

LTUFPJ

Lista Toda Ultra Fabulosa Pro

EMMANUEL BUENROSTRO

June 11, 2022

Problem (Baja California TST 2019/5). En cada celda de una cuadrícula de $n \times n$ ($n \geq 3$) se escribe un número entre 0 y n (ambos incluidos), de manera que la suma de cada cuadrado posible de 2×2 es distinta. Encuentra todos los números n para los cuales se puede llenar la cuadrícula de esta forma.

Solución

Hay en total $(n-1)^2$ cuadros de 2×2 , y podemos tener como suma cualquier número desde 0 a $4n$, entonces si $(n-1)^2 > 4n+1$ por principio de casillas va a haber al menos una suma repetida. Entonces

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \leq 4n + 1 \Rightarrow n(n-6) \leq 0 \Rightarrow n \leq 6$$

Así que los únicos posibles serían 3, 4, 5, 6, para $n=3$ tomamos el cuadro 3×3 superior izquierdo de la siguiente cuadrícula, de manera similar para $n=4, 5$

0	0	1	1	2
0	0	0	0	0
2	2	3	3	4
2	3	3	3	4
4	4	5	5	5

Donde en la siguiente tabla los números representan la suma del cuadrado con esa celda como casilla inferior derecha.

	0	1	2	3
	4	5	6	7
	9	11	12	14
	13	15	16	17

Y para $n=6$ tenemos que

0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
5	0	5	0	6	1
5	0	6	1	6	1
5	5	5	5	6	6
5	5	6	6	6	6

Donde en la siguiente tabla los números representan la suma del cuadrado con esa celda como casilla inferior derecha.

	0	1	2	3	4
	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24

Entonces los unicos posibles son $\{3, 4, 5, 6\}$