Leyes de Exponentes

Emmanuel Buenrostro, Abraham Gómez

27 de Abril de 2022

Contents

§1 Que es un Exponente

Un exponente a^n con $n \in \mathbb{N}$ es multiplicar a n veces. Por ejemplo $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

§2 Multiplicación

Theorem 2.1 (Multiplicacion de Exponentes con la misma base)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para demostrar esto vamos a ver que

$$a^m = a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a$$

con m veces mutliplicando las $a's$.
Y de igual manera

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a$$

con n veces mutliplicando las $a's$.

Y entonces al mutliplicar $a^m \cdot a^n$ tenemos que es

$$a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a)$$

Donde esta m veces en el primer parentesis y n veces en el segundo parentesis. Para tener $m+n$ veces la a multiplicada, para que sea a^{m+n}■

> **Remark 2.2.** Recuerda que para que esto funcione tiene que ser la misma base, es decir no puedes decir $5^3 \cdot 4^2 = 5^{3+2}$

Example 2.3
Simplifica $(p+q)^5 \cdot (p+q)^4$.

Entonces simplemente seria $(p+q)^5 \cdot (p+q)^4 = (p+q)^{5+4} = (p+q)^9$

§3 Division de Exponentes, Elevar a la 0 , Exponentes negativos y Elevar Fracciones

Theorem 3.1 (Division de Exponentes de la misma base)
Si tenemos una fraccion de exponentes $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Para demostrar esto tenemos que ver que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}$$

Con m veces la a en el numerador y n veces en el denominador. Entonces se cancelan n veces la a en el numerador y quedan solo $m-n$ veces la a y con eso concluimos .

Theorem 3.2 (Elevar a la 0)
Para cualquier $a \neq 0$ tenemos que $a^0 = 1$

Para demostrar esto solo tenemos que simplificar $\frac{a^m}{a^m} = 1$ que por el teorema 2.1 tenemos que es igual a $a^{m-m} = a^0$. Entonces tenemos que $a^0 = 1$.

Theorem 3.3 (Exponentes negativos)
Si tenemos $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Pero que sucede si $n > m$ tenemos que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}$$

Donde se anularon m veces la a y quedaron $n-m$ veces multiplicado la a en el denominador. Entonces si tenemos

$$\frac{1}{a^{n-m}} \cdot a^{n-m} = 1 = a^0$$

. Y por el teorema 1.1 tenemos que si $\frac{1}{a^{n-m}} = a^x$. Entonces $a^x \cdot a^{n-m} = 0 \longrightarrow x+n-m = 0 \longrightarrow x = m-n = -(n-m)$. Y entonces demostramos que $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

Example 3.4

Simplifica $\frac{(p+q)^5 \cdot (p+q)^4}{(p+q)^6}$

Entonces tenemos que $(p+q)^5 \cdot (p+q)^4 = (p+q)^{5+4} = (p+q)^9$ y entonces $\frac{(p+q)^9}{(p+q)^6} = (p+q)^3$

Theorem 3.5 (Elevar Fracciones)

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$$

Esto se demuestra facilmente viendo que si multiplicas $\frac{a}{b}$ n veces al juntar todos los factores en el númerador tienes n veces la a que termina siendo a^n y en el denominador de igual manera tienes b^n.

§4 Elevar exponentes

Theorem 4.1 (Elevar un exponente a otro exponente)

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Tenemos que a^m son m veces la a multiplicada.
Además $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m \cdot a^m$. Entonces aparecen n veces a^m. Entonces aparecen n veces m veces a. Y es claro que aparecen mn veces la a. Y se llega a que es lo mismo que a^{mn}.

Example 4.2

Simplifica $(\frac{3x^5y^4}{x^5y^2})^2$

Podemos ver que $\frac{3x^5y^4}{x^5y^3} = 3 \cdot \frac{x^5}{x^5} \cdot \frac{y^4}{y^2} = 3y^2$. Y entonces al elevarlo al cuadrado tenemos que es $(3y^2)^2 = 3^2 \cdot (y^2)^2 = 9y^4$

§5 Radicales

Definition 5.1. $\sqrt[n]{a}$ es un número tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$

§5.1 Propiedades Basicas

Theorem 5.2 (Exponentes Fraccionarios)

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Esto se demuestra usando que $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Entonces si $\sqrt[n]{a^m} = a^x$. Tenemos que $(a^x)^n = a^{xn} = a^m$. Entonces $xn = m \longrightarrow x = \frac{m}{n}$.

Theorem 5.3 (Multiplicacion de Raices)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

La demostracion es

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$$

Y tenemos que $\sqrt[n]{ab}$ es un número tal que al elevarlo a la n da ab y entonces se cumple la propiedad.

Theorem 5.4 (Raices de Raices)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Tenemos que $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ por el teorema 5.2.
Entonces $\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{\frac{1}{m}}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

Theorem 5.5 (Raiz de Fracciones)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Este es un caso particular de la propiedad 3.5 donde en vez de n usamos $\frac{1}{n}$.

Example 5.6
Simplifica

$$(\frac{-32m^{10}}{243n^{15}})^{\frac{-2}{5}}$$

Por la propiedad 5.2 tenemos que

$$(\frac{-32m^{10}}{243n^{15}})^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{(\frac{-32m^{10}}{243n^{15}})^{-2}}$$

Por la propiedad 3.3 tenemos que

$$\sqrt[5]{(\frac{-32m^{10}}{243n^{15}})^{-2}} = \sqrt[5]{(\frac{243n^{15}}{-32m^{10}})^{2}} = \sqrt[5]{\frac{243^2n^{30}}{32^2m^{20}}}$$

Usando que $243 = 3^5$ y $32 = 2^5$ tenemos que

$$\sqrt[5]{\frac{243^2n^{30}}{32^2m^{20}}} = \sqrt[5]{\frac{3^{10}n^{30}}{2^{10}m^{20}}}$$

.

Por la propiedad 5.5 tenemos que

$$= \sqrt[5]{\frac{3^{10}n^{30}}{2^{10}m^{20}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{10}n^{30}}}{\sqrt[5]{2^{10}m^{20}}}$$

.

Y al finalizar por la propiedad 5.2 tenemos que

$$= \frac{\sqrt[5]{3^{10}n^{30}}}{\sqrt[5]{2^{10}m^{20}}} = \frac{3^2n^6}{2^2m^4} = \frac{9n^6}{4m^4}$$

.

§5.2 Simplificar raices

Para simplificar fracciones es aplicar de cierta manera la propiedad 5.3:

Theorem (Multiplicacion de Raices)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Donde separamos en potencias que al simplificarlas queden terminos que no esten dentro de un radical

Example 5.7
Simplifica $\sqrt[4]{x^5}$

Lo que hacemos en este caso es ver que $\sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x} = x\sqrt[4]{x}$

Remark 5.8. Recuerda que para poder aplicar esto tienen que ser la misma raiz es decir no puedes separar en raiz cuadrada y cubica.

§5.3 Suma de raices con distintas bases

Para hacer esto tenemos que poder simplificar las raices, y lo que vamos a tratar de hacer es volver todas con un termino comun por ejemplo $\sqrt{3}$.

Example 5.9

$$-8\sqrt{12} + \sqrt{3}$$

Podemos ver que $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
Entonces $-8\sqrt{12} + \sqrt{3} = -8(2\sqrt{3}) + \sqrt{3} = -15\sqrt{3}$.
Pero tambien puede ser con incognitas

Example 5.10

$$\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{-x}$$

Podemos ver que $\sqrt[3]{8x^4} = \sqrt[3]{8x^3} \cdot \sqrt[3]{x} = 2x\sqrt[3]{x}$. Además tenemos que $\sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x}$. Entonces

$$\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{-x} = (2x - 1)\sqrt[3]{x}$$

.

§5.4 Simplificacion't

Puede que para tener una expresion más simple tengamos que meter en radicales con exponentes mas grandes, usando el mcm para tener terminos donde sea el mismo exponente en el radical.

Example 5.11

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}}$$

Lo que tenemos que hacer es ver que el $\text{mcm}(3,2) = 6$. Entonces tenemos que llevar a eso los radicales.
Podemos ver que $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}^2} = \sqrt[6]{25}$
Y de manera analoga $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$. Entonces

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}} = 3\frac{\sqrt[6]{25}}{\sqrt[6]{27}} = 3\sqrt[6]{(\frac{25}{27}}$$

.
Otro ejemplo pero ahora con multiplicacion es

Example 5.12

$$\sqrt[3]{4x^4y^2}\sqrt{6x^3}$$

Vamos a hacer lo mismo, $\sqrt[3]{4x^4y^2} = \sqrt[6]{16x^8y^4} = x\sqrt[6]{16x^2y^4}$
$\sqrt{6x^3} = \sqrt[6]{216x^9} = x\sqrt[6]{216x^3}$.
Entonces la multiplicacion de estas es

$$x^2\sqrt[6]{2^7 \cdot 3^3 \cdot x^5 \cdot y^4} = 2x^2\sqrt[6]{54x^5y^4}$$