MÉTODOS NUMÉRICOS

Trabajo integrador #3
INTERPOLACIÓN, DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Dominguez, Melina
Varela, Sofía

Año 2013

EJERCICIO 1

Determine los coeficientes **a**, **b**, **c** y **d** tales que la función *f(x)* cumpla que sea una representación cúbica en el intervalo [-3,4], siendo:

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & ,(-\infty,-3] \\ a+bx+cx^2+dx^3, & [-3,4] \\ 157-32x & ,[4,+\infty) \end{cases}$$

Desarrolle el ejercicio con *Polinomio de Lagrange* y con *Polinomio de Newton*. Cuál presenta el menor error.

Resolución:

En primer lugar se procede a calcular los coeficientes del polinomio en el intervalo [-3,4]. Para ello se determinan cuatro condiciones de contorno: que la función sea continua en los entornos y que sus derivadas allí también lo sean. A cada una de las tres partes de la función *f* le agregamos un subíndice para expresar lo anterior:

$$f_1(-3) = f_2(-3)$$
$$f_2(4) = f_3(4)$$
$$f_1{}'(-3) = f_2{}'(-3)$$
$$f_2{}'(4) = f_3{}'(4)$$

Reemplazando en las ecuaciones los valores y ordenando los términos llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} a - 3b + 9c + 27d = 7 \\ a + 4b + 16c + 64d = 29 \\ b - 6c + 27d = -2 \\ b + 8c + 48d = -32 \end{cases}$$

Lo expresamos en forma matricial (matrices A y B) y resolvemos mediante los métodos de Triangulación Gausseana primero y luego Sustitución hacia atrás, para determinar los coeficientes a, b, c y d.

```
A=[1 -3 9 27;1 4 16 64;0 1 -6 27;0 1 8 48];
B=[7;29;-2;-32];
```

```
[a0,b0]=triang_gauss(A,B);
Coeficientes=sust_atras(a0,b0); %da el vector de coeficientes [a b c d]
```

Los valores obtenidos fueron:
a= 57.685460880582838
b= 7.652834969908142
c= -1.204941400063352
d= -0.625277161862528

Para calcular los polinomios interpoladores se eligieron 4 puntos al azar dentro del intervalo [-3,4] y se armó un vector X con ellos y otro vector Y con sus respectivos valores de ordenadas. Luego se aplican los métodos de Lagrange y de Newton:

```
X=[-3 -1 2 4];

Y(1)=Coeficientes(1)+Coeficientes(2)*(-3)+Coeficientes(3)*(-
3)^2+Coeficientes(3)*(-3)^3;
Y(2)=Coeficientes(1)+Coeficientes(2)*(-1)+Coeficientes(3)*(-
1)^2+Coeficientes(3)*(-1)^3;
Y(3)=Coeficientes(1)+Coeficientes(2)*(2)+Coeficientes(3)*(2)^2+Coeficient
es(3)*(2)^3;
Y(4)=Coeficientes(1)+Coeficientes(2)*(4)+Coeficientes(3)*(4)^2+Coeficient
es(3)*(4)^3;

format long; %toma las variables con 15 decimales
ResultadoLagrange = Interp_Lagrange(X,Y);
ResultadoNewton=Newton(X,Y);
```

Se obtienen los siguientes polinomios:

<u>Lagrange:</u>

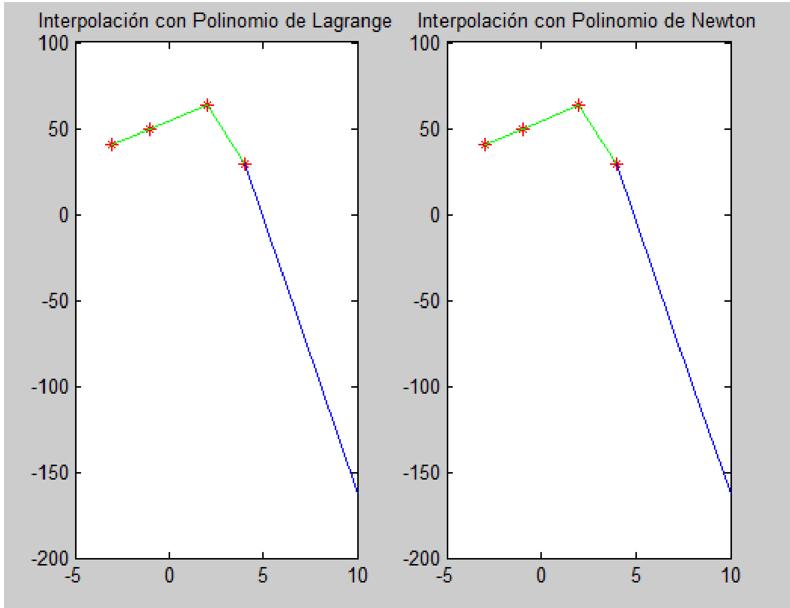
$$P_L(x) = -1.204941400063352 * \mathrm{x}^3 - 1.204941400063352 * \mathrm{x}^2 + 7.652834969908145 * \mathrm{x} + 57.685460880582838$$

<u>Newton:</u>

$$P_N(x) = -1.204941400063352 * \mathrm{x}^3 - 1.204941400063351 * \mathrm{x}^2 + 7.652834969908143 * \mathrm{x} + 57.685460880582838$$

Se muestran tantos decimales para dar cuenta de la diferencia infinitesimal de los resultados de ambos métodos de interpolación.

<u>Cuál método es mejor:</u>
Gráficamente se observa que ambos métodos devuelven polinomios iguales.
Teóricamente sabemos que los polinomios interpoladores de Lagrange y Newton pasan exactamente por todos los puntos, por lo que no van a tener errores con los mismos. Para distintos órdenes no conocidos generalmente se utiliza el método de Newton (más efectivo que Lagrange, aunque este último es más fácil de programar y simple en el caso de que el polinomio sea de orden 1).



EJERCICIO 2

La aceleración de la gravedad *g* por encima del nivel del mar está dada por los siguientes pares de datos:

y [m]	0	30.000	60.000	90.000	120.000
g [m/s^2]	9.8100	9.7487	9.6879	9.6278	9.5682

Determine la aceleración de la gravedad a una altura de 55.000m usando:
a) Un *Polinomio de Lagrange*.
b) Un *Polinomio de Newton*.
c) Un *Polinomio de Aproximación*.
¿Cuál de los 3 métodos es el más exacto y por qué?

Resolución:

Se definen los vectores de abscisas y ordenadas con la tabla anterior:

```
%X=y(m) y Y=g(m/s^2)
X=[0 30000 60000 90000 120000];
Y=[9.8100 9.7487 9.6879 9.6278 9.5682];
```

Luego se aplican los métodos solo pidiendo los coeficientes de los polinomios. A continuación se pide que se evalúe el valor de x=55000 en dichos polinomios mediante la función *polyval*, la cual recibe los coeficientes del polinomio y el valor a evaluar. Se tomaron todos los coeficientes del polinomio, a pesar de ser 0 o -0 algunos, debido a que ellos pueden contener valores muy pequeños que no se expresan en los resultados mostrados en pantalla. Esto se ve en el hecho de que ambos polinomios dieron igual, pero los resultados de la función evaluada en el punto en ambos polinomios, son distintos.

a) Polinomio de Lagrange:

```
%POLINOMIO DE LAGRANGE
L=Interp_Lagrange(X,Y);
ResultadoLagrange=polyval(L,55000);
```

$$P_L(x) = -0.000000000000000 * \mathrm{x}^4 + 0.000000000000000 * \mathrm{x}^3 - 0.000000000000037 * \mathrm{x}^2 - 0.000002046111111 \; * \mathrm{x} + 9.810000000000001$$

$$P_L(55000) = 9.697985172325152$$

b) Polinomio de Newton:

```
%POLINOMIO DE NEWTON
N=Newton(X,Y);
ResultadoNewton=polyval(N,55000);
```

$$P_L(x) = -0.000000000000000 * \mathrm{x}^4 + 0.000000000000000 * \mathrm{x}^3 - 0.000000000000037 * \mathrm{x}^2 - 0.000002046111111 \; * \mathrm{x} + 9.810000000000001$$

$$P_N(55000) = 9.697985172325103$$

c) Polinomio de Aproximación:

ResultadoAjuste = -6.392764666841225e+014

Cuál es el mejor método:

En principio, los métodos de interpolación son mejores que los de aproximación, por lo cual los métodos de Lagrange y Newton son mejores que el de aproximación polinomial. Esto se debe a que los polinomios de aproximación buscan el mejor polinomio que pase por todos los puntos (con un menor error total), en cambio, los polinomios de interpolación buscan un poliniomio que pase por todos los puntos, por lo cual, como se expresó en el Ejercicio 1, no va a generar errores respecto a los valores de los mismos. Se observa que los resultados del valor evaluado en los polinomios interpoladores dan prácticamente igual, a diferencia del resultado de la aproximación.

EJERCICIO 3

La *Ley de Ohm* establece que la *diferencia de potencial v* en una resistencia ideal *R* es directamente proporcional a la *corriente* que circula por la misma *i*, siguiendo la ley *v(t)=R.i(t)*. Sin embargo, las resistencias reales no obedecen la Ley de Ohm.

Suponga que se realiza un experimento preciso para medir la caída de potencial eléctrico en una resistencia. Los resultados muestran una relación curvilínea más que una línea recta que representa la Ley de Ohm.

***i* [A]**	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
***v* [V]**	-637	-96.5	-20.5	20.5	96.5	637

Para cuantificar esta relación, se debe realizar una interpolación. Utilice un polinomio interpolador de Lagrange, de modo tal de conocer la caída de potencial para los valores de corriente *i*=0.1 A e *i*=2.5 A, respectivamente.

Resolución:

Utilizando la rutina de interpolación de Lagrange, se obtuvieron los 6 coeficientes del polinomio interpolador de los pares de valores obtenidos por el experimento. Para los datos anteriores, el polinomio interpolador es:

$$V(i) = 5.3291x10^{-15} * i^5 - 7.1054x10^{-15} * i^4 + 74 * i^3 - 1.4211x10^{-14} * i^2 + 22.5 * i + 2.6645x10^{-15}$$

Con este polinomio, es posible conocer el valor de *V* para cada *i* aplicada. Entonces, se determinan los voltajes para las corrientes pedidas:

$$V(0.1\ A) = 2.324\ V$$
$$V(2.5\ A) = 1212.5\ V$$

EJERCICIO 4

Realice la derivada de las siguientes funciones utilizando la derivada hacia atrás de error cuadrático de intervalo $f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}$. Debe realizar un gráfico de la derivada verdadera y de su derivada aproximada a fin de verificar la exactitud de la derivada numérica en cada punto del intervalo analizado.

a) $f(x) = \cos(6x)$, en [0,2π], con *M=100* puntos en el intervalo de derivación.

b) $f(x) = e^{-1.2x}\mathrm{sen}(6x)$, en [0,2π], con M=200 puntos en el intervalo de derivación.

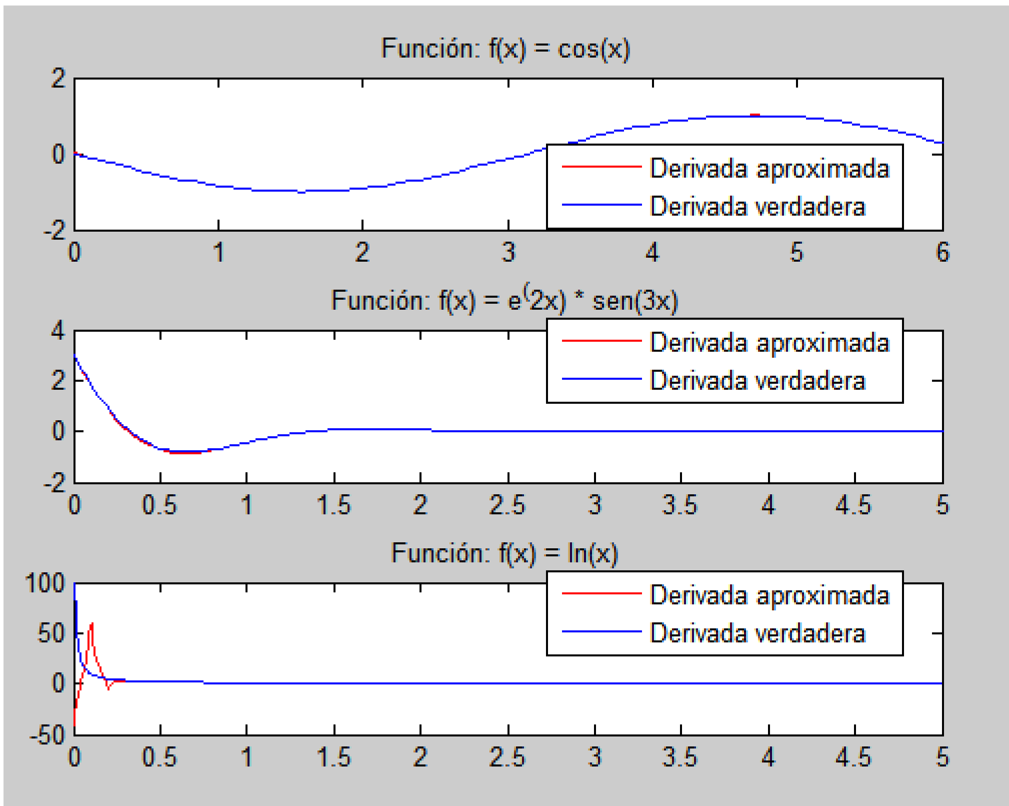
Resolución:

Para realizar la derivada de las funciones dadas en cada punto de los intervalos, se utilizó una rutina que aplica el algoritmo de derivación numérica:

```
%La funcion DerivadaHaciaAtras_ErrorCuatrico devuelve el valor de la
%derivada de la funcion f en el punto x.

function F=DerivadaHaciaAtras_ErrorCuadratico(f,x,tol)
h(1)=1;          %Incremento
D(1)=(feval(f,x+h(1))-feval(f,x-h(1)))/(2*h(1));     %Derivada con incremento h=1
er(1)=1;         %Variable donde se guarda el valor de error absoluto

%Extrapolación hasta encontrar un valor de h óptimo o alcanzar tolerancia (tol)

for j=1:100
    h(j+1)=h(1)/(10^j);              %Dimisnuye valor de h
    D(j+1)=(3*feval(f,x)-4*feval(f,x-h(j+1))+feval(f,x-2*h(j+1)))/(2*h(j+1));    %Derivada con nuevo valor de h
    er(j+1)=abs(D(j+1)-D(j));

    if(er(j+1))<tol
        break;                       %Corta por alcanzar tolerancia maxima
    elseif(er(j+1))>er(j)
        break;                       %Corta por alcanzar valor de h optimo
    end
end

F=D(j+1);
end
```

Para cada función dada se calculó la derivada en cada punto del intervalo con la función *DerivadaHaciaAtras_ErrorCuadratico*, utilizando un ciclo *for* y guardando los valores de la función derivada en un vector. La función derivada verdadera se calculó matemáticamente y se guardó en otro vector. Luego, se expusieron las comparaciones graficando ambos vectores con el comando *plot*, utilizando un mismo vector de variable independiente X.

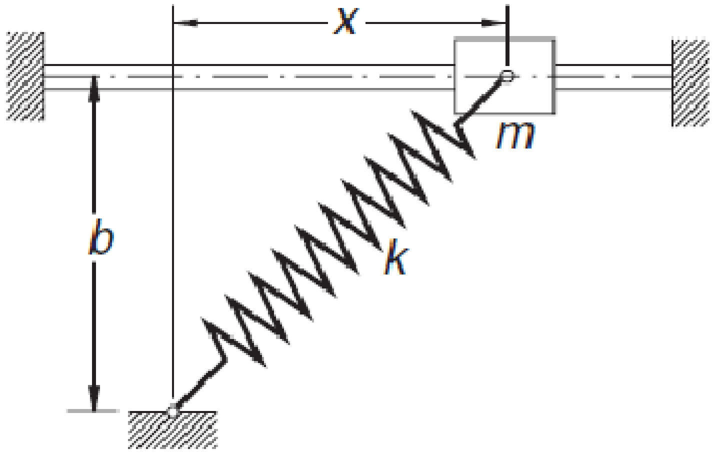
Los resultados de las comparaciones fueron los siguientes:



Para las funciones cos(x) y e^{2x}sen(3x) se observa que le método numérico aplicado aproxima correctamente a la derivada verdadera.
Para el caso de la función logarítmica se observa que el método no aproxima correctamente para valores menores a 1. Esto se debe a que la función *LOG(x)* de Matlab arroja resultados con valores complejos para valores negativos.

EJERCICIO 5

En el siguiente sistema mecánico, la masa *m* está conectada a un resorte de longitud libre *b* y constante de elástica de Hooke *k*. El coeficiente de rozamiento entre la masa y la guía horizontal es μ. Se puede demostrar que la aceleración de la masa *m* es $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -f(x)$. Se pide:



a) Demuestre que la ley de movimiento está dada por:

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

b) Demuestre que si la masa se libera desde el reposo en *x=b*, la velocidad de la misma en *x=0* estará dada por:

$$v_0 = v(x=0) = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

c) Calcule la velocidad de la masa en x=0, es decir v_0, teniendo en cuenta que *m*=0.8 kg, *b*=0.4 m, *μ*=0.3, *k*=80 N/m y *g*=9.81 m/s², mediante *Regla Trapezoidal Compuesta* y *Regla de Simpson Compuesta*.

Resolución:

a) No pudimos llegar a la expresión a pesar de determinar el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas intervinentes.
b) Se plantea la conservación de energía mecánica del sistema:

$$E\ inicial = E\ final$$
$$\frac{1}{2}mv_b{}^2 + U_b = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + U_0$$

U son las energías potenciales en ambos momentos (incluye energía potencial elástica y gravitatoria).
Sabiendo que $x''(t) = f(x)$ tenemos que $F(x) = m.f(x)$ se obtiene (con vb=0):

$$U_b - U_0 = \frac{1}{2}mv_0{}^2$$
$$\int_0^b f(x)dx.m = \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b F(x)dx}$$

c) Velocidad inicial con regla de Simpson compuesta: 2.4977
Velocidad inicial con regla de trapezoidal compuesta: 2.4977

Método:
```
M=100;  %Cantidad de intervalos
b=0.4;  % Longitud libre del resorte

%Funcion externa: Funcion_Leydemovimiento(x) =>
%F(x)=u*g+(k/m)*(u*b+x)*(1-b/((b^2+x^2)^(1/2)));

%%%%%%%%%% Con Regla de Simpson compuesta %%%%%%%%%%%
F1=Regla_Simpson_Compuesta('Funcion_Leydemovimiento',0,b,M);

%%%%%%%%%% Con Regla trapezoidal compuesta %%%%%%%%%%%
F2=Regla_Trapezoidal_Compuesta('Funcion_Leydemovimiento',0,b,M);

v01=(2*F1)^(1/2);     %Con Simpson
v02=(2*F2)^(1/2);     %Con Trapezoidal
```