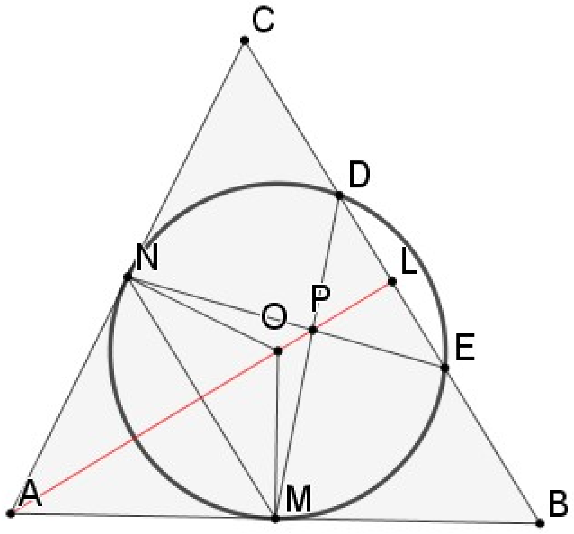
LTUFPJ

Soluciones

Emmanuel Buenrostro

June 13, 2022

Problem 0.1 (2017 Baja California TST 4/5)**.** Sea Γ una circunferencia y sea ABC un triángulo tal que Γ es tangente a AB y AC en sus puntos medios: M y N respectivamente. Sean D y E las dos interseccions de Γ con el segmento BC. Prueba que DM, NE y la altura desde A concurren.



Solution.
Por pitagoras podemos ver que $AM^2 = AO^2 - OM^2 = AO^2 - ON^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN \Rightarrow AB = AC$, entonces la altura por A es la mediatriz de BC y a la vez de MN,debido a que por angulos entre paralelas la altura desde A tambien es perpendicular a MN y $AM = AN$.

Sea P la intersección de DM y NE, como BC y NM son paralelas por Tales, tenemos que

$$\angle PNM = \angle ENM = \angle NED, \angle PMN = \angle DMN = \angle MDE$$

. Además por definición, $DEMN$ es ciclico, entonces

$$\angle ENM = \angle MDE = \angle PDE$$

. Usando estas dos tenemos que

$$\angle PNM = \angle ENM = \angle MDE = \angle PMN$$

Entonces PMN isosceles y entonces P esta en la mediatriz de MN que es justo la altura desde A, entonces concluimos el problema. $\square$