Číselné obory

Obsah

1 Úvod

Matematika je jazyk, který umožňojue popisovat svět kolem. Základním stavebním kamenem tohoto jazyka jsou čísla. Čísla však nejsou jen jednoduché symboly. Představují komplexní systém, který se vyvíjel po tisíce let, aby vyhověl rostoucím potřebám lidstva.

1.1 Číselný obor

Číselným oborem nebo **číselnou množinou** se rozumí množina, na které jsou definovány bez omezení základní početní operace (sčítání, odčítání, ...) - číselný obor je vzhledem k těmto operacím uzavřený. **Uzavřenost (úplnost)** číselného oboru vzhledem k početní operaci znamená, že výsledkem početní operace mezi dvěma libovolnými prvky z příslušné číselné množiny je opět číslo, které také patří do této číselné množiny. Množina všech čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení se nazývá číselný obor.

- $\mathbb{N}$ - slouží k počítání a vyjádření množství fyzických objektů.
- $\mathbb{Z}$ - umožňuje vyjádřit dluhy a směr na ose (např. teplota), přesahuje tak sféru fyzických objektů.
- $\mathbb{Q}$ - je nezbytné pro měření, dělení a vyjádření necelých částí celku.
- $\mathbb{R}$ - dává kompletní a souvislý systém pro práci s fyzikálními veličinami, jako je čas, vzdálenost a hmotnost.

Přičemž platí:

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Studium číselných oborů je tedy zásadní, protože dává jasný přehled o tom, jaká čísla lze v dané situaci použít a jaké operace s nimi lze bez problémů provádět.

1.2 Rozvoj číselných oborů

Historie čísel je spjata s praktickými potřebami. Prvními čísly, která lidé používali, byla přirozená čísla ($\mathbb{N}$). Sloužila k počítání a určování množství, ať už šlo o ovce ve stádě nebo dny v kalendáři. Ale brzy se objevily složitější problémy. Co když je třeba vyjádřit dluh, nebo teplotu pod bodem mrazu? Proto lidé zavedli záporná čísla a nulu, čímž vznikl obor celých čísel ($\mathbb{Z}$).

S rozvojem obchodu, stavitelství a vědy bylo nezbytné dělit a měřit s větší přesností. Jak vyjádřit polovinu chleba nebo čtvrtinu pozemku? Pro tento účel byly zavedeny **zlomky** a **desetinná čísla**, které tvoří obor racionálních čísel ($\mathbb{Q}$).

Avšak ani racionální čísla nebyla dostatečná. Řečtí matematici objevili, že existují délky, které nelze vyjádřit jako zlomek. Jedním z prvních a nejznámějších příkladů je délka přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, kde obě odvěsny mají délku 1. Délka přepony je $\sqrt{2}$, což je číslo, které nelze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel. To vedlo ke vzniku iracionálních čísel ($\mathbb{I}$). Sjednocením racionálních a iracionálních čísel vznikl obor reálných čísel ($\mathbb{R}$), který pokrývá celou číselnou osu bez jakýchkoli "mezer".

1.3 Číslo

Číslo je matematická entita reprezentující určitou hodnotu (kvantitu). Jedná o se způsob vyjádření a zaznamenání přesně definovaného množství. Čísla jsou zapisována pomocí znaků, kterým se říká číslice. Pomocí správné kombinace číslic je možné zaznamenat (zapsat) libovolnou číselnou hodnotu. S čísly lze vykonávat určité operace ve kterých mají tato čísla různé vlastnosti.

1.4 Obor přirozených čísel

Za přirozené číslo se pokládá každé kladné celé číslo $(1 : \infty)$. Množina přirozených čísel se označuje velkým písmenem $\mathbb{N}$od slova Natural.

V některých případech je třeba zahrnout do přirozených čísel také číslo nula, například počet prvků prázdné množiny. Proto množina všech přirozených čísel rozšířenou o nulu se označuje jako $N_0 = N \subset 0$.

Přirozená čísla se využívají ve dvou významech:

- Přirozenými čísly se vyjadřují počty prvků množin - Kolik?
- Přirozenými čísly se vyjadřuje pořadí prvků při jejich uspořádání - Kolikátý?

2 Aritmetika

Aritmetika je nejstarší a nejzákladnější odvětví matematiky, které se zabývá počítáním a základními operacemi s čísly. Tyto operace umožňují řešit problémy od jednoduchého sčítání až po komplexní vědecké výpočty. Aritmetika je jazyk, který pomáhá provádět výpočty a pochopit, jak se čísla chovají.

2.1 Čtyři základní operace

Aritmetika je založena na čtyřech hlavních operacích: sčítání, odčítání, násobení a dělení.

- **Sčítání (+)** - Operace, která spojuje dvě nebo více hodnot (sčítance) do jedné hodnoty (součet).
- **Odčítání (-)** - Operace, která určuje rozdíl mezi dvěma čísly. Jedná se o opačnou operaci ke sčítání.
- **Násobení (·)** - Operace opakovaného sčítání.
- **Dělení (÷)** - Operace opakovaného odčítání. Jedná se o opačnou operaci k násobení.

2.2 Operace sčítání

Operace součet neboli **sčítání** je jednou ze čtyř základních aritmetických operací. Jejím účelem je spojit dvě nebo více čísel **nazývaných sčítanci** do jedné výsledné hodnoty, která se označuje jako **součet**. Operace součet se zapisuje pomocí symbolu "+":

$$A + B = C$$

Sčítání se řídí několika důležitými vlastnostmi, které jsou klíčové pro správné a efektivní počítání. Tyto vlastnosti platí pro většinu číselných oborů, jako jsou přirozená, celá nebo reálná čísla.

- **Komutativita**: Na pořadí sčítanců nezáleží. Bez ohledu na to, v jakém pořadí čísla sečtete, výsledek zůstane stejný: $a + b = b + c$
- **Asociativita**: Při sčítání tří nebo více čísel nezáleží na tom, jak jsou sčítanci uzávorkováni: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Existence neutrálního prvku**: Číslo nula je neutrálním prvkem pro sčítání. To znamená, že přičtením nuly k libovolnému číslu se toto číslo nezmění $a + 0 = a$

2.3 Operace násobení

Operace násobení neboli součin je zkrácený zápis pro opakované sčítání. Pomáhá nám rychle vypočítat součet, pokud přidáváme stejné číslo vícekrát. Násobená čísla, se nazývají **činitelé** a výsledek se nazývá **součin**. Operace násobení se zapisuje pomocí symbolu "·":

$$A \cdot B = C$$

Podobně jako sčítání, i násobení má několik klíčových vlastností, které určují, jak se chová.

- **Komutativita**: Na pořadí činitelů nezáleží. Součin zůstane stejný bez ohledu na to, v jakém pořadí je vynásobíte: $a \cdot b = b \cdot a$
- **Asociativita**: Při násobení tří nebo více čísel nezáleží na tom, jak jsou činitelé uzávorkováni: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Existence neutrálního prvku**: Číslo jedna je neutrálním prvkem pro násobení. To znamená, že vynásobením libovolného čísla jedničkou se toto číslo nezmění: $a \cdot 1 = a$
- **Distributivita**: Tato vlastnost je jedinečná, protože spojuje násobení se sčítáním. Násobení je "distributivní" vůči sčítání, což znamená, že můžete roznásobit číslo do závorky: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + \cdot c$

2.4 Operace odčítání

Odčítání je aritmetická operace, která je inverzní ke sčítání. Používá se k určení rozdílu mezi dvěma čísly. Zatímco sčítání je o přidávání, odčítání je o odebírání nebo hledání chybějící části. Číslo, od kterého se odčítá, se nazývá **menšenec**, číslo, které se odčítá, se nazývá **menšitel** a výsledek je **rozdíl**. Operace odčítání se zapisuje pomocí symbolu "-":

$$A - B = C$$

Na rozdíl od sčítání a násobení nemá odčítání stejné vlastnosti a je méně flexibilní.

- **Není komutativní**: Na pořadí čísel při odčítání záleží. Změna pořadí vede k odlišnému: $a - b \neq b - a$
- **Není asociativní**: Při odčítání tří nebo více čísel záleží na tom, jak jsou uzávorkovány: $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
- **Vztah se sčítáním**: Odčítání je možné převést na sčítání přičtením opačného čísla $a - b = a + (-b)$

2.5 Operace dělení

Dělení je aritmetická operace, která je inverzní k násobení. Používá se k určení, kolikrát se jedno číslo, tzv. dělitel, vejde do druhého čísla, dělence. Výsledkem dělení je podíl. Dělení si můžete představit jako proces rozdělování celku na stejné části. Operace dělení se zapisuje pomocí symbolu "÷":

$$A \div B = C$$

Dělení se svými vlastnostmi podobá odčítání, je méně flexibilní než sčítání a násobení.

- **Není komutativní**: Na pořadí čísel při dělení záleží. Změna pořadí vede k odlišnému výsledku: $a \div b \neq b \div a$
- **Není asociativní**: Při dělení tří nebo více čísel záleží na tom, jak jsou uzávorkovány $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$
- **Vztah s násobením**: Dělení je možné převést na násobení převrácenou hodnotou $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$

2.6 Priorita operací

Při řešení matematických výrazů, které obsahují více než jednu operaci, je nezbytné dodržovat přesné pořadí. Toto pořadí se nazývá **priorita operací** a jedná se o dohodnutou konvenci, nikoli o matematický zákon. Byla zavedena, aby se předešlo nejednoznačnostem a aby každý výraz měl vždy pouze jeden správný výsledek.

1. **Závorky**: Závorky mají nejvyšší prioritu, protože jejich účelem je úmyslně přepsat dohodnutá pravidla. Jejich existence ve výrazu je signálem, že se daná část musí vyřešit jako první, bez ohledu na to, jaké operace jsou uvnitř.
2. **Mocniny**: Mocniny a odmocniny mají přednost před násobením a dělením, protože představují opakované násobení.
3. **Násobení a dělení**: Násobení má přednost před sčítáním, protože se jedná o opakované sčítání. Dělení má stejnou prioritu jako násobení, protože je jeho inverzní operací. Dělení je v podstatě násobení převrácenou hodnotou. Vzhledem k jejich úzkému vztahu se provádějí ve stejné úrovni priority.
4. **Sčítání a odčítání**: Sčítání a odčítání mají nejnižší prioritu, protože jsou to nejzákladnější aritmetické operace. Podobně jako u násobení a dělení, odčítání je inverzní operace ke sčítání a proto mají stejnou prioritu.

2.7 Sumace

Sumace je operace, která umožňuje zkráceným způsobem zapsat součet řady čísel. Místo dlouhého vypisování všech sčítanců se využívá speciální zápis. Tato operace je nepostradatelná v mnoha oblastech matematiky, jako je statistika, finančnictví nebo teoretická fyzika.

Pro sumaci používáme symbol $\sum$, což je velké řecké písmeno sigma. Zápis vypadá takto:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

.

- $\sum$ - Symbol pro sumaci
- i - **Sčítací index** nebo **index sumace**. Je to proměnná, která se postupně mění.
- m - **Dolní mez** sumace. Je to hodnota, kterou index i nabývá na začátku.
- n - **Horní mez** sumace. Je to hodnota, kterou index i nabývá na konci.
- a_i - **Sčítaný člen**. Je to výraz, jehož hodnoty sčítáme. Může to být konstanta nebo výraz závislý na indexu i.

Výraz $\sum_{i=m}^{n} a_i$ znamená, že se sečtou hodnoty výrazu a_i pro všechna celá čísla i od dolní meze m až do horní meze n, včetně obou mezí. Například:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

2.8 Produkt

Produkt je aritmetická operace, která slouží ke zkrácenému zápisu součinu řady čísel. Stejně jako sumace, i tato operace je velmi užitečná v mnoha oblastech matematiky a vědy, protože umožňuje efektivně pracovat s dlouhými řadami čísel.

Pro produkt se používá symbol $\prod$, což je velké řecké písmeno **pí**. Zápis je velmi podobný zápisu pro sumaci:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i$$

- $\sum$ - Symbol pro produkt
- i - **Index součinu**. Je to proměnná, která se postupně mění.
- m - **Dolní mez** součinu. Je to hodnota, od které index i začíná.
- n - **Horní mez** součinu. Je to hodnota, u které index i končí.
- a_i - **Člen součinu**. Je to výraz, jehož hodnoty se násobí.

Výraz $\prod_{i=m}^{n} a_i$ znamená, že se násobí hodnoty výrazu a_i pro všechna celá čísla i od dolní meze m až do horní meze n, včetně obou mezí. Například:

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24$$

Operace produktu je klíčovým nástrojem, který umožňuje pracovat se složitými výpočty, aniž by bylo nutné vypisovat dlouhé řady násobení. Je to přímé zobecnění základní operace násobení, stejně jako sumace zobecňuje sčítání.

3 Prvočísla a čísla složená

Každé přirozené číslo $p \in \mathbb{N} \wedge p \geqq 2$, které je dělitelné pouze číslem 1 a sebou samým (samozřejmí dělitelé) se nazývá **prvočíslo**:

$$a|p \Leftrightarrow (a = 1 \vee a = p)$$

4 Dělitelnost

5 Mocnina

6 Procenta