LTUFPJ

Soluciones

Emmanuel Buenrostro

June 16, 2022

Problem (Argentina IMO TST 2005/5 **).** Sean n, p enteros tal que $n > 1$ y p es primo. Si $n|p-1$ y $p|n^3-1$, muestra que $4p-3$ es un cuadrado perfecto.

Solution. Tenemos que $p|n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ si $p|n-1$ tenemos que $n \leq p-1$ porque $n|p-1$,se sigue que $p-1 < p \leq n-1$. Entonces $n < n-1$ una contradicción. Entonces $p|n^2+n+1$.
Como $n|p-1 \Rightarrow p-1 = xn \Rightarrow p = xn+1$ para algun entero positivo x, x es positivo porque tanto $p-1$ y n son positivos, tenemos que

$$p|n^2+n+1 \Rightarrow p|n^2+n+1-p = n^2+n(1-x) = n(n-(x-1))$$

Vamos a probar que p no puede dividir a $n-y$ para algun entero no negativo $y < n$. Si esto ocurre tenemos que $p \leq n-y$ pero tenemos que $n \leq p-1 < p$ entonces $n < n-y$ lo cual es una contradicción.
Además $x-1 \leq n$, porque $n^2+n+1 > 0$, entonces $n(n-(x-1)) = n^2+n+1-p \geq 0$ y como $n > 1$ entonces $n-(x-1)$ no es negativo osea que $n-(x-1) \geq 0 \Rightarrow n \geq x-1$
Entonces p no divide ni a n ni a $n-(x-1)$, asi que p no divide a $n(n-(x-1))$, exceptuando cuando $x-1 = n$ porque $n(n-(x-1)) = 0$.
Entonces

$$p = nx+1 = n(n-1)+1 = n^2-n+1 \Rightarrow 4p-3 = 4n^2-4n+4-3 = 4n^2-4n+1 = (2n+1)^2$$

$\square$