Camino a ONMAPS 2022

solución a todos los nacionales exceptuando 2020 de 3s

Emmanuel Buenrostro

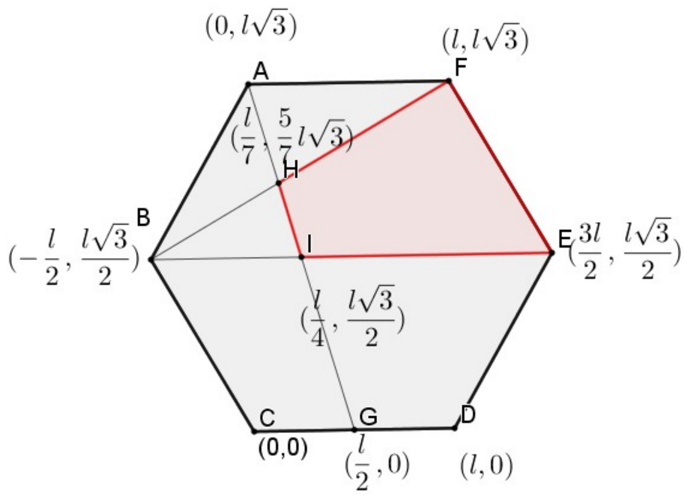
June 15, 2022

P3, Área de un cuadrilatero usando analitica

Problem (ONMAPS 2021/3)**.** Dibuja un hexagono regular $ABCDEF$ y marca el punto G sobre el arista CD de modo que sea el punto medio de ese lado de hexagono. Traza los segmentos AG, BE y BF. Llamemos H al punto de intersección de AG con BF e I al punto de intersección de AG con BE.
Si se sabe que el área del hexagono $ABCDEF$ es 840, calcula el área del cuadrilatero $EFHI$.

Solution. Vamos a usar analitica, vamos a definir x_P la coordenada x del punto P y de igual manera y_P es la coordenada y del punto P, ejemplo las coordenadas del punto C es (x_C, y_C).

Entonces vamos a acomodar el hexagono de manera que $C = (0,0), D = (l,0)$ donde l es el lado de hexagono.



Si dividimos el hexagono en 6 triangulos equilateros iguales nos da que la altura de este es $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ por Pitagoras, entonces $y_B = y_E = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ y $y_A = y_F = l\sqrt{3}$

Además como ABC y DEF soon isosceles y $\angle ABC = \angle FED = 120$ entonces $\angle BAC = \angle EFD = 30$, entonces usando el triangulo notable $30, 60, 90$ tenemos que $x_C - x_B = x_E - x_D = \frac{l}{2} \Rightarrow x_B = -\frac{l}{2}, x_E = \frac{3l}{2}$

Por otro lado tenemos que $\angle FAC = 120 - \angle BAC = 90$ y de manera analoga $\angle AFD = 90$ entonces $AFCD$ es un rectangulo y como CD esta en el eje x entonces $x_A = 0, x_F = l$. Por hipotesis $G = (\frac{l}{2}, 0)$ entonces la pendiente de la recta AG es

$$m_{AG} = \frac{y_A - y_G}{x_A - x_G} = \frac{l\sqrt{3}}{-\frac{l}{2}} = -2\sqrt{3}$$

Entonces la ecuacion de la recta AG es $y = -2\sqrt{3}x + z_{AG}$ y para $x = 0, y = l\sqrt{3}$ entonces $z_{AG} = l\sqrt{3}$ asi que la ecuacion de la recta AG es

$$y = -(2\sqrt{3})x + l\sqrt{3}$$

Ahora vamos a sacar la pendiente de la recta BF ,

$$m_{BF} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{3l}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces la ecuacion de la recta BF es $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + z_{BF}$ y cuando $x = l, y = l\sqrt{3}$ entonces $z_{BF} = l\sqrt{3} - \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$.
Entonces la ecuacion de la recta BF es

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

Ahora para la linea BE como ambos puntos tienen la misma coordenada y entonces es una linea recta paralela al eje x entonces la ecuacion de la linea BE es

$$y = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Entonces la intersección de AG con BF es H asi que

$$-(2\sqrt{3})x_H + l\sqrt{3} = \frac{x_H + 2l}{\sqrt{3}} \Rightarrow -6x_H + 3l = x_H + 2l \Rightarrow 7x_H = l \Rightarrow x_H = \frac{l}{7}$$

Entonces $y_H = l\sqrt{3}(-\frac{2}{7} + 1) = \frac{5l\sqrt{3}}{7}$, asi que $H = (\frac{l}{7}, \frac{5l\sqrt{3}}{7})$

Ahora para sacar el punto$I$ tenemos que $y_I = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ entonces

$$-(2\sqrt{3})x_I + l\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x_I\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4x_I = l \Rightarrow x_I = \frac{l}{4}$$

Entonces el área de $EFHI$ es

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \frac{l}{7} & \frac{5l\sqrt{3}}{7} \\ l & l\sqrt{3} \\ \frac{3l}{2} & \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ \frac{l}{4} & \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ \frac{l}{7} & \frac{5l\sqrt{3}}{7} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|l^2\sqrt{3}(\frac{8 + 28 + 42 + 10 - 4 - 7 - 84 - 40}{56})| = \frac{|l^2\sqrt{3}(-\frac{47}{56})|}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}\frac{47}{56}}{2}$$

y como el área dees hexagono es 840, entonces $\frac{3}{2}l^2\sqrt{3} = 840 \Rightarrow l^2\sqrt{3} = 560$
Entonces al área requerida es

$$\frac{560 \cdot \frac{47}{56}}{2} = \frac{470}{2} = 235$$

$\square$