ONMAPS 2017 16 Emmanuel Buenrostro Briseño Hoja 1/2

Tenemos que

$$A+B=q^3$$
$$A-B=p^2$$

para algunos primos p, q.

Sumando las ecuaciones tenemos que $2A=p^2+q^3 \Rightarrow A=\frac{p^2+q^3}{2}$

Y sustituyendo $\frac{p^2+q^3}{2}+B=q^3 \Rightarrow B=\frac{q^3-p^2}{2}$.

Ahora por contradicción si $x^2=AB$ con x positivo, entonces

$$x^2=AB=\frac{(q^3+p^2)(q^3-p^2)}{4}=\frac{q^6-p^4}{4} \Rightarrow 4x^2=q^6-p^4 \Rightarrow q^6-4x^2=p^4$$
$$=(q^3-2x)(q^3+2x)$$

- Tenemos que $0<q^3-2x\leq q^3+2x$

porque $\underset{>0}{(q^3}+\underset{\geq 0}{2x)}>0$ y $(q^3-2x)(q^3+2x)>0$

- Asi que hay ~~cuatro~~ tres casos

- $q^3-2x=1 \Rightarrow 2x=q^3-1$ y $\underset{=4x+1}{q^3+2x}=p^4 \Rightarrow 4x+1=p^4 \Rightarrow 2x=\frac{p^4-1}{2}$

Entonces $2x=q^3-1=\frac{p^4-1}{2} \Rightarrow 2q^3-1=p^4 \Rightarrow q^3=\frac{p^4+1}{2}$

Asi que $A=\frac{p^2+q^3}{2}=\frac{p^2+\frac{p^4+1}{2}}{2}=\frac{p^4+2p^2+1}{4}=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ una contradicción.

- $q^3-2x=p \Rightarrow 2x=q^3-p \quad q^3+2x=p^3 \Rightarrow 4x+p=p^3 \Rightarrow 2x=\frac{p^3-p}{2}$

Entonces $2x=q^3-p=\frac{p^3-p}{2} \Rightarrow 2q^3=p^3+p=p(p^2+1)$ Asi que $p\mid 2q^3$

Por lo que $p\mid 2$ o $p\mid q^3 \Rightarrow p=2$ o $p=q$

Si $p=2$ entonces

$$2q^3 = 2(2^2+1) = 10$$

$q^3 = 5$ no posible en enteros

Hoja 2/2

Si $p=q$ entonces

$$p^6 - p^4 = 4x^2$$

$$= p^4(p^2-1) = 4x^2 \Rightarrow (p^2-1) = \frac{(2x)^2}{(p^2)^2}$$ p^2-1 es cuadrado entonces

$(p-1)(p+1)$ es cuadrado entonces $p-1=1$ y $p+1$ es cuadrado o $p-1$, $p+1$ son ambos cuadrados

si $p-1=1 \Rightarrow p=2$ $p+1=3$ no cuadrado

si $p+1-p-1=2$ 2 es diferencia de cuadrados pero como $p-1$ y $p+1$ son ambos pares cuadrados, ya que son primos y no pueden ser 2, así que son múltiples de 4 y su diferencia también pero $4 \nmid 2$.

Entonces este caso no se puede.

$$q^3 - 2x = q^3 + 2x = p^2$$

$$q^3 - 2x + q^3 + 2x = 2p^2 \Rightarrow q^3 = p^2$$ Lo cual es una contradicción

$$= 2q^3$$

ya que $p \mid q^3 \Rightarrow p \mid q \Rightarrow p = q$

y $p^3 = p^2 \Rightarrow p = 1$ y 1 no es primo.

Entonces siempre es contradicción concluyendo el problema.