Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт машиностроения, материалов и транспорта
Высшая школа автоматизации и робототехники

КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине «Объектно-ориентированное программирование»

Red-Black Tree

(семестр VI)

Студент группы 3331506/20401 Д.В. Брюханов

подпись, дата инициалы и фамилия

Оценка выполненной студентом работы:

Преподаватель, доцент, к.т.н. М.С. Ананьевский

подпись, дата инициалы и фамилия

Санкт-Петербург

2025

Введение

Красно-чёрные деревья (Red-Black Trees, RBT) — это один из наиболее важных типов самобалансирующихся двоичных деревьев поиска (Binary Search Tree), обеспечивающих эффективное выполнение операций вставки, удаления и поиска за логарифмическое время. Они широко применяются в различных областях компьютерных наук, включая реализацию ассоциативных массивов, планировщиков задач и файловых систем.

Основная цель данной курсовой работы — изучить структуру красно-чёрных деревьев, их свойства и алгоритмы балансировки.

Актуальность

В условиях постоянно растущих объёмов данных и требований к скорости обработки информации эффективные структуры данных становятся критически важными. Красно-чёрные деревья обеспечивают гарантированную сложность **O(log n)** для основных операций, что делает их предпочтительным выбором во многих приложениях, таких как:

- Реализация **std::map** и **std::set** в C++
- Базы данных и индексация
- Алгоритмы геометрического поиска
- Планирование процессов в операционных системах

Изучение RBT позволяет глубже понять принципы балансировки деревьев и их применение в реальных задачах, что делает данную тему актуальной для современных IT-специалистов.

Основная часть

Бинарное дерево поиска – Red-Black Tree сохраняет свойства Binary Search Tree (левое поддерево содержит меньшие ключи, правое — большие).

Правила красно-чёрного дерева:

1) Цвет узла **чёрный** или **красный**

2) Корень всегда **чёрный**

3) Листья всегда **чёрные** и null

4) Каждый **красный** узел должен иметь 2 **чёрных** узла, **чёрный** может иметь **чёрных** сыновей.

5) Пути от узла к его листьям должны содержать одинаковое количество **чёрных** узлов (**чёрную высоту**)

Балансировка красно-чёрного дерева

Балансировка дерева – операции, благодаря которым дерево гарантированно сохраняет высот O(log n)

Вставка узла в красно-чёрное дерево

Новый элемент, вставляемый в красно-чёрное дерево по умолчанию красный, так как его вставка в среднем ломает меньшее количество правил, чем при вставке чёрного, которая гарантировано меняет чёрную высоту.

5 возможных случаев при вставке нового элемента:

1) Новый корень
2) Красный дядя, дед не корень
3) Красный дядя, дед корень
4) Дядя чёрный, отец и дед зигзагом
5) Дядя чёрный, отец и дед на одной линии

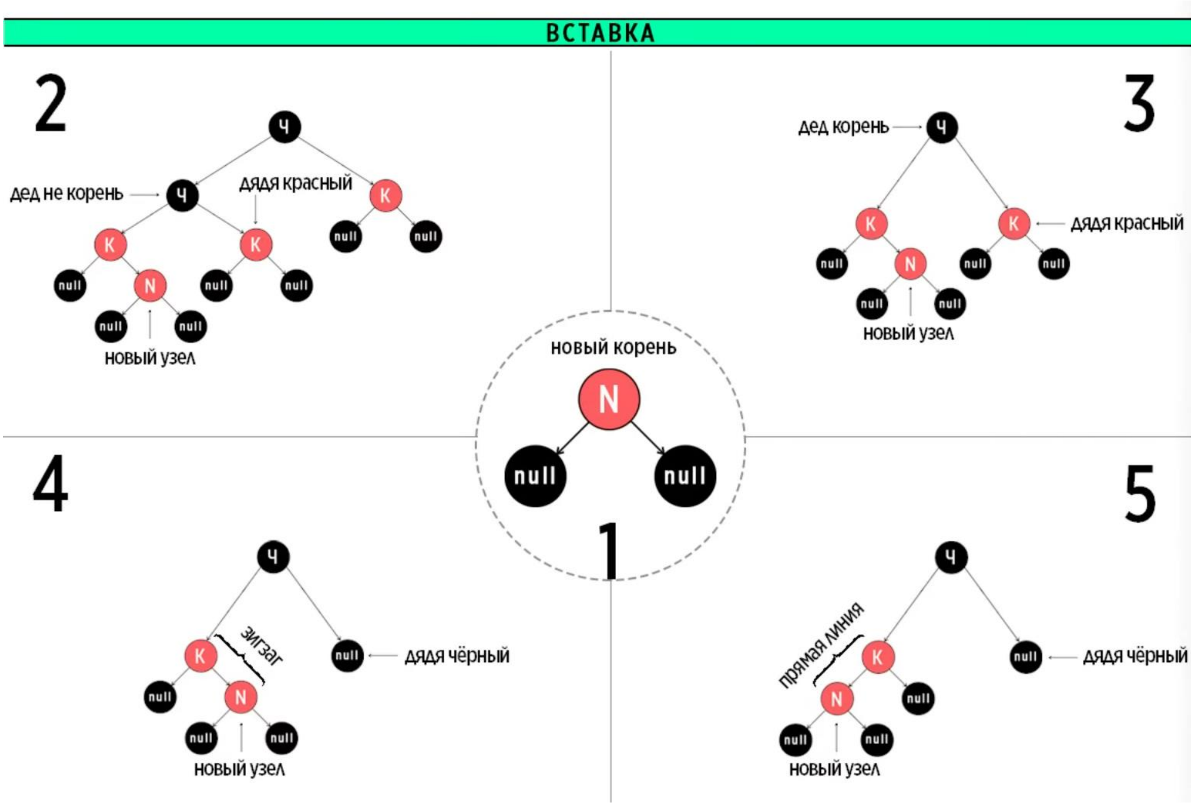


Рисунок 1 – Все возможные нарушения правил, при вставке красного узла

В случае 1 перекрашиваем корень на чёрный.

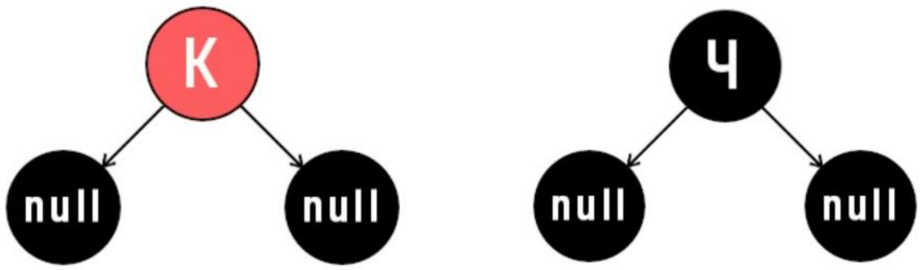


Рисунок 2 – Способ балансировки при случае 1

В случае 2 красим перекрашиваем дядю, отца и деда.

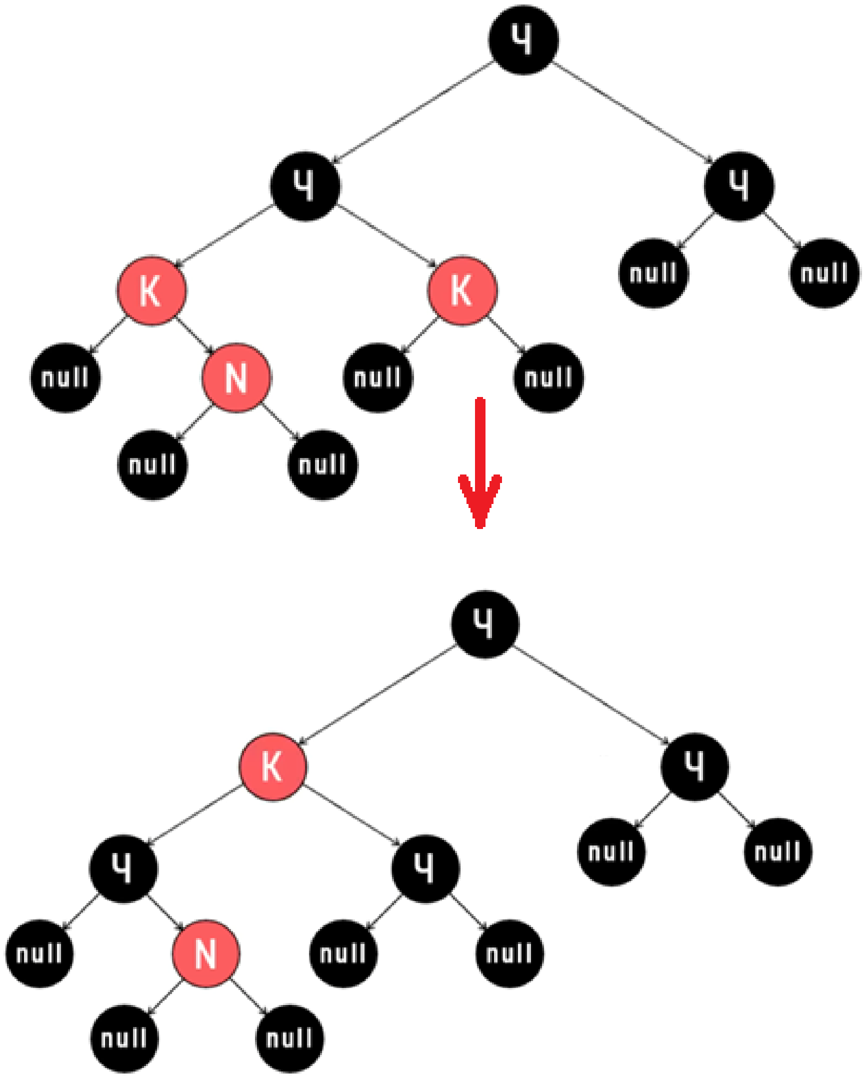


Рисунок 3 - Способ балансировки при случае 2

В случае 3 перекрашиваем отца и дядю, а дедушку не трогаем.

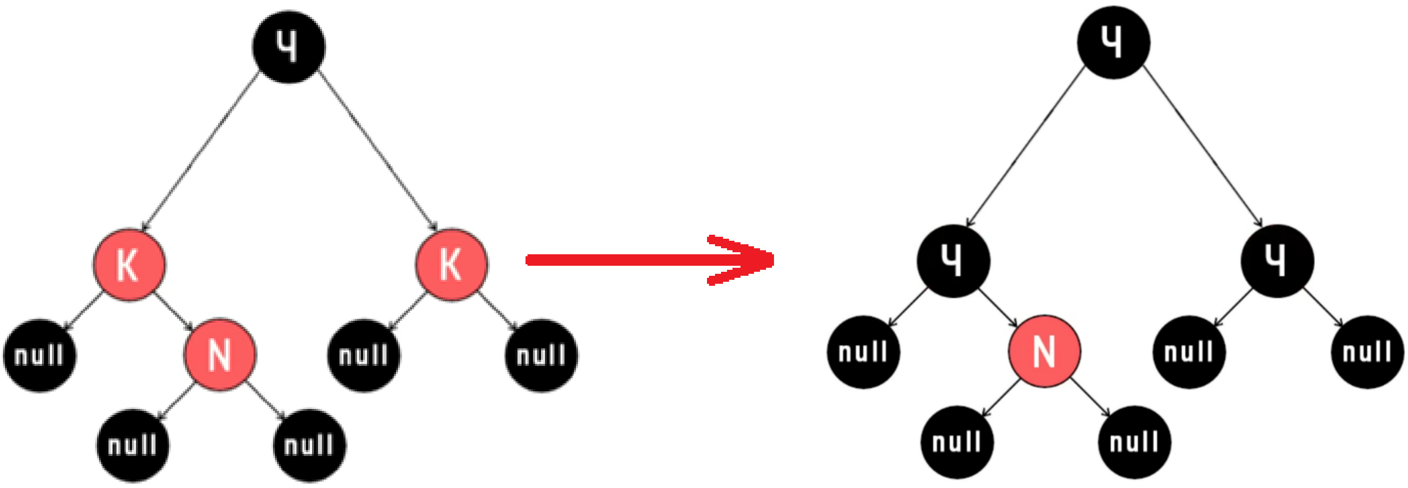


Рисунок 4 - Способ балансировки при случае 3

В случае 4 делаем левый поворот относительно отца и переходим к 5 случаю.

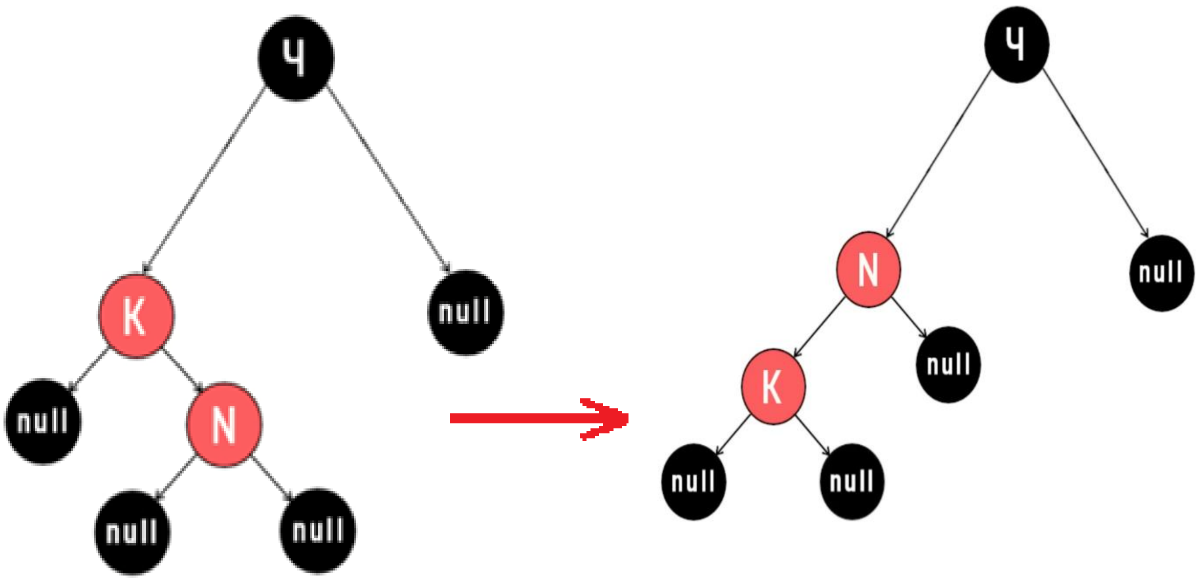


Рисунок 5 - Способ балансировки при случае 4

В случае 5 перекрашиваем отца и деда и делаем правый поворот относительно деда.

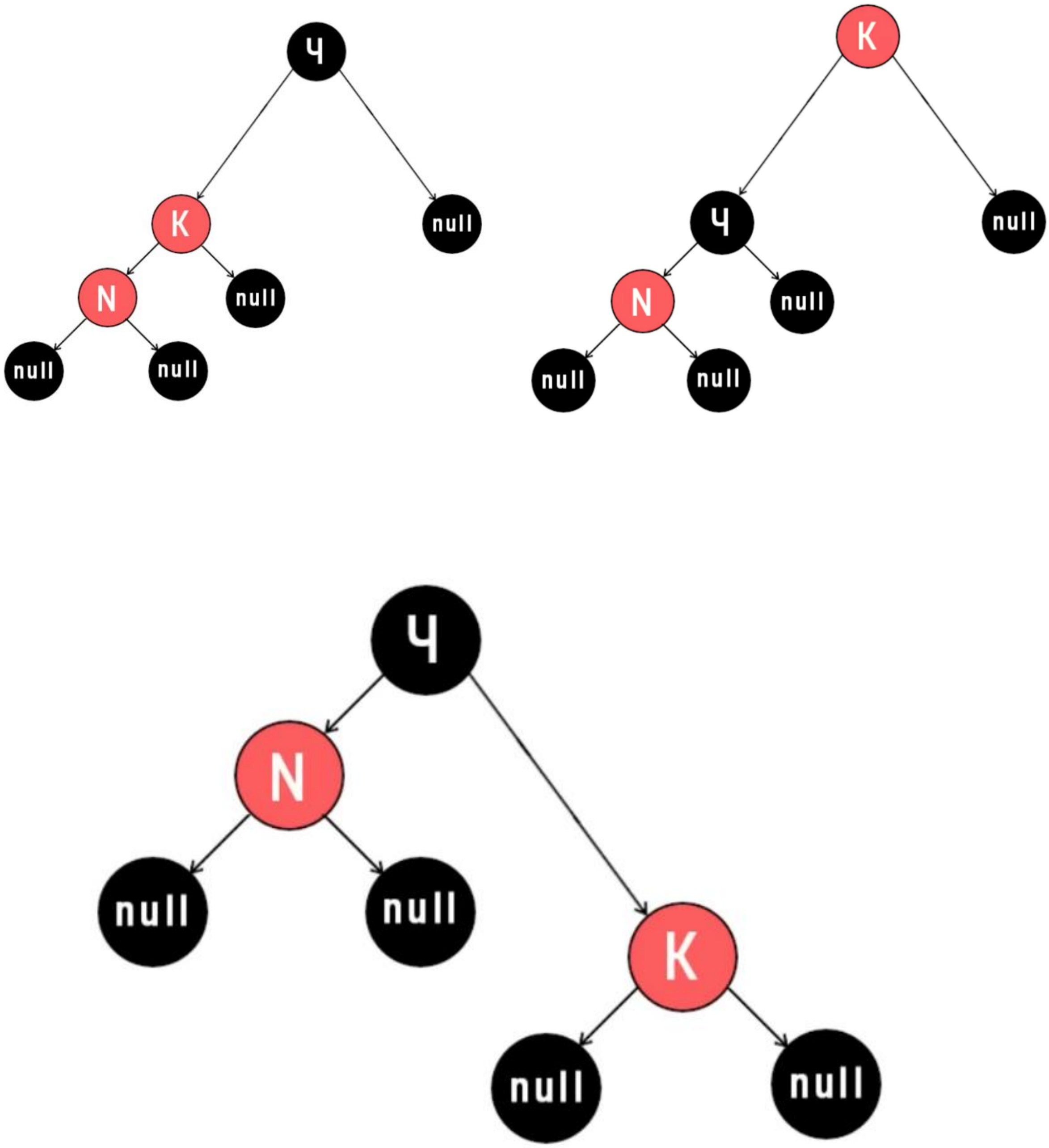


Рисунок 6 - Способ балансировки при случае 5

Удаление узлов из красно-чёрного дерева

Удаление происходит если у узла 1 ребёнок или нет детей

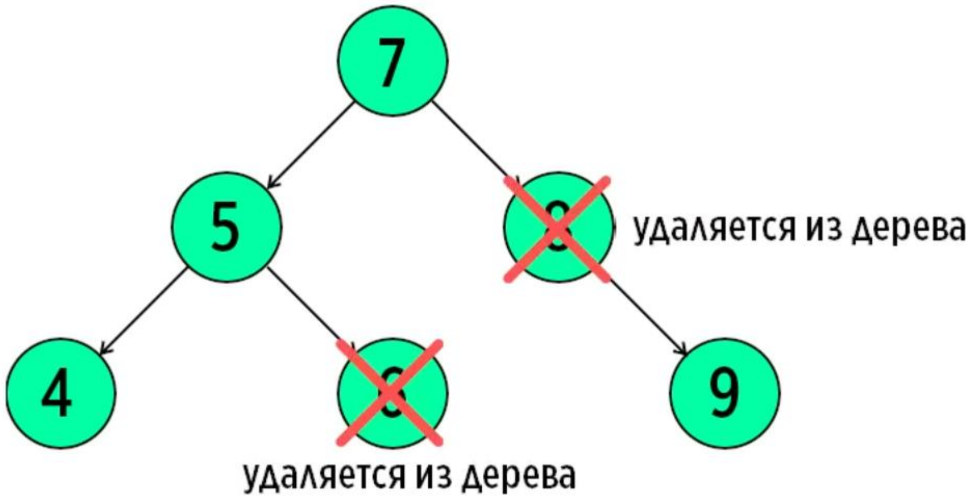


Рисунок 7 – Случае, когда мы фактически удаляем узел

Если узел имеет двух детей, то мы заменяем его максимальным узлом по левой ветке, или минимальным по правой ветке. И только после этого удаляем узел с минимальным или максимальным числом.

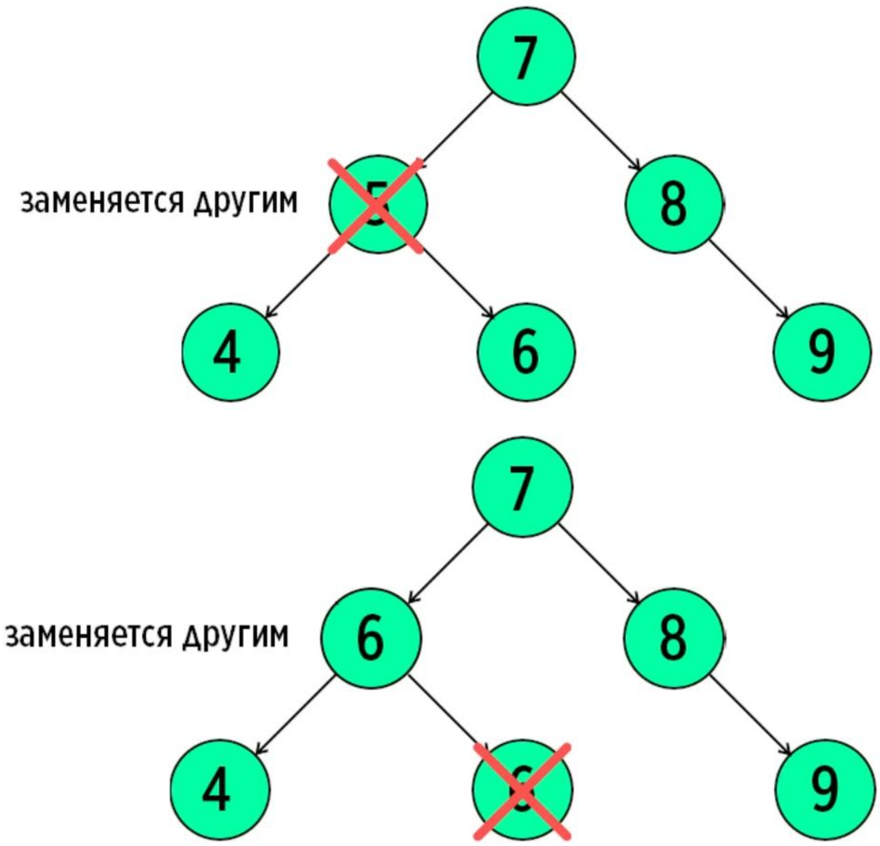


Рисунок 8 – Способ “удаления” узла с двумя детьми

Если физически удаляемый узел красный, то у него ноль детей, поэтому мы можем его просто удалить.

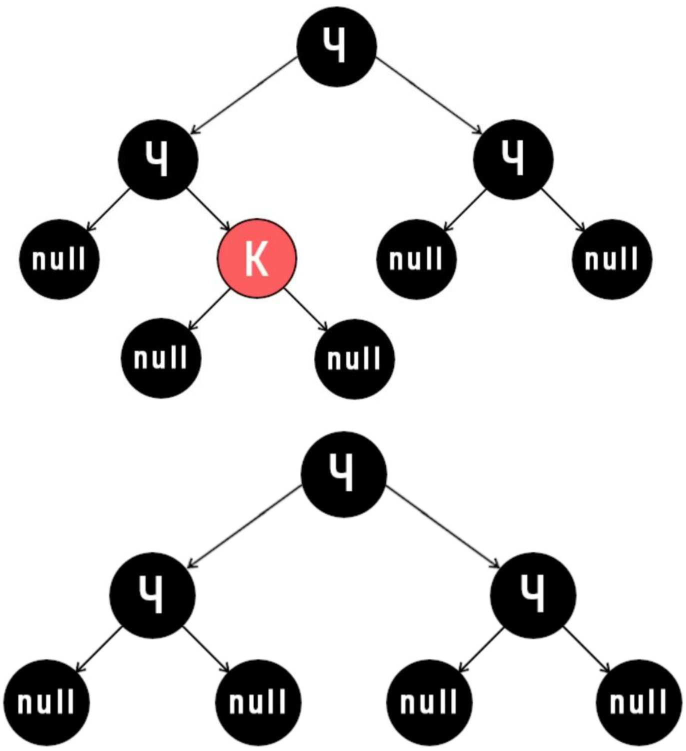


Рисунок 9 – Способ удаления красного узла

Если мы удаляем чёрный узел, то чёрная высота стороны уменьшится на 1. При удалении чёрного узла с красным ребёнком

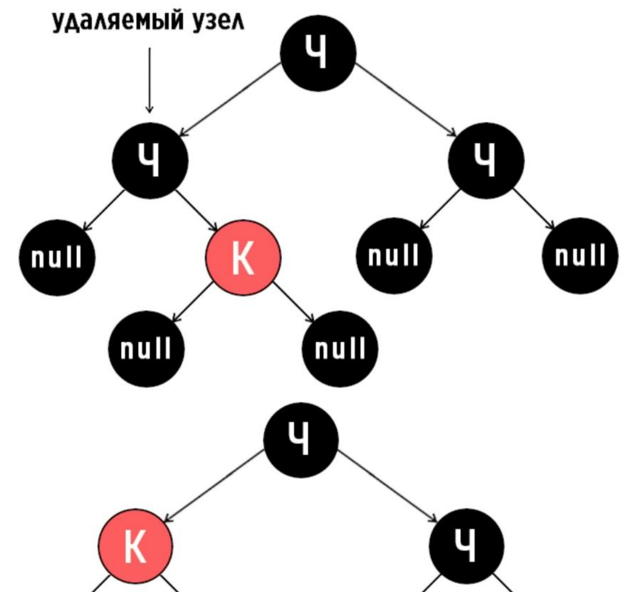


Рисунок 10 – Удаление чёрного узла с красным ребёнком

Чтобы сбалансировать получившиеся дерево, мы перекрасим красный пришедший узел в чёрный цвет.

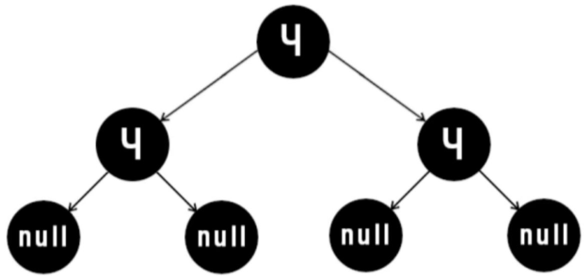


Рисунок 11 – Перекрашиваем красный узел в чёрный, ради баланса

Если ребёнок у удаляемого узла чёрный, тогда мы смотрим на брата этого узла. Есть два варианта:

1) Он чёрный и дети неизвестного цвета

2) Он красный и дети чёрного цвета, а родитель тогда чёрный

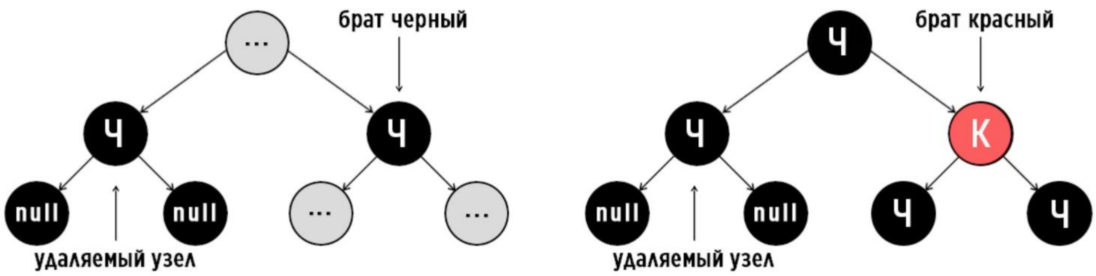


Рисунок 12 – Случаи, когда удаляемый чёрный узел имеет чёрного ребёнка

Если брат чёрный, тогда есть 4 варианта:

1.1) 2 ребёнка красные
1.2) Левый ребёнок чёрный, а правый красный
1.3) Нет детей
1.4) Левый ребёнок красный, а правый чёрный

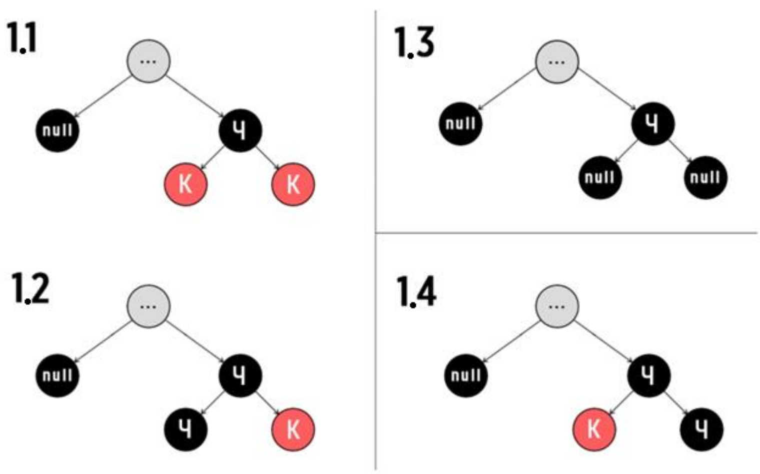


Рисунок 13 – Все возможные случае, когда брат чёрный

В случае 1.1 и 1.2 балансировка выполняется одинаково. Перекрашиваем брата в цвет родителя. Перекрашиваем родителя и красного ребёнка в чёрный и делаем левый поворот относительно родительского узла.

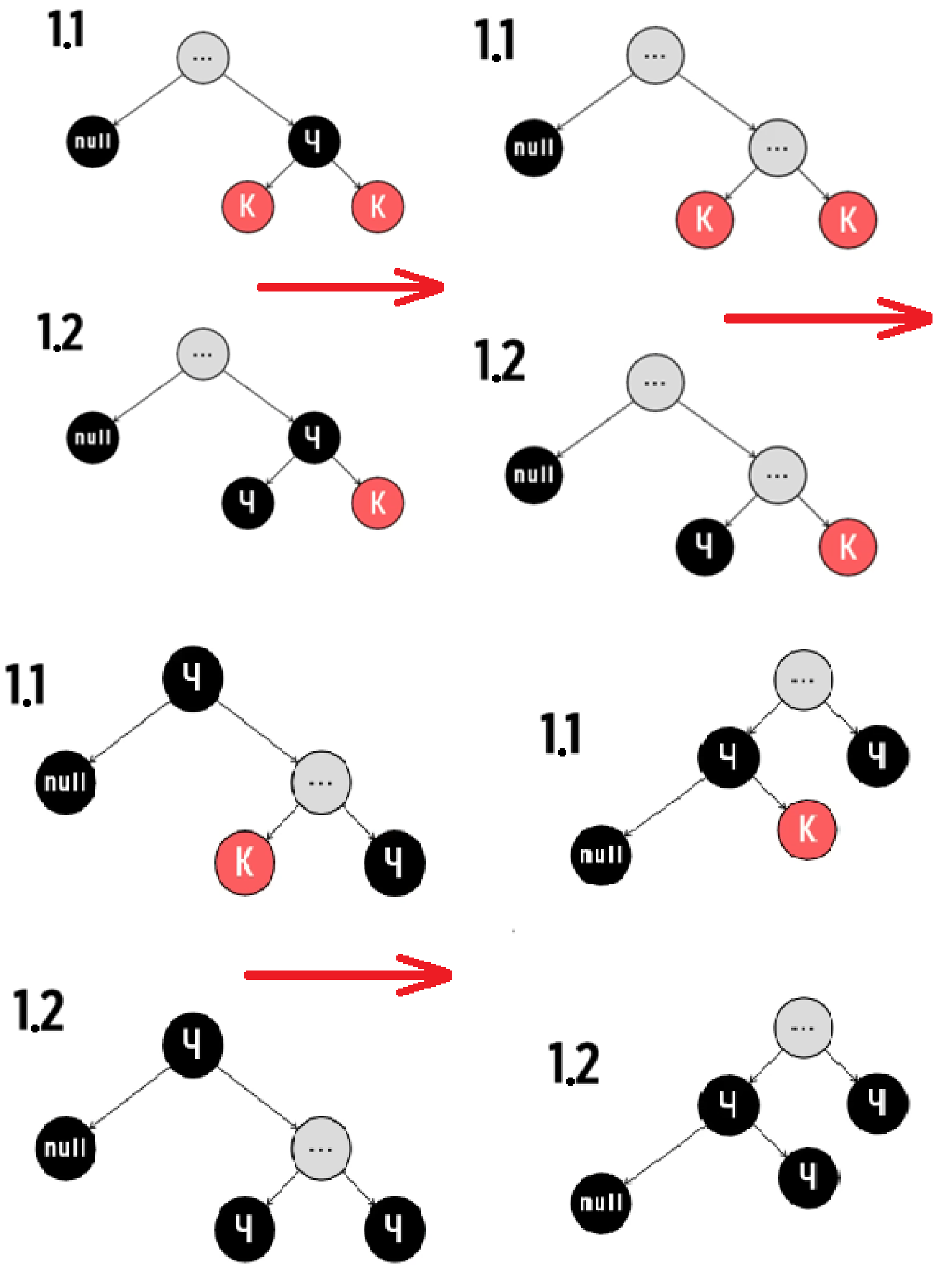


Рисунок 14 – Балансировка дерева в случаях 1.1 и 1.2

В случае 1.4, перекрашиваем брата в красный цвет и левого ребёнка в чёрный. Далее совершаем правый поворот относительно брата и переходим к последней части случая 1.2.

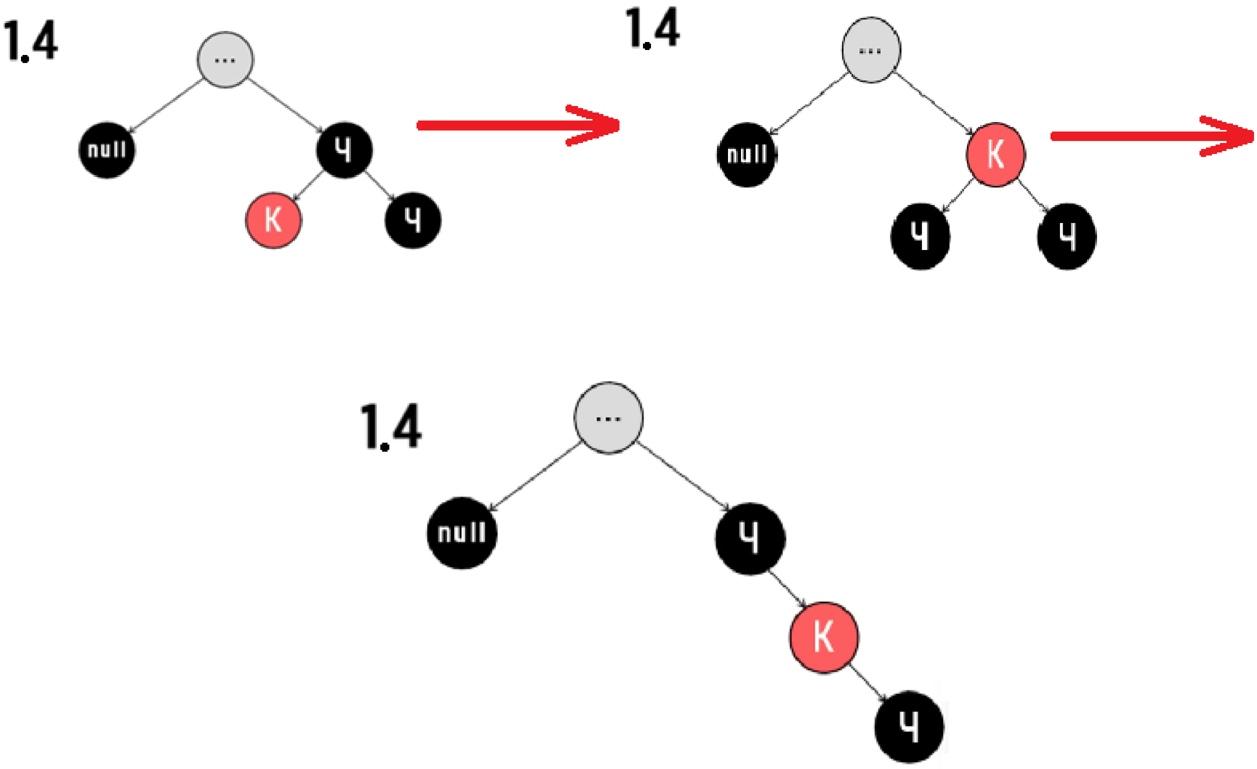


Рисунок 15 - Балансировка дерева в случае 1.4

В случае 1.3 есть 3 возможных случая

1.3.1) Отец чёрный корень
1.3.2) Отец красный не корень
1.3.3) Отец чёрный не корень

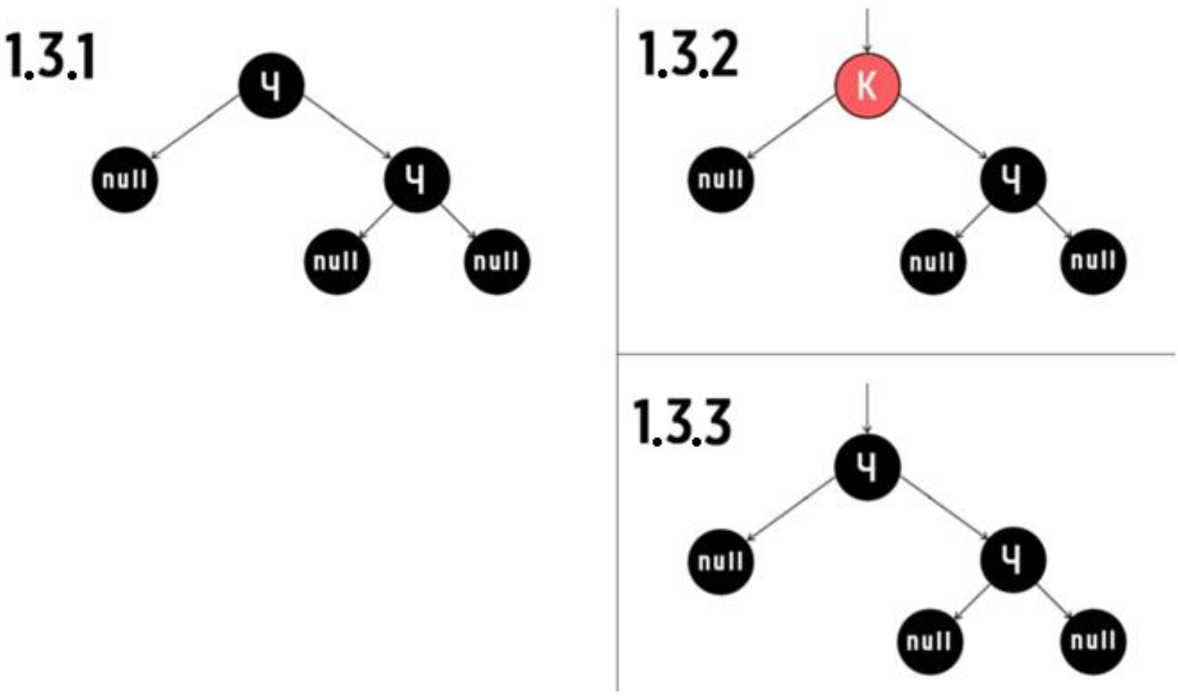


Рисунок 16 – Все возможные случае, когда у чёрного брата нет детей

В случае 1.3.1 красим брата в красный

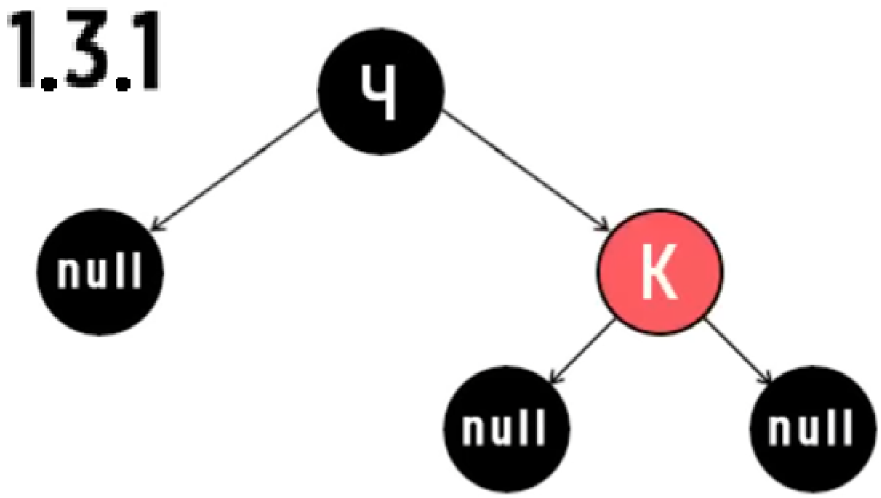


Рисунок 17 - Балансировка дерева в случае 1.3.1

В случае 1.3.2 красим брата в красный, а родителя в чёрный

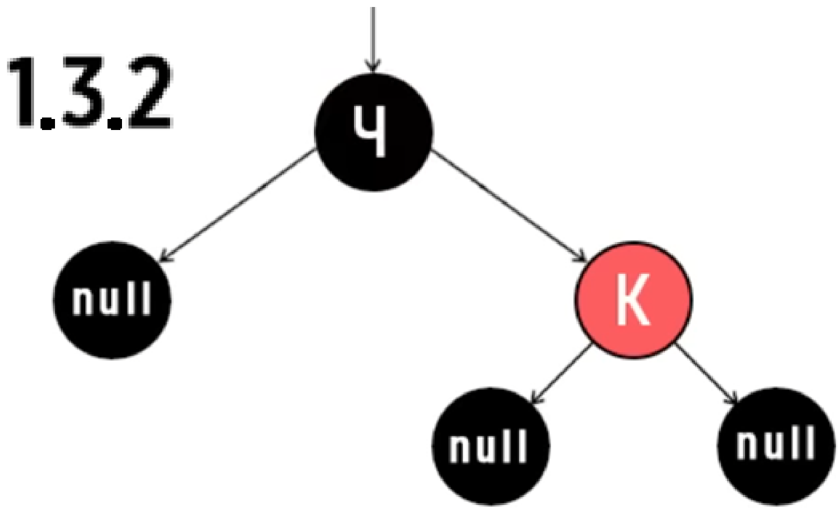


Рисунок 18 - Балансировка дерева в случае 1.3.2

В случае 1.3.3 родителя перекрашиваем в красный и совершаем левый поворот относительного него. Если возникает другое нарушение правила, то балансировка происходит по одному из случаев описанному выше.

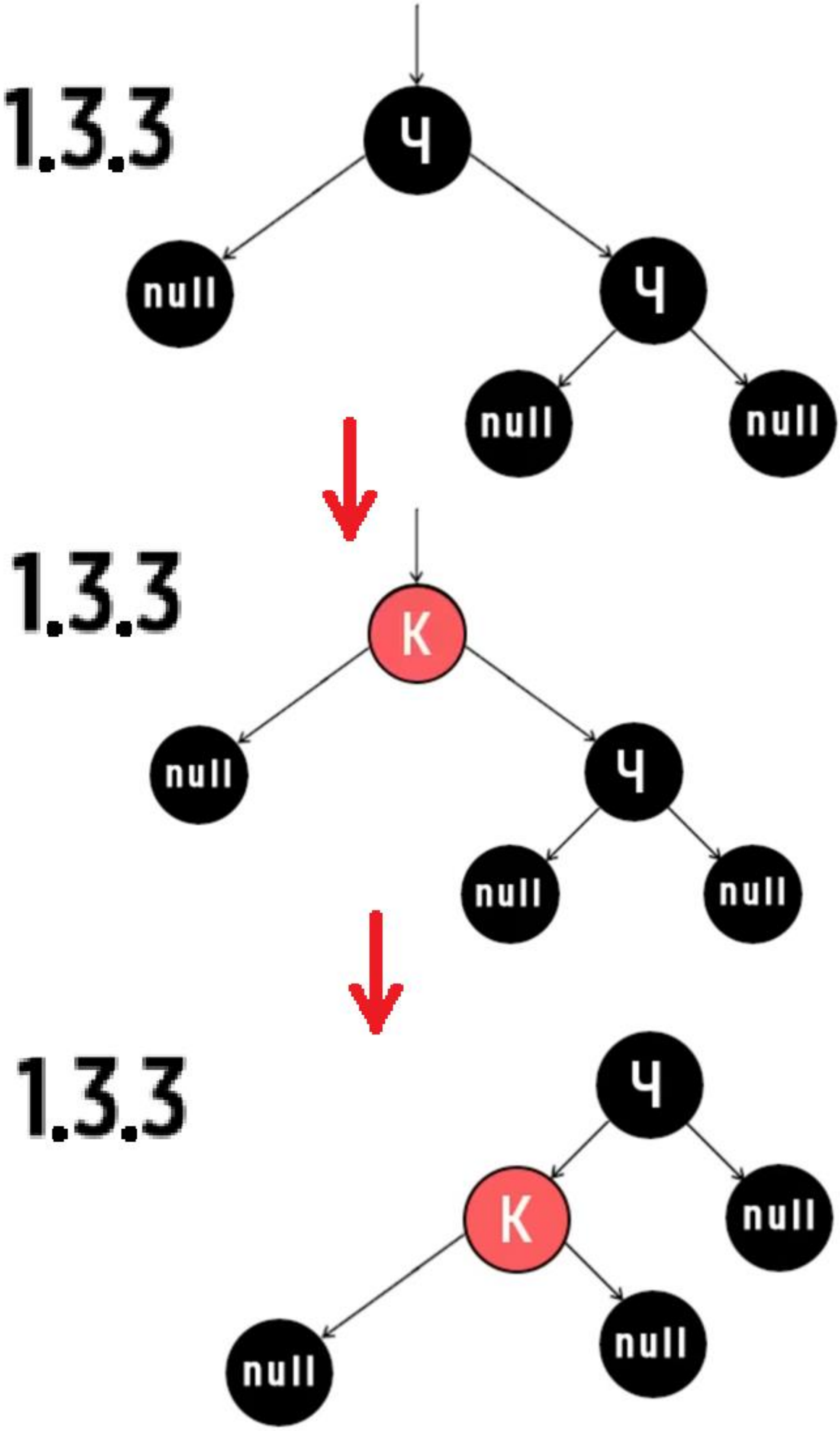


Рисунок 19 - Балансировка дерева в случае 1.3.3

В случае 2 красим родителя в красный, а брата в чёрный и делаем левый поворот относительно родителя

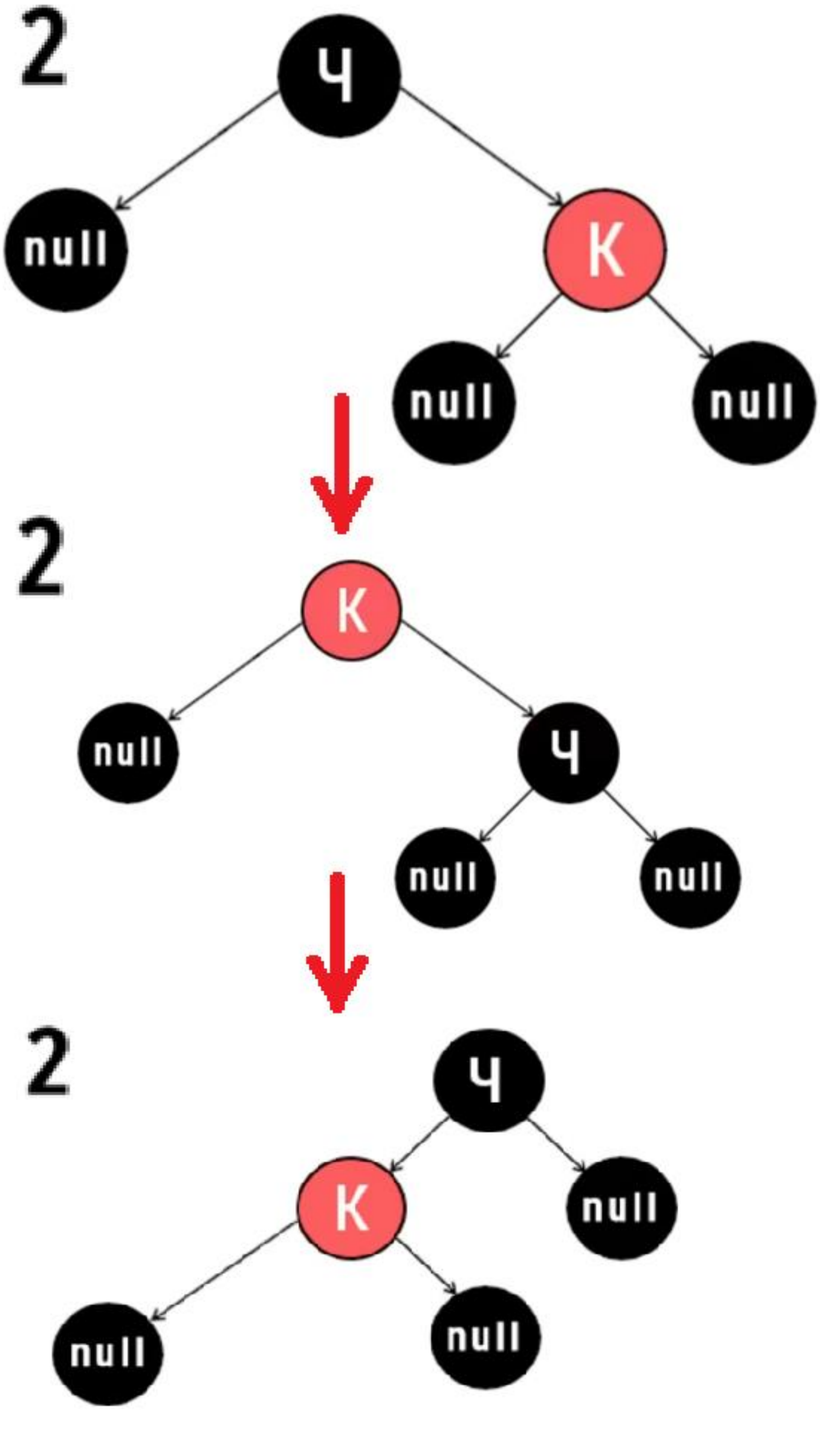


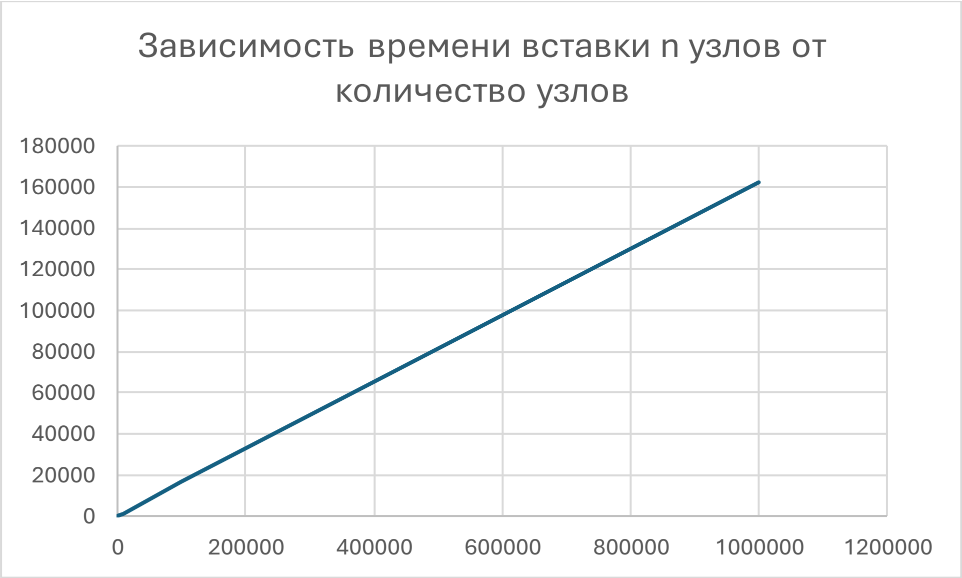
Рисунок 20 – Балансировка дерева, в случае если брат красный

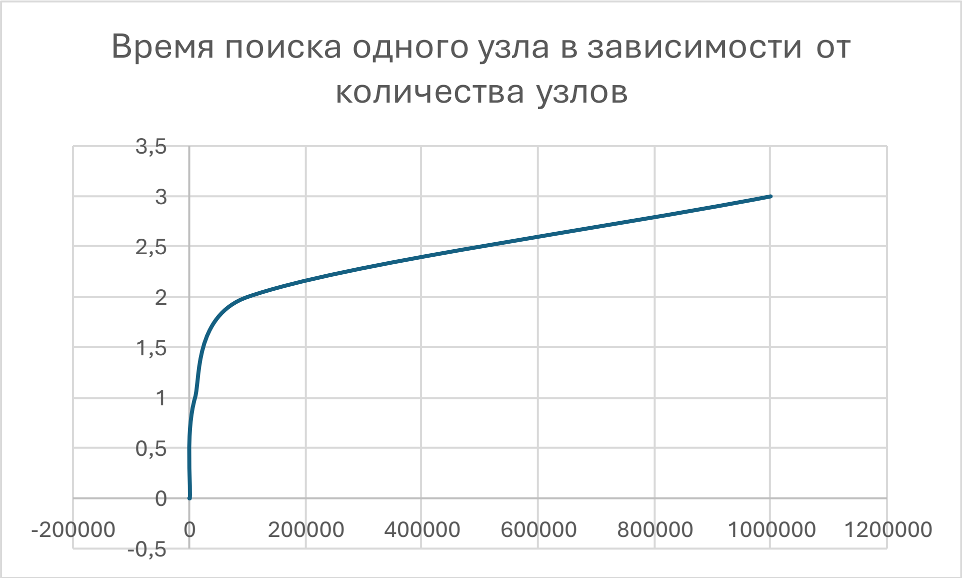
Тесты

Реализуем на C++ данную структуру и произведём тесты скорости работы данной структуры.

Результаты тестов приведены в таблице

Размер n (узлов)	Вставка n узлов в дерево (мкс)	Поиск узла (мкс)	Удаление узла (мкс)
100	24	0	1
1000	199	0	2
10000	1367	1	2
100000	16869	2	4
1000000	162227	3	4





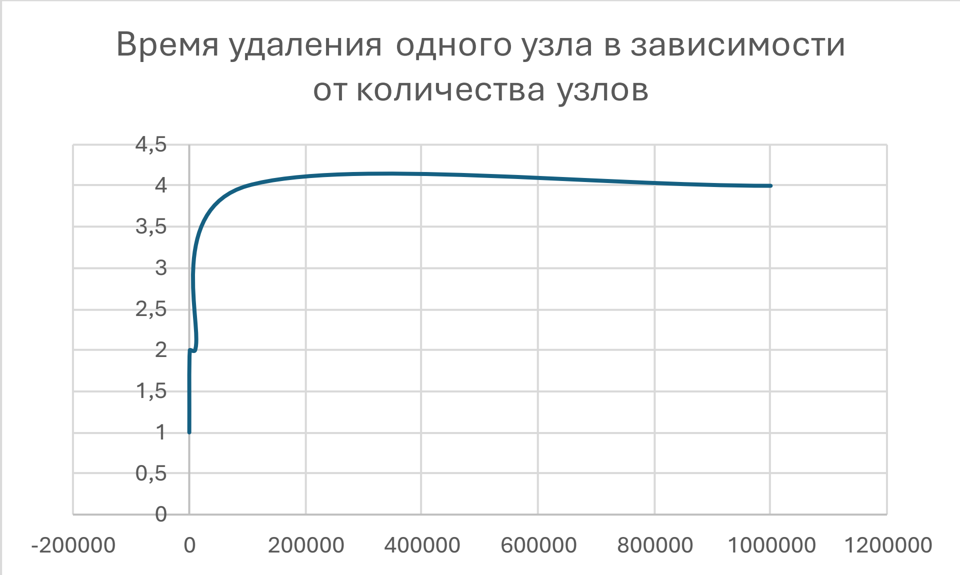


Рисунок 21 – Графики зависимости скорости работы структуры от количества узлов

Как можно заметить скорость поиска и удаления имеет логарифмический характер.

С другой стороны вставка имеет линейный характер, хотя теоретически имеет сложность O(log n). Скорее всего это связано с тем, что запись производилась с помощью списка, и поэтому скорость вставки зависит от скорости работы списка, а не структуры.

Заключение

В ходе работы были рассмотрены ключевые аспекты красно-чёрных деревьев: их свойства, алгоритмы вставки и удаления. Анализ показал, что Red-Black Tree являются мощным инструментом для эффективного хранения и обработки данных, что подтверждается их широким использованием в современных вычислительных системах.

Список литературы

1. **Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К.** Алгоритмы: построение и анализ. — 3-е изд. — М.: Вильямс, 2022. — 1328 с.
2. **Седжвик, Р.** Алгоритмы на C++. — М.: Диалектика, 2020. — 1056 с.
3. **Wirth, N.** Algorithms and Data Structures. — Prentice Hall, 1985. — 288 p.
4. **Okasaki, C.** Purely Functional Data Structures. — Cambridge University Press, 1999. — 232 p.
5. **Weiss, M. A.** Data Structures and Algorithm Analysis in C++. — 4th ed. — Pearson, 2013. — 624 p.
6. **Knuth, D. E.** The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching. — 2nd ed. — Addison-Wesley, 1998. — 800 p.

Приложение 1

```
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <cassert>
#include <queue>
#include <vector>
#include <iostream>

enum Color {
  BLACK,
  RED
};

struct Node {
  int   key;
  int   val;
  Color  color;
  Node   *parent;
  Node   *left;
  Node   *right;

  Node():parent(nullptr),left(nullptr),right(nullptr),color(RED){}
  ~Node()
  {
      if (left != nullptr)
        delete left;
      if (right != nullptr)
        delete right;
    }
```

```
};

class Tree {
    public:
        Tree():root(nullptr),size(0){};
        ~Tree();
        void    insert(int &key, int &val);
        bool    remove(const int &key);
        bool    search(const int &key, int &val) const;
        void    clear();
        void    printTree() const;
        int     getSize() const;
    private:
        int   size;
        Node *root;

        int     cmp(const int &a, const int &b) const;
        void    leftRotate(Node *node);
        void    rightRotate(Node *node);
        void    removeNode(Node *node);
};

Tree::~Tree()
{
    if (root != nullptr)
        delete root;
}

void Tree::insert(int &key, int &val)
{
```

```
Node *node = new Node; // Заменил auto
node->key = key;
node->val = val;

if (root == nullptr) {
    root = node;
    node->color = BLACK;
    this->size++;
    return;
}

Node *curr = root;
while (curr->left != nullptr | curr->right != nullptr)
{
    if (cmp(key, curr->key) == -1)
        curr = curr->left;
    else
        curr = curr->right;
}

node->parent = curr;
if (cmp(key, curr->key) == -1)
    curr->left = node;
else
    curr->right = node;

while (curr->color == RED && curr->parent != nullptr)
{
    bool isRight = (curr == curr->parent->right);
        Node *uncle;
```

```
    if (isRight)
        uncle = curr->parent->left;
    else
        uncle = curr->parent->right;

    if (uncle == nullptr) {
        curr->color = BLACK;
        curr->parent->color = RED;
        if (uncle == curr->parent->right) {
          rightRotate(curr->parent);
        }else {
          leftRotate(curr->parent);
        }
        break;
    }else if (uncle->color == RED) {
    curr->color = BLACK;
    uncle->color = BLACK;
      curr->parent->color = RED;
    curr = curr->parent;
  }else {
    curr->color = BLACK;
    curr->parent->color = RED;

    if (isRight) {
      if (node == curr->left) {
        rightRotate(curr);
        curr = node;
      }
      leftRotate(curr->parent);
    }else {
```

```
            if (node == curr->right) {
                leftRotate(curr);
                curr = node;
            }
            rightRotate(curr->parent);
        }
    }
        root->color = BLACK;
    }

    this->size++;
}

bool Tree::remove(const int &key)
{
    Node *curr = root; // Заменил auto
    while (curr->left != nullptr | curr->right != nullptr)
    {
        if (curr->key == key)
            break;

        if (cmp(key, curr->key) >= 0)
            curr = curr->right;
        else
            curr = curr->left;
    }
    if (curr->key != key)
        return 0;

    this->removeNode(curr);
```

```
    (this->size)--;
        return 1;
}

void Tree::removeNode(Node *node)
{
    if (node->color == RED) {
        if (node->left != nullptr && node->right != nullptr) {
                    Node *successor = node->right; // Заменил auto
                    while (successor->left != nullptr)
                        successor = successor->left;
                    node->key = successor->key;
                    node->val = successor->val;
                    this->removeNode(successor);
            }else if (node->left != nullptr) {
                    node->key = node->left->key;
                    node->val = node->left->val;
                    node->color = node->left->color;
                this->removeNode(node->left);
            }else if (node->right != nullptr) {
                    node->key = node->right->key;
                    node->val = node->right->val;
                    node->color = node->right->color;
                    this->removeNode(node->right);
            }else {
                    if (node->parent == nullptr) {
                        free(node);
                        root = nullptr;
                return;
                    }
```

```
            if (node->parent->left == node)
                node->parent->left = nullptr;
            else
                    node->parent->right = nullptr;

        free(node);
    }
}else {
        if (node->left != nullptr && node->right != nullptr) {
            Node *successor = node->right; // Заменил auto
                while (successor->left != nullptr)
                    successor = successor->left;
                node->key = successor->key;
                node->val = successor->val;
                this->removeNode(successor);
        }else if (node->left != nullptr) {
                node->key = node->left->key;
                node->val = node->left->val;
                this->removeNode(node->left);
        }else if (node->right != nullptr) {
                node->key = node->right->key;
                node->val = node->right->val;
                this->removeNode(node->right);
        }else {
                if (node->parent == nullptr) {
                    free(node);
                    root = nullptr;
                    return;
        }
```

```
}

                if (node->parent->left == node) {
                    node->parent->left = nullptr;
                    if (node->parent->right != nullptr
                    && node->parent->right->color == RED) {
                        node->parent->right->color = BLACK;
                        leftRotate(node->parent);
                    }
                }else {
                  node->parent->right = nullptr;
                    if (node->parent->left != nullptr
                    && node->parent->left->color == RED) {
                        node->parent->left->color = BLACK;
                        rightRotate(node->parent);
                    }
                }

                if (node->parent->left == nullptr
                  && node->parent->right == nullptr
                  && node->parent->parent != nullptr) {
                    rightRotate(node->parent->parent);
                }

                free(node);
            }
    }
}

bool Tree::search(const int &key, int &val) const
{
```

```
    Node *curr = root; // Заменил auto
    while (curr->left != nullptr || curr->right != nullptr)
    {
        if (curr->key == key) {
            val = curr->val;
            break;
        }

        if (cmp(key, curr->key) < 0)
            curr = curr->left;
        else
            curr = curr->right;
    }

    if (curr->key == key){
        val = curr->val;
        return 1;
    }
    return 0;
}

int Tree::cmp(const int &a, const int &b) const
{
    if (a < b) return -1;
    if (a == b) return 0;
    return 1;
}

void Tree::leftRotate(Node *node)
{
```

```
    assert( node->right != nullptr);
    Node *temp = node->right; // Заменил auto

    node->right = temp->left;
    if (temp->left != nullptr)
        temp->left->parent = node;
    temp->left = node;
    temp->parent = node->parent;
    node->parent = temp;

    if (root == node) {
        root = temp;
        return;
    }
    if (temp->parent->left == node)
            temp->parent->left = temp;
        else
            temp->parent->right = temp;
}

void Tree::rightRotate(Node *node)
{
    assert( node->left != nullptr);
    Node *temp = node->left; // Заменил auto

    node->left = temp->right;
    if (temp->right != nullptr)
            temp->right->parent = node;
    temp->right = node;
    temp->parent = node->parent;
```

```
    node->parent = temp;

    if (root == node) {
        root = temp;
        return;
    }
    if (temp->parent->left == node)
        temp->parent->left = temp;
    else
            temp->parent->right = temp;
}

void Tree::printTree() const
{
    std::cout << "----------------" << std::endl;
    std::queue<Node*> q;
    q.push(root);
    while (!q.empty())
    {
        Node *top = q.front(); // Заменил auto
        q.pop();
        if (top->color == RED)
            std::cout << "R" ;
        else
            std::cout << "B" ;
        std::cout << top->key;
        std::cout << " ";
        if (top->left != nullptr) {
            q.push(top->left);
            if (top->left->color == RED)
```

```
            std::cout << "R" ;
        else
            std::cout << "B" ;
        std::cout << top->left->key;
        std::cout << " ";
    }else {
        std::cout << "NULL" << " ";
    }
    if (top->right != nullptr) {
        q.push(top->right);
        if (top->right->color == RED)
            std::cout << "R" ;
        else
            std::cout << "B" ;
        std::cout << top->right->key;
        std::cout << " ";
    }else {
        std::cout << "NULL" << " ";
    }
    std::cout << std::endl;
  }
  std::cout << std::endl;
  std::cout << "----------------" << std::endl;
}

int Tree::getSize()  const
{
  return this->size;
}
```

```
void Tree::clear()
{
    delete this->root;
    this->root = nullptr;
    this->size = 0;
}
```

Приложение 2

```
#include <iostream>
#include <chrono>
#include "Red-Black-Tea_modify.h"

#include <vector>
#include <unordered_set>
#include <random>
#include <algorithm>
#include <ctime>

std::vector<int> generateUniqueNumbers(int n) {
    std::vector<int> arr;

    for (int i = 0; i < n; i++){
        arr.push_back(i);
    }

    std::vector<int> result;
    while (arr.size() > 0)
    {
        std::mt19937 gen(time(0));
        std::uniform_int_distribution<size_t> dist(0, arr.size() - 1);

        int arr_index = dist(gen);
        result.push_back(arr[arr_index]);
        arr.erase(arr.begin() + arr_index);
    }

    return result;
```

```
}

int main()
{
  int n;
  std::cout << "Insert Tree size: ";
  std::cin >> n;

  Tree t;
  int key;
  int val;

  auto start = std::chrono::high_resolution_clock::now();

  std::vector<int> Massive = generateUniqueNumbers(n);

  auto end = std::chrono::high_resolution_clock::now();

  auto duration = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(end - start);
  std::cout << "Time taken by generate Unique Numbers: " << duration.count() << " microseconds" << std::endl;

  start = std::chrono::high_resolution_clock::now();
  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    key = i;
    val = i;
    t.insert(key, val);
  }
```

```
  end = std::chrono::high_resolution_clock::now();
}

  duration = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(end - start);
  std::cout << "Time taken by generating Tree: " << duration.count() << "
microseconds" << std::endl;

  start = std::chrono::high_resolution_clock::now();
  key = 1;
  val = -1;
  if (t.search(key, val)) {
    end = std::chrono::high_resolution_clock::now();
    std::cout<<"Search result: "<<val<<std::endl;
  }
    duration = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(end - start);
  std::cout << "Time taken by searching key: " << duration.count() << "
microseconds" << std::endl;

  key = n-1;

  start = std::chrono::high_resolution_clock::now();

  t.remove(key);

  end = std::chrono::high_resolution_clock::now();

  duration = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(end - start);
  std::cout << "Time taken by removing key: " << duration.count() << "
microseconds" << std::endl;

  return 0;
}
```