フーリエ変換公式まとめ

·2 次元画像を $f(x,y)$ とするとき, そのフーリエ変換 $F(u,v)$ は次式で定義される

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\exp\bigl\{-j2\pi(ux+vy)\bigr\}dxdy$$

ここで $j=\sqrt{-1}$ であり, u,v はそれぞれ x 方向, y 方向の空間周波数を表す. フーリエ変換により, x,y で表される空間 (空間領域) の関数 $f(x,y)$ で表現される画像が, u,v で表される別の空間 (周波数領域) の関数 $F(u,v)$ という別の形で表現されることになる.
$\Rightarrow$ 元の画像の座標系 (x,y) を, 新しい座標系 (u,v) に置き換える計算を行なっている.

上記の $F(u,v)$ は, 逆フーリエ変換を用いることで元の画像 $(f(x,y))$ に戻すことができる. ここで逆フーリエ変換の式は以下のように表現される.

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\exp\bigl\{j2\pi(ux+vy)\bigr\}dudv$$

上記の変換は, 空間領域と周波数領域の関係性を示しているものであるといえる. ここで注意するべき事項として, $F(u,v)$ はその性質上複素関数であることが挙げられる. この性質を可視化するために, 以下で定義される絶対値と偏角を求める.

$$|F(u,v)|=\sqrt{Re\bigl\{F(u,v)\bigr\}^2+Im\bigl\{F(u,v)\bigr\}^2}\ \cdots\ (i)$$
$$\arg\bigl\{F(u,v)\bigr\}=\tan^{-1}\frac{Im\bigl\{F(u,v)\bigr\}}{Re\bigl\{F(u,v)\bigr\}}\ \cdots(ii)$$

ここで $|F(u,v)|$ は画像の振幅スペクトル, $\arg\bigl\{F(u,v)\bigr\}$ は位相スペクトルと呼ばれる. さらに, $|F\bigl\{(u,v)\bigr\}|^2$ はパワースペクトルと呼ばれている.
次に離散的フーリエ変換と離散的フーリエ逆変換の公式を掲載する.

$$F(k,l) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{n-1} f(m,n) \exp\Big\{-j2\pi\Big(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N}\Big)\Big\}$$

$$f(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{n-1} F(k,l) \exp\Big\{j2\pi\Big(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N}\Big)\Big\}$$