num, denom)*** crea una función de transferencia con los coeficientes pasados para el numerador y el denominador respectivamente. ***bode(sys)*** muestra el diagrama de **BODE** de la función de transferencia sys.

Algoritmo:

```
%Gráfico de BODE
sys=tf(num,denom);           % tf genera la funcion de transferencia
                               % Salida / Entrada => V0 / Vi

figure(3)
bode(sys)
title 'Gráfico de BODE'
```

Gráfico obtenido:

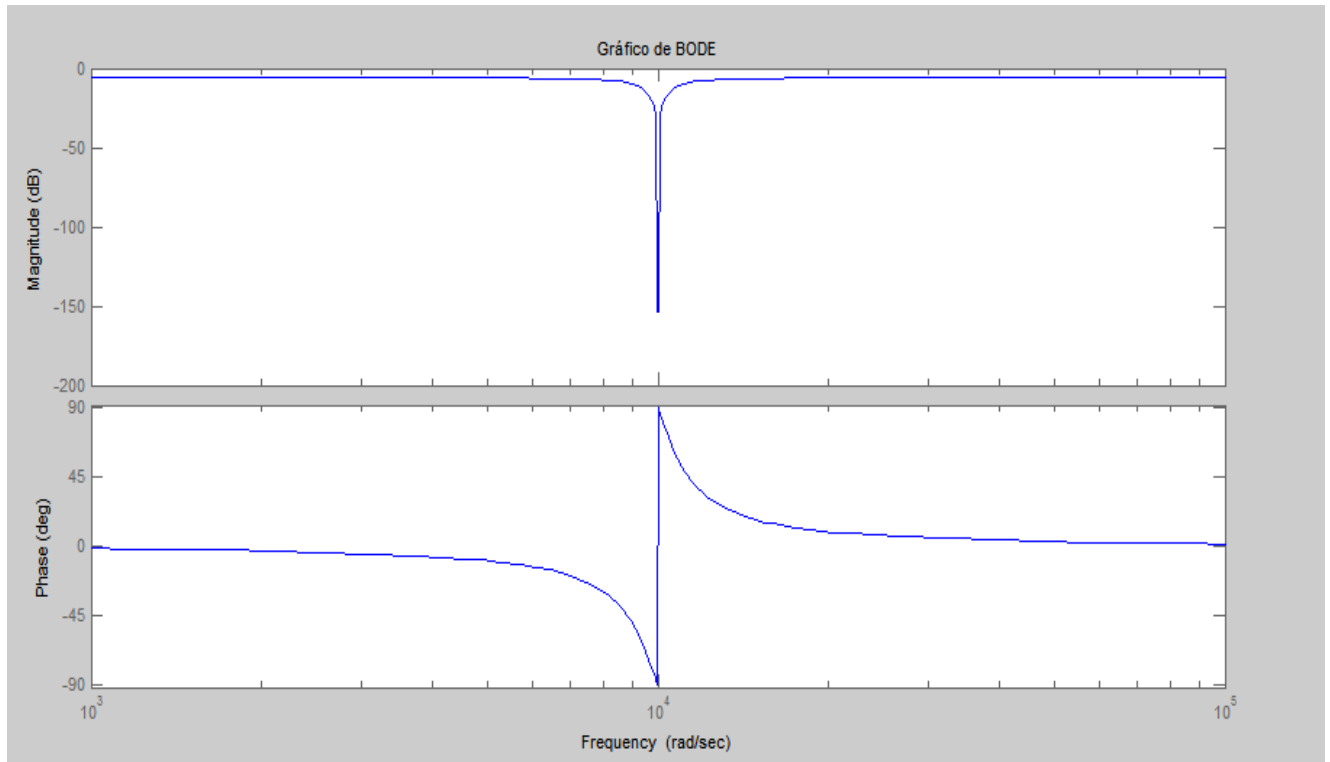


Gráfico 3

En el gráfico de BODE obtenido se observa que el circuito es un **filtro notch elimina-banda** que no permite el paso de señales cuyas frecuencias se encuentran comprendidas entre las frecuencias de corte superior e inferior.

Para los valores  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ ,  $L = 10\text{ mHy}$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_i(t) = 5 \sin(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 10000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  se resolvió utilizando los mismos algoritmos, variando el valor de los resistores.

Los gráficos de tensión de entrada y tensión de salida fueron los siguientes:

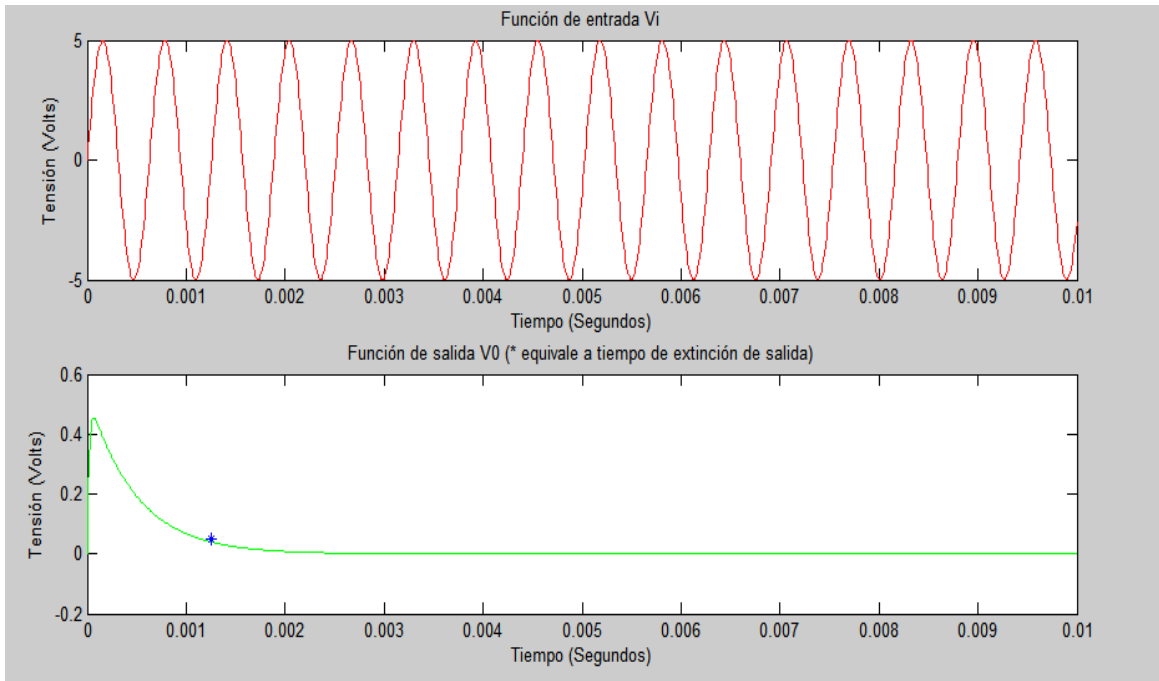


Gráfico 4

El tiempo de extinción del sistema,  $T_e$ , es de 0.0013 segundos.

Ambos circuitos amortiguan la entrada del sistema, con la diferencia de que este último no es un oscilador debido a la gran magnitud de los resistores.

El gráfico de ubicación de polos y ceros mostró lo siguiente:

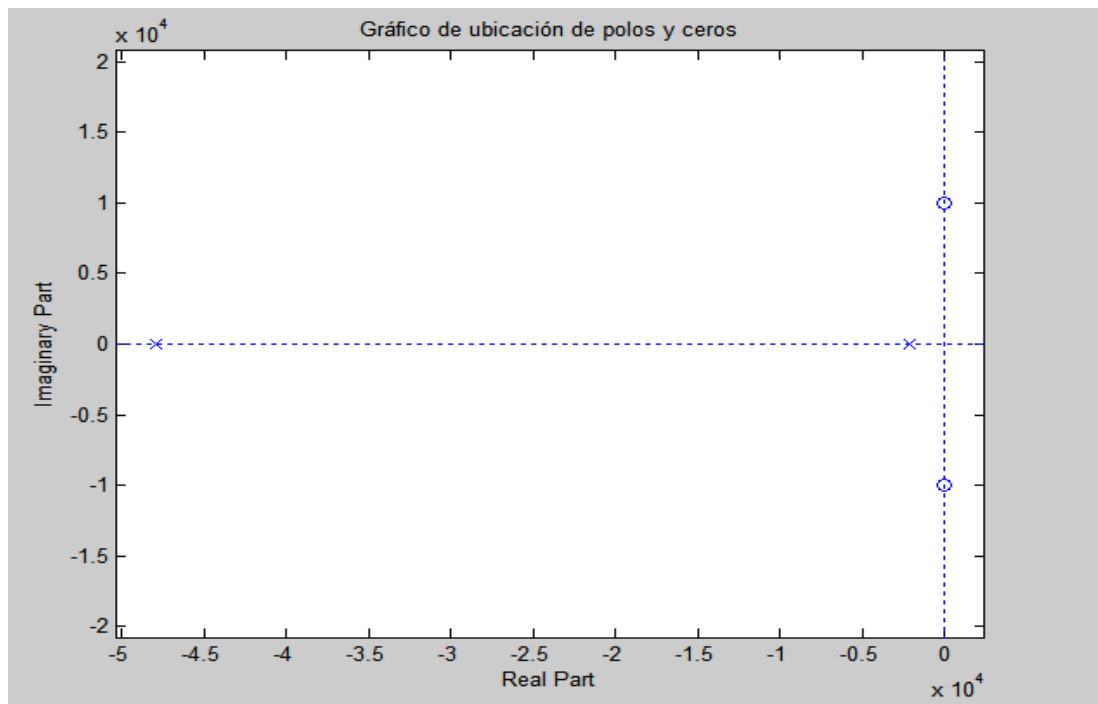


Gráfico 5

En el gráfico de BODE del sistema se observa que también es un **filtro notch elimina-banda**, pero con distintos valores en las frecuencias de corte:

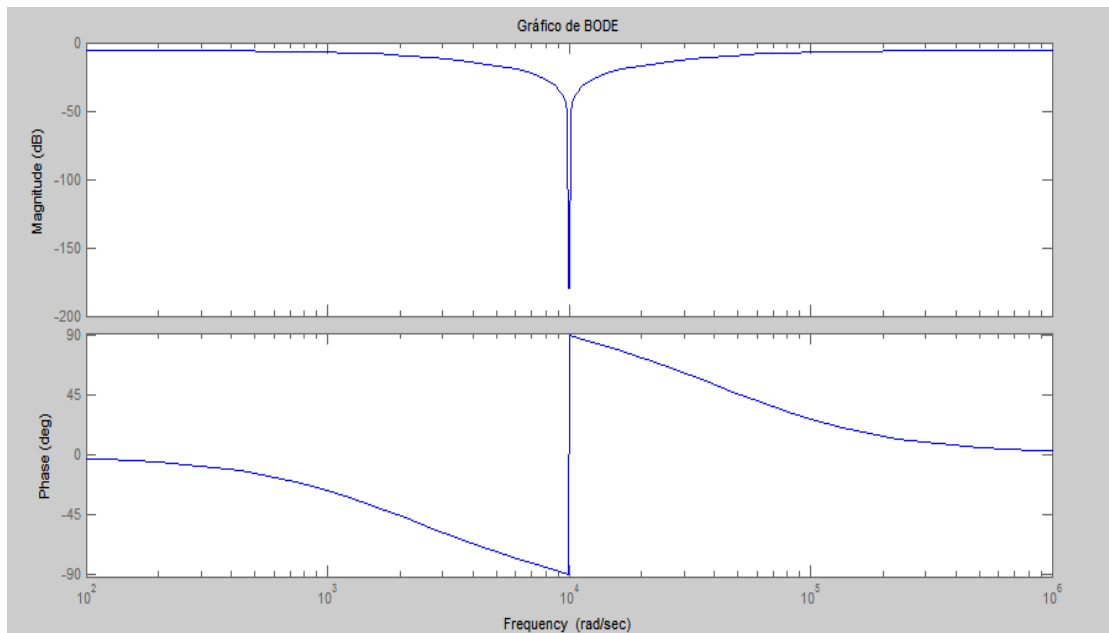


Gráfico 6

## Ejercicio 2

Con el comando *load* se abrió el archivo de texto en donde se encuentran, en una tabla, los datos de tiempos, presiones y diámetros (del paciente normotenso y del hipertenso esencial), bajo el nombre de: 'PD\_Pacientes.txt'. Se guardaron los valores de las columnas como variables nuevas (*tiempo*, *DNTA* y *DHTA* para los diámetros, y *PresNTA* y *PresHTA* para las presiones) en el archivo *VARIABLESejercicio2.mat*. Se procedió a graficar.



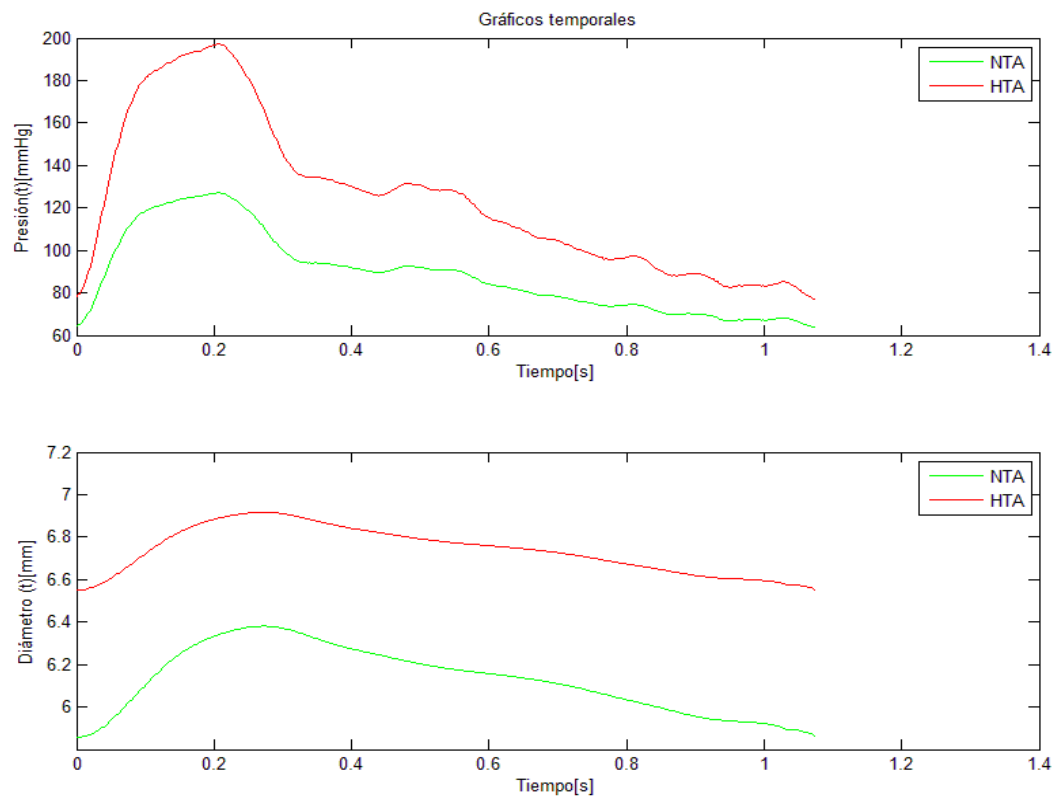


Gráfico 7 Gráficos temporales de presión y diámetro para pacientes normotensos (NTA) e hipertensos (HTA).

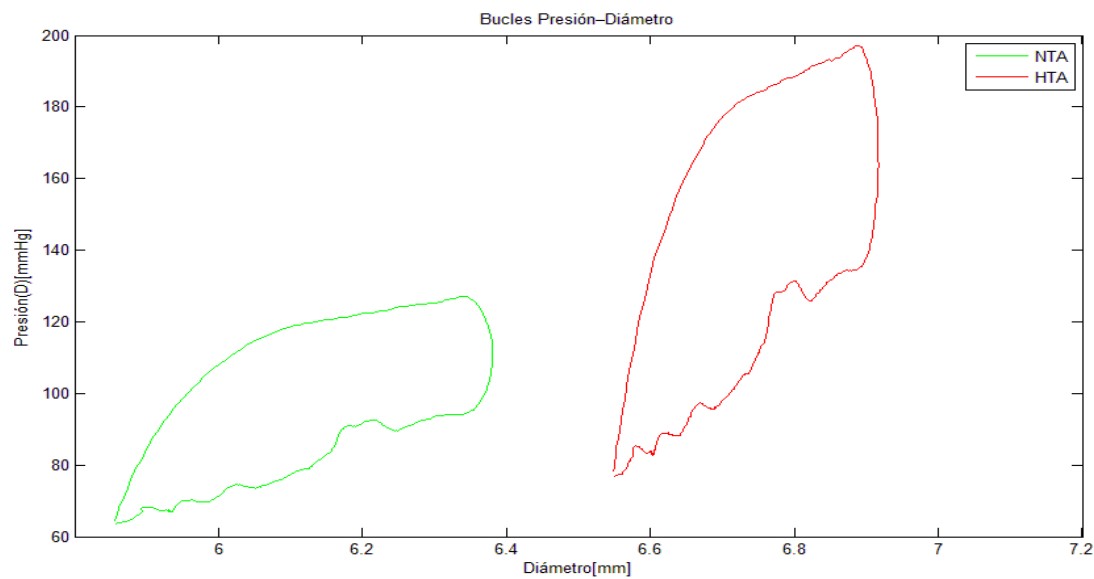


Gráfico 8 Bucles de Presión-Diámetro para pacientes normotensos (NTA) e hipertensos (HTA).

Código para generar los gráficos anteriores:

```
%Gráficos temporales
subplot(2,1,1);
plot(tiempo, PresNTA, 'g', tiempo, PresHTA, 'r');
legend('NTA', 'HTA');
xlabel('Tiempo[s]');
ylabel('Presión(t) [mmHg]');
title('Gráficos temporales');
subplot(2,1,2);
plot(tiempo, DNTA, 'g', tiempo, DHTA, 'r');
legend('NTA', 'HTA');
xlabel('Tiempo[s]');
ylabel('Diámetro (t) [mm]');

%Gráfico de los bucles presión-diámetro
plot(DNTA, PresNTA, 'g', DHTA, PresHTA, 'r');
legend('NTA', 'HTA');
xlabel('Diámetro[mm]');
ylabel('Presión(D) [mmHg]');
title('Bucles Presión-Diámetro');
```

### AJUSTE LINEAL

Se linealizaron los valores correspondientes a cada una de las componentes elásticas diastólicas de ambos pacientes, buscando obtener una función del estilo: **presión=A\*diámetro+B**. El coeficiente A corresponde al *Índice de Rigidez Arterial E*. Se seleccionaron los valores correspondientes los intervalos que van desde el diámetro mayor al menor y se salvaron como nuevas variables: **DNTAdiastole**, **PresNTAdiastole**, **DHTAdiastole** y **PresHTAdiastole**. Para un correcto resultado, se debieron tomar los vectores traspuestos de las variables ya que estas fueron guardadas como vectores columna.

#### -Paciente normotenso:

```
[An,Bn,rn]=Ajuste_lineal(DNTAdiastole',PresNTAdiastole')
```

Se obtuvieron como resultados:

- An =73.9847 (*Índice de Rigidez Arterial E*)
- Bn =-371.2948
- rn =0.9746 (*Coefficiente de correlación o bondad de ajuste*)

Los mismos corresponden a los coeficientes de la recta de mejor ajuste: **pn=An\*DNTAdiastole+Bn**.

#### -Paciente hipertenso esencial:

```
[Ah,Bh,rh]=Ajuste_lineal(DHTAdiastole',PresHTAdiastole')
```

Se obtuvieron como resultados:

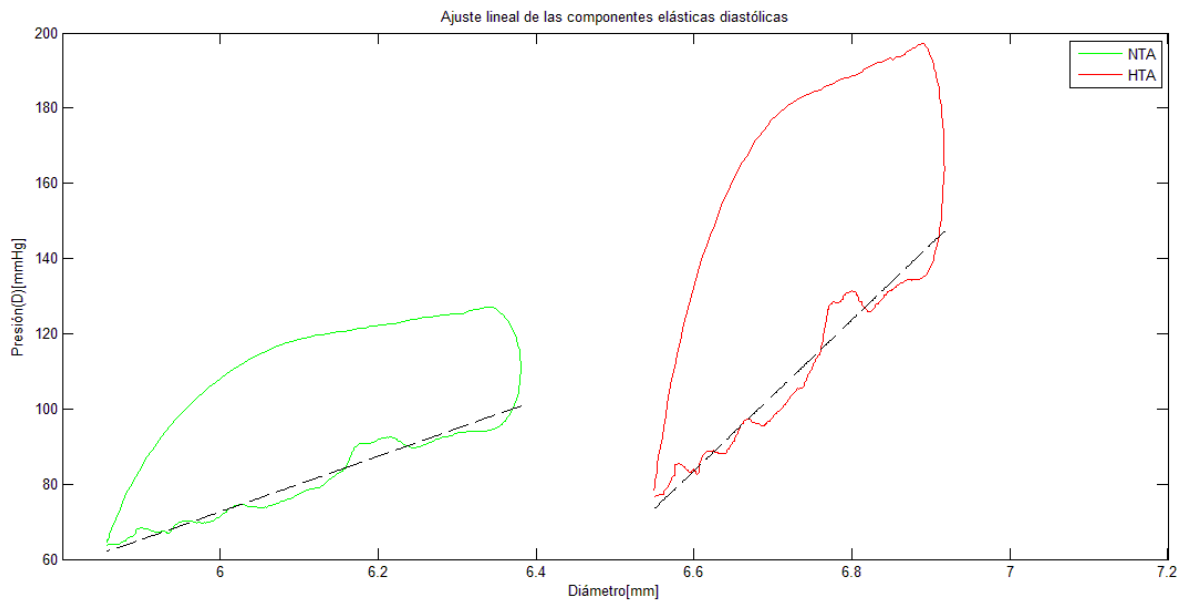
- Ah =200.7898 (*Índice de Rigidez Arterial E*)
- Bh =-1.2416e+003

- $rh = 0.9746$  (Coeficiente de correlación o bondad de ajuste)

Los mismos corresponden a los coeficientes de la recta de mejor ajuste:  $ph = Ah * DHTAdiastole + Bh$ .

Para los dos tipos de pacientes se obtuvo un buen ajuste lineal, debido a la cercanía de ambas bondades de ajuste ( $rn$  y  $rh$ ) a la unidad.

Se observa una clara rigidez arterial mayor en pacientes hipertensos.



**Gráfico 9** Bucles de Presión-Diámetro para pacientes normotensos (NTA) e hipertensos (HTA) y ajuste lineal.

### Intersección de las rectas de ajuste [D0,P0]

Se expresaron las 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas ( $An * D0 - P0 = Bn$  y  $Ah * D0 - P0 = Bh$ ) como matrices A y B y se procedió a calcular su solución mediante el método de Triangulación Gausseana y luego una sustitución hacia atrás (los códigos correspondientes se encuentran adjuntos en los archivos):

```
A=[An -1;Ah -1];
```

```
B=[Bn;Bh];
```

```
[a0,b0]=triang_gauss(A,B);
```

```
X=back_subs(a0,b0);
```

Lo cual arroja como resultado:  $X = [6.8636; 136.5085]$ ;  $X(1) = D0$  y  $X(2) = P0$ .

Para graficar se creó un vector  $Diametro = 5:8$  que contiene a ambos intervalos de los diámetros de cada paciente y se instruyó:

```
plot(Diametro,P1,'g',Diametro,P2,'r',X(1),X(2),'*'); %grafico las rectas de  
ajuste y el punto de intersección
```

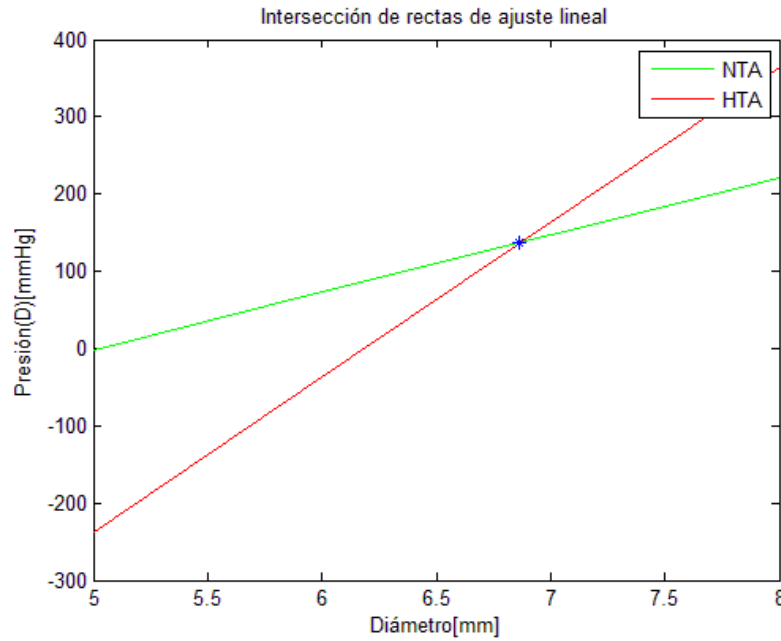


Gráfico 10 Intersección de las rectas de ajuste.

### AJUSTE EXPONENCIAL

Se busca obtener un ajuste exponencial de las componentes elásticas diastólicas, de la forma: **presión=C\*exp(A\*diámetro)**. Se utilizaron las mismas variables que para el ajuste lineal.

-Paciente normotenso:

```
[An2,Cn,rn2]=Ajuste_exponencial(DNTAdiastole',PresNTAdiastole')
```

Se obtuvieron como resultados:

- An2 =0.9147
- Cn =0.2992
- rn2 =0.9782 (*Coeficiente de correlación o bondad de ajuste*)

Los mismos corresponden a los coeficientes de la recta de mejor ajuste:

**pnexp=Cn\*exp(An2\*DNTAdiastole).**

-Paciente hipertenso esencial:

```
[Ah2,Ch,rh2]=Ajuste_exponencial(DHTAdiastole',PresHTAdiastole')
```

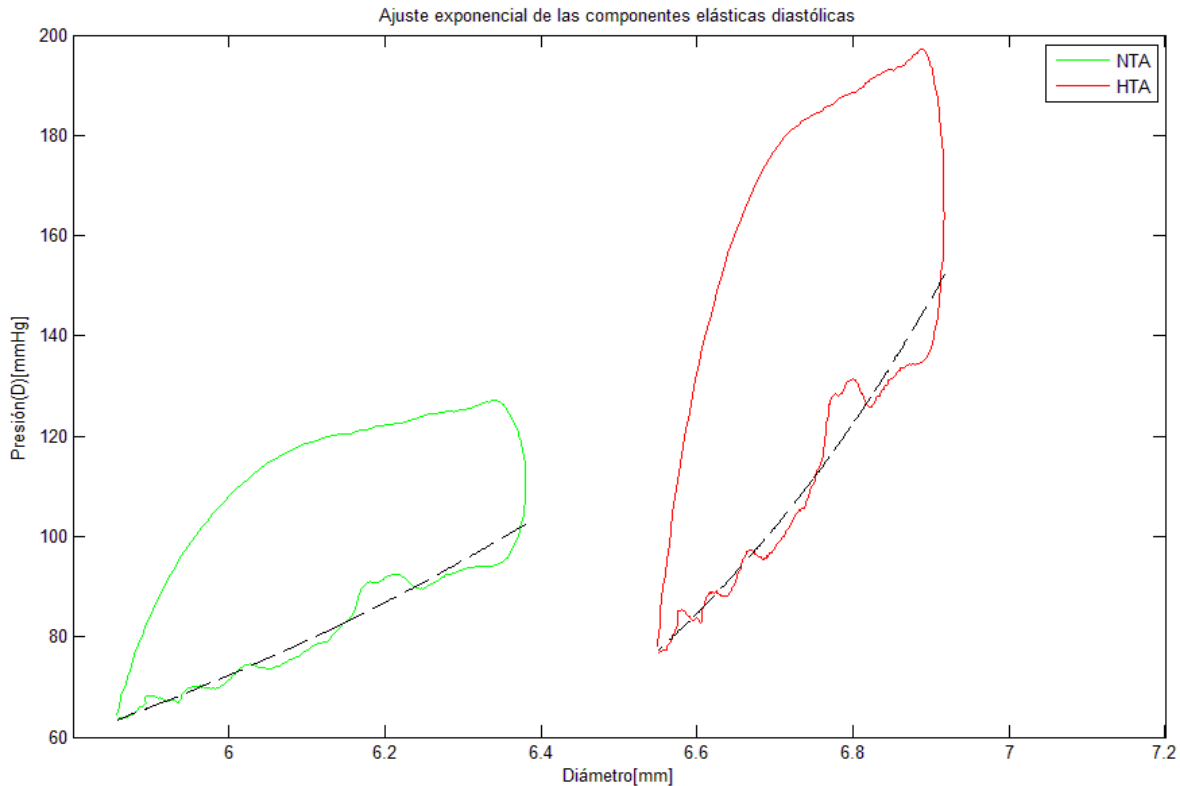
Se obtuvieron como resultados:

- Ah2 =1.8477
- Ch =4.2821e-004
- rh2 =0.9787 (*Coeficiente de correlación o bondad de ajuste*)

Los mismos corresponden a los coeficientes de la recta de mejor ajuste:

**$phexp = Ch * \exp(Ah2 * DHTA_{diastole})$ .**

Para los dos tipos de pacientes se obtuvo un buen ajuste exponencial, debido a la cercanía de ambas bondades de ajuste ( $rn2$  y  $rh2$ ) a la unidad.



**Gráfico 11** Bucles de Presión-Diámetro para pacientes normotensos (NTA) e hipertensos (HTA) y ajuste exponencial.

### Conclusión:

Luego de analizar los dos tipos de ajuste, se concluye que para la dinámica del sistema arterial, el ajuste exponencial resulta más propicio. Esto se determina fácilmente observando los coeficientes de correlación: cuanto más se acerquen al valor 1, mejor será el ajuste. A pesar de que los valores difieren en un orden de milésimas, el ajuste exponencial es mejor.