Desigualdades

Emmanuel Buenrostro

July 7, 2022

Contents

§1 Desigualdades Iniciales

§1.1 $x^2 \geq 0$

Theorem 1.1

Para todo número real x se tiene que

$$x^2 \geq 0$$

La igualdad se cumple solo cuando $x = 0$

Esto suele ser muy utiles para algunas desigualdades al transformarlas en desigualdades de este estilo, por ejemplo:

Example 1.2

Demostrar que para $x > 0$, entonces

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Solution. Moviendo la ecuación tenemos que

$$\frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

Lo cual sabemos que es cierto concluyendo el problema. □

§1.1.1 Ejercicios de Practica

Exercise 1.3. Probar que para reales positivos a, b se tiene que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Exercise 1.4. Para reales positivos x, y demuestra que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Exercise 1.5. Demostrar que $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ para toda x real.

§1.2 AM-GM-HM

Theorem 1.6 (AM-GM para 2 números)

Para reales no negativos a_1, a_2 tenemos que

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

La igualdad funciona si y solo si $a_1 = a_2$.

Por ejemplo $a + b \geq 2\sqrt{ab}, a^2 + b^2 \geq 2ab$.
Esta es la demostracion:

Solution. Sabemos que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$
Entonces expandiendo tenemos que

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Con la igualdad cuando $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} = 0$ □

Example 1.7 (Desigualdades Ejercicio 1.17)

[a] Si a, b, c son números positivos, prueba que no es posible que $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ se cumplan todas a la vez.

[a]Es el libro de la OMM escrito por Radmilla Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega y Rogelio Valdez Delgado

Solution. Primero notemos que $(1-a), (1-b)$ y $(1-c)$ son positivos, esto es porque como a, b, c y $\frac{1}{4}$ son positivos entonces como $a(1-b) > \frac{1}{4}$ entonces $a(1-b)$ es positivo asi que $1-b$ es positivo, de manera analoga demostramos las otras.
Ahora vamos a multiplicar las 3 desigualdades que tenemos

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64}$$

Luego aplicamos AM-GM en $a(1-a), b(1-b), c(1-b)$.

$$a(1-a) \leq (\frac{a+1-a}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Entonces sustituimos en la primera desigualdad que tenemos.

$$\frac{1}{64} < a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Pero esto es una contradiccion ya que se llega a que

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{64}$$

Concluyendo el problema □

Theorem 1.8 (AM-GM para n elementos)

Para reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenemos que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

La igualdad funciona si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Example 1.9 (Desigualdades Ejercicio 1.36)

Sean $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Muestre que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq n^2$$

Solution. Por AM-GM tenemos que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Y tambien que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

Entonces sustituyendo tenemos que

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} \geq n(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})(n)(\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}}) = (n)(n)(1) = n^2$$

□

Theorem 1.10 (QM-AM-GM-HM)

Para reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenemos que

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

La igualdad funciona si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Aqui un ejemplo de AM-HM.

Example 1.11 (Baja California TST 2015/ 5)

Sean a, b, c, reales positivos tales que: $a + b + c = 6$ y $abc = 3$, demuestra que:

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a+c)} + \frac{1}{c(a+b)} \leq 1$$

y encuentra cuándo se da la igualdad.

Solution. La desigualdad la multiplicamos abc llegando a esto

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq abc = 3$$

Entonces notemos que

$$\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{\frac{b+c}{bc}} = \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}$$

Y esto ultimo por AM-HM es

$$\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}} \leq \frac{(\frac{b+c}{2})}{2} = \frac{b+c}{4}$$

Y de manera analoga.

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} \leq \frac{a+b}{4}$$

$$\frac{ca}{c+a} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+c}{4}$$

Ahora sustiyendo tenemos que

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{b+c}{4} + \frac{a+c}{4} + \frac{a+b}{4} = \frac{2(a+b+c)}{4} = 3$$

Entonces si se cumple, y para lograr la igualdad tenemos que $a = b = c = \frac{6}{3} = 2$ pero no cumple ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3$, entonces nunca se da la igualdad $\square$

Otro ejemplo pero ahora de GM-AM-QM.

Example 1.12 (Baja California TST 2019/6)
Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Demuestra que

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Solution. Notemos que $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} = \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.
Entonces por AM-GM tenemos que

$$\sqrt{abc} = \sqrt[3]{abc}^{\frac{3}{2}} \leq (\frac{a+b+c}{3})^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

Y ahora por AM-QM tenemos que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} = 3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

Entonces sustituyendo estas dos en la original tenemos que

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\square$

§1.2.1 Ejercicios de Practica

Exercise 1.13. Si $a, b, c \geq 0$ demostrar que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Exercise 1.14. Prueba que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ con a, b, c reales no negativos.

Exercise 1.15. Para x, y reales no negativos prueba que $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$

Exercise 1.16 (Desigualdades Ejercicio 1.42)**.** Demuestra que si $a, b, c > 0$ entonces

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

Problem 1.17 (USAMO 2011 / 1)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$. Muestra que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3$$

§2 Problemas Propuestos

Problem 2.1 (OMCC 2020/5)**.** Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales tales que $x_1x_2\cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_k) \geq kP(1)$$

Problem 2.2 (Austrian-Polish Mathematical Competition 2001/3)**.** Sean a, b, c las medidas de los lados de un triángulo. Prueba que

$$2 < \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3$$

Problem 2.3 (OMM 2014/5)**.** Sean a, b, c reales positivos con $a+b+c=3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Problem 2.4 (IMO SL 1996/A1)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$$

Problem 2.5 (OMM 2013/5)**.** Una pareja de enteros es *especial* si es de la forma $(n, n-1)$ o $(n-1, n)$. Sean n, m enteros positivos tales que (n, m) no es una pareja especial. Muestra que (n, m) puede expresarse como suma de dos o mas parejas especiales si y solo si

$$m+n \geq (n-m)^2$$

.

Problem 2.6 (Rusia 1992)**.** Sean x, y, z reales positivos, muestra que $x^4+y^4+z^2 \geq xyz\sqrt{8}$.

Problem 2.7 (Desigualdades Ejercicio 1.75)**.** Sean a, b, c numeros positivos con $abc = 1$, muestre que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq a+b+c$$

Problem 2.8 (Pan-African MO 2018/5)**.** Sean a, b, c, d reales diferentes de cero distintos por pares, tales que $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} = 4$ y $ac = bd$. Muestra que $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b} \leq -12$ y muestra que -12 es la mejor constante.

§3 Solucion a los Problemas del Capitulo 1

Solución 1.3
Notemos que $(a-b)^2 \geq 0$ Asi que

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Solución 1.4
Tenemos que $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Ahora a ambos lados le sumamos $4xy$, quedando:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Solución 1.13
Notemos que por AM-GM tenemos que

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Y de manera analoga tenemos que

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ab}$$

Ahora multiplicamos esas 3 desigualdades llegando a

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2)(2)(2)(\sqrt{(ab)(bc)(ca)}) = 8abc$$

Solución 1.14
Por AM-GM tenemos que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

Y de manera analoga tenemos que

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$$

$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ac$$

Entonces ahora sumamos las 3 desigualdades llegando a la querida

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Solución 1.15
Es una aplicación directa del 1.14 con $a = x, b = y, c = 1$.
Solución 1.16
Por AM-GM tenemos que

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

Y de manera analoga tenemos que

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

Ahora multiplicando ambas desigualdades tenemos que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (3abc)(3abc) = 9a^2b^2c^2$$

Solución 1.17

La primera condición que nos dan puede ser escrita como $a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$, esta va a ser la desigualdad (1)
Entonces ahora multiplicamos la desigualdad original del problema por 2

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(c+a)^2} \geq 6$$

Esta va a ser la desigualdad (2).
Entonces usando la desigualdad (1) en una parte de (2) tenemos que

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3ab+bc+ca}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2+ab+ac+bc+c^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{(b+c)(a+c)}{(a+b)^2}$$

Eso ocurre de manera analoga para las 3 partes, asi que llegamos a

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(c+a)^2} \geq 3 + \frac{(b+c)(a+c)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(c+b)}{(a+c)^2} + \frac{(b+a)(c+a)}{(b+c)^2}$$

Que por AM-GM llegamos a que

$$3 + \frac{(b+c)(a+c)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(c+b)}{(a+c)^2} + \frac{(b+a)(c+a)}{(b+c)^2} \geq 3 + 3\sqrt[3]{1} = 6$$

Concluyendo el problema