LTUFPJ 1

Lista Toda Ultra Fabulosa Pro

Emmanuel Buenrostro y Hector Franco

July 7, 2022

§1 Lista 1

Problem 1.1 (2022 OMCC Mexico TST 1/1)**.** Sea ABC un triángulo. La bisectriz del ángulo BAC corta al lado BC en E y corta al circuncírculo de ABC en D. Sea P un punto en el interior del triángulo ABE, y sea X el punto de intersección de las rectas BD y CP. Muestra que $APEC$ es ciclico si y solo si $APBX$ es ciclico.

Problem 1.2 (PAGMO 2021/3)**.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene la igualdad

$$f(x + yf(x + y)) + xf(x) = f(xf(x + y + 1)) + y^2$$

Problem 1.3 (ONMAPS 2019/5)**.** En el pizarron esta escrito el número 2019, dos mil diecinueve veces en línea. Se van a borrar todos los dígitos menos cuatro, de manera que los cuatro dígitos que sobren sean $2, 0, 1, 9$, en ese orden. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?

Problem 1.4 (ONMAPS 2019/2)**.** Los números $p < q < r < s$ son cuatro números primos tales que

$$p^2 + q + s = pqr$$

y

$$rs - 1 = pq + p^2q^2 + p^3q^3$$

Encuentra el valor de $p^2qs - 1$

Problem 1.5 (2015 Baja California TST 4/ 5)**.** Sean a, b, c, reales positivos tales que: $a + b + c = 6$ y $abc = 3$, demuestra que:

$$\frac{1}{a(b + c)} + \frac{1}{b(a + c)} + \frac{1}{c(a + b)} \leq 1$$

y encuentra cuándo se da la igualdad.

Problem 1.6 (2012 Baja California TST 4/3)**.** Dados enteros a y b, muestra que el número

$$(a + \frac{1}{2})^n + (b + \frac{1}{2})^n$$

es entero solamente para un número finito de enteros $n \geq 0$

Problem 1.7 (2015 Baja California TST 4/ 3 **).** Sea ABC un triángulo con $AB = BC$ y $\measuredangle CBA = 30$, y sean D el pie de altura desde A y M el punto medio de BC. Llamamos P al pie de la perpendicular desde M hacia la paralela a BC por A. El segmento MP cruza a la altura desde B hacia AC en R. Encuentra el valor de $\frac{RB}{RP}$.

Problem 1.8 (OMCC 2003/1 **).** A y B juegan por turnos con un conjunto de 2003 monedas. En cada turno está permitido quitar una cantidad de monedas que sea divisor de la cantidad de monedas que hay. Pierde el que quita la última moneda. Si A inicia, ¿quién tiene la estrategia ganadora?

§2 Lista 2

Problem 2.1 (ONMAPS 2019/S3/3). Se tiene un triángulo equilátero de papel cuyo lado mide 2019. En cada una de las tres esquinas se va a recortar un triángulo equilátero cuyo lado tenga longitud entera. Estos tres triángulos pueden medir distinto. El triángulo recortado de la esquina de arriba se punta de dorado, el triángulo recortado de la esquina izquierda se pinta de plateado y el recortado de la esquina derecha se pinta de negro. ¿De cuántas formas se pueden hacer los cortes?

Problem 2.2 (Olimpiada de Mayo 2021/2). Sea N un entero positivo. Un divisor de N es propio si es mayor que 1 y menor que N. Por ejemplo, $2, 3, 6$ y 9 son todos los divisores propios de 18.
Un entero positivo es especial si tiene al menos dos divisores propios y es multiplo de todas las posibles diferencias entre dos de ellos. Determinar todos los enteros positivos que son especiales.

Problem 2.3 (Olimpiada de Mayo 2021/5). Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos $n_1, n_2, \dots, n_{100}$ tales que $\frac{n_1^3+n_2^3+n_3^3+\ldots+n_{100}^3}{100}$ es un cubo perfecto.

Problem 2.4 (APMO 2022/1). Encuentra todos los pares (a, b) de enteros positivos tales que a^3 es multiplo de b^2 y $b-1$ es multiplo de $a-1$.

Problem 2.5 (ONMAPS 2019/6). Sea ABC un triangulo tal que $AB = AC$ y $\angle BAC = 20°$. La bisectriz del $\angle ABC$ intersecta a AC en D. Si O es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C, calcula $\angle ADO$.

Problem 2.6 (2012 Baja California TST 4/6). Se tiene un tablero de 5×5 coloreado como ajedrez, con las esquinas negras. En cada casilla negra, hay una ficha negra y en cada blanca una blanca. Las fichas se pueden mover a casillas vecinas (si comparten lado). A y B van a jugar alternadamente de la siguiente manera: primero A escoge una ficha negra y la quita del tablero. Después, A mueve una ficha blanca al espacio vacío. Luego, B mueve alguna ficha negra al espacio vacío. El juego continúa de esta manera hasta que alguno no puede hacer una movida, el cual pierde en ese momento. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

Problem 2.7 (2008 Baja California TST 4/6). Determinar todos los números primos p tales que $5^p + 4p^4$ es un cuadrado perfecto.

Problem 2.8 (OMCC 2001/5). Sean a, b, c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2, q_2, en ese orden, forman una progresión aritmética. Muestre que $a + c = 0$

Problem 2.9 (IGO 2014/J2). El circulo inscrito a $\triangle ABC$ toca a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sean K y L los pies de las perpendiculares con BC desde F y E respectivamente. Sean M, N las segundas intersecciones de estas perpendiculares con el incírculo. Muestra que $\frac{(BMD)}{(CND)} = \frac{DK}{DL}$.

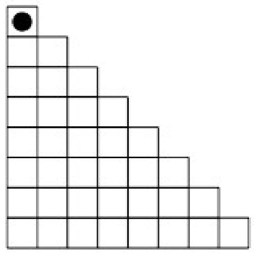
Problem 2.10 (OMCC 2011/3). Aplicar un desliz a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número obtenido se le aplica un desliz, y asi sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que, sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

§3 Lista 3

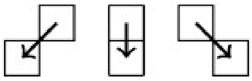
Problem 3.1 (OMCC 2021/5). Sea $n \geq 3$ un número entero y sean $a_1, a_2, \dots a_n$ números reales positivos, tales que m es el menor y M es el mayor entre ellos. Se sabe que para cualesquiera tres enteros distintos $1 \leq i, j, k \leq n$, si $a_i \leq a_j \leq a_k$, entonces $a_i a_k \leq a_j^2$. Demostrar que

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq m^2 M^{n-2}$$

Problem 3.2 (ONMAPS 2018/S3/6). Encuentra el número de maneras en que puedes llevar la ficha que esta en la parte superior de la figura:

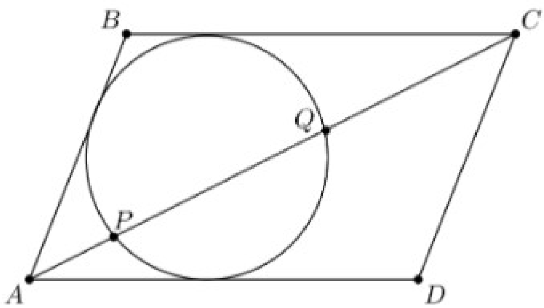


hasta cualquier casilla de la fila inferior, usando únicamente los movimientos



sin usar dos veces consecutivas el mismo movimiento.

Problem 3.3 (Coahuilense 2022/N3/15, AIME 2022/I/11). Sea $ABCD$ un paralelogramo con $\angle BAD < 90°$. Un circulo tangente a los laods DA, AB y BC intersecta a la diagonal AC en los puntos P y Q CON $AP < AQ$, como se muestra la figura. Supongamos que $PA = 3, PQ = 9$ y $QC = 16$. Entonces el área de $ABCD$ se puede expresar en la forma $m\sqrt{n}$, donde m y n son números enteros positivos, y n no es divisible por el cuadrado de ningun numero primo. Encuentra $m + n$.



Problem 3.4 (OMMC Sample Problems 5). Sea n un entero positivo. Sea $\phi(n)$ el numero de enteros positivos menores que n que son primos relativos con n. Si

$$\frac{n^{\phi(n)} + 1}{514}$$

es un entero, encuentra el número maximo de primos que dividen a n.

Problem 3.5 (OMCC 2020/3)**.** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan la siguiente propiedad: para cualesquiera enteros a, b y c tal que $a + b + c = 0$, se tiene que

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2$$

.

Problem 3.6 (2019 Baja California TST 4/5)**.** En cada celda de una cuadrícula de $n \times n$ ($n \geq 3$) se escribe un número entre 0 y n (ambos incluidos), de manera que la suma de cada cuadrado posible de 2×2 es distinta. Encuentra todos los números n para los cuales se puede llenar la cuadrícula de esta forma.

Problem 3.7 (2017 Baja California TST 4/5)**.** Sea Γ una circunferencia y sea ABC un triángulo tal que Γ es tangente a AB y AC en sus puntos medios: M y N respectivamente. Sean D y E las dos interseccions de Γ con el segmento BC. Prueba que DM, NE y la altura desde A concurren.

Problem 3.8 (Argentina IMO TST 2005/5)**.** Sean n, p enteros tal que $n > 1$ y p es primo. Si $n|p - 1$ y $p|n^3 - 1$, muestra que $4p - 3$ es un cuadrado perfecto.

§4 Lista 4

Problem 4.1 (ONMAPS 2021/3)**.** Dibuja un hexagono regular $ABCDEF$ y marca el punto G sobre el arista CD de modo que sea el punto medio de ese lado de hexagono. Traza los segmentos AG, BE y BF. Llamemos H al punto de intersección de AG con BF e I al punto de intersección de AG con BE.
Si se sabe que el área del hexagono $ABCDEF$ es 840, calcula el área del cuadrilatero $EFHI$.

Problem 4.2 (EGMO 2022/4)**.** Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

- $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y
- $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$.

Problem 4.3 (USAJMO 2022/1)**.** Para cuales enteros positivos m existe una sucesion aritmetica infinita de enteros $a_1, a_2, \ldots$ y una sucesion geometrica infinita $g_1, g_2, \ldots$ que satisfagan las siguientes propiedades

- $a_n - g_n$ es divisible por m para todos los enteros $n \geq 1$.
- $a_2 - a_1$ no es divisible por m.

Problem 4.4 (OMCC 2021/3)**.** En un tablero de 2021×2021 casillas coloreamos algunas casillas de negro de tal forma que si ponemos un raton en el centro de cualquier casilla del tablero este puede caminar en linea recta en alguna dirección (arriba, abajo, izquierda o derecha a lo largo de las columnas o filas) y salir del tablero sin pizar ninguna casilla negra (diferente de la inicial si esta es negra). ¿Cuál es la maxima cantidad de casillas que pueden ser coloreadas de negro?.

Problem 4.5 (2018 Baja California TST 4 / 6)**.** Sea un triángulo acutángulo con $AB < AC < BC$, se elige un punto D sobre el segmento BC tal que $\angle BAD = \angle ACB$. Sea E la intersección de la bisectriz del $\angle DAC$ con BC. La perpendicular a AE que pasa por B, interseca a AD en G y a AC en F. Muestra que $BD = DE$ si y solo si $\frac{FC}{GD} = 4$.

Problem 4.6 (USAMO 2011 / 1)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$. Muestra que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3$$

Problem 4.7 (USAJMO 2011 / 1)**.** Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales $2^n + 12^n + 2011^n$ es un cuadrado perfecto

Problem 4.8 (2016 Baja California TST 4 / 3)**.** En la nevería de Clemente se venden nieves de cuatro sabores: chocolate, vainilla, fresa y menta, pero Clemente tiene algunas reglas para vender sus nieves a los clientes frecuentes: - Si un día compras nieve de chocolate o menta, al siguiente día sólo puedes comprar nieve de fresa o vainilla. - Si compras nieve de fresa, al día siguiente no puedes comprar nieve de vainilla o viceversa. Diana es cliente frecuente y quiere comprar una nieve diaria durante una semana. ¿De cuántas formas puede Diana hace esto?

§5 Lista 5: Desigualdades

Problem 5.1 (JBMO 2022/1)**.** Encuentra todos los pares de enteros positivos (a, b) tal que

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

Problem 5.2 (Desigualdades Ejercicio 1.17)**.** [1] Si a, b, c son números positivos, prueba que no es posible que $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ se cumplan todas a la vez.

Problem 5.3 (Baja California TST 2019/6)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Demuestra que

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problem 5.4 (Desigualdades Ejercicio 1.42)**.** Demuestra que si $a, b, c > 0$ entonces

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

Problem 5.5 (OMCC 2020/5)**.** Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales tales que $x_1x_2\cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_k) \geq kP(1)$$

Problem 5.6 (Austrian-Polish Mathematical Competition 2001/3)**.** Sean a, b, c las medidas de los lados de un triángulo. Prueba que

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3$$

Problem 5.7 (OMM 2014/5)**.** Sean a, b, c reales positivos con $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Problem 5.8 (IMO SL 1996/A1)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Problem 5.9 (OMM 2013/5)**.** Una pareja de enteros es *especial* si es de la forma $(n, n-1)$ o $(n-1, n)$. Sean n, m enteros positivos tales que (n, m) no es una pareja especial. Muestra que (n, m) puede expresarse como suma de dos o mas parejas especiales si y solo si

$$m + n \geq (n - m)^2$$

.

Problem 5.10 (Rusia 1992)**.** Sean x, y, z reales positivos, muestra que $x^4 + y^4 + z^2 \geq xyz\sqrt{8}$.

Problem 5.11 (Desigualdades Ejercicio 1.75)**.** Sean a, b, c numeros positivos con $abc = 1$, muestre que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Problem 5.12 (Pan-African MO 2018/5)**.** Sean a, b, c, d reales diferentes de cero distintos por pares, tales que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ y $ac = bd$. Muestra que $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leq -12$ y muestra que -12 es la mejor constante.

[1] Es el libro de la OMM escrito por Radmilla Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega y Rogelio Valdez Delgado