LTUFPJ

Lista Toda Ultra Fabulosa Pro

Emmanuel Buenrostro

June 9, 2022

Problem (OMCC 2020/3)**.** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan la siguiente propiedad: para cualesquiera enteros a, b y c tal que $a+b+c=0$, se tiene que

$$f(a)+f(b)+f(c)=a^2+b^2+c^2$$

.

Solución
Llamemos $P(a,b,c)$ a $f(a)+f(b)+f(c)=a^2+b^2+c^2$.

Con $P(0,0,0)$ tenemos que $3f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$.

Con $P(x,-x,0)$ tenemos que $f(x)+f(-x)=2x^2 \Rightarrow f(-x)=2x^2-f(x)$.

Usando $P(-a,-b,a+b)$ tenemos que

$$f(-a)+f(-b)+f(a+b)=2a^2+2b^2+2ab \Rightarrow f(a+b)=2a^2+2b^2+2ab-f(-a)-f(-b)$$

Llamaremos a esta ecuacion $Q(a,b)$.
Usando $Q(1,n-1)$ tenemos que $f(n)=2+2(n-1)^2+2(n-1)-f(-1)-f(-(n-1))=$ $2+2(n-1)^2+2(n-1)+f(1)-2+f(n-1)-2(n-1)^2=2(n-1)+f(n-1)+f(1)$
Ahora mediante induccion vamos a probar que $f(n)=n^2-n+nf(1)$ para $n \geq 1$.
Primero vemos para $n=1$ tenemos que $f(1)=f(0)+f(1)=1^2-1+f(1)$ para el cual se cumple.
Entonces asumimos que para algun $n=k$ funciona. Entonces para $n=k+1$ sucede que $f(k+1)=2k+k^2-k+kf(1)+f(1)=(k+1)^2-(k+1)+(k+1)f(1)$ entonces terminamos la inducción asi que$f(n)=n^2-n+nf(1)$ para n positivo.
Y además tenemos que $f(-n)=2n^2-f(n)=2n^2-n^2+n-nf(1)=n^2+n-nf(1)=$ $(-n)^2-(-n)+(-n)f(1)$.
Entonces para $n \neq 0$ tenemos que $f(n)=n^2-n+nf(1)$, pero esa funcion tambien funciona $n=0$ ya que si sustituyemos $n=0$ tenemos que $0-0+0=0=f(0)$. Asi que

$$f(n)=n^2-n+nf(1)$$

para cualquier valor entero de $f(1)$ y podemos comprobar que esa funcion sirve;

$$f(a)+f(b)+f(c)=a^2-a+af(1)+b^2-b+bf(1)+c^2-c+cf(1)=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)(f(1)-1)$$
$$=a^2+b^2+c^2$$