LTUFPJ

soluciones

Emmanuel Buenrostro

June 20, 2022

EGMO 2022 P4, Induccion

> **Problem** (EGMO 2022/4)**.** Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que
>
> - $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y
> - $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$.

Solution. Vamos a definir $b_k = a_k + a_{k-1}$ Vamos a probar por inducción que $N \leq n$. Para $n = 2$ tenemos que $\frac{1}{2}b_2 = a_2 - a_0 = b_2 - b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{b_2}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = 1$, entonces si $N \geq 3$ tenemos que $b_3 = b_3 - b_2 = b_3 - 1$ que es una contradicción, entonces para $n = 2$ si se cumple.

Ahora asumimos que para $n = k-1$ se cumple entonces para $n = k$ tenemos que

$$(b_1)(b_2) = b_1 - b_2 \Rightarrow \frac{b_2}{n} = b_2 - b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{b_2(n-1)}{n} \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{n-1}$$

entonces si para $n = k-1$ es maximo $k-1$, la cantidad de números que van a seguir desde b_2 van a ser maximo $k-1$, entonces contando a b_1 el maximo de N cuando $n = k$ es k.

Asi que concluimos que $N \leq n$ $\square$