

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт машиностроения, материалов и транспорта

Высшая школа автоматизации и робототехники

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Алгоритм Косарайю**

по дисциплине «Объектно-ориентированное программирование»

Выполнил: студент гр. 3331506/90401

Скрыль М.И.

Преподаватель:

Ананьевский М.С.

Санкт-Петербург

2022

## Введение

Алгоритм Косарайю является алгоритмом поиска областей сильной связности в ориентированном графе.

Две вершины ( $u$  и  $v$ ) ориентированного графа называют сильно связными, если существует путь из  $u$  в  $v$  и существует путь из  $v$  в  $u$ . Ориентированный граф называется сильно связным, если *любые две* его вершины сильно связны.

Компоненты сильной связности — такое разбиение вершин, что внутри одной компоненты все вершины сильно связаны, а между вершинами разных компонент сильной связности нет. Областью сильной связности называется множество вершин компонент сильной связности.

Поиск компонент сильной связности (следовательно, и алгоритм Косарайю) применяют для последующей конденсации графа, то есть сжатия каждой компоненты сильной связности в одну вершину, который в свою очередь используется для решения задачи 2-SAT (или задача выполнимости булевых формул), которая формулируется следующим образом. Рассмотрим, например, такое выражение:  $(a \mid b) \& (!c \mid d) \& (!a \mid !b)$ . Задача выполнимости (SAT) заключается в том, чтобы найти такие значения переменных, при которых выражение становится истинным, или сказать, что такого набора значений нет. Для примера выше такими значениями являются  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ .

Известно, что выражение  $a \mid b$  эквивалентно  $(!a \rightarrow b) \mid (!b \rightarrow a)$ , где  $\rightarrow$  означает импликацию, следовательно, можно составить граф импликаций. Если какое-то выражение положить верным, то из него будут достижимы все остальные выражения, которые следуют из него. Но, если для какой-то переменной выполняется, что из  $x$  достижимо  $!x$ , а из  $!x$  достижимо  $x$ , то задача решения не имеет, так как в таком случае, какое бы значение  $x$  ни было выбрано, всегда будет получено противоречие — что должно быть выбрано и обратное ему значение.

С точки зрения теории графов это означает, что из первой вершины достижима вторая и, наоборот, из второй — первая, то есть эти вершины находятся в одной компоненте сильной связности. Тогда условие существования

решения звучит так: для того, чтобы задача 2-SAT имела решение, необходимо, чтобы для любой переменной  $x$  вершины  $x$  и  $\neg x$  находились в разных компонентах сильной связности графа импликаций.

С SAT же связано большое количество практических задач, таких как:

- 1) Многие рекомендательные системы (например, в составе Netflix) используют алгоритм разложения булевых матриц для рекомендации контента. Оптимальное разложение таких матриц может быть найдено с помощью SAT.
- 2) Задача оптимального распределения задач по процессорам
- 3) Популярный метод кластеризации k-means (метод k-средних)
- 4) Задачи о сериализации истории транзакций в базах данных

### **Описание алгоритма**

Перед объяснением самого алгоритма обратимся к основным понятиям, которые важны для его понимания.

Основу алгоритма составляет поиск в глубину или depth-first search (DFS), общая идея которого состоит в следующем: для каждой непройденной вершины необходимо найти все непройденные смежные вершины и повторить поиск для них.

Такт DFS из вершины  $v$  -- обход (в глубину) всех вершин графа, достижимых из  $v$ . Такт можно интерпретировать как рекурсивный вызов функции. Такт обработки вершины, у которой нет соседей, будет равняться 1.

Инвертирование графа -- смена направлений всех рёбер в графе на противоположные.

Время выхода вершины -- число, соответствующее времени выхода рекурсии алгоритма DFS из вершины. Притом, изначально счётчик времени 0, увеличивается он лишь в двух случаях:

1. Начало нового такта DFS
2. Прохождение по ребру (при том, не важно, рекурсивный проход или нет)

Алгоритм Косарайю состоит из трех шагов:

1. Выполняется поиск в глубину, пока всем вершинам не будет присвоено время выхода из рекурсии.
2. Исходный граф инвертируется
3. Еще раз выполняется поиск в глубину, начиная с вершины с наибольшим временем выхода.

Вершины, посещенные за один такт DFS в третьем пункте, будут являться компонентами сильной связности.

Пример:

Допустим, что дан следующий граф:

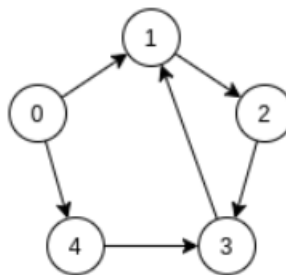


Рисунок 1 – Пример

Запускаем DFS из вершины «0».

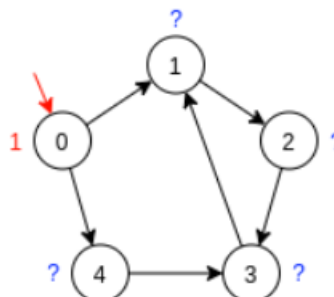


Рисунок 2 – Пример

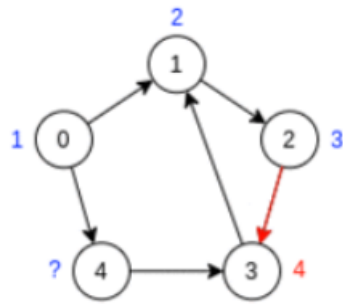


Рисунок 3 – Пример

Доходим до вершины 3, у которого нет непосещенных смежных вершин, начинаем возвращаться назад. Так как у вершин 2 и 1 все смежные вершины тоже посещены, возвращаемся в вершину 0.

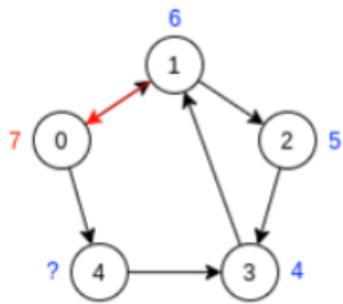


Рисунок 4 – Пример

Посещаем вершину 4.

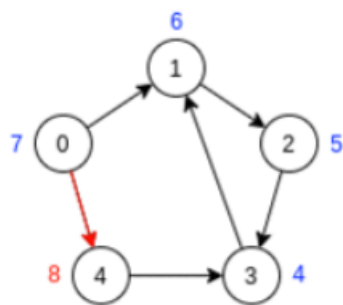


Рисунок 5 – Пример

Так как у нее больше нет непосещенных смежных вершин, возвращаемся в вершину 0.

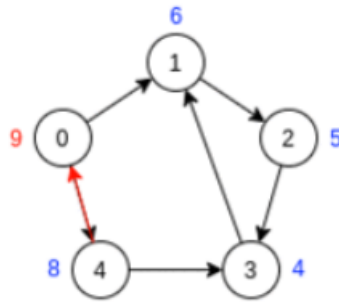


Рисунок 6 – Завершение DFS

У вершины 0 больше нет непосещенных вершин, к тому же все вершины уже посещены и отмечены, DFS завершается.

Далее инвертируем ребра исходного графа.

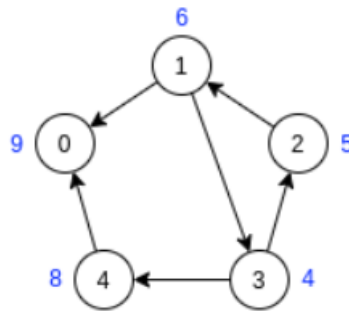


Рисунок 7 – Инвертированный граф

Запускаем DFS по инвертированному графу из вершины 0, так как у нее наибольшее время выхода.

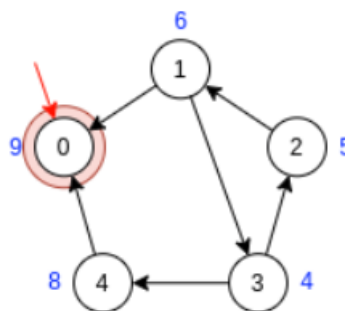


Рисунок 8 – Второй DFS

Так как из нее нельзя посетить ни одной смежной вершины, такт DFS заканчивается, следующий начинается из вершины 4, а вершина 0 является компонентой сильной связности.

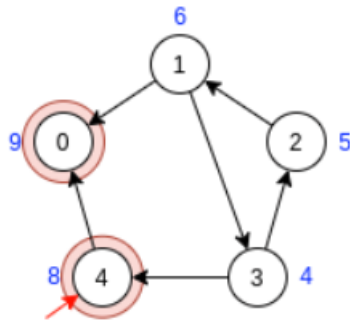


Рисунок 9 – Пример

Из вершины 4 есть возможность попасть в вершину 0, но, так как она уже посещена, то такт DFS заканчивается, новый начинается с вершины 1, а вершина 4 является компонентой сильной связности.

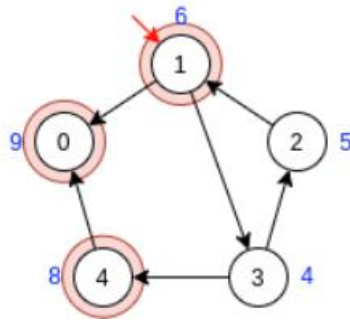


Рисунок 10 – Пример

Вершина 3 является непосещенной, так что DFS из вершины 1 переходит в вершину 3, а затем в вершину 5, у которой уже не будет непосещенных смежных вершин, следовательно, такт DFS завершится, а вершины 1-3-2 будут являться компонентой сильной связности.

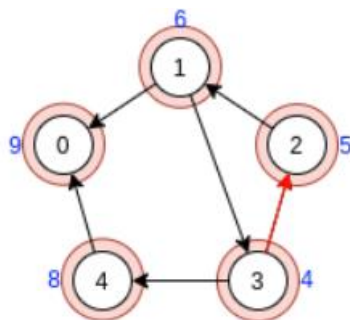


Рисунок 11 – Алгоритм завершен

После завершения алгоритма получим три компоненты сильной связности.

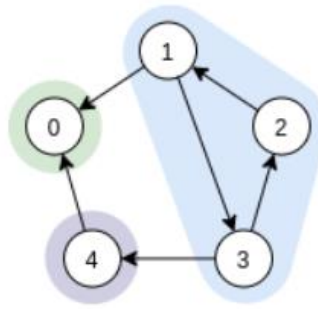


Рисунок 12 – Компоненты сильной связности

### Исследование алгоритма

Этот алгоритм состоит из двух поисков в глубину, которые и определяют его временную сложность, которая составляет  $O(V^2)$  в случае насыщенных графов и  $O(V + E)$  в случае разреженных. Для исследования времени выполнения алгоритма было создано большое количество случайных графов с количеством ребер, соответствующим худшему случаю алгоритма, для которых было замерено время выполнения алгоритма. График представлен на рисунке 13.

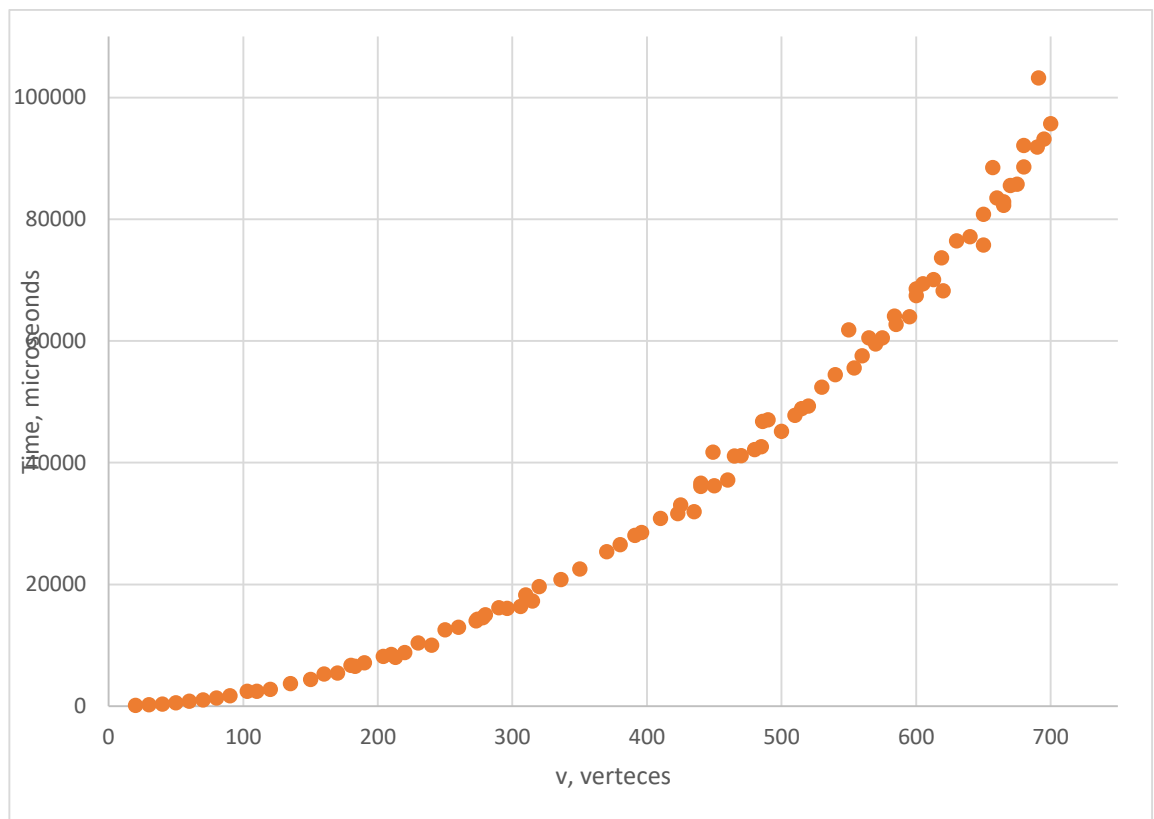


Рисунок 13 – Зависимость временной алгоритма от количества вершин в худшем случае



## Заключение

В работе был рассмотрен алгоритм Косайрайю для нахождения сильно связанных компонент в ориентированном графе. Было выявлено, что для разреженных графов временная сложность алгоритма является линейной зависимостью, а для плотных графов – квадратичной, что делает его менее эффективным при поиске компонент сильной связности в плотных графах по сравнению с алгоритмом Тарьяна, обладающего временной сложностью  $O(V + E)$ , тем не менее алгоритм Косарайю является, возможно, наиболее концептуально понятным из всех алгоритмов, выполняющих поиск компонент сильной связности в ориентированном графе.

## Список литературы

1. Роберт Седжвик, Фундаментальные алгоритмы на C++. Часть 5: алгоритмы на графах. – 3-е изд. – СПб: ООО «ДиаСофтЮП», 2002. – 496 с.
2. John Carey. C++ Data Structures and Algorithm Design Principles – UK, Birmingham, Packt Publishing Ltd., 2019. - 626 с.
3. Алгоритм Kosaraju по полкам [Электронный ресурс] // <https://habr.com/ru/post/537290/>