LTUFPJ

soluciones

Emmanuel Buenrostro

July 4, 2022

Problem (USAJMO 2022/1). Para cuales enteros positivos m existe una sucesion aritmetica infinita de enteros $a_1, a_2, \ldots$ y una sucesion geometrica infinita $g_1, g_2, \ldots$ que satisfagan las siguientes propiedades

- $a_n - g_n$ es divisible por m para todos los enteros $n \geq 1$.
- $a_2 - a_1$ no es divisible por m.

Solution. Por hipotesis $a_n \equiv g_n \bmod m)$ para toda $n \geq 1$.
Sea $a_n = k(n-1) + a_1$ y $g_n = x^(n-1)g_1$. Además $k, x \not\equiv 0 \bmod m$.
Además $x \not\equiv 1(m)$ porque entonces todas las g_n tendrian el mismo modulo m, entonces tambien todas las a_n y entonces $k \equiv 0(m)$ una contradicción. Entonces tenemos que

$$g_2 = xg_1 \equiv xa_1 \equiv a_2 = k + a_1 \Rightarrow k \equiv a_1(x-1) \bmod m$$

Vamos a llamar esta ecuacion (1).
Ahora vamos a escribir

$$m = \prod_{i=1}^{z} p_i^{\alpha_i}$$

con p_i primo y $a_i \geq 1$
Ahora notemos que sustituyendo $n = p_i$ para algun i tenemos que

$$a_p = k(p-1) + a_1 \equiv x^{p-1}a_1 \equiv a_1 \Rightarrow -k \equiv 0 \bmod p$$

Asi que

$$(\prod_{i=1}^{z} p_i)|k$$

pero como $k \not\equiv 0(m)$ entonces para algun i se tiene que $a_i \geq 2$, a esta propiedad le llamaremos (2)

Ahora sustituyendo (1) en a_{n+1} tenemos que para $n \geq 2$

$$a_{n+1} = kn + a_1 \equiv a_1(xn - n + 1) \equiv x^n g_1 \equiv x^n a_1 \Rightarrow a_1(x^n - xn + n - 1) \equiv 0 \bmod m$$

Vamos a tomar un $(x-1)$ tal que $(x-1)^2 \equiv 0 \bmod m \wedge x \not\equiv 1 \bmod m$, entonces podemos tomar este valor

$$x - 1 = \prod_{i=1}^{z} p_i^{\lceil \frac{\alpha_i}{2} \rceil}$$

y por (2) $0 < x - 1 < m$.
Ahora vamos a demostrar mediante inducción que $x^n - xn + n - 1 \equiv 0 \text{ mod } m$
Con $n = 2$ tenemos que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \equiv 0 \text{ mod } m$ entonces para $n = 2$ funciona
Entonces para algun $n = y$ asumimos que funciona, entonces para $n = y - 1$ tenemos que

$$n^{y+1} - x(y+1) + y = n^y - xy + y - 1 + (x-1)(x^{y+1} - 1) \equiv (x-1)((\prod_{i=1}^{z} p_i^{\lceil \frac{\alpha_i}{2} \rceil} + 1)^{y+1} - 1)$$

por Binomio de Newton tenemos que

$$\equiv (x-1)((y+1)(\prod_{i=1}^{z} p_i^{\lceil \frac{\alpha_i}{2} \rceil}) + 1 - 1) = (x-1)((y+1)(x-1)) = (x-1)^2(y+1) \equiv 0 \text{ mod } m$$

Entonces queda terminada la inducción, y probando que para todo m con algun $a_i \geq 2$ funciona tomando

$$x - 1 = \prod_{i=1}^{z} p_i^{\lceil \frac{\alpha_i}{2} \rceil}$$

y $k = a_1(x-1)$ para cualquier a_1 □