Введение

Допустим, аргумент функции $y = f(x)$ изменяется на число Δx. Тогда сама функция изменяется на число Δy. Записать это изменение можно следующим образом:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1}$$

Это называется реальным изменением функции при приращении аргумента Δx.

Производная

Производной называется мгновенная скорость изменения функции, т.е. скорость изменения функции за очень короткий промежуток времени.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{2}$$

где Δy – реальное изменение функции (Уравнение 1), а Δx – приращение аргумента функции, стремящееся к нулю.

Поскольку приращение стремится к нулю, но не достигает его, то остается очень маленький остаток. Следовательно, изменение функции при данном приращении можно записать следующим образом:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \tag{3}$$

Здесь линейной частью приращения функции является $f'(x) \cdot \Delta x$.

Дифференциал

Под *дифференциалом* подразумевается линейная часть приращения функции (Уравнение 3).

Запишем Уравнение 3 в новом виде:

$$\begin{gathered} \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \\ \Downarrow \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \end{gathered} \tag{4}$$

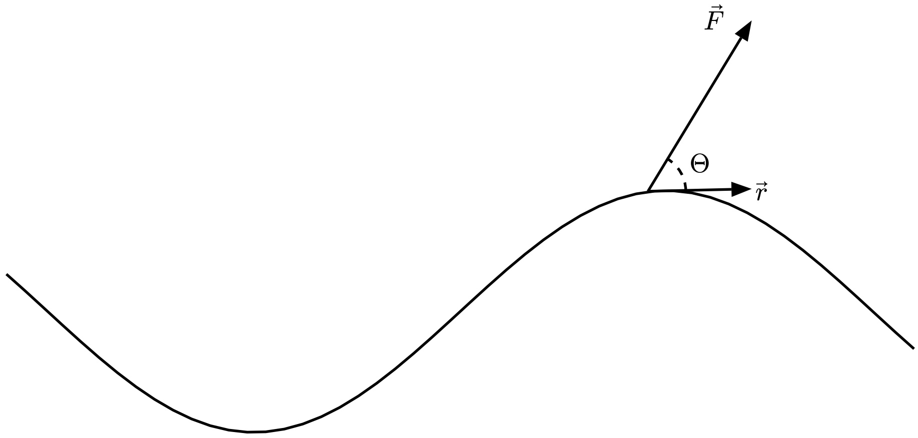
<u>ПРИМЕР</u>

Элементарная работа A, совершаемая силой $\vec{F}$ при бесконечно малом перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$, равна[1]

[1]В данном случае подразумевается скалярное произведение векторов.

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cdot |\mathrm{d}r| \cdot \cos(\Theta) \tag{5}$$

Получается, $\vec{F}$ – это производная функции A. Т.е. за мгновенную скорость изменения работы силы отвечает эта сила.



Когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины, можно (мысленно) разбить весь этот путь на бесконечно малые участки, на каждом из которых сила $\vec{F}$ может считаться постоянной.