

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт машиностроения, материалов и транспорта

Высшая школа автоматизации и робототехники

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Способы представления графов**

по дисциплине «Объектно-ориентированное программирование»

Выполнил: студент гр. 3331506/90401

Колесов С.А.

Преподаватель:

Ананьевский М.С.

Санкт-Петербург

2022

## Введение

Граф - это топологическая модель, которая состоит из множества вершин и множества соединяющих их рёбер. При этом значение имеет только сам факт, какая вершина с какой соединена. В свою очередь вершина - точка в графе, отдельный объект, а ребро - неупорядоченная пара двух вершин, которые связаны друг с другом.

Графы являются очень полезной в программировании структурой, поскольку зачастую задачи компьютерной науки можно представить в виде графа и решить с помощью одной из его техник. Графы находят широкое применение в современной науке и технике. Они используются и в естественных науках (физике и химии) и в социальных науках (например, социологии), но наибольших масштабов применение графов получило в информатике и сетевых технологиях.

Для удобной работы с графами, их представляют в памяти различными способами, рассмотрим основные способы представления графов и оценим их характеристики по памяти и скорости доступа к элементам.

## Особенности графов

Простой граф  $G(V, E)$  – совокупность двух множеств – непустого множества  $V$  и множества  $E$  неупорядоченных пар различных элементов множества  $V$ . Множество  $V$  называется множеством вершин, а множество  $E$  называется множеством рёбер. Пример визуального представления простого графа показан на рисунке 1.

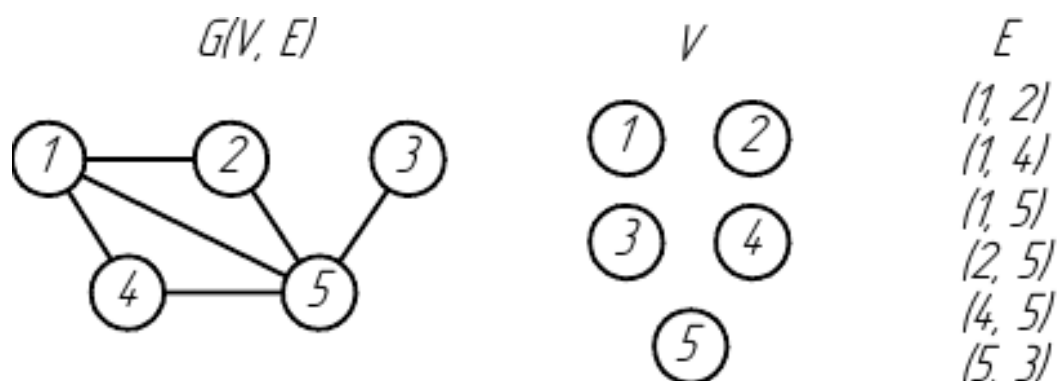


Рисунок 1 – Простой граф

Если в графе  $G(V, E)$  в множестве ребер  $E$  разрешены элементы типа  $e = \{v, v\}$ , то такой граф называется псевдографом. Другими словами если в графе ребра могут быть петлями, то есть начинаться и заканчиваться в одной вершине, то такой граф  $G(V, E)$  называется псевдографом. Пример псевдографа представлен на рисунке 2.

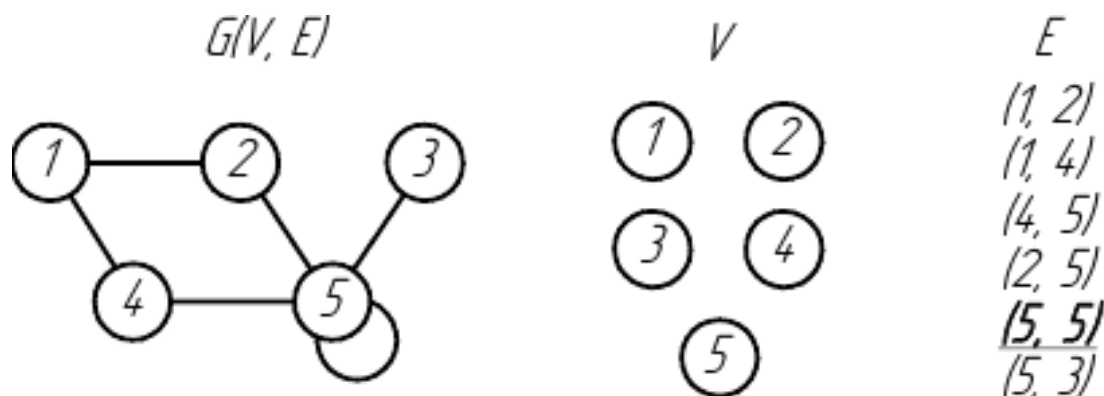


Рисунок 2 – Псевдограф

Если в графе  $G(V, E)$  в множество ребер  $E$ , содержит одинаковые элементы, то есть если  $E$  не множество, а семейство, то такие элементы называются кратными ребрами, а граф  $G(V, E)$  называется мультиграфом. Пример мультиграфа представлен на рисунке 3.

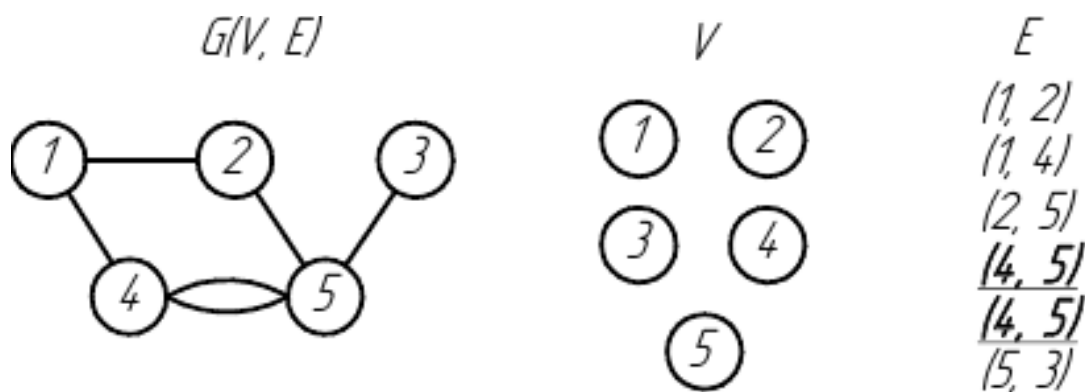


Рисунок 3 – Мультиграф

Если множество ребер  $E$  в графе  $G(V, E)$  – множество упорядоченных пар различных элементов множества  $V$ , то такой граф называется ориентированным или же орграфом. Тогда множество  $E$  будет состоять из элементов  $e = \{v_1, v_2\}$ , где вершина  $v_1$  – начало дуги, а  $v_2$  – конец дуги. Пример ориентированного графа представлен на рисунке 4.

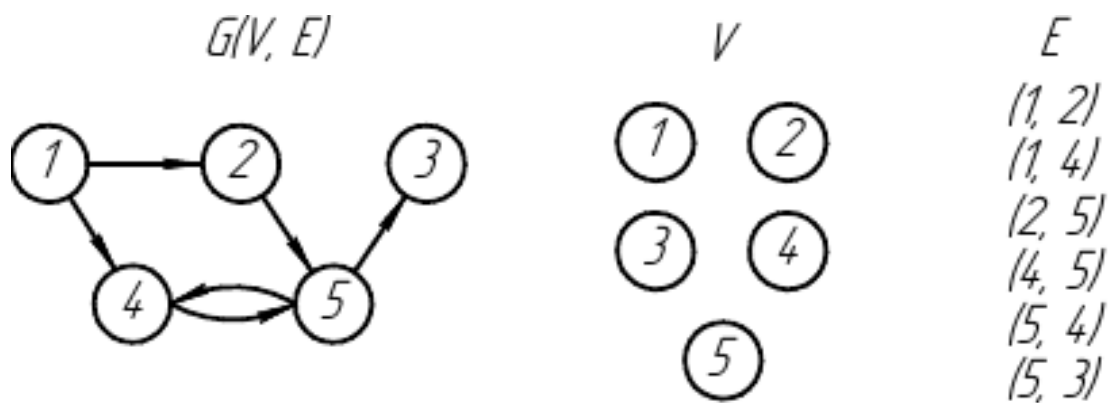


Рисунок 4 – Ориентированный граф

Если в графе присутствуют как ориентированные так и не ориентированные ребра, то есть граф является совокупностью трех множеств  $G(V, E, U)$ : множества вершин  $V$ , множества упорядоченных пар различных вершин  $E$  и множества неупорядоченных пар различных вершин  $U$ . Пример смешанного графа представлен на рисунке 5.

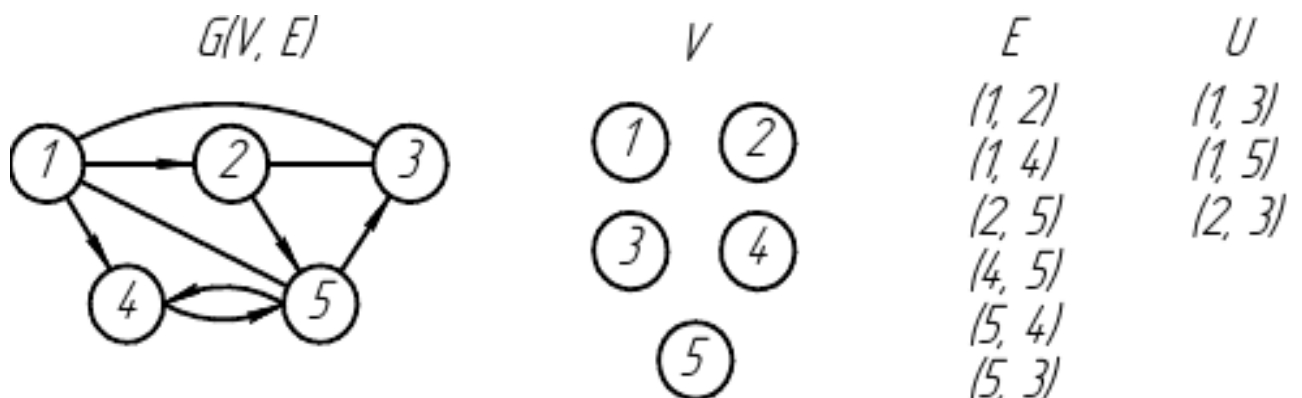


Рисунок 5 – Смешанный граф

Если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число – вес ребра, тогда граф называется взвешенным. В таком случае множество  $E$  будет состоять из элементов  $e = \{v_1, v_2, w\}$ , где  $w$  – вес ребра. Пример взвешенного графа представлен на рисунке 6.

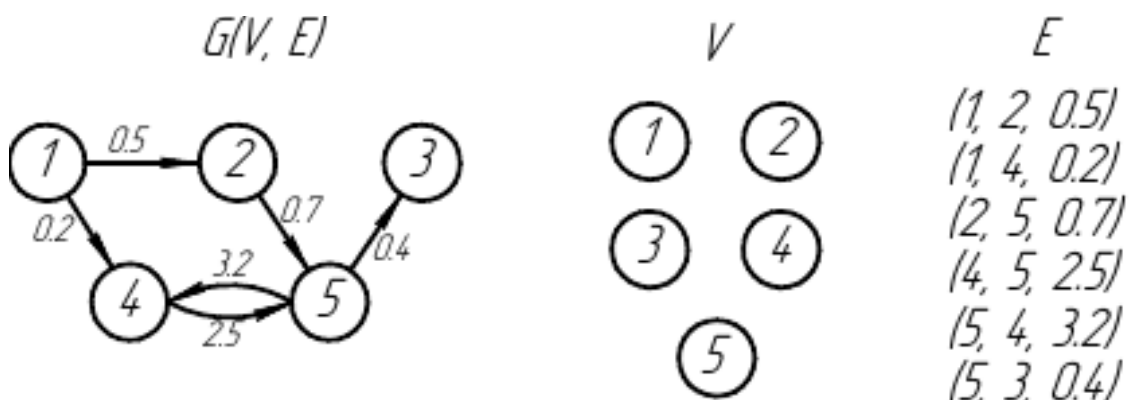


Рисунок 6 – Взвешенный граф

Если каждым ребром графа  $G(V, E)$  могут соединяться не только две вершины, но любое подмножество вершин графа, то такой граф называется гиперграфом. В таком случае  $E$  - семейство непустых (необязательно различных) подмножеств множества  $V$ , называемых рёбрами гиперграфа. Гиперграф относится как к теории множеств так и к теории графов, поэтому его стоит учитывать как отдельный вид графа, так как с его помощью решаются определенные типы задач. Пример гиперграфа представлен на рисунке 7.

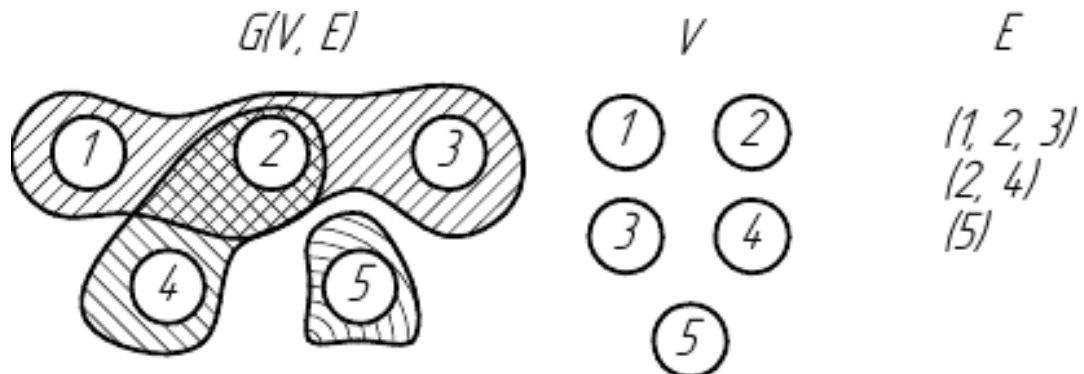


Рисунок 7 - Гиперграф

### Способы представления графов

В зависимости от вида графа, его сложности и характера работы с данными о графе используют различные способы представления графа. Основными способами представления графа являются:

- Матрица смежности;
- Матрица инцидентности;
- Список смежности;
- Список рёбер(инцидентности);

Рассмотрим каждый способ подробнее, и определим какие преимущества имеют те или иные способы представления графа.

### Матрица смежности

Смежность – понятие, используемое только в отношении двух ребер или в отношении двух вершин: два ребра инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными.

Граф  $G(V, E)$  представляется в виде матрицы  $A$  размером  $n \times n$ , где  $n$  – количество вершин в которой столбцы и строки соответствуют вершинам графа. В случае простого графа в элементе матрицы  $a_{i,j}$  стоит 0 если между  $i$ -ой и  $j$ -ой вершиной нет ребра и 1 если оно есть, то есть вершины смежны между собой. Таким образом матрица смежности для простого графа – бинарная матрица, которая содержит нули на главной диагонали. Если граф неориентированный, то матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, если ориентированный – нет, в первом случае объем используемой памяти можно сократить вдвое  $\theta(|V|^2/2)$ . В случае псевдо и мультиграфов элемент матрицы  $a_{i,j}$  равен числу ребер из  $i$ -ой вершины в  $j$ -ую, в свою очередь петли соответствуют диагональным элементам матрицы и в случае ориентированного графа считаются за два ребра. Если граф взвешенный элементы матрицы смежности вместо чисел 0 и 1, указывающих на присутствие или отсутствие ребра, содержат веса самих ребер.

Матрица смежности предпочтительна только в случае плотных графов с большим числом ребер, так как она требует объем памяти  $\theta(|V|^2)$ , что критично для больших графов. Если граф разрежен, то большая часть памяти напрасно будет тратиться на хранение нулей, зато в случае неразреженных графов матрица смежности достаточно компактно представляет граф в памяти, используя примерно  $n^2$  бит памяти, по одному биту на элемент, что может быть на порядок лучше других способов представления. Однако уделять по одному биту на элемент возможно только при невзвешенном графе и если не присутствуют кратные ребра, тогда матрица бинарна. Но в противном случае на один элемент может приходиться несколько байт и тогда матрица смежности очень неэффективный по памяти способ представления. Также если граф взвешенный и в нем имеются кратные ребра, то такой граф нельзя представить в виде матрицы смежности. Пример представления графа в виде матрицы смежности показан на рисунке 8.

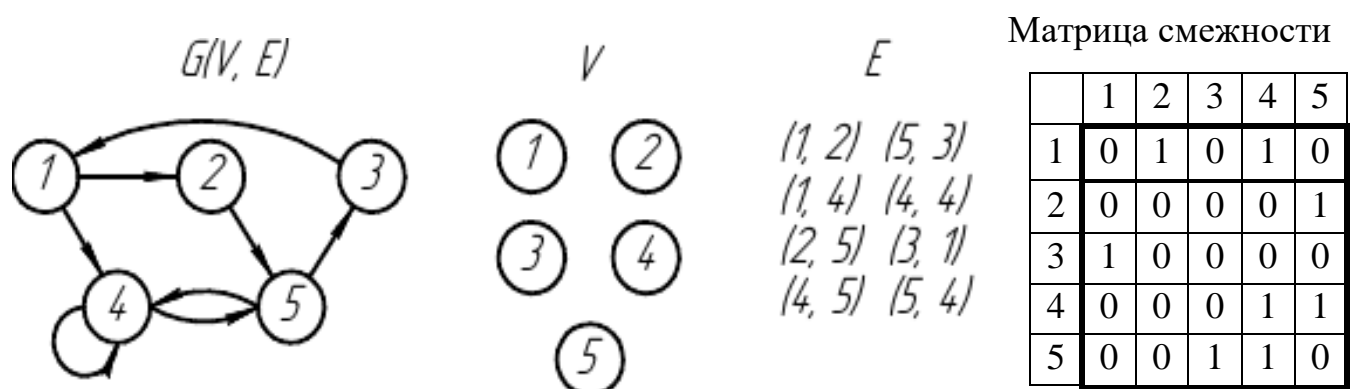


Рисунок 8 – Матрица смежности

Достоинства матрицы смежности:

- Сложность проверки наличия ребра между двумя вершинами  $O(1)$ ;
- Эффективное использование памяти для плотных графов.

Недостатки матрицы смежности:

- Объем памяти  $\theta(|V|^2)$ , что критично для больших неплотных графов;
- Сложность перебора всех вершин смежных с данной:  $O(|V|)$ ;
- Нельзя представить взвешенный мультиграф;
- Нельзя представить гиперграф;

### Матрица инцидентности

Инцидентность – понятие, используемое только в отношении ребра и вершины: две вершины (или два ребра) инцидентными быть не могут. Если  $v_1$ ,  $v_2$  – вершины, а  $e = \{v_1, v_2\}$  – соединяющее их ребро, тогда вершина  $v_1$  и ребро  $e$  инцидентны, также как  $v_2$  и  $e$ .

Граф  $G(V, E)$  представляется в виде матрицы  $A$  размером  $n \times m$ , где  $n$  – количество вершин, а  $m$  – количество ребер в которой столбцы матрицы соответствуют ребрам, строки – вершинам графа. В случае простого графа в элементе матрицы  $a_{i,j}$  стоит 0 если между  $i$ -ой вершиной и  $j$ -ым ребром нет инцидентности и наоборот 1 если она есть. В случае ориентированного графа каждой дуге  $e = \{v_1, v_2\}$ , ставится в соответствующем  $e$  столбце: 1 в строке вершины  $v_1$ , и -1 в строке вершины  $v_2$ , если связей между ребром и вершиной

нет, то в соответствующую ячейку ставится 0. В случае если представляется псевдограф, то есть присутствуют петли, то в столбец ставится одна 1, иначе в матрице в каждом столбце должно быть ровно две ненулевых ячейки. Если представляется гиперграф, то в столбце тоже может быть отличное от двух число ненулевых ячеек. В случае взвешенного графа вместо 1 и -1 в соответствующие ячейки записывается вес самих ребер.

Матрица инцидентности может использоваться для любых видов графов. Так как в столбце данной матрицы в случае простого графа находится только два ненулевых элемента, то уже при небольшом числе вершин матрица будет разреженной от чего память будет неэффективно использоваться. Однако для невзвешенного и неориентированного графа матрица будет бинарной, от чего ее можно более компактно хранить. Матрица инцидентности не позволяет проверять наличие ребер между двумя вершинами быстрее чем за  $O(|E|)$ , что довольно долго, а удалять ребро быстрее чем за  $O(|V|)$ , так как последний столбец копируется в столбец удаляемого ребра. Пример представления графа в виде матрицы инцидентности показан на рисунке 9.

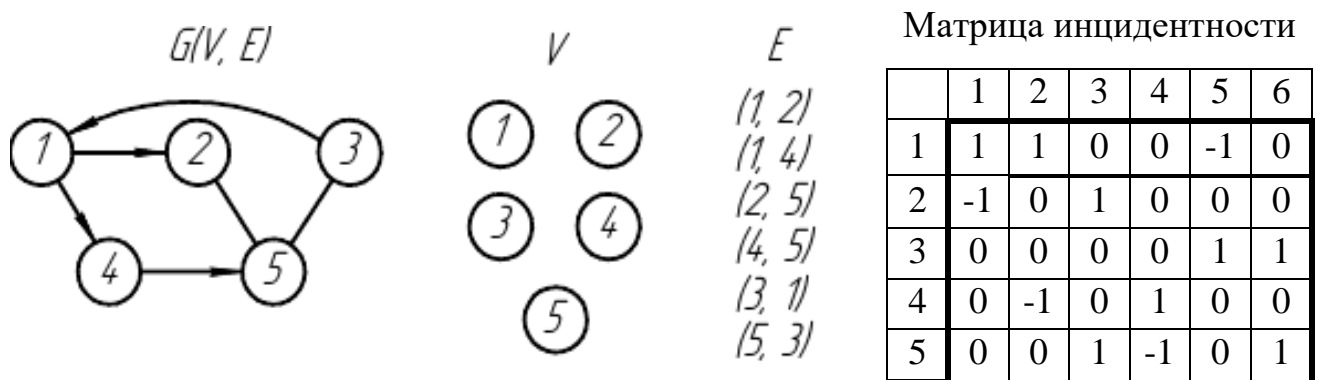


Рисунок 9 – Матрица инцидентности

Достоинства матрицы смежности:

- Можно представить любой вид графа;
- Удобно определять число входов и выходов в вершину;

Недостатки матрицы смежности:

- Объем памяти  $\theta(|V| \cdot |E|)$ , матрица разрежена;
- Сложность перебора всех вершин смежных с данной:  $O(|E|)$ ;
- Сложность удаления ребра  $O(|V|)$ ;



## Список смежности

Граф  $G(V, E)$  представляется в виде списка где каждой вершине соответствует строка в которой хранится список смежных вершин. Так как количество смежных вершин у различных вершин различно, данная структура представляет собой не матрицу, а список списков. В случае взвешенного графа в списке смежных вершин также указывается вес ребра для каждой смежной вершины. Если граф неориентированный, то из-за того что рассматривается смежность вершин будет иметь место дублирование и сумма длин всех списков будет  $2|E|$ , при ориентированном графе дублирования не будет и память будет использоваться более эффективно. Недостатком списка смежности является, то что в плотном графе для определения смежности двух вершин, требуется поиск по списку сложностью  $O(|V|)$ .

Для реализации данной структуры используется несколько способов, различающиеся особенностями ассоциации вершин и коллекциями соседей, и способами представления ребер и вершин:

- Использование хэш-таблицы для ассоциации каждой вершины со списком смежных вершин. Нет явного представления ребер.
- Вершины представляются в массиве, индекс элемента соответствует номеру вершины, каждый элемент массива ссылается на однонаправленный связный список соседних вершин.
- Объектно-ориентированный список смежности, который содержит классы вершин и ребер. В списке вершин, каждый объект вершины содержит ссылку на коллекцию рёбер, а каждый объект ребра содержит ссылки на вершины начала и конца ребра.

В отличие от матричных представлений списки смежности нельзя представить в бинарном виде, поэтому их выгодно использовать, если граф разрежен, так как объем используемой памяти:  $\theta(|V| + |E|)$ , в отличие от матричных представлений в памяти не хранится преобладающее количество нулей. Также список смежности выгоден в операциях над графом по определению степени вершины, вставке и удалении вершины и обходе графа.

Пример списка смежности представлен на рисунке 10.

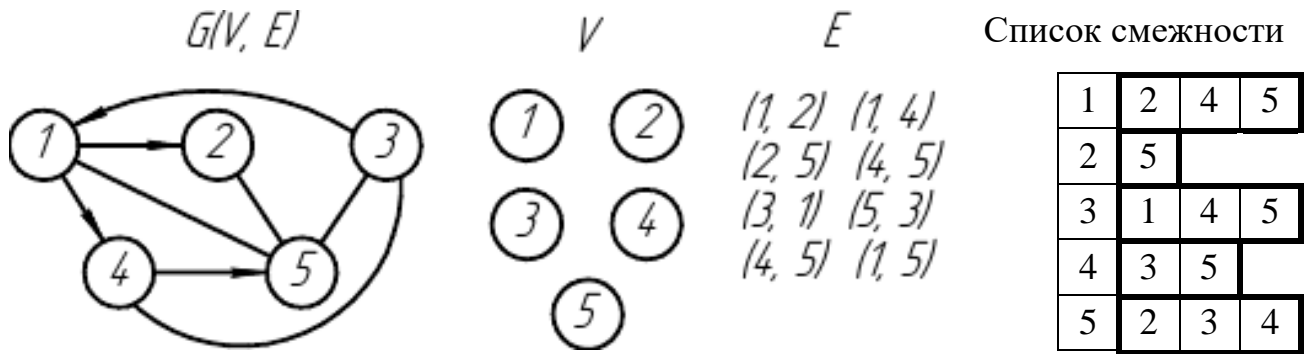


Рисунок 10 – Список смежности

Достоинства списка смежности:

- Объем памяти  $\theta(|V| + |E|)$ , оптимально для не насыщенных графов
- Позволяет быстро перебирать смежные вершины, и обходить граф;

Недостатки списка смежности:

- Не оптимален для насыщенных графов (количество ребер  $\sim n^2$ );
- Для взвешенных графов приходится усложнять структуру списка смежных вершин добавлением веса;
- Сложность определения ребра между вершинами  $O(|V|)$ .

### Список ребер(инцидентности)

Граф  $G(V, E)$  представляется в виде списка где каждому ребру соответствует строка в которой хранится список инцидентных данному ребру вершин. В отличие от списка смежности в реализации списка ребер в массиве хранятся не объекты вершин с ссылками на списки смежных вершин, а объекты ребер с ссылками на список инцидентных вершин. Также как и матрица инцидентности, с помощью списка ребер можно представить любой граф, в том числе и гиперграф. В случае взвешенного графа, помимо инцидентных вершин хранится вес ребра, а если граф смешанный то неориентированные ребра записываются в список ребер дважды. В общем случае список ребер представляет из себя таблицу с количеством строк равным количеству ребер и двумя столбцами в случае невзвешенного графа и тремя столбцами в случае взвешенного графа.

Список рёбер наиболее компактный способ представления графов, поэтому его применяют для внешнего хранения или обмена данными. На этом достоинства списка ребер заканчиваются, так как такие операции как: определение ребра между двумя вершинами, удаление вершины, обход графа, определение степени вершины и т.п. делать не оптимально в данном представлении. Пример списка ребер представлен на рисунке 11.

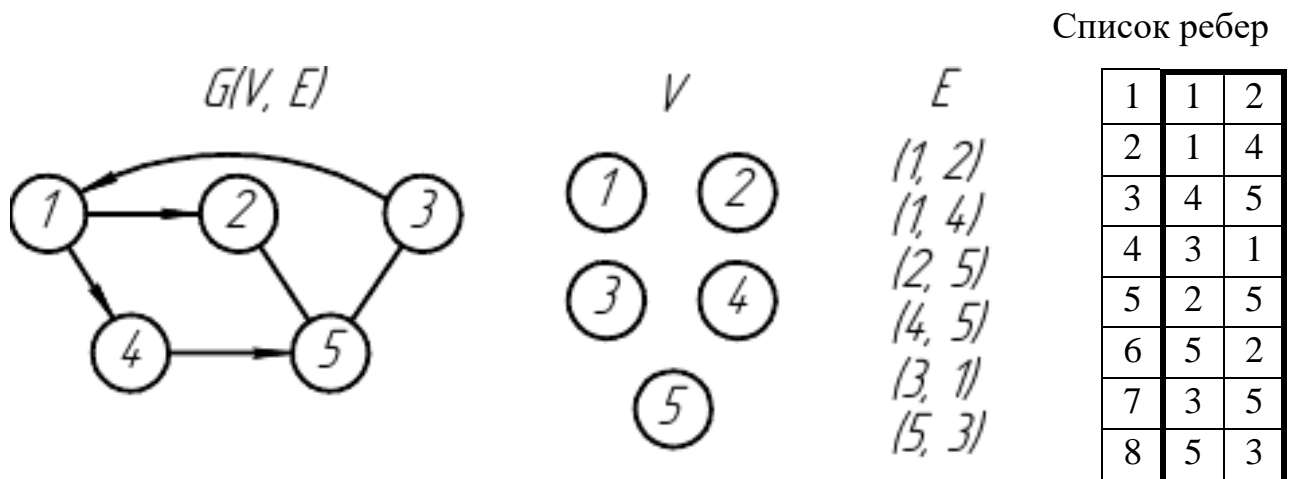


Рисунок 11 – Список рёбер

Достоинства списка смежности:

- Объем памяти  $\theta(|E|)$ , наиболее компактно;
- Можно представить любой вид графа;

Недостатки списка смежности:

- Не оптимален для насыщенных графов (количество ребер  $\sim n^2$ );
- Операции над графом, за исключением удаления ребра, имеют сложность  $O(|E|)$ , что критично для насыщенных графов;

### Сравнение способов представления

Каждый способ представления графа имеет свои преимущества и недостатки, сравним их по объему памяти и сложности выполнения операций над графом, таких как: обход графа, проверка наличия ребра  $\{v_1, v_2\}$ , определение степени вершины, вставка или удаление вершины, вставка или удаление ребра. Результаты сравнения представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение способов представления графа

Операция	Матрица смежности	Матрица инцидентности	Список смежности	Список рёбер
Объем используемой памяти	$\theta( V ^2)$	$\theta( V  \cdot  E )$	$\theta( V  +  E )$	$\theta( E )$
Проверка на наличие ребра $\{v_1, v_2\}$	$O(1)$	$O( E )$	$O( V )$	$O( E )$
Определение степени вершины	$O( V )$	$O( E )$	$O(1)$	$O( E )$
Вставка или удаление вершины	$O( V )$	$O( E )$	$O(d)$	$O( E )$
Вставка или удаление ребра	$O(1)$	$O(V)$	$O(1)$	$O(1)$
Обход графа	$O( V ^2)$	$O( V  \cdot  E )$	$O( V  +  E )$	$O( E )$
Представление любого вида графа	Нет	Да	Нет	Да

Для представления графа в алгоритмах в основном используется список смежности, благодаря преимуществам в скорости выполнения основных операций, однако для передачи данных о графе и хранении используется список ребер благодаря большей компактности.

## **Заключение**

Для представления графа в алгоритмах в основном используется список смежности, благодаря преимуществам в скорости выполнения основных операций, так как он позволяет быстро получать соседей вершин, однако для передачи данных о графе и хранении используется список ребер благодаря большей компактности. В свою очередь матрицу смежности выгодно использовать для насыщенных графов, но в случае взвешенных графов или мультиграфов, структура усложняется и объем используемой памяти становится еще больше. Матрица инцидентности используется крайне редко из-за большого объема используемой памяти, однако может применяться для быстрого нахождения циклов в графе.

## Список литературы

1. Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. Алгоритмы: построение и анализ, под ред. И. В. Красикова. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
2. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир. — 1973. — 300 с.
3. Граф (математика) [Электронный ресурс] // [https://ru.wikipedia.org/wiki/Граф\\_\(математика\)#Простой\\_граф](https://ru.wikipedia.org/wiki/Граф_(математика)#Простой_граф).
4. Графы. Способы представления графа в программе [Электронный ресурс] // <https://pro-prof.com/forums/topic/graph-representations>.
5. Понятие и представление графа: матрица смежности, список смежности [Электронный ресурс] // <https://brestprog.by/topics/graphs>.