EPIDEMIOLOŠKI SIR MODEL

Fran Rukavina, Petra Sočo

Ožujak 2020.

1. SIR model

SIR model širenja zarazne bolesti polazi od toga da promatranu populaciju podijelimo u 3 skupine:

1. $S(t)$ izloženi: dio populacije koji se u svakom trenutku može zaraziti
2. $I(t)$ zaraženi: dio poulacije koji je zaražen, tj onaj dio koji može dalje širiti zarazu
3. $R(t)$ oporavljeni: dio populacije koji je prebolio bolest

Prethodne varijable možemo promatrati i kao udio u ukupnoj promatranoj populaciji veličine N:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \; i(t) = \frac{I(t)}{N} \; r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

U populaciji koju promatramo zanemarujemo imigracije i rađanje, a i pretpostavljamo da je populacija homogena. Iz prethodnih pretpostavki slijedi da nema priljeva u skupinu izloženih. Jedino kako osoba može "napustiti" skupinu 'Izloženi' je tako da "prijeđe" u skupinu 'Zaraženi'. Promjena veličine $s(t)$ ovisi o broju izloženih, zaraženih i količini socijalnog kontakta između te dvije skupine. Ako pretpostavimo da svaki zaraženi pojedinac ima u prosjeku b susreta u danu dovoljnih da se proširi bolest, tada on generira $bs(t)$ novozaraženih. Veličina b ovisi o vjerojatnosti da se netko zarazi u susretu s bolesnim (p) i prosječnoj količini kontakta između izloženih i zraženih $(\bar{c})$, tj. $b = p\bar{c}$. Vidjet ćemo da upravo smanjivanjem druge veličine usporavamo napredovanje epidemije. Treba nam još koeficijent koji mjeri brzinu napuštanja skupine zaraženih, tj. promjenu veličine $i(t)$. Ako je trajanje bolesti u prosjeku d dana, tada imamo $k = d^{-1}$, tj. u prosjeku $1/d$ trenutno zaraženih pacijenata se oporavi. Stoga naš model ima sljedeći oblik sustava diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{ds}{dt} = -bsi \tag{1}$$

$$\frac{di}{dt} = bsi - ki \tag{2}$$

$$\frac{dr}{dt} = bi \tag{3}$$

Budući da jedan zaraženi generira $bs(t)$ novozaraženih, broj izloženih se smanjuje i ovisi o veličini i (tj. više zaraženih, manje izloženih u 1) te prelazi u skupinu zaraženih (predznak + u 2), ali dio pacijenata i ozdravi pa prelazi iz 2 u 3 stopom k. Jedna od pretpostavki modela je da se veličina populacije N ne mijenja i to se vidi zbrajanjem prethodnih jednadžbi, tj. imamo

$$\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = 0$$

Do epidemije dolazi ako se povećava broj zaraženih, tj. $\frac{di}{dt} > 0$

$$bsi - ki > 0$$

$$\frac{bsi}{k} > i$$

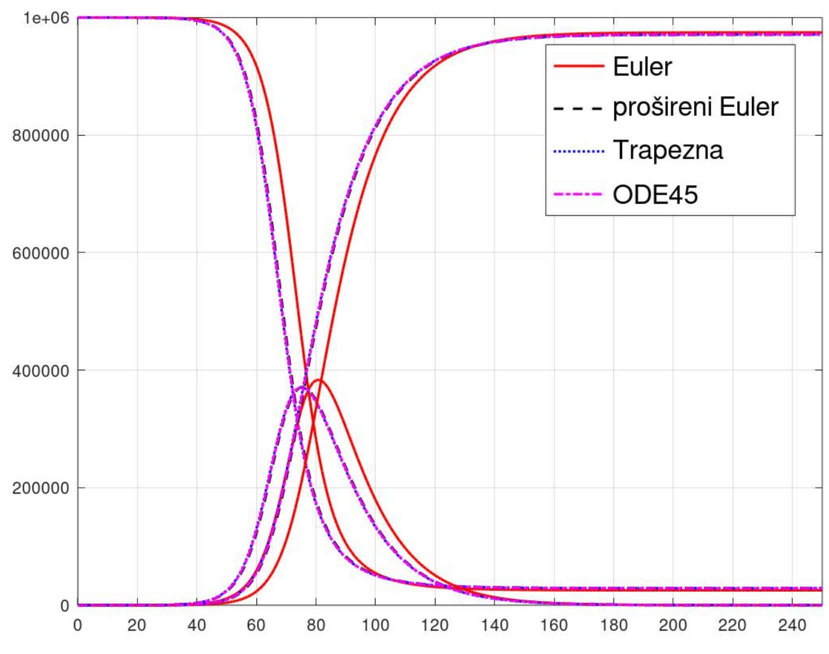
Na početku širenja zaraze skoro cijela populacija je izložena, osim onog dijela koji je već zaražen, tj. uzimamo $s \approx 1$ pa gornji izraz glasi

$$1 < \frac{b}{k} = \mathcal{R}_0$$

$\mathcal{R}_0$ još se zove osnovni reproduktivni broj, a interpretira se kao očekivani broj novozaraženih generiranih s jednim zaraženim u potpuno izloženoj populaciji i ovisi o modelu koji se koristi za predviđanje tijeka epidemije u slučaju da se u populaciji ne provode nikakve dodatne epidemiološke mjere.

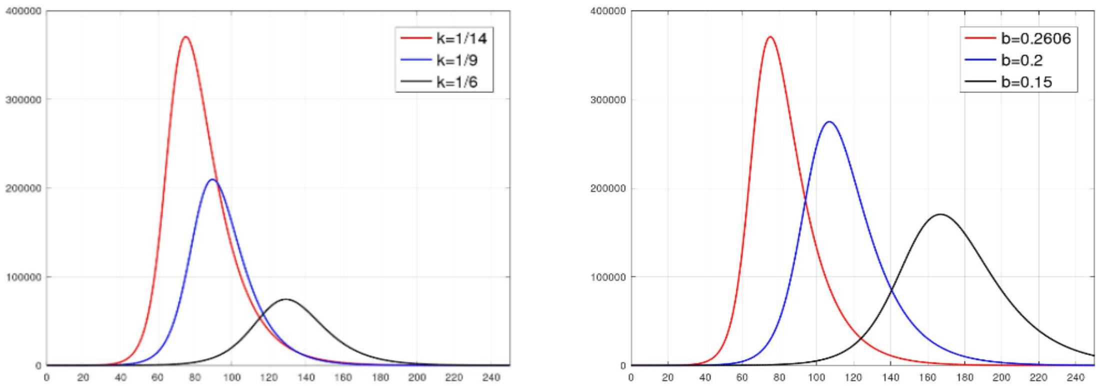
2. COVID-19

Pokušat ćemo primijeniti prethodni model na trenutnu epidemiju novog korona virusa SARS-CoV-2. Želimo najprije usporediti numeričke metode za rješavanje sustava ODJ. Na slici 1 vidimo de se trapezna i proširena Eulerova metoda poklapaju s rezultatima Octave funkcije 'ode45'. Uzimamo da je $i_0 = \frac{2}{N}$ pa početni uvjet glasi $y_0 = [1, \frac{2}{N}, 0]$.



Slika 1: $N = 1000000, b = 0.2606, k = \frac{1}{14}$

Sada mijenjamo vrijednosti jednog koeficijenta dok drugi držimo fiksnim da vidimo kako ta promjena utječe na tijek događaja. Graf funkcije i se bitno mijenja kako variramo koeficijente b i k (slika 2). Za fiksni dio uzimamo koeficijente za COVID-19, tj. u prvom slučaju je $b = 0.2606$, a u drugom je $k = \frac{1}{14}$.



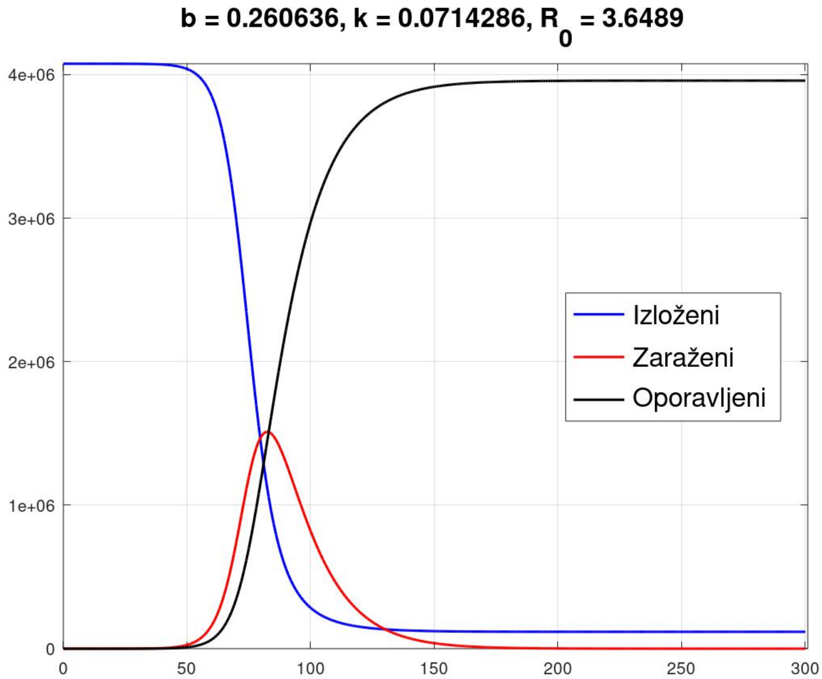
Slika 2: $N = 1000000$

Ako želimo primjerice saznati koliki dio populacije će preboliti bolest, koristimo vrijednost varijable r u trenutku kraja epidemije. U našem primjeru je to $t = 250$ za situaciju na slici 1. Stoga će bolest zahvatiti 97% populacije za $k = \frac{1}{14}$ i 62% za $k = \frac{1}{9}$.

3. Hrvatska

Pokušat ćemo sada provesti ovaj model za situaciju u Hrvatskoj. Koeficijente b i k ne znamo, ali ih možemo pokušati procijeniti. Dok koeficijent k ovisi o vremenu zaraznosti ($k = 1/d = 1/broj\,dana\,koliko\,je\,osoba\,zarazna$) što u prosjeku znači $k \approx \frac{1}{14}$, na koeficijent b utječe više čimbenika. Neke od varijabli koje utječu na b su gustoća stanovništva, kapaciteti i stanje zdravstvenog sustava, socijalne i higijenske navike promatrane populacije i sl. Treba napomenuti da promatramo cijelu populaciju stanovništva države ($N = 4076000$) iako bi možda bilo točnije promatrati gradove ili županije jer bi tada bila bolje zadovoljena pretpostavka modela o homogenosti stanovništva. Razlog tome je što ne uspijevamo za sada naći podatke koji odvajaju te cjeline. Početni uvjet je $y_0 = [1, 2/4076000, 0]$. Pogledajmo sada scenarij bez epidemioloških mjera na slici 3. U tom slučaju udio populacije koji će na kraju epidemije preboliti bolest je 97%, a maksimum broja aktivnih slučajeva je 1511300 što je skoro 40% populacije.

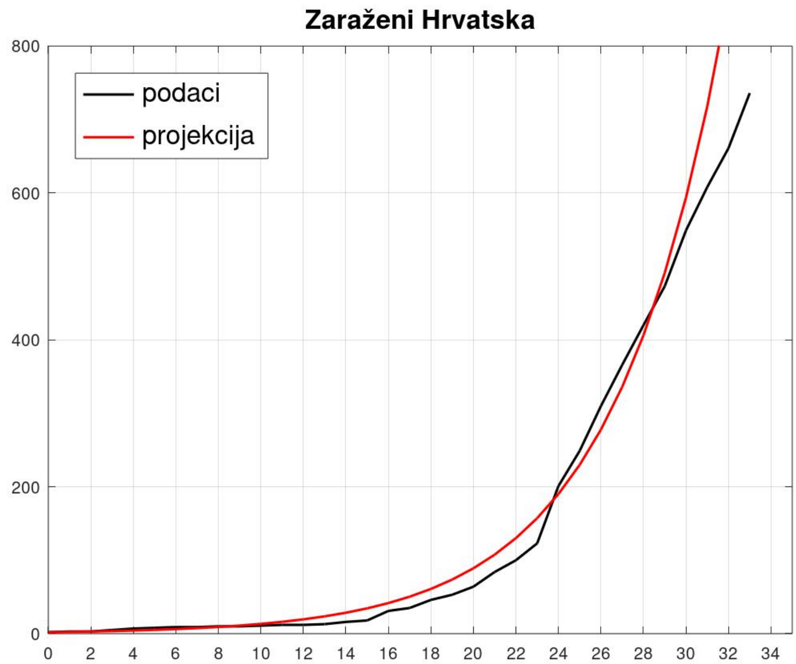
Međutim, u stvarnom scenariju se provode epidemiološke mjere. Neke od njih su zatvaranje javnih ustanova (fakulteti, škole,...), zabrana javnih okupljanja, promicanje važnosti osobne higijene i poticanje na ostanak kod kuće osim u slučaju nužde. Na slici 4 vidimo odstupanje od početnog predviđenog kretanja broja zaraženih s obzirom na stvarne podatke što može značiti da promjena ponašanja u društvu ima utjecaj.



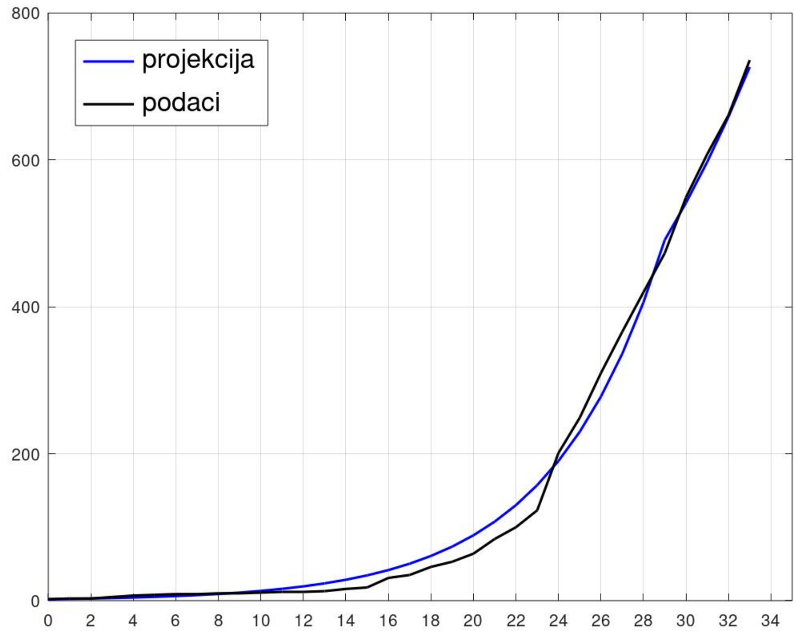
Slika 3: scenarij bez epidemioloških mjera

Stoga ćemo probati prilagoditi koeficijent b promjenama u društvu. Ako pretpostavimo da su dosadašnje promjene rezultirale smanjenjem društvenog kontakta za 35% imamo $b_{novi} = 0.65 b_{stari}$ i primjenjujemo ga u trenutku $t = 30$. Slika5 prikazuje plavom linijom "novu" stopu rasta.

Prethodne promjene nisu predviđanja i ne možemo sa sigurnosti predvidjeti kako će se razvijati trenutna epidemija. Smanjivanje i početnu procjenu koeficijenta, b_{stari} i b_{novi}, možemo shvatiti kao pogađanje budući da smo namještali početnu vrijednost da što bolje opisuje prave podatke, a slično i za drugi koeficijent.



Slika 4: usporedba stvarnih podataka i modela



Slika 5: promjena koeficijenta b u trenutku $t = 30$

Literatura

[1] B.Ridenhour et al. „Unraveling R_0: Considerations for Public Health Applications". *American Journal of Public Health* 104.2 (2014), str. 32–41. DOI: `10.2105/AJPH.2013.301704`.

[2] Lang Moore David Smith. *The SIR model for spread of disease.* URL: `https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/the-sir-model-for-spread-of-disease-the-differential-equation-model`.

[3] PennMedicine. *The CHIME app.* URL: `https://code-for-philly.gitbook.io/chime/what-is-chime/parameters`.

[4] Kevin Simler. *Outbreak simulation app.* URL: `https://meltingasphalt.com/interactive/outbreak/`.