# Iterativne metode za linearne sustave - metoda dekompozicije domene

*Petra Sočo*

Veljača, 2020.

Želimo numerički riješiti Poissonovu jednadžbu na nepravilnoj domeni oblika slova 'L'.

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \;\; na\ \Omega$$
$$u(x,y) = 0 \;\; na\ \Gamma$$

Ovdje smo uzeli Dirichletove rubne uvjete, ali se isto tako mogu uzeti Robinovi ili Neumannovi rubni uvjeti. Pretpostavimo da aproksimiramo druge derivacije centralnim diferencijama i da je na domeni definirana mreža. Pretpostavimo da smo domenu $\Omega$ podijelili na $s$ poddomena $\Omega_1$,...$\Omega_s$ pri čemu se poddomene ne preklapaju.

Nazovimo rub izmedu $\Omega_i$ i $\Omega_j$, $i \neq j$ granicom $\Gamma_{i,j}$. Te se granice mogu, ali i ne moraju poklapati sa čvorovima mreže, ali mi ćemo pretpostaviti da čvorovi upadaju u granice poddomena. U vektoru nepoznanica sada grupiramo čvorove mreže tako da prvo poredamo čvorove koji se nalaze unutar poddomene $\Omega_1$, zatim $\Omega_2$ i tako do $\Omega_s$. Kao rezultat sustav gornjeg problema ima sljedeći oblik:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & & & ... & \mathrm{E}_1 \\ . & B_2 & & ... & \mathrm{E}_2 \\ . & . & & & \\ . & . & . & \mathrm{B}_s & \mathrm{E}_s \\ \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_2 & ... & \mathrm{F}_s & \mathrm{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ .. \\ \mathrm{x}_s \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_2 \\ .. \\ \mathrm{f}_s \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} \tag{1}$$

gdje $x_i$ predstavlja podvektor nepoznanica koje se odnose na točke u unutrašnjosti poddomene $\Gamma_i$, a $y$ predstavlja vektor svih nepoznanica koje se odnose na točke koje pripadaju graničnom području. Blokovi na pozicijama $(i,j)$, $i \neq j$ su jednaki 0 zato što nijedna točka iz unutrašnjosti jedne domene nije direktan susjed nijednoj točki iz unutrašnjosti neke druge domene. Dobiveni sustav možemo napisati i u jednostavnijoj formi, koju ćemo koristiti u daljnoj analizi.

$$A \begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{E} \\ \mathrm{F} & \mathrm{C} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Matrice $B_i$ su matrice lokalnih problema na $\Omega_i$ pa je za očekivati da su regularne. Tada iz prve jednadžbe možemo izraziti $x$ kao

$$x = B^{-1}(f - Ey)$$

Uvrštavajući u drugu jednadžbu, dobivamo reducirani sustav sa nepoznanicama za granice

$$(C - FB^{-1}E)y = g - FB^{-1}f$$

Matrica $S = C - FB^{-1}E$ zove se *matrica Schurovog komplementa* sustava. Dobivena matrica $A$ je simetrična, pozitivno definitna pa je i matrica $S$ simetrična, pozitivno definitna. Zbog blok-dijagonalne strukture matrice $B$, rješavanje linearnog sustava s njom implementiramo kao rješavanje $s$ nezavisnih i manjih sustava. Kako bismo uštedjeli na računanju s matricom $B$, definiramo sljedeće matrice

$$E' = B^{-1}E \ , \ f' = B^{-1}f$$

Iz čega slijedi:

$$x = B^{-1}f - B^{-1}Ey = f' - E'y$$

što nam daje sljedeći algoritam:

**Algoritam blok-Gaussovih eliminacija**
Riješi $BE' = E$ po $E'$ i $Bf' = f$ po $f'$
Izračunaj $g' = g - Ff'$
Izračunaj matricu Schurovog komplementa $S = C - FE'$
Riješi $Sy = g'$ po $y$
Izračunaj $x = f' - E'y$
Konkretno, rješavamo problem na domeni oblika slova $L$. Podijelimo domenu na $s = 3$ poddomene i poredamo čvorove kako je naznačeno na slici na zadnjoj stranici. $\Gamma_{1,2}$ indeksiramo od dolje prema gore, a $\Gamma_{1,3}$ slijeva na desno. Za rješavanje $s$ sustava s matricama $B_i$ i matricom $S$ koristimo CG metodu ($tol = 10^{-9}$).

**Rezultati:**
Definiramo $n_x$ =broj čvorova po x osi i $n_y$ =broj čvorova po y osi, $n$ =ukupan broj nepoznanica. Za različite vrijednosti prethodna dva parametra mjerimo vrijeme potrebno za izvršavanje gornjeg algoritma.
$n_x = 7$, $n_y = 11$, $n = 45$, T=0.000324
$n_x = 13$, $n_y = 17$, $n = 137$, T=0.003653
$n_x = 19$, $n_y = 20$, $n = 240$, T=0.011372
$n_x = 27$, $n_y = 32$, $n = 556$, T=0.071688

Za iste mreže problem rješavamo i na cijeloj matrici $A$.
$n_x = 7$, $n_y = 11$, $n = 45$, T=0.0000253
$n_x = 13$, $n_y = 17$, $n = 137$, T=0.001150
$n_x = 19$, $n_y = 20$, $n = 240$, T=0.003814
$n_x = 27$, $n_y = 32$, $n = 556$, T=0.020745

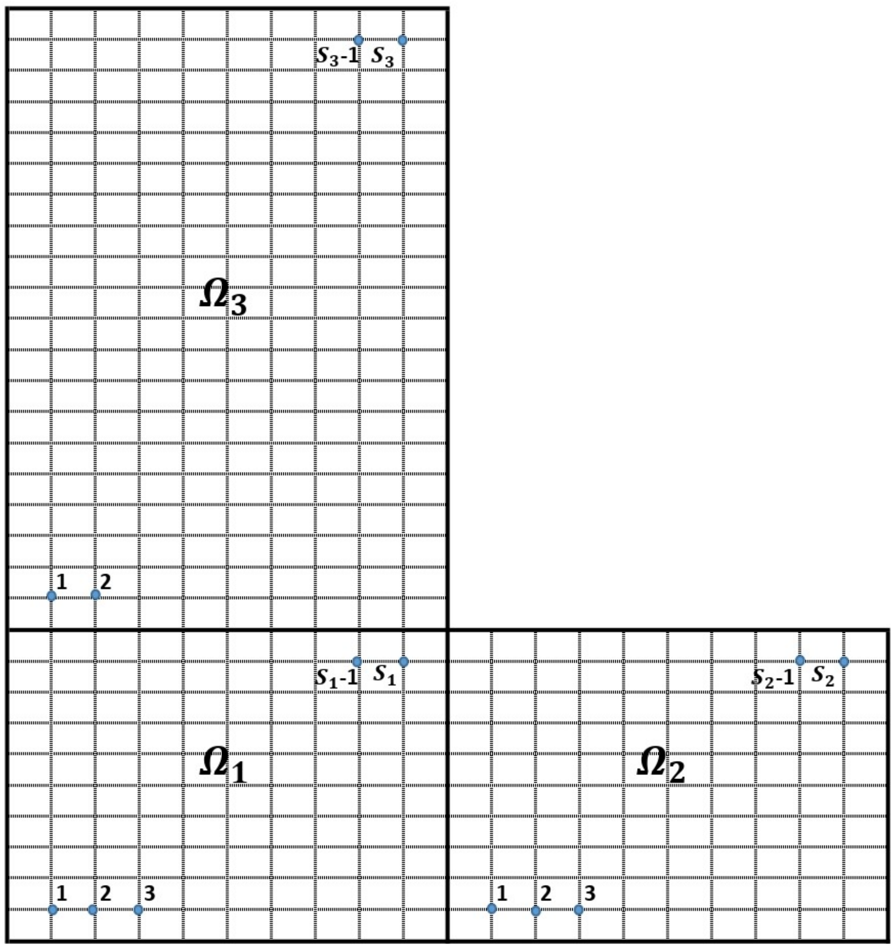


Figure 1: Dekompozicija domene oblika L