Intensivo Vacaciones Verano 2022

Muero

EMMANUEL BUENROSTRO

July 13, 2022

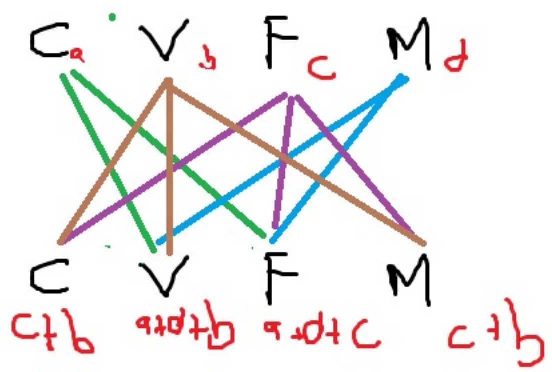
Contents

§1 Semana del 4 al ? Julio

§1.1 (BC TST 2016/3) Una neveria hecha para perder clientes lol

Problem (Baja California TST 2016/3). En la nevería de Clemente se venden nieves de cuatro sabores: chocolate, vainilla, fresa y menta, pero Clemente tiene algunas reglas para vender sus nieves a los clientes frecuentes: - Si un día compras nieve de chocolate o menta, al siguiente día sólo puedes comprar nieve de fresa o vainilla. - Si compras nieve de fresa, al día siguiente no puedes comprar nieve de vainilla o viceversa. Diana es cliente frecuente y quiere comprar una nieve diaria durante una semana. ¿De cuántas formas puede Diana hace esto?

Solution. La redacción del problema puede ser presentada en este esquema donde a, b, c, d son la cantidad de formas en que podemos llegar a Chocolate, Vainilla, Fresa o Menta, respectivamente, entonces al contar un día mas pasa de $(a, b, c, d) \to (b + c, a + d + b, a + d + c, c + b)$.



Entonces comprar helado siete dias es esta tabla

C	V	F	M	
1	1	1	1	
2	3	3	2	
6	7	7	6	
14	19	19	14	
38	47	47	38	
94	123	123	94	
246	311	311	246	$\sum = 1114$

Entonces la respuesta es 1114 □

§1.2 (JBMO 2022/1) Cuando escribir $a = b + x$ funciona

Problem (JBMO 2022/1). Encuentra todos los pares de enteros positivos (a, b) tal que

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

Solution. Notemos que $a > b$ porque de lo contrario $a^3 - b^3$ seria negativo y $11ab$ positivo siendo una contradicción.
Entonces escribimos $a = b + x$ para algun entero positivo x.
Entonces

$$a^3 - b^3 = b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 - b^3 = 3b^2x + 3bx^2 + x^3 \leq 12ab = 12b^2 + 12bx$$

llamemos a esta ecuacion (1)
Entonces por (1) tenemos que

$$0 \leq b^2(12 - 3x) + 3bx(4 - x) - x^3$$

Lo cual no puede ser cierto para $x > 4$ ya que los 3 terminos serian negativos dando una contradicción.
Y para $x = 4$ tenemos que $0 \leq 0 + 0 - 64$ otra contradicción.
Entonces $x = 1, 2$ o 3.

- Para $x = 1$ tenemos que

  $$11b^2 + 11b \leq 3b^2 + 3b + 1 \Rightarrow 8b^2 + 8b - 1 \leq 0$$

  Lo cual es una contradicción ya que $b \geq 1 \Rightarrow 8b^2 + 8b \geq 1$.

- Para $x = 2$ tenemos que

  $$11b^2 + 22b \leq 6b^2 + 12b + 8 \Rightarrow 5b^2 + 10b - 8 \leq 0$$

  Lo cual es una contradicción ya que $b \geq 1 \Rightarrow 5b^2 + 10b \geq 15$.

- Para $x = 3$ tenemos que

  $$11b^2 + 33b \leq 9b^2 + 27b + 27 \Rightarrow 2b^2 + 6b - 27 \leq 0$$

  . Entonces si $b \geq 3 \Rightarrow 2b^2 + 6b \geq 36$ lo cual es una contradicción asi que $b = 1$ o $b = 2$.
  Además tenemos que

  $$9b^2 + 27b + 27 \leq 12b^2 + 36 \Rightarrow 0 \leq 3b^2 + 9b - 27$$

  Si $b = 1$ tenemos que $0 \leq -15$ una contradicción, si $b = 2$ tenemos que $0 \leq 3$.

Entonces la unica posible pareja (a, b) es $(5, 2)$ la cual si funciona.

$$110 < 117 < 120$$

□

§1.3 (ONMAPS 2014/1), Talacha

Problem (ONMAPS 2014/1)**.** Julio hace una lista con los números que cumplen las siguientes condiciones:

- El número es de ocho cifras, todas diferentes.
- Es múltiplo de 8.
- Cada dos cifras adyacentes en el número, forman un nuevo número que es multiplo de 7 o 13.

Encuentra los números de la lista de Julio.

Solution. Vamos a revisar los números que pueden ser multiplo de 7 o 13 de uno o dos digitos, que terminen en cada digito.

Digito	Multiplo de 7	Multiplo de 13
0	70	
1	$21, 91$	91
2	42	52
3	63	13
4	$14, 84$	
5	35	65
6	56	26
7	$07, 77$	
8	$28, 98$	78
9	49	39

Esta va a ser la Tabla 1.
Entonces si el número que queremos es $ABCDEFGH$ como es multiplo de 8 a la vez es de 4, asi que GH es multiplo de 4 y de alguno entre 7 y 13. Entonces GH es alguno de estos $\{28, 56, 84, 52\}$.
Entonces usando la tabla 1 tenemos que FGH puede ser $\{428, 528, 356, 284, 984, 784, 352, 652\}$ no esta 656 porque repite el 6. De esos posibles casos los unicos que son multiplo de 8 son $\{528, 984, 784, 352\}$, asi que FGH es alguno de esos.
Ahora vamos a revisar estos casos con la Tabla 1.
Si $FGH = 528$ entonces podemos llegar a estos casos:

$$63528, 6528, 4913528$$

los cuales no pueden seguir por repetir cifras. De manera analoga: $FGH = 984$:

$$563984, \boxed{65213984}, 5263984$$

$FGH = 784$:

$$0784$$

$FGH = 352$:

$$6352, \boxed{78491352}$$

Entonces todos los posibles son $\{65213984, 78491352\}$

□

§1.4 (Desigualdades Ejercicio 1.17), AM-GM facil

Problem (Desigualdades Ejercicio 1.17). [1] Si a, b, c son números positivos, prueba que no es posible que $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ se cumplan todas a la vez.

Solution. Primero notemos que $(1-a), (1-b)$ y $(1-c)$ son positivos, esto es porque como a, b, c y $\frac{1}{4}$ son positivos entonces como $a(1-b) > \frac{1}{4}$ entonces $a(1-b)$ es positivo asi que $1-b$ es positivo, de manera analoga demostramos las otras.
Ahora vamos a multiplicar las 3 desigualdades que tenemos

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64}$$

Luego aplicamos AM-GM en $a(1-a), b(1-b), c(1-b)$.

$$a(1-a) \leq (\frac{a+1-a}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Entonces sustituimos en la primera desigualdad que tenemos.

$$\frac{1}{64} < a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Pero esto es una contradiccion ya que se llega a que

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{64}$$

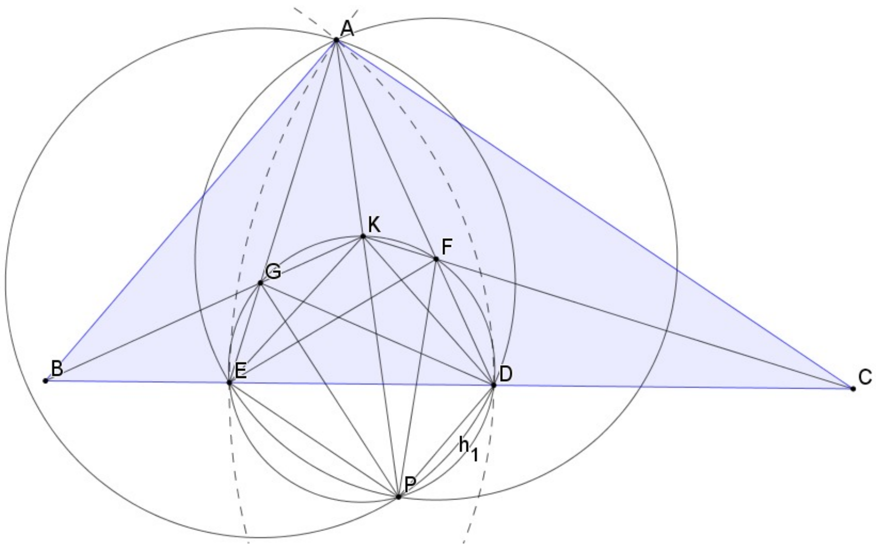
Concluyendo el problema □

[1] Es el libro de la OMM escrito por Radmilla Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega y Rogelio Valdez Delgado

§1.5 (BMOSL 2021/G1) Angle Chasing

Problem (BMOSL 2021/G1). Sea ABC un triangulo con $AB < AC < BC$. En la linea BC estan los puntos D y E tal que $BA = BD$ y $CE = CA$. Sea K el circuncentro del triangulo ADE y sean F, G los puntos de intersección de las lineas AD, KC y AE, KB respectivamente. Sea ω_1 el circuncirculo del triangulo KDE, ω_2 el circulo con centro F y radio FE y ω_3 el circulo con centro G y radio GD. Prueba que ω_1, ω_2 y ω_3 pasan por el mismo punto, y este punto de intersección esta en la linea AK

Solution. Sea P el punto de intersección de ω_1, ω_2.



Lema 1 $EGKFD$ es ciclico
Prueba Notemos que $\angle EKD = 2\angle EAD$, ahora como K es el circuncentro de AED, entonces K esta en la mediatriz de AE, y como $\triangle ACE$ es isosceles C tambien esta en la mediatriz de AE, entonces KC es parte de la mediatriz de AE, asi que F tambien lo es, por lo que $FA = FE \Rightarrow \angle EAF = \angle AEF$.
Llegando entonces a que

$$\angle EFD = \angle EAF + \angle AEF = 2\angle AED = \angle KED$$

Asi que $EKFD$ es ciclico, y de manera analoga $EGKD$ tambien es ciclico concluyendo con lo deseado.

Entonces E, G, K, F, D, P estan en ω_1.

Ahora vamos a escribir estos angulos: $\angle GEK = \theta, \angle KEF = \beta, \angle KED = \alpha \Rightarrow \angle FED = \alpha - \beta$.
Ahora por el isosceles KED tenemos que $\angle KDE = \angle KED = \alpha$, y por angulos inscritos $\angle KDF = \angle KEF = \beta$. Asi que por el isosceles $\triangle FEP$ ya que P esta en el circulo con radio FE y por angulos inscritos tenemos que

$$\angle FEP = \angle FPE = \angle FED = \alpha + \beta$$

Entonces $\angle DEP = \alpha + \beta - \alpha - (-\beta) = 2\beta = \angle PKD$.
Ahora notemos que $\angle EAK = \theta$ y $\angle DAK = \beta$. Asi que

$$\angle EKD = 2\beta + 2\theta \Rightarrow \angle EKP = 2\theta$$

Lo cual hace que como $\angle EKP = \angle AEK + \angle EAK$ entonces A, K y P son colineales.

Ahora notemos que por angulos inscritos tenemos que $\angle GPD = \angle GED = \alpha + \theta$, además $\angle GDE = \alpha - \theta$. Y se tiene que $\angle EDP = \angle EKP = 2\theta$.
Llegando a que

$$\angle GPD = \alpha + \theta = \alpha - \theta + 2\theta = \angle GDE + \angle EDP = \angle GDP \Rightarrow GP = GD$$

Concluyendo en que P esta en ω_3 concluyendo el problema. $\square$

§1.6 (Baja California TST 2019/6) AM-QM

Problem (Baja California TST 2019/6)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

.

Solution. Notemos que $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$.
Entonces por AM-GM tenemos que

$$\sqrt{abc}=\sqrt[3]{abc}^{\frac{3}{2}} \leq (\frac{a+b+c}{3})^{\frac{3}{2}}=(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{27}}$$

Y ahora por AM-QM tenemos que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq 3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}=3\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

Entonces sustituyendo estas dos en la original tenemos que

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leq \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \sqrt{3}=\sqrt{\frac{3}{27}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

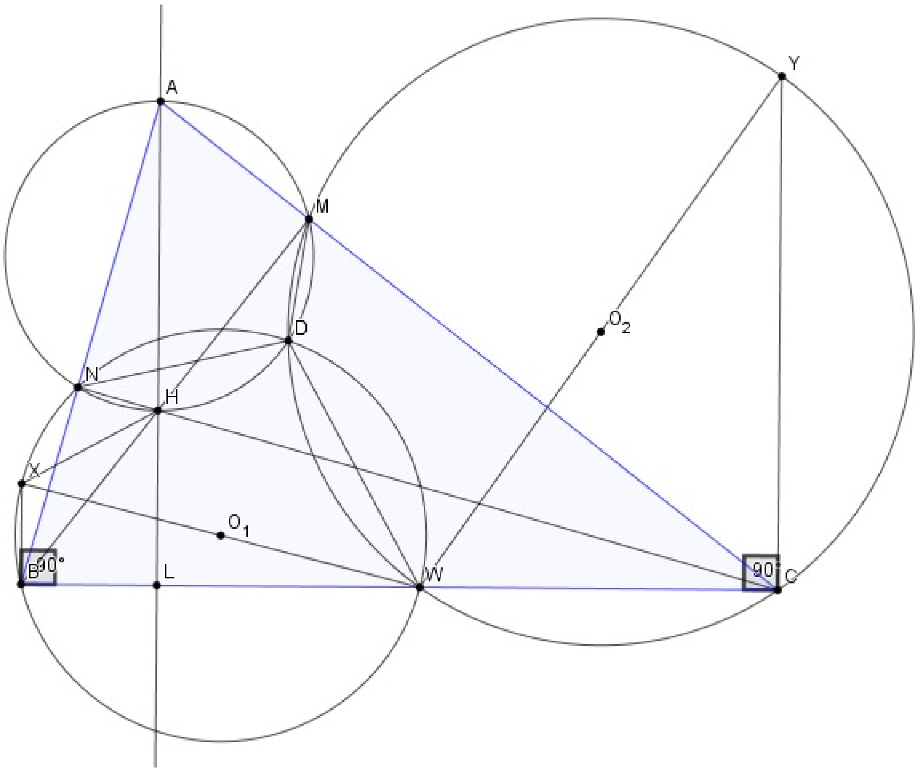
□

§1.7 (Unknow) Punto de Miquel

Problem (Unknow). Sea $\triangle ABC$ acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre BC, entre B y C. Sean M y N los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Sea ω_1 el circuncirculo de $\triangle BWM$ y sea X un punto tal que WX es diametro de ω_1. Similarmente, sea ω_2 el circuncirculo de $\triangle CWM$ y sea Y un punto tal que WY es diametro de ω_2. Pruebe que X, Y, H son colineales

---

Solution. Sean O_1, O_2 los centros de ω_1, ω_2 , D la intersección de ω_1 con ω_2 y L el pie de altura de A.



Es un hecho conocido que $ANHM$ es ciclico, y como D es el punto de Miquel, $ANHMD$ es ciclico.
Como XW, y WY son diametros tenemos que

$$\angle XDW = \angle YDW = 90 \Rightarrow \angle XDY = 180 \Rightarrow X, D, Y \text{ colineales}$$

Entonces lo que queremos demostrar es que H esta en XD, o de otra manera $\angle HDW = 90$.
Ahora por el ciclico $ANHMD$ tenemos que

$$\angle ADH = \angle AMD = 90$$

Por lo que lo que queremos demostrar es igual a demostrar que A, D, W colineales, porque son colineales si y solo si $\angle ADW = 180 \Rightarrow \angle HDW = 90$.

Entonces nombramos a $\angle DWB = \alpha$ asi que si A' es la intersección de DW con AL tenemos que

$$\angle LA'W = \angle LA'D = 90 - \alpha$$

Ahora por el ciclico $BNDW$ tenemos que $\angle BND = 180 - \alpha$ y como $\angle BNH = 90 \Rightarrow \angle HND = 90 - \alpha$. Y entonces por el ciclico $DHNA$ tenemos que

$$\angle LAD = \angle HAD = \angle HND = 90 - \alpha = \angle LA'D$$

Llegando a que $A' = A$ concluyendo el problema. $\square$

§2 11 Julo al ?

§2.1 (IMO SL 1996/A1) Muirhead

Problem (IMO SL 1996/A1)**.** Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Solution. Sabemos que $(5, 0) \succ (3, 2)$ asi que por Muirhead

$$a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2$$

Entonces sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} &\leq \sum \frac{ab}{a^3b^2 + a^2b^3 + ab} \\
&= \sum \frac{1}{a^2b + ab^2 + 1} \\
&= \sum \frac{abc}{a^2b + ab^2 + abc} \\
&= \sum \frac{c}{a + b + c} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

§3 Agradecimientos

A Hector pq si, apoyo moral lqm