13장. NP-완비

Youn-Hee Han
LINK@KOREATECH
http://link.koreatech.ac.kr

나는 그저 NP-완비 이론이 흥미로운 발상이라고만 생각했다.
그것이 지닌 잠재적 영향력은 인식하지 못했다.
– 스티븐 쿡

때로는 어떤 것이 불가능하다는 사실이 유용할 때도 있다.
– 레오나드 레빈

스티븐 쿡

컴퓨터 과학자

스티븐 아서 쿡은 미국의 전산학자이다. 1971년 ACM 《SIGACT Symposium on the Theory of Computing》에 실린 논문 〈The Complexity of Theorem Proving Procedures〉에서 NP-완전의 개념을 확립한 것으로 유명하다.
위키백과

https://www.mcgill.ca › neuro › leonard-levin-md-phd

Leonard Levin, MD, PhD | The Neuro - McGill University

Dr. Leonard Levin is a tenured professor in the Departments of Ophthalmology & Visual Sciences and Neurology & Neurosurgery at McGill University, ...

학습 목표

◈ P와 NP를 구별한다.

◈ Yes/No 문제와 최적화 문제의 차이를 이해한다.

◈ NP-완비 의미를 이해한다.

◈ NP-완비 증명 방법을 이해한다.

◈ NP-완비라는 사실이 판명됨으로써 얻을 수 있는 이득을 이해한다.

01. 문제의 종류
&
02. Yes/No 문제와 최적화 문제

문제의 다양한 종류

◈ 현실적인 시간

- 시간 복잡도가 다항식 함수로 산출
  - $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n^1 + a_0 \ (a_k \neq 0)$
- 다음과 같은 점근적 복잡도로 표현
  - $\Theta(n^k)$
  - $\Theta(n^k logk)$ (why? $n^k logk = \Omega(n^{k+1})$

◈ 비현실적인 시간

- 다음과 같은 점근적 복잡도로 표현
  - $\Theta(r^n)$
  - $\Theta(n!)$

문제의 다양한 종류

◈ 문제의 다양한 종류

- 풀 수 없는 문제들 (Unsolvable, Undecidable)
- 풀 수 있는 문제들 (Solvable, Decidable)
  - Intractable Problems: 해결을 위해 비현실적인 시간이 소요되는 문제
  - Tractable Problems: 현실적인 시간에 해결이 가능한 (즉, 현실적인 시간 복잡도를 지닌 알고리즘이 존재하는) 문제

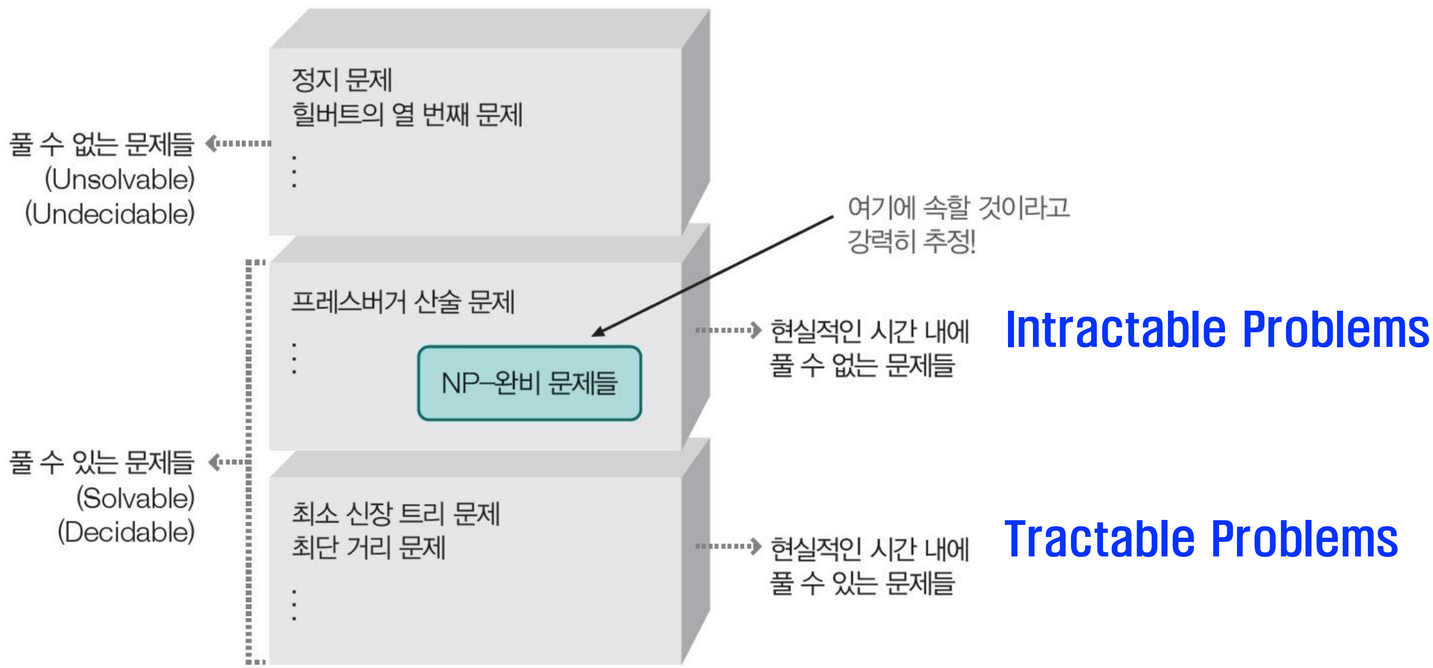


그림 13-1 문제의 종류

문제의 다양한 종류

◈ 풀 수 있는 문제들: Tractable Problems

– 1) 다차시간 알고리즘을 어렵지 않게 찾은 문제

- 정렬된 배열에서의 검색 문제: $\Theta(logn)$
  - ➢ 이분검색(Binary Search)
- 정렬 문제: $\Theta(nlogn)$
  - ➢ 합병정렬(Merge Sort), 퀵정렬(Quick Sort)

이러한 문제들이 P 집합에 속한다.

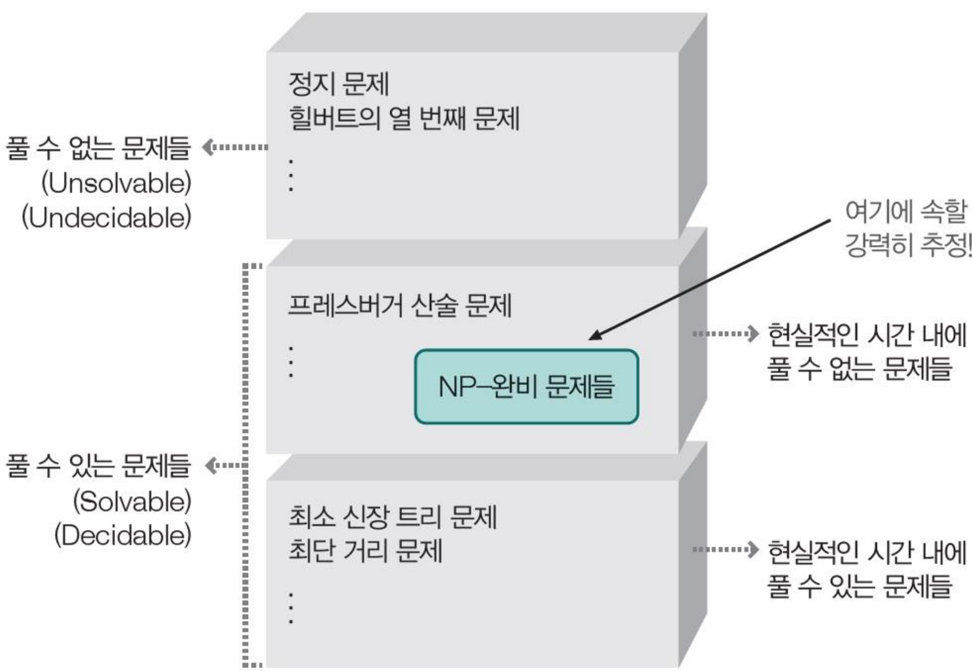


그림 13–1 문제의 종류

문제의 다양한 종류

◈ 풀 수 있는 문제들: Tractable Problems
- 2) 다항식 시간이 아닌 알고리즘도 있으나 결국 다항식 시간 알고리즘을 찾은 문제
  - 연쇄행렬곱셈 문제: $\Theta(n^3)$
    - ➢ 동적 계획 방법의 알고리즘
  - 최단 경로 구하기 문제: $\Theta(n^3)$
    - ➢ 동적 계획 방법을 사용하는 플로이드 (Floyd) 알고리즘
  - 단일 지점 최단 경로 구하기 문제: $\Theta(n^2)$
    - ➢ 다익스트라 (Dijkstra) 알고리즘
  - 최소비용 신장트리(Minimum spanning tree) 문제: $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^2 logn)$
    - ➢ 프림 (Prim), 쿠르스컬 (Kruskal) 알고리즘
  - 등등…

이러한 문제들이 P 집합에 속한다.

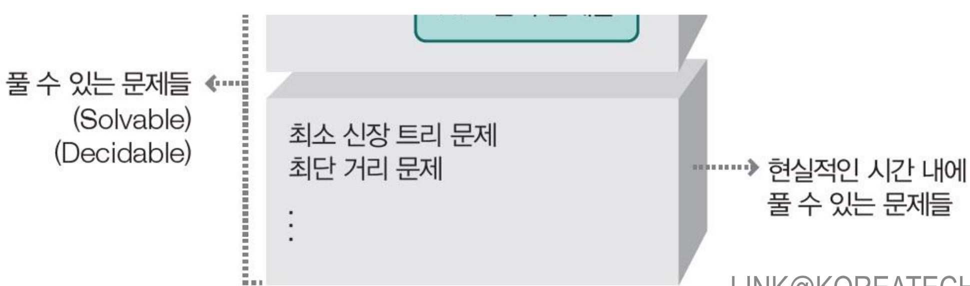


그림 13-1 문제의 종류

문제의 다양한 종류

◈ 풀 수 있는 문제들: Intractable Problems

– 1) 어쨌든 풀 수 있지만 <u>현실적인 시간 내에 풀 수 없다고 증명됨</u>

- **프레스버거 산술 문제** (Presburger Arithmetic Problem):
  - ➢ Fischer와 Rabin에 의하여 증명됨(1974)

In this language, the axioms of Presburger arithmetic are the universal closures of the following:

1. $\neg(0 = x + 1)$
2. $x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$
5. Let $P(x)$ be a first-order formula in the language of Presburger arithmetic with a free variable x

$$(P(0) \land \forall x(P(x) \rightarrow P(x+1))) \rightarrow \forall y\, P(y).$$

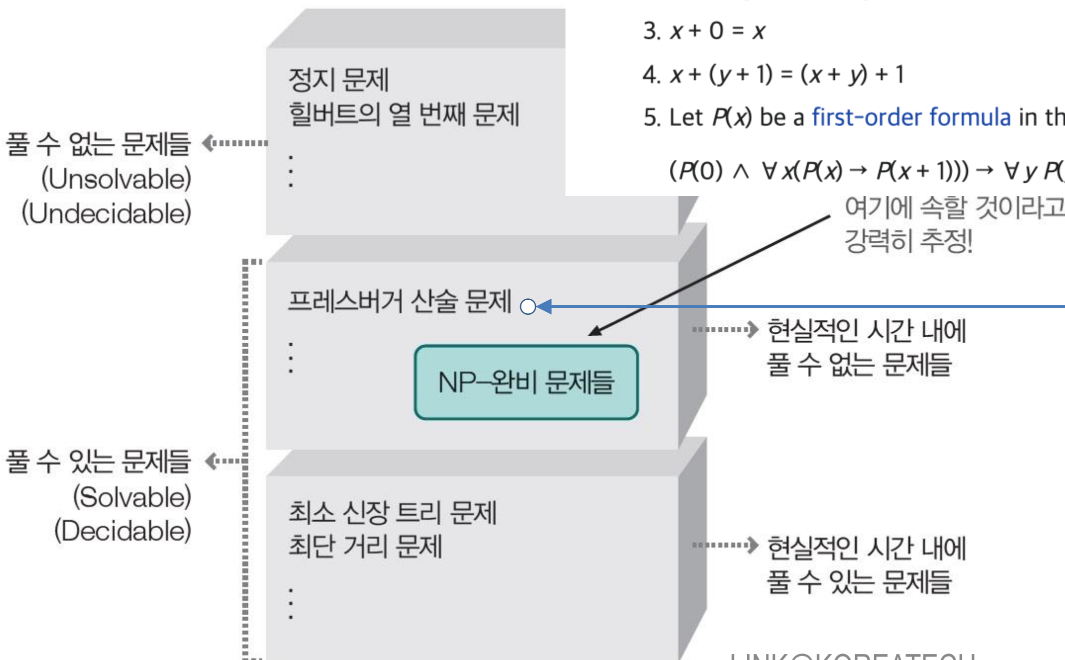


그림 13–1 문제의 종류

문제의 다양한 종류

- ◈ 풀 수 있는 문제들: Intractable Problems
  - – 2) 어쨌든 풀 수 없지만 현실적인 시간 내에 풀 수 있는지 없는지 증명되지 않았음
    - ➢ 0 – 1 배낭채우기 (Knapsack) 문제
    - ➢ 외판원 문제 (TSP)
    - ➢ 등등…

이러한 문제들이 NP 집합에 속한다.

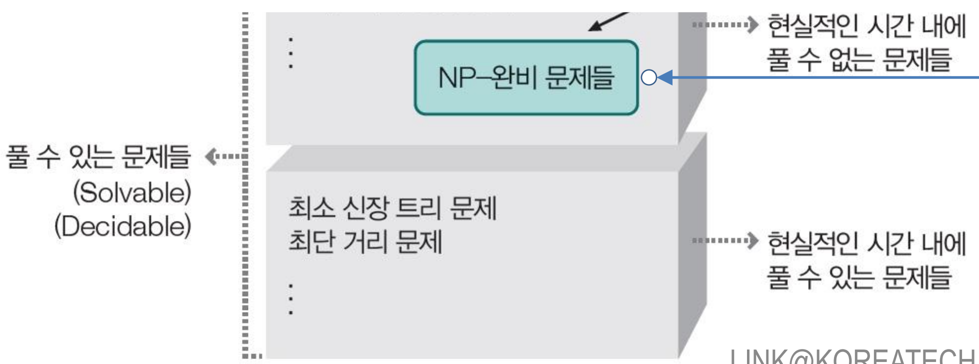


그림 13–1 문제의 종류

문제의 다양한 종류

◈ 풀 수 없는 문제들

– 정지 문제 (Halting Problem)

- 임의의 알고리즘과 임의의 입력이 주어질 때, 그 알고리즘의 수행이 멈추는지를 결정하는 문제 (Alan Turing이 1936년 증명함)

```
func() {
  if (is_halt(func())) then while (true) do something;
}
```

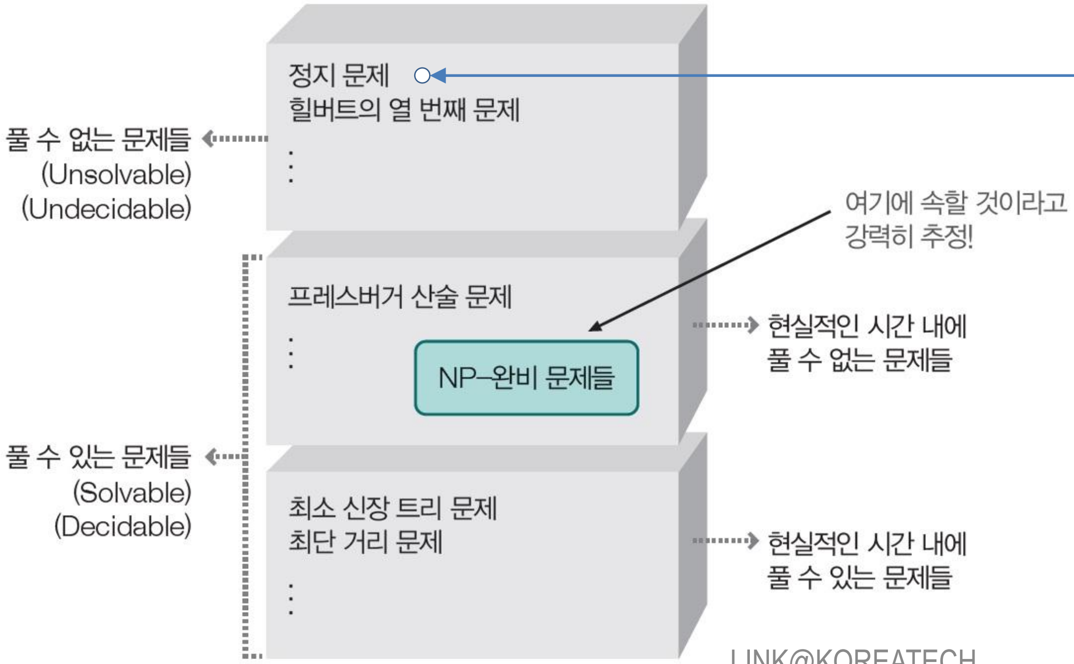


그림 13–1 문제의 종류

Yes/No 문제와 최적화 문제

◈ 요구하는 대답의 종류에 따른 문제 분류

- 결정 문제 (Decision Problem)
  - Yes 또는 No 대답을 요구하는 문제
  - 예 1: 그래프 G의 정점 u에서 정점 v로 길이 100 이하인 경로가 존재하는가?
  - 예 2: 그래프 G에서 길이가 k 이하인 TSP 경로가 존재하는가?

- 최적화 문제 (Optimization Problem)
  - 가장 좋은 해를 요구하는 문제
  - 예 1: 그래프 G의 정점 u에서 정점 v로 가장 짧은 경로 길이는 얼마인가?
  - 예 2: 그래프 G에서 길이가 가장 짧은 TSP 경로는 얼마인가?

Yes/No 문제와 최적화 문제

◈ 결정 문제와 최적화 문제의 상관관계
- 임의의 최적화 문제 → 결정 문제 변환 가능
- 임의의 결정 문제 → 최적화 문제로 변환 가능

결정 문제	1 대 1 대응 가능	최적화 문제
그래프 G에서 길이가 k 이하인 TSP 경로가 존재하는가?		그래프 G에서 길이가 가장 짧은 TSP 경로는 얼마인가?

◈ NP-완비 이론에서는 <u>어떤 문제가 어렵다는 사실을 보이는 것</u>과 관련된 것으로 여러가지 관련 이론을 전개하고 이해하기가 쉬운 **결정 문제**만을 다룬다.

03. NP (Nondeterministic Polynomial)

NP (Nondeterministic Polynomial)

◈ P 집합

- 다항식 시간 복잡도 알고리즘으로 풀 수 있는 모든 결정 문제들의 집합
  - 즉, 다항식 시간에 Yes 또는 No라고 대답할 수 있는 문제들의 집합
- P는 Polynomial의 약자

외판원 결정 문제가 P에 속할까?

> 그래프 G에서 길이가 k 이하인 TSP 경로가 존재하는가?

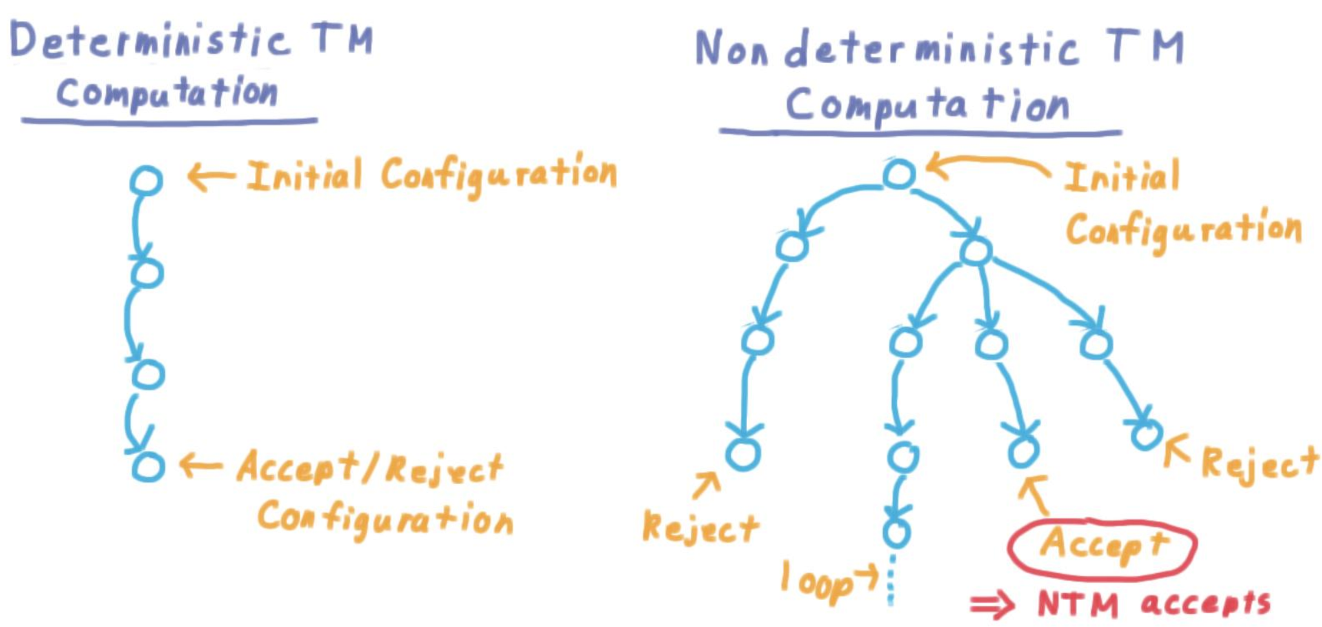
- 아직까지 아무도 이 문제를 해결하는 다항식 시간 복잡도 알고리즘을 만들지 못했다.
- 하지만, 이 문제에 대하여 다항식 시간 복잡도 알고리즘이 존재하지 않는다고 증명도 못했다.
- [정확한 답] Maybe, Maybe not, Nobody knows yet.

NP (Nondeterministic Polynomial)

◈ NP 집합

- 주어진 문제의 대답이 Yes 또는 No라는 근거(예시)가 주어졌을 때, 그러한 근거(예시)를 다항식 시간에 검증(Verification, 확인) 할 수 있는 문제들의 집합
  - 그러한 근거의 생성을 <u>임의로 Sampling</u>함

- NP는 Nondeterministic Polynomial의 약자



NP (Nondeterministic Polynomial)

◈ NP 집합

- 근거가 비결정론적으로 제시되었을 때 다항식 시간에 검증할 수 있는 문제들의 집합
- 그러한 문제들을 비결정론적 다항식 시간에 풀 수 있다라고 말함

외판원 문제가 NP에 속할까?

> 그래프 G에서 길이가 k 이하인 TSP 경로가 존재하는가?

- 임의의 경로를 Nondeterministic 하게 생성함
- 해당 경로에 대해 Yes 또는 No를 Polynomial 시간에 검증 가능함
- (정확한 답) 외판원 문제는 NP에 속한다.

NP (Nondeterministic Polynomial)

◈ P 집합과 NP 집합의 요약된 비교 정리
- P는 빨리 풀 수 있는 문제들의 집합
- NP는 빨리 검증(확인)할 수 있는 문제들의 집합

◈ P 집합과 NP 집합의 포함관계
- 모든 P 집합의 문제는 당연히 NP 집합에도 속한다 (즉, $P \subseteq NP$)
- P 집합은 NP 집합보다 작은 집합일 것 같지만,

(a) $P = NP$ (b) $P \neq NP$

우리는 아직까지 명확하게 위 두 가지 중에서 하나가 맞다고 판단을 못하고 있다.

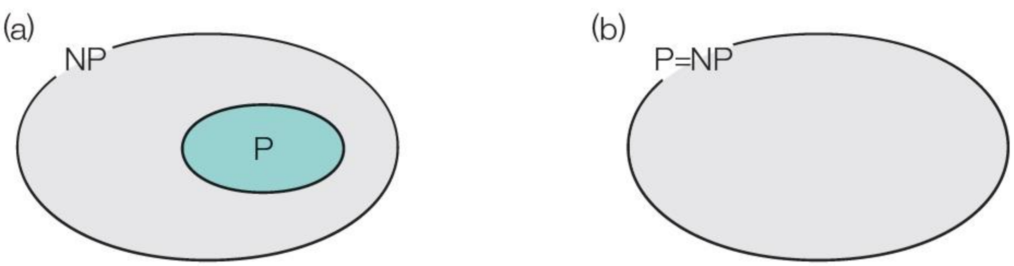
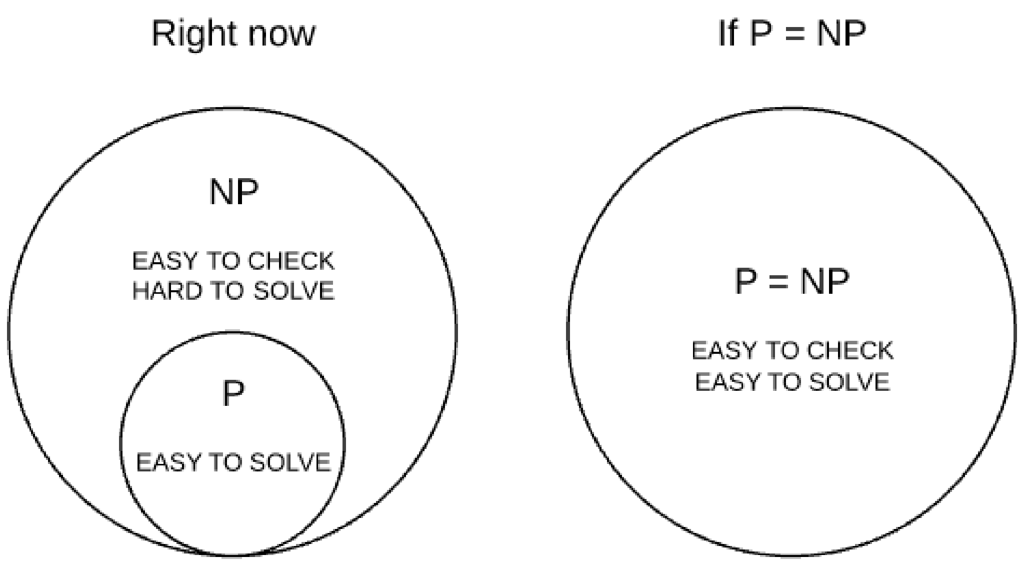


그림 13-2 P와 NP의 포함 관계의 두 가지 가능성

NP (Nondeterministic Polynomial)

- One of 7 Millennium Prize Problems
  - P = NP or P ≠ NP ?
    - 위 질문은 Computer Science에서 가장 유명하고 복잡한 질문 중 하나이다.
    - 즉, NP에 속하면서 P에는 속하지 않는 문제의 존재를 증명하지 못함
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems



만약 P = NP로 증명이 된다면 어떤 일이 벌어지는가?

→ 현재 NP에 속한다고 알려진 모든 문제들 (외판원 문제)에 대해 다항식 시간 복잡도 알고리즘을 찾아내려고 노력해야 함

04. 다항식 시간 변환

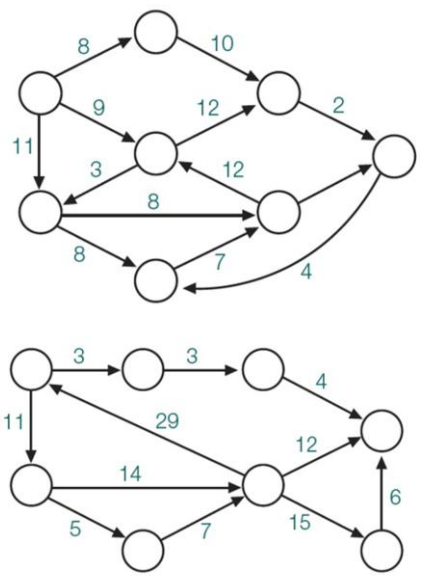
다항식 시간 변환 정의

◈ [정의 13-1] 다항식 시간 변환 (Polynomial-Time Reduction)

– 문제 A의 사례 α를 문제 B의 사례 β로 변환(Reduction)하되 다음 성질을 만족하면 이를 "다항식 시간 변환"이라 하고 이를 $\alpha \le_p \beta$로 표기한다.

- 1) 변환이 다항식 시간에 이루어진다.
- 2) 두 사례의 답이 일치한다.

최단 거리 문제의
두 가지 사례(Instance)



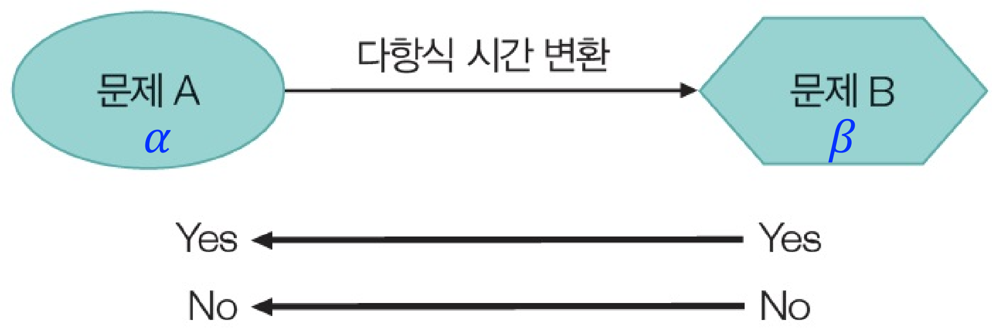


그림 13-3 변환으로 대답을 얻는 예

다항식 시간 변환의 활용

◈ 다항식 시간 변환 $\alpha \le_p \beta$의 활용

– 문제 B의 사례 β를 쉽게 풀 수 있다면
– 문제 A의 사례 α를 다항식 시간 변환($\alpha \le_p \beta$)을 이용하여 문제 B의 사례 β로 변환
– 문제 B를 해결하는 알고리즘을 이용하여 사례 β의 답을 구하고
– 그 답을 그대로 문제 A의 사례 α의 답으로 활용
– 즉, **β를 쉽게 풀 수 있다면 α도 쉽게 풀 수 있다.**

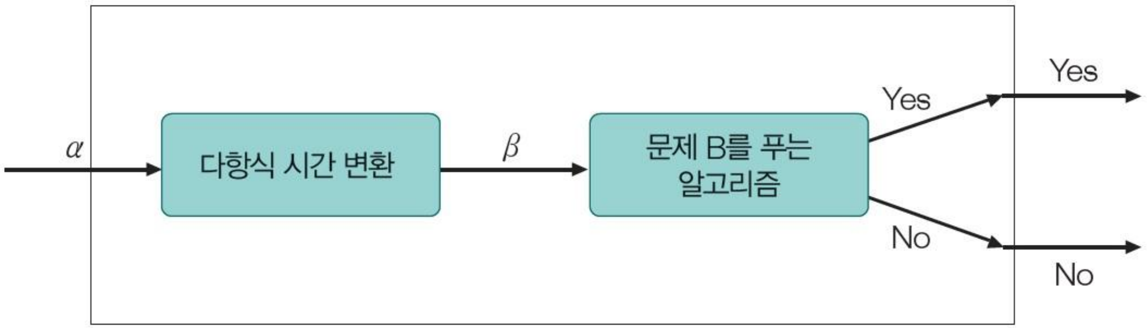


그림 13-5 변환을 이용해 문제를 푸는 예

다항식 시간 변환의 예

◈ 두 개의 서로 다른 결정 문제 정의

[정의 13-2] HAM-CYCLE
(해밀토니안 사이클 문제)

입력: 무향 그래프 $G=(V,E)$

질문: G에 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

문제 A의 사례 α

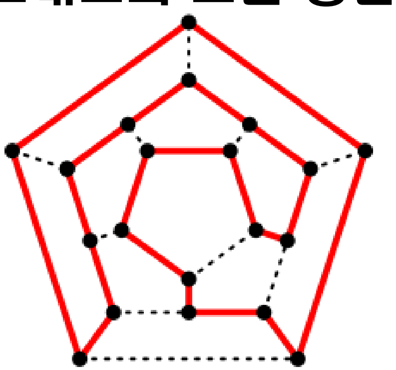
[정의 13-3] TSP
(순회 세일즈맨 문제)

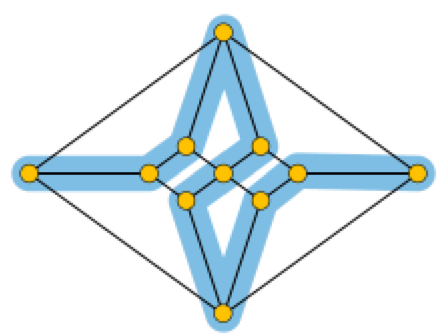
입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G=(V,E)$, 양의 실수 K

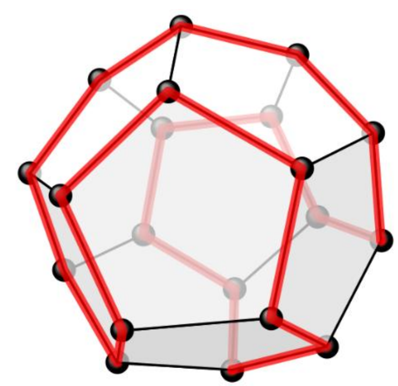
질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

문제 B의 사례 β

[해밀토니안 사이클]
그래프의 모든 정점을 한번씩만 방문하고 출발점으로 돌아오는 경로







12면체

다항식 시간 변환의 예

◈ 다항식 시간 변환 $\alpha \leq_p \beta$의 예 (1/4)

[정의 13-2] HAM-CYCLE
(해밀토니안 사이클 문제)

입력: 무향 그래프 $G = (V, E)$
질문: G에 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

[정의 13-3] TSP
(순회 세일즈맨 문제)

입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$, 양의 실수 K
질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

- [변환 방법]
  - 1) TSP의 문제 정의상 주어진 그래프가 완전 그래프이어야 하므로 HAM-CYCLE 문제 그래프에서 임의의 두 정점간 간선이 없다면, TSP 문제에서 해당 간선은 가중치가 ∞인 간선으로 대치하여 생성함
  - 2) TSP 문제 그래프의 간선과 대응되는 간선이 HAM-CYCLE 문제 그래프에 존재한다면 해당 간선에 가중치 1 할당

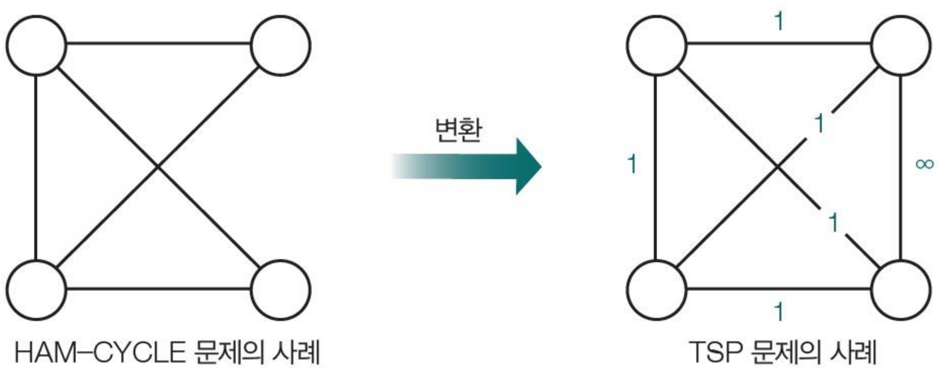


그림 13-6 다항식 시간 변환의 예

다항식 시간 변환의 예

◈ 다항식 시간 변환 $\alpha \le_p \beta$의 예 (2/4)

[정의 13-2] HAM-CYCLE
(해밀토니안 사이클 문제)

입력: 무향 그래프 $G = (V, E)$
질문: G에 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

[정의 13-3] TSP
(순회 세일즈맨 문제)

입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$, 양의 실수 K
질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

– [그림 13-7] 고찰
  - (a) HAM-CYCLE 문제 사례에서 존재하는 해밀토니안 사이클을 굵게 표시
  - (b) (a)에 존재하는 해밀토니안 사이클을 그대로 TSP 문제 사례로 그대로 옮김
    → 길이가 4인 해밀토니안 경로 도출

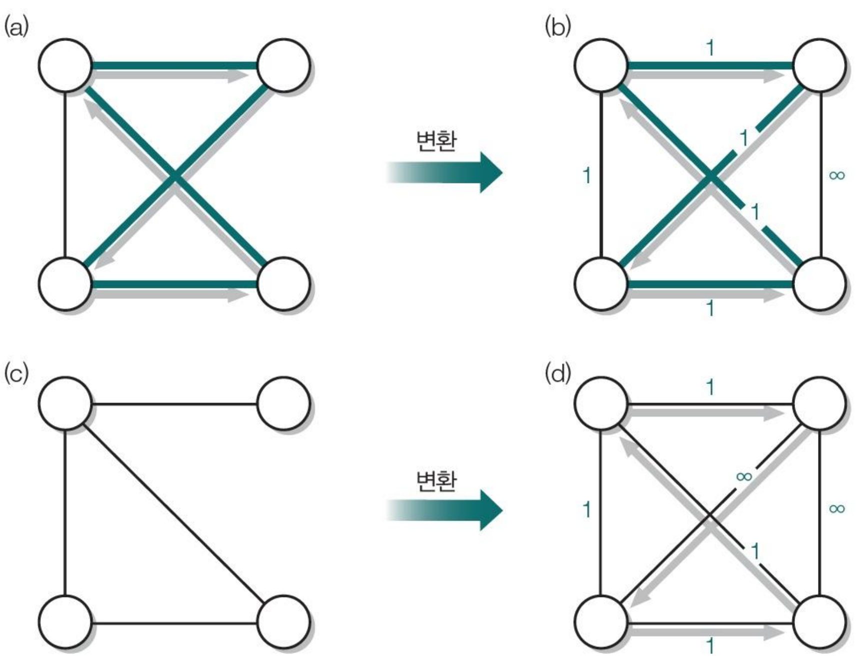


그림 13-7 변환 후 두 사례 간의 관계

다항식 시간 변환의 예

◈ 다항식 시간 변환 $\alpha \leq_p \beta$의 예 (3/4)

[정의 13-2] HAM-CYCLE (해밀토니안 사이클 문제) 입력: 무향 그래프 $G = (V, E)$ 질문: G에 해밀토니안 사이클이 존재하는가?	[정의 13-3] TSP (순회 세일즈맨 문제) 입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$, 양의 실수 K 질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

– [그림 13-7] 고찰

- (c) 또 다른 HAM-CYCLE 문제 사례에서 존재하지 않는 해밀토니안 사이클
- (d) 새로운 간선을 이용하여 해밀토니안 경로 구성하면 항상 가중치가 ∞인 간선 포함
  → 경로의 길이도 ∞가 됨
  → 길이가 양의 실수 K인 해밀토니안 사이클이 존재하지 않음

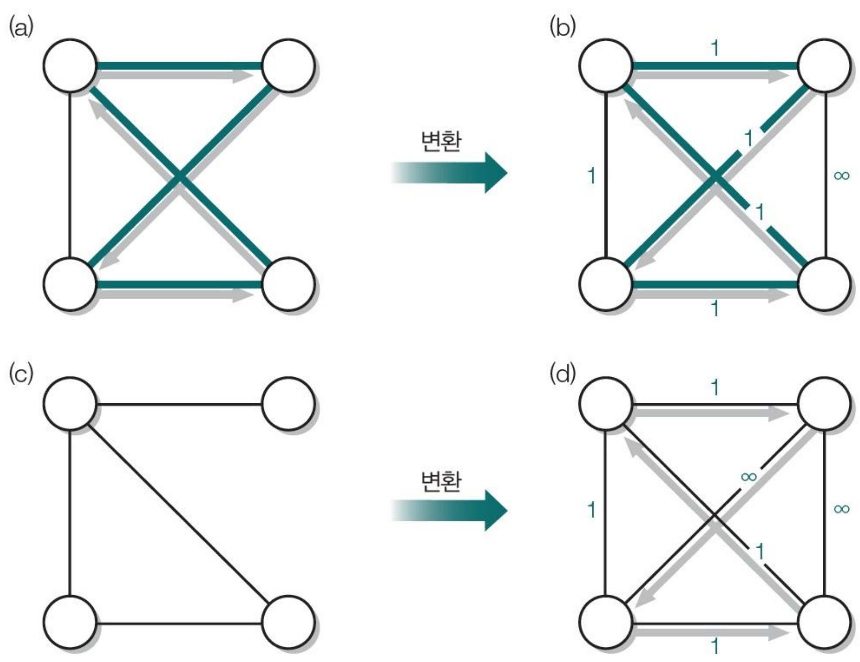


그림 13-7 변환 후 두 사례 간의 관계

다항식 시간 변환의 예

◈ 다항식 시간 변환 $\alpha \leq_p \beta$의 예 (4/4)

[정의 13-2] HAM-CYCLE (해밀토니안 사이클 문제) 입력: 무향 그래프 $G = (V, E)$ 질문: G에 해밀토니안 사이클이 존재하는가?	[정의 13-3] TSP (순회 세일즈맨 문제) 입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$, 양의 실수 K 질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

– 즉, 앞서 설명한 [변환 방법]을 사용하되 HAM-CYCLE 사례에서

"해밀토니안 사이클이 존재하는가?"

라는 위 질문은 변환된 TSP 사례에서 다음의 질문으로 변경함

"길이가 $|V|$인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?"

– 그러면, 위 두 질문의 해답 (YES/NO)는 일치함
– 또한, TSP를 쉽게 풀 수 있는 알고리즘이 있다면, HAM-CYLCE문제도 쉽게 풀 수 있음

05. NP-완비

NP-Hard와 NP-Complete 정의

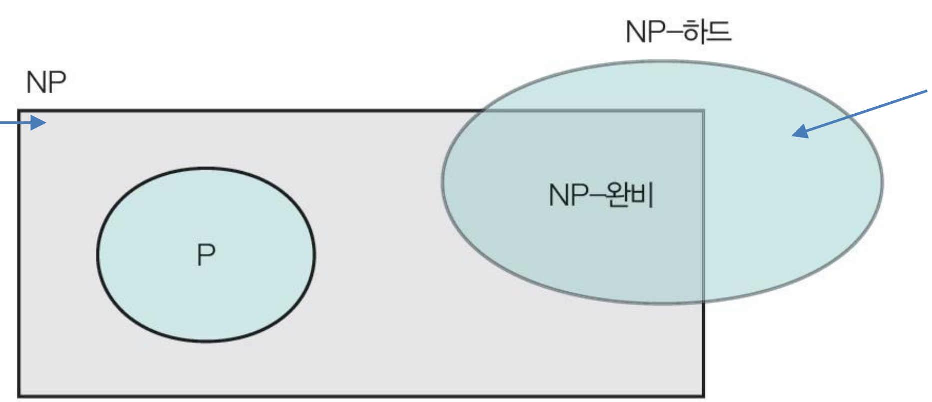
◈ [정의 13-4] NP-하드 (NP-Hard)

- 문제 A가 다음 조건을 만족하면 NP-하드이다
  - [조건] 모든 NP 문제 L에 대하여 L $\leq_p$ A 이다.

◈ [정의 13-5] NP-완비 (NP-Complete)

- 문제 A가 다음 조건을 만족하면 NP-완비이다
  - [조건 1] 문제 A는 NP다
  - [조건 2] 문제 A는 NP-하드이다 (즉, 모든 NP 문제가 A로 다항식 시간 변환 가능하다)

결정 문제만 포함



최적화 문제도 포함

그림 13-14 P, NP, NP-완비, NP-하드의 포함 관계를 나타내는 그림(P 부분은 추정)

NP-Hard와 NP-Complete 고찰

◈ NP-완비 고찰

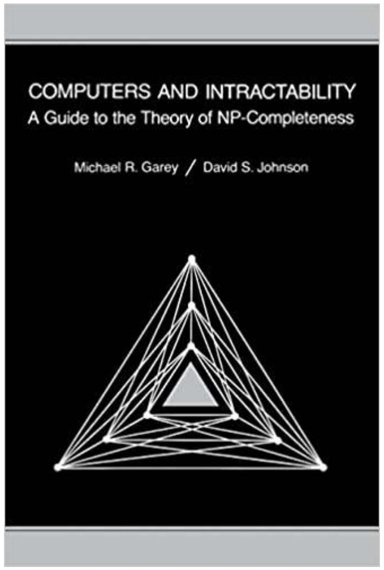
- NP-완비는 <u>다항식 시간에 풀기 어렵다고 판단되면서 서로 밀접한 논리적 연결 관계를 지닌 문제들</u>의 집합
- 만약 NP-완비 내에 속한 어떤 문제가 다항식 시간에 해결된다면, 이 문제의 답으로 다른 문제들의 답도 결정되기 때문에 NP-완비 내 모든 문제가 다항식 시간에 해결됨

◈ 어떤 문제가 NP-완비임을 증명하는 것의 의미

- 어떤 최적화 문제를 해결하는 효율적인 알고리즘을 찾을 수가 없을 때의 불안감을 해소할 수 있음!!!
- 우선, 주어진 최적화 문제를 결정 문제로 변환
- 변환된 결정 문제가 NP-완비임을 증명
- 그러면, 해당 문제와 운명을 같이하는 수 많은 문제가 있고, 이 문제들은 모두 효율적인 알고리즘을 발견하지 못했음을 알 수 있음

NP-Hard와 NP-Complete 고찰

◈ 어떤 문제가 NP-완비임을 증명하는 것의 의미



Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness

文A 3개 언어

위키백과, 우리 모두의 백과사전.

《**Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**》는 NP-완전 문제를 처음 다룬 전산학의 고전이다. 마이클 개리와 데이비드 S. 존슨이 함께 지은 책으로 1979년에 출판되었다. 이 책은 수많은 논문에 자주 인용되는데, 주로 어떤 문제가 NP-완전임을 보이는 원 출처로서 인용된다. 비록 PCP 등 최근에 나온 주제를 다루지 않는 등 다소 오래되었다는 단점은 있으나, 전산학의 고전으로서 가치가 있는 책으로 2000년대 들어서도 계속 출판되고 있다.

이 책의 부록에는 당시 알려졌던 주요 NP-완전 문제(PSPACE-완전이거나 더 어려운 문제도 있다) 수백 개의 목록이 포함되어 있다. 이 목록은 아주 유명하여 전산학자들이 가끔 참고하기도 하고, 이후 보충된 NP-완전 문제들의 목록도 주로 이 목록의 형식을 따르고 있다.

2006년 9월 조사에 따르면 CiteSeer에서 이 책이 전산학 논문 인용 횟수 1위를 기록했다.[1]

그림 13-8 문제가 어렵다는 것을 상사에게 말하는 세 가지 방법

NP-Hard와 NP-Complete 증명 방법

◈ 문제 A가 NP-완비 (또는 NP-하드)임을 증명하는 방법

- "모든 NP 문제가 A로 다항식 시간 변환 가능하다"는 조건은 매우 강한 조건
- 따라서, 위와 같은 난관을 극복하기 위해 다음 [정리 13-1] 사용

◈ [정리 13-1]

- 문제 A가 다음 조건을 만족하면 NP-하드이다
  - [조건] 어떤 알려진 NP-하드 문제 C에 대하여 C $\leq_p$ A 이다.
  - [Proof는 교재 참고]
- 따라서, 알려진 NP-하드 문제가 1개만 있으면 이 문제를 활용하여 연달아 다른 문제들도 NP-하드임을 증명할 수 있음
- 1971년 쿡(Cook)이 다음 문제에 대해 [정의 13-4]에 따라 NP-하드임을 증명하였음
  - GSAT (General SATisfiability, 일반 부울식 만족 문제)

NP-Hard와 NP-Complete 증명 방법

◈ NP-완비 (또는 NP-하드)이 증명된 대표적인 문제들 및 그 과정

문제 축약 이름	문제 이름	해석
GSAT	General Boolean SATisfiability Problem	일반 부울식 충족 가능성 문제
SAT	Boolean SATisfiability Problem	부울식 충족 가능식 문제
3SAT	3-Boolean SATisfiability Problem	3-부울식 충족 가능식 문제 (변수 개수 3개)
CLIQUE	Clique Problem	클리크 문제
SUBSET-SUM	Subset Sum Problem	부분집합 합 문제
VERTEX-COVER	Vertex Cover Problem	정점 커버 문제
HAM-CYCLE	Hamilton Cycle Problem	해밀톤 회로 문제
HAM-PATH	Hamilton Path Problem	해밀톤 경로 문제
HAM-PATH-2POINTS	2 Points-Hamilton Path Problem	2개 정점 해밀톤 경로 문제
TSP	Traveling Salesman Problem	외판원 문제

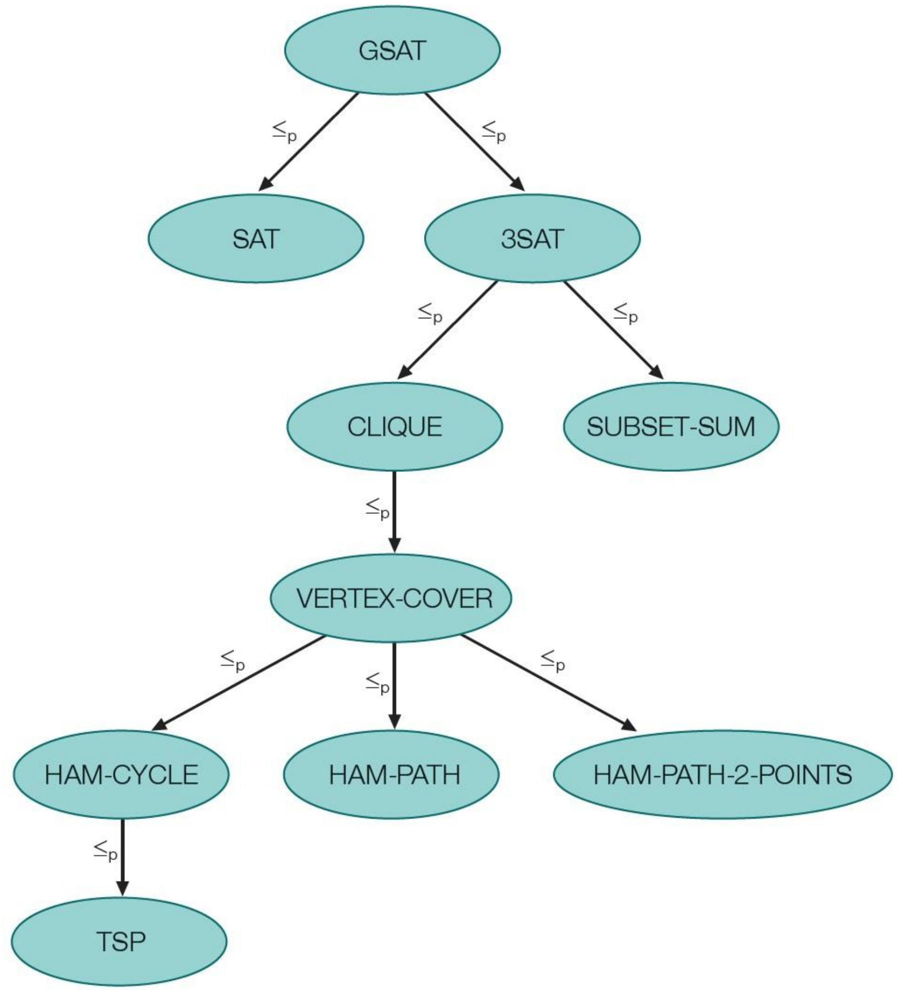


그림 13-9 NP-완비 문제들이 증명된 관계를 보여주는 트리

06. NP-완비 문제들

NP-Complete 증명

- ◈ 문제 A가 NP-완비임을 증명하는 과정
  - 1) 문제 A가 NP 임을 증명한다.
  - 2) 알려진 NP-하드 문제 C를 택하여 다항식 시간에 C의 사례를 A의 사례로 변환하는 알고리즘을 고안하여 기술한다.
    - 매우 복잡하지 않은 변환 과정을 기술하기만 하면 됨
  - 3) 위 변환결과 문제 C의 사례와 문제 A의 사례의 Yes/No 대답이 일치함을 보인다.

NP-Complete 증명

◈ [정의 13-12] HAM-PATH-2-POINTS

- 두 정점 사이의 해밀토니안 경로 문제
- 입력: 그래프 $G = (V, E)$ 및 V의 두 정점 s, t
- 질문: 정점 s에서 정점 t에 이르는 해밀토니안 경로가 존재하는가?

[중요]

이 문제는 [그림 13-9]에서 볼 수 있듯이 이미 NP-완비임이 증명되어 있다.

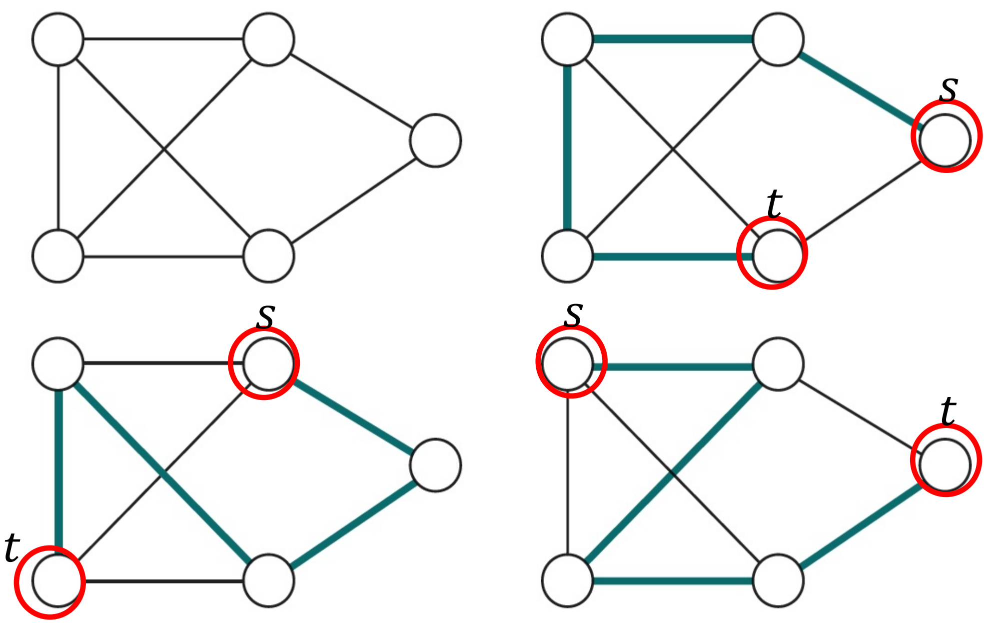
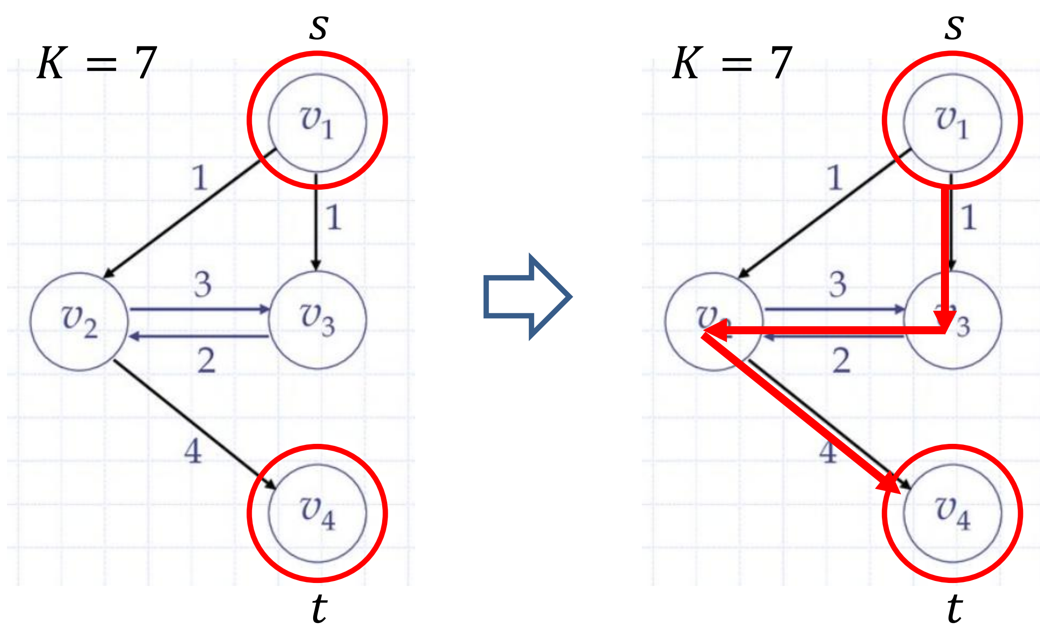


그림 13-10 그래프와 이에 포함된 해밀토니안 경로들의 예

NP-Complete 증명

◈ [정의 13-13] LONGEST-PATH

- 최장 경로 문제
- 입력:
  - 간선이 양의 가중치를 가지는 그래프 $G = (V, E)$
  - V의 두 정점 s, t
  - 양의 상수 K
- 질문: 정점 s에서 정점 t에 이르는 길이 K 이상인 단순 경로가 존재하는가?



NP-Complete 증명

- [정리 13-2] LONGEST-PATH는 NP-완비다.
  - 1) LONGEST-PATH는 NP임을 증명한다.
    - 정점 s에서 정점 t에 이르는 길이 K 이상인 단순 경로가 Nondeterministic 하게 주어질 때 (즉, LONGEST-PATH의 질문에 대해 YES라고 대답할 수 있는 근거가 샘플링으로 주어질 때)
    - 이것이 길이 K 이상임을 보이는 것은 단순하게 경로만 따라가면서 간선들이 모두 E에 속하고 가중치를 합하여 K 이상인지 확인하면 된다.
    - 즉, 샘플링 되어 주어진 경로가 길이 K 이상인 단순 경로인지 다항식 시간에 검증 가능하다.
    - 따라서, LONGEST-PATH는 NP 이다.

NP-Complete 증명

- ◈ [정리 13-2] LONGEST-PATH는 NP-완비다.
  - 2) HAM-PATH-2-POINTS $\leq_p$ LONGEST-PATH임을 증명한다.
    - 그래프 G를 그대로 옮기고 E의 각 간선에 가중치 1을 할당한다.
      - ➢ 이와 같은 변환은 다항식 시간에 간단히 수행됨

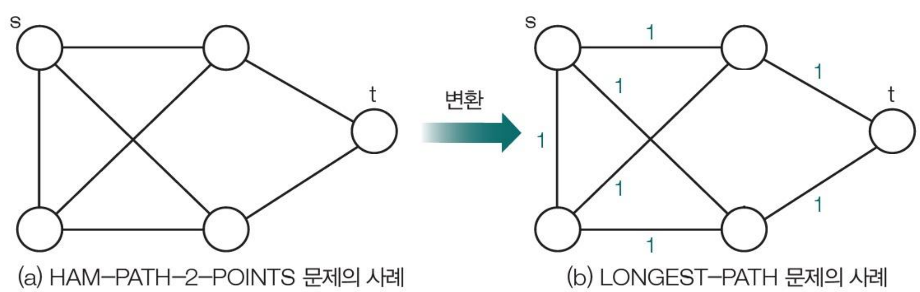


그림 13-11 HAM-PATH-2-POINTS의 사례를 LONGEST-PATH의 사례로 변환하는 예

- HAM-PATH-2-POINTS 문제의 사례에서
"정점 s에서 정점 t에 이르는 해밀토니안 경로가 존재하는가?"
라는 질문의 대답은 변환된 LONGEST-PATH의 사례에서
"정점 s에서 정점 t에 이르는 길이 |V|-1 이상인 단순 경로가 존재하는가?"라는 질문의 대답과 일치한다.
- 따라서, HAM-PATH-2-POINTS $\leq_p$ LONGEST-PATH 이다.

NP-Complete 증명

◈ [정의 13-14] BD-ST

- 제한된 차수를 가지는 신장 트리 문제
- 입력: 그래프 $G = (V, E)$ 및 양의 정수 K
- 질문: 모든 정점의 차수가 K 이하인 G의 신장 트리가 존재하는가?

◈ [정리 13-3] BD-ST는 NP-완비다.

- 1) BD-ST는 NP임을 증명한다.
  - [Proof는 교재 참고]
- 2) HAM-PATH $\leq_p$ BD-ST임을 증명한다.
  - NP-완비임이 이미 잘 알려져 있는 것 중 적당한 문제인 HAM-PATH를 택함
  - [Proof는 교재 참고]

NP-Complete 증명

◈ [정의 13-15] CLIQUE

– 완전 부분 그래프 문제
– 입력: 그래프 $G = (V, E)$ 및 양의 정수 K
– 질문: 그래프 G에 크기가 K인 완전 부분 그래프가 존재하는가?

◈ [정리 13-6] CLIQUE는 NP-완비다.

– 1) CLIQUE는 NP임을 증명한다.
  • [Proof는 교재 참고]
– 2) HAM-PATH $\leq_p$ CLIQUE임을 증명한다.
  • NP-완비임이 이미 잘 알려져 있는 것 중 적당한 문제인 3SAT를 택함
  • [Proof는 교재 참고]

06. NP-하드를 최적화 문제로 확장하기

최적화 문제 껴안기

◈ [정의 13-1] 다항식 시간 변환 (Polynomial-Time Reduction)

- 문제 A의 사례 α를 문제 B의 사례 β로 변환(Reduction)하되 다음 성질을 만족하면 이를 "다항식 시간 변환"이라 하고 이를 $\alpha \leq_p \beta$로 표기한다.
  - 1) 변환이 다항식 시간에 이루어진다.
  - 2) 두 사례의 답이 일치한다.

대상 문제를 결정 문제로 한정한 정의

◈ [정의 13-18] 다항식 시간 변환의 확장 버전

- 문제 A의 사례 α를 문제 B의 사례 β로 변환(Reduction)하되 다음 성질을 만족하면 이를 "다항식 시간 변환"이라 하고 이를 $\alpha \leq_p \beta$로 표기한다.
  - 1) 변환이 다항식 시간에 이루어진다.
  - 2) β의 답을 이용하여 α의 답을 구할 수 있다.

대상 문제에 최적화 문제도 포함시킨 정의

최적화 문제 껴안기

◈ [정의 13-3] TSP (순회 세일즈맨 문제)
- 입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$, 양의 실수 K
- 질문: G에 길이가 K인 해밀토니안 사이클이 존재하는가?

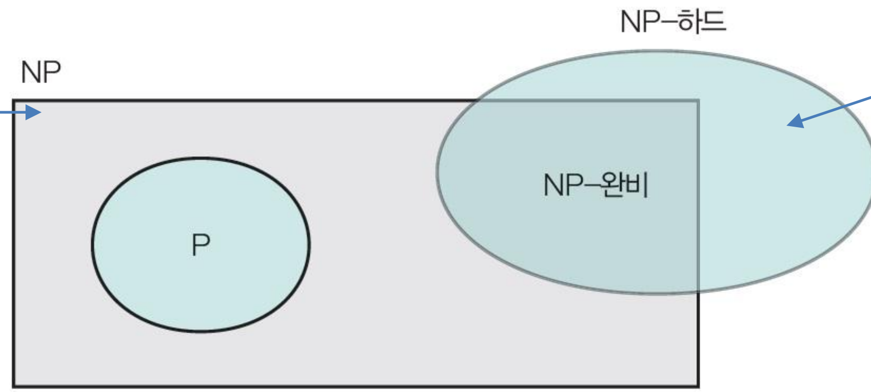
◈ [정의 13-19] 최적화 TSP (순회 세일즈맨 문제의 최적화 버전)
- 입력: 양의 가중치를 갖는 무향 완전 그래프 $G = (V, E)$
- 질문: G에서 길이가 가장 짧은 해밀토니안 사이클의 길이는 얼마인가?

◈ [정리 13-8]
- 최적화 TSP는 NP-하드이다.

최종 정리

◈ P, NP, NP-완비, NP-하드의 포함 관계

결정
문제만
포함



최적화
문제도
포함

그림 13-14 P, NP, NP-완비, NP-하드의 포함 관계를 나타내는 그림 (P 부분은 추정)

- NP-하드는 최적화 문제까지 포함함
- 최적화 문제는 NP 집합에 들어올 수 없음
- 따라서, NP-하드 문제들은 NP에 속할 수도 있고 아닐 수도 있음
- NP-완비 문제들은 NP 문제들 중에서 NP-하드에 속하는 문제들
- 모든 NP 문제들로 부터 다항식 시간에 NP-하드 문제들로 변환가능
- P는 NP에 속할 것이라고 강력히 추정
- "P = NP or P ≠ NP" 증명이 안되어 있는 백만불짜리 문제

Questions & Answers