NUMERIČKA METODA ZA RAVNOTEŽU ELASTIČNOG ŠTAPA UZ PREPREKU

Petra Sočo

10. svibnja 2022.

Uvodne pretpostavke i definicije

Pretpostavke 1.1

- V Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- V* dual od V,
- $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ koercitivna, neprekidna bilinearna forma,
- $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidan, linearan funkcional,
- K konveksan, zatvoren, neprazan, $K \subseteq V$,
- $j : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveksan, odozdo poluneprekidan funkcional takav da $j(v) > -\infty, \forall v \in V$ i $j \not\equiv +\infty$.

j je (slabo) nizovno poluneprekidan odozdo ako za svaki niz $(u_n)_n \subseteq V$ takav da ($u_n \rightharpoonup u$) $u_n \to u$ vrijedi:

$$j(u) \leq \liminf_n j(u_n).$$

Promatramo dvije vrste varijacijskih nejednakosti (V.N.):

- V.N. prve vrste: *Naći* $u \in K$ *t.d.*

$$a(u, v-u) \geq L(v-u),\ \forall v \in K \qquad (P_1)$$

- V.N. druge vrste: *Naći* $u \in V$ *t.d.*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u),\ \forall v \in V \qquad (P_2)$$

Teoremi postojanja i jedinstvenosti rješenja

Teorem 1.2

Problem (P_1) ima jedinstveno rješenje.

Dokaz.

Jedinstvenost.

Neka su u_1, u_2 dva različita rješenja. Tada vrijedi

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \text{i} \quad a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2),\ \forall v \in K.$$

Uzimajući $v = u_2$ u prvoj i $v = u_1$ u drugoj nejednakosti, zbrajanjem i korištenjem koercitivnosti bilinearne forme a, slijedi $u_1 = u_2$.

Postojanje.
(P_1) svodimo na problem fiksne točke. Prema Rieszovom teoremu reprezentacije postoje $A \in \mathcal{L}(V, V)$ i $l \in V$ takvi da

$$\langle Au, v\rangle = a(u, v), \ \ \forall u, v \in V \quad i \quad L(v) = \langle l, v\rangle, \ \ \forall v \in V.$$

(P_1) je ekvivalentan problemu nalaženja $u \in K$ t.d.

$$\langle Au - l, v - u\rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K,$$

odnosno, množenjem s $-\rho$ za $\rho > 0$ i dodavanjem i oduzimanjem u:

$$\langle u - \rho(Au - l) - u, v - u\rangle \leq 0, \ \ \forall v \in K, \ \rho > 0.$$

Teorem: Za svaki $u \in V$ postoji jedinstveni $u_K \in K$ takav da

$$\|u - u_K\| = \inf_{v \in K} \|u - v\|.$$

$\longrightarrow$ Možemo definirati operator projekcije

$$P_K : V \longrightarrow K, \quad P_K(u) = u_K, \ u \in V.$$

Teorem: Neka je $u \in V$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\langle P_K(u) - u, v - P_K(u) \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K.$$

Obratno, ako neki $w \in K$ zadovoljava

$$\langle w - u, v - w \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K,$$

onda je $w = P_K(u)$.

$u \in K$ je rješenje problema (P_1) ako i samo ako

$$u = P_K(u - \rho(Au - l)), \text{ za neki } \ \rho > 0.$$

Promotrimo operator $W_\rho : V \longrightarrow V$ definiran sa

$$W_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - l)).$$

P_K stroga kontrakcija pa, iz koercitivnosti forme a i neprekidnosti operatora A, imamo

$$\|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|v_1 - v_2\|^2 .$$

Uz ρ t.d. $0 < \rho < 2\alpha / \|A\|^2$, W_ρ je stroga kontrakcija pa iz teorema fiksne točke sada slijedi da (P_1) ima rješenje. $\square$

Napomena 1.3

Dokaz Teorema 1.2 daje i algoritam za rješavanje (P_1) budući da je $v \mapsto P_K(v - \rho(Av - l))$ kontrakcija za $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$ što slijedi iz Banachovog teorema fiksne točke. Dakle, imamo iteracije:

$$\begin{cases} u^{(0)} \in V \textit{ proizvoljno odabran} \\ u^{(n+1)} = P_K(u^{(n)} - \rho(Au^{(n)} - l)), \textit{ za } n \geq 0 \end{cases}$$

za koje vrijedi $\lim_{n\to\infty} u^{(n)} = u$, gdje je u rješenje (P_1).

Propozicija 1.4

U slučaju da je bilinearna forma a dodatno simetrična i funkcional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definiran s $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, problem minimizacije

$$\text{Naći } u \in K \ t.d. \ J(u) \leq J(v), \ \forall v \in K, \tag{1}$$

ima jedinstveno rješenje. Dodatno, $u \in K$ je jedinstveno rješenje (P_1) ako i samo ako u rješava (1).

Za dokaz postojanja jedinstvenog rješenja problema (P_2) potrebna je sljedeća lema.

Lema 1.5

Neka je $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ simetrična, neprekidna i koercitivna bilinearna forma s konstantnom koercitivnosti $\beta > 0$. Neka je $L \in V^*$ i $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksan, odozdo poluneprekidan funkcional i $J(v) = \frac{1}{2}b(v,v) + j(v) - L(v)$. Tada problem minimizacije $(\star)$

$$\textit{Naći } u \in V \textit{ t.d. } J(u) \leq J(v),\ \forall v \in V. \tag{$\star$}$$

ima jedinstveno rješenje. Dodatno, $u \in V$ je rješenje od $(\star)$ ako i samo ako $u \in V$ rješava

$$b(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u),\ \forall v \in V. \tag{$\triangle$}$$

Teorem 1.6

Problem (P_2) ima jedinstveno rješenje.

Ideja dokaza.
Za svaki $u \in V$ i $\rho > 0$ definiramo pomoćnu zadaću: *Naći $w \in V$ t.d. za svaki $v \in V$ vrijedi*

$$\begin{aligned}\langle w, v - w\rangle + \rho j(v) - \rho j(w) \geq \langle u, v - w\rangle + \rho L(v - w)\\ -\rho a(u, v - w).\end{aligned} \qquad (\pi_\rho^u)$$

Iz Leme 1.5 slijedi da za svaki $u \in V$ i $\rho > 0$ postoji jedinstveno rješenje zadaće (π_ρ^u) pa je dobro definirano preslikavanje

$$f_\rho : V \longrightarrow V, \quad f_\rho(u) = w,$$

gdje je w jedinstveno rješenje od (π_ρ^u). Dokaže se da je f_ρ stroga kontrakcija pa iz Banachovog teorema fiksne točke slijedi da postoji jedinstveni $u \in V$ takav da $f_\rho(u) = u$ koji onda rješava i (P_2). $\square$

Aproksimacija problema (P_1)

Za parametar h takav da $h \to 0$ definiramo niz zatvorenih potprostora $(V_h)_h$ takav da $V_h \leq V$ za svaki h. Definiramo i familiju nepraznih, zatvorenih, konveksnih skupova $(K_h)_h$ takvu da za svaki h vrijedi $K_h \subseteq V_h$ i koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) Ako je $(v_h)_h$ niz takav da $v_h \in K_h, \forall h$ i $(v_h)_h$ je ograničen u V, tada vrijedi

$$\lim_{h \to 0} v_h \overset{w}{=} v \implies v \in K.$$

(ii) Postoje $\chi \subset V$, $\overline{\chi} = K$ i $r_h : \chi \longrightarrow K_h$ takvi da za svaki $v \in \chi$ vrijedi $\lim\limits_{h \to 0} r_h v = v$.

Problem (P_1) aproksimiramo zadaćom:

$$\textit{Naći } u_h \in K_h \textit{ t.d. } a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h),\ \forall v_h \in K_h. \qquad (P_{1h})$$

Postoji jedinstveno rješenje (P_{1h}) ako Teorem 1.2 iskoristimo za $V = V_h$, $K = K_h$.

Teorem 1.7

Neka K_h i V_h zadovoljavaju (i) i (ii) i neka je u rješenje zadaće (P_1), a u_h rješenje (P_{1h}). Tada vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\| = 0.$$

Ideja dokaza.

Dokaz provodimo u tri dijela:

(i.) uniformna ograničenost niza $(u_h)_h$,

(ii.) slaba konvergencija niza $(u_h)_h$ prema u koji rješava zadaću (P_1),

(iii.) jaka kovergencija niza $(u_h)_h$ prema u.

$\square$

Motivacija

Za neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$ rješavamo problem

$$\min_{x \in S} f(x).$$

Ideja pronalaska rješenja penalizacijom je da se ono pokuša naći na cijelom prostoru $\mathbb{R}^n$, a funkciji cilja prethodno dodajemo penalizacijski član. Odnosno, radimo sljedeću zamjenu

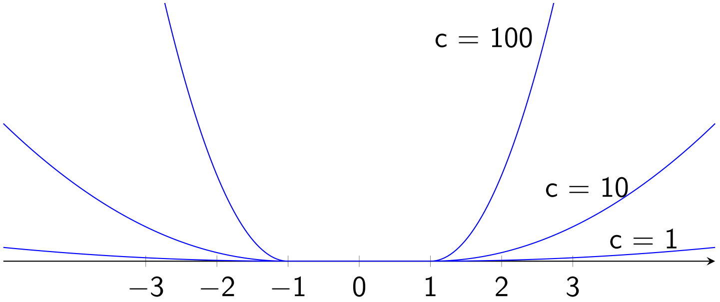
$$\min_{x \in S} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_c(x) := \min_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + cP(x)),$$

uz $c > 0$. Funkciju $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo penalizacijskom funkcijom i odabiremo je tako da vrijede sljedeća svojstva

- $P(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- $P(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in S$.

Za minimizaciju realne funkcije na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, definiramo $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b,\ x \geq a\}$ i penalizacijsku funkciju

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[((x-b)_+)^2 + ((a-x)_+)^2\right]$$



Penalizacija varijacijskih nejednakosti

Neka je dodatno $j : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ odozdo slabo nizovno poluneprekidan funkcional koji će imati ulogu penalizacijske funkcije P pa dodatno pretpostavljamo:

Pretpostavke 2.1

- $j(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in K$,
- $j(v) \geq 0, \;\; \forall v \in V$.

Za $\epsilon > 0$ definiramo $j_\epsilon := \dfrac{1}{\epsilon} j$ pa penalizacija problema (P_1) glasi:
Naći $u_\epsilon \in V$ takav da

$$a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + j_\epsilon(v) - j_\epsilon(u_\epsilon) \geq L(v - u_\epsilon), \; \forall v \in V. \qquad (2)$$

- Prethodna nejednakost je oblika (P_2) pa iz Teorema 1.6 slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji jedinstveno rješenje u_ϵ.
- Uz simetričnu $a(\cdot, \cdot)$, prema Lemi 1.5, penalizirani problem (2) ekvivalentan je minimizaciji funkcionala J_ϵ na V, gdje je

$$J_\epsilon(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + j_\epsilon(v).$$

Napomena 2.2

Neka je j_ϵ Gateaux diferencijabilan funkcional, tada je u_ϵ rješenje problema (2) ako i samo ako

$$a(u_\epsilon, v) + \langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v\rangle = L(v), \ \forall v \in V. \tag{3}$$

Teorem 2.3

Ako vrijede Pretpostavke 1.1 i 2.1, tada je

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|u_\epsilon - u\| = 0 \;\text{ i }\; \lim_{\epsilon \to 0} j_\epsilon(u_\epsilon) = 0,$$

gdje je u_ϵ rješenje (2), a u rješenje (P_1).

Ideja dokaza.

Dokaz provodimo u tri dijela:

(i.) uniformna ograničenost niza $(u_\epsilon)_\epsilon$ i ocjena

$$0 \leq j(u_\epsilon) \leq D\epsilon, \quad D > 0, \tag{4}$$

(ii.) slaba konvergencija niza $(u_\epsilon)_\epsilon$ prema u koji rješava zadaću (P_1),

(iii.) jaka kovergencija niza, tj.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|u_\epsilon - u\| = 0 \;\text{ i }\; \lim_{\epsilon \to 0} j_\epsilon(u_\epsilon) = 0.$$

Definicija problema prepreke

Ravnoteža štapa duljine l pri djelovanju sile f, uz Dirichletove rubne uvjete, opisana je sljedećom rubnom zadaćom:

$$\begin{cases} -(EIu'')'' = f \\ u(0) = u(l) = 0 \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

$$V := H_0^2(0,l) = \{v \in H^2(0,l) : v(0) = v'(0) = 0, v(l) = v'(l) = 0\}$$

Množenjem jednadžbe štapa s $v \in V$, integriranjem na $(0,l)$ i parcijalnom integracijom dolazimo do slabe formulacije

$$\textit{Naći } u \in V \textit{ t.d. } a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V,$$

gdje su

$$a(u,v) = \int_0^l EIu''v'', \qquad L(v) = \int_0^l fv.$$

Neka je dana funkcija $P \in H^2(0,l)$ za koju vrijedi $P(0),\ P(l) \leq 0$. Problem prepreke za Euler-Bernoullijev štap definiramo kao

$$Na\acute{c}i\ u \in K\ t.d.\ a(u, v-u) \geq L(v-u),\ \forall v \in K \qquad (P)$$

gdje je

$$K := \{v \in V : v \geq P\ na\ [0,l]\} \subseteq V.$$

(P) ima oblik varijacijske nejednakosti (P_1) pa za postojanje jedinstvenog rješenja treba provjeriti pretpostavke Teorema 1.2.

(i.) *V je zatvoreni potprostor od $H^2(0,l)$ pa je i sam Hilbertov.*
Korištenjem ulaganja $H^1(0,l) \hookrightarrow C([0,l])$.

(ii.) *a neprekidna, koercitivna, bilinearna forma.*
Neprekidnost i koercitivnost slijede iz Hölderove i Poincaréove nejednakosti redom.

(iii.) *L neprekidan, linearan funkcional.*
$f \in L^2(0,l)$ pa tvrdnja slijedi korištenjem Hölderove nejednakosti.

(iv.) *K neprazan i konveksan.*
Za dokazati da je K neprazan, konstruiramo afinu funkciju, ozn. g, kroz točke $(0, P(0))$ i $(l, P(l))$ pa je $v := P - g \in K$.

(v.) *K zatvoren.*
$(v_n)_n \subseteq K$ niz t.d. $v_n \xrightarrow{H^2} v \implies v_n \xrightarrow{H^1} v$.
$H^1(0,l) \hookrightarrow C([0,l]) \implies v_n(x) \longrightarrow v(x), \forall x \implies v \in K$.

Diskretni problem prepreke

- Ekvidistantna mreža $M_h := \{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ na $(0, l)$.
- Kubični polinomi φ_i čije koeficijente određujemo iz vrijednosti polinoma i njihovih derivacija u čvorovima mreže M_h.
- $V_h := span\{\varphi_i : i = 0, \ldots, 2n+1\}$.
- $K_h := \{v_h \in V_h : v_n(x_i) \geq P(x_i), \forall x_i \in M_h\}$.

Aproksimacija za (P) sada glasi:

$$Na\acute{c}i\ u_h \in K_h\ t.d.\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h),\ \forall v_h \in K_h, \qquad (P_h)$$

a iz Teorema 1.2 slijedi da (P_h) ima jedinstveno rješenje.

Teorem 3.1

Neka je u_h rješenje problema (P_h), a u rješenje (P). Tada za $h \to 0$ vrijedi

$$\|u - u_h\|_{H^2} \to 0.$$

Kako konkretno odrediti polinome φ_i?

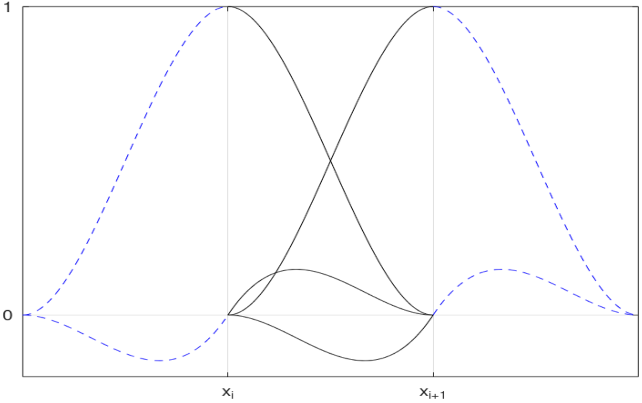
Za $u_h \in V_h$ imamo zapis

$$u_h = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{2i}\varphi_{2i} + \alpha_{2i+1}\varphi_{2i+1}$$

i želimo da vrijedi $u_h(x_j) = \alpha_{2j},\ u_h'(x_j) = \alpha_{2j+1}$ za $x_j \in M_h$. Dakle, trebaju nam polinomi takvi da za $i, j = 0, \ldots, n$ vrijedi

$$\begin{cases} \varphi_{2i}(x_j) = \delta_{ij}, & \varphi_{2i}'(x_j) = 0, \\ \varphi_{2i+1}(x_j) = 0, & \varphi_{2i+1}'(x_j) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

Doprinosi baznih funkcija na element $[x_i, x_{i+1}]$.



Penalizacija diskretnog problema prepreke (P_h)

Za proizvoljne $u_h, v_h \in V_h$ vrijede zapisi u bazi

$$u_h = \sum_{j=0}^{2n+1} \alpha_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j \varphi_j$$

Neka su $x := (\alpha_j)_{j=0}^{2n+1}$ i $y := (\beta_j)_{j=0}^{2n+1}$. Vrijedi

$$a(u_h, v_h) = \langle Cx, y \rangle, \quad L(v_h) = \langle F, y \rangle,$$

gdje je matrica krutosti definirana s $C_{i,j} := a(\varphi_j, \varphi_i)$, a $F_i := L(\varphi_i)$. Neprazan, zatvoren, konveksan podskup definiramo iz K_h:

$$\tilde{K} := \{y \in \mathbb{R}^{2n+2} : y_{2i} \geq P_i, i = 0, \dots, n\},$$

gdje je $P_i = P(x_i)$.

(P_h) se sada može zapisati kao

$$Na\acute{c}i\, x \in \tilde{K} \ t.d. \ \langle Cx, y - x \rangle \geq \langle F, y - x \rangle, \ \forall y \in \tilde{K}. \tag{5}$$

Definiramo još i funkcional $j : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$j(y) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (P_i - y_{2i})_+^2$$

koji zadovoljava Pretpostavke 1.1 i 2.1:

- j je konveksan,
- j je slabo nizovno poluneprekidan odozdo,
- $j(y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \tilde{K}$,
- $j(y) \geq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2}$.

Stoga, penalizacija od (5) glasi: $Na\acute{c}i\, x_\epsilon \in \mathbb{R}^{2n+2} \ t.d.$

$$\langle Cx_\epsilon, y - x_\epsilon \rangle + j_\epsilon(y) - j_\epsilon(x_\epsilon) \geq \langle F, y - x_\epsilon \rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2}. \tag{6}$$

Kako računati s (6)? Gateaux diferencijabilnost j + Napomena 2.2.

Primjer 3.2

Neka su $N, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ i $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = (x_i)_+^m$ za neki $1 \leq i \leq N$. F je diferencijabilna u klasičnom smislu i vrijedi $\nabla F(x) = m\,(x_i)_+^{m-1} e_i$.

Za $i = 0, \ldots, n$ i konstantni vektor $P = (P_i)_{i=0}^n = (P(x_i))_{i=0}^n$, gdje su $x_i \in M_h$, definiramo pomoćne funkcije:

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(z) := (z_+)^2 \quad \text{i} \quad g_i : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(y) = P_i - y_{2i}$$

pomoću kojih j ima alternativni zapis

$$j(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(P_i - y_{2i})_+^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} h(g_i(y)).$$

Dakle, j je konačna suma funkcionala kao u prethodnom primjeru, ali u kompoziciji s afinim funkcijama. Iz lančanog pravila slijedi da je i j diferencijabilan pa je Gateauxova derivacija jednaka klasičnoj. Preciznije, imamo

$$
\begin{aligned}
j'(y) = \nabla j(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} h'(g_i(y))\nabla g_i(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} -2(P_i - y_{2i})_+ e_{2i} \\
= -\begin{bmatrix}(P_0 - y_0)_+ & 0 & (P_1 - y_2)_+ & 0 & \dots & (P_n - y_{2n})_+ & 0\end{bmatrix}^T .
\end{aligned}
$$

Uz Napomenu 2.2, x_ϵ je rješenje (6) ako i samo ako zadovoljava

$$
\langle Cx_\epsilon, y\rangle + \langle j'_\epsilon(x_\epsilon), y\rangle = \langle F, y\rangle,\ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2},
$$

gdje je $j_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon} j$.

Odnosno, x_ϵ je jedinstveno rješenje nelinearnog sustava

$$Cx_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}(P - x_\epsilon)_+ = F \tag{7}$$

gdje su

$$x_\epsilon = \begin{bmatrix} x_0^\epsilon & x_1^\epsilon & x_2^\epsilon & x_3^\epsilon & \dots & x_{2n}^\epsilon & x_{2n+1}^\epsilon \end{bmatrix}^T,$$

$$(P - x_\epsilon)_+ = \begin{bmatrix} (P_0 - x_0^\epsilon)_+ & 0 & (P_1 - x_2^\epsilon)_+ & \dots & (P_n - x_{2n}^\epsilon)_+ & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Za rješenje problema (P_h) treba promatrati niz rješenja (7) kako $\epsilon \to 0$, a budući da je dobivena jednadžba nelinearna, trebamo iskoristiti neku numeričku metodu koja aproksimira rješenje x_ϵ.

Gradijentne metode

U (7) prepoznajemo gradijent funkcionala $J_\epsilon : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranog s

$$J_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\langle Cx, x\rangle + j_\epsilon(x) - \langle F, x\rangle.$$

Primijenimo Lemu 1.5 na penalizirani diskretni problem prepreke (6) $\Longrightarrow$ rješenje tražimo minimizacijom funkcionala J_ϵ.
Gradijentne metode za minimizaciju generiraju niz točaka $x^{(k)}$ takvih da $J_\epsilon(x^{(k+1)}) < J_\epsilon(x^{(k)})$ počevši od neke zadane aproksimacije $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$:

$$\begin{cases} s^{(k)} = -\nabla J_\epsilon(x^{(k)}), \\ \lambda^{(k)} = \operatorname{argmin}_{\lambda>0} J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)}, \\ k = k+1. \end{cases} \tag{8}$$

Za razliku od gore navedenih iteracija, smjer $s^{(k)}$ ćemo birati kao $s^{(k)} = -C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^{(k)})$, gdje je C matrica krutosti.
Za računanje koraka $\lambda^{(k)}$ koristimo *neegzaktno pretraživanje po pravcu*.

(i.) *Jednostavne iteracije.* Radimo korak gradijentne metode ako je zadovoljeno $J(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) < J(x^{(k)})$ i pritom prilagođavamo veličinu $\lambda^{(k)}$.

(ii.) *Backtracking.* Krenemo od relativno velikog koraka $\lambda^{(0)}$ koji iterativno smanjujemo sve dok Armijo-Goldstein uvjeti:

$$J_\epsilon(x^{(k)}) - J_\epsilon(x^{(k+1)} + \lambda s^{(k)}) \geq -\lambda\alpha\langle\nabla J_\epsilon(x^{(k)}), s^{(k)}\rangle$$

ne budu ispunjeni, uz neki unaprijed odabrani $\alpha \in (0, 1)$.

Algoritam 3.3: Gradijentna metoda za (7) uz jednostavne iteracije

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon > 0$, $\eta > 0$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$
Sve dok $\left\|\nabla J_\epsilon(x^{(k)})\right\| \geq \eta$:

1. $s^{(k)} = -\,C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^{(k)})$
2. $y = x^{(k)} + \lambda^{(k-1)} s^{(k)}$
3. Ako $J_\epsilon(y) < J_\epsilon(x^{(k)})$:
   i. $x^{(k+1)} = y$
   ii. $\lambda^{(k)} = 2\lambda^{(k-1)}$
   iii. $k = k + 1$
4. Inače: $\lambda^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}/2$

Algoritam 3.4: Gradijentna metoda za (7) uz Armijo-Goldsteinov uvjet

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon, \eta > 0, \rho = 1$, $\alpha = 0.5, \beta \in (0.5, 0.8)$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$
Sve dok $\left\|\nabla J_\epsilon(x^{(k)})\right\| \geq \eta$:

1. $s^{(k)} = -C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^{(k)})$
2. $f(\lambda) := J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) - J_\epsilon(x^{(k)}) - \lambda\alpha\langle\nabla J_\epsilon(x^{(k)}), s^{(k)}\rangle$
3. $\lambda^{(k)} = \rho$
4. Sve dok $f(\lambda^{(k)}) > 0$: $\quad \lambda^{(k)} = \beta\lambda^{(k)}$
5. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)}$
6. $k = k + 1$

Newtonova metoda

Općenito, rješava jednadžbu $G(x) = 0$ za neku $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Uz dobro odabranu početnu točku $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, algoritam glasi:

$$\begin{cases} \textit{riješiti sustav} \;\; \nabla G(x^{(k)})z = -G(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + z, \\ k = k + 1. \end{cases}$$

Mogući problemi u izvršavanju algoritma:

(i.) evaluacija funkcije G, gradijenta funkcije G i rješavanje sustava u svakoj iteraciji,

(ii.) gradijent nije dobro definiran.

Za riješiti (7) trebalo bi uzeti $G(x) = Cx + j'_\epsilon(x) - F$ i $N = 2n + 2$, gdje je

$$j'(x) = -\begin{bmatrix}(P_0 - x_0)_+ & 0 & (P_1 - x_2)_+ & 0 & \dots & (P_n - x_{2n})_+ & 0\end{bmatrix}^T.$$

Međutim, sada se postavlja pitanje računanja Jacobijeve matrice funkcije j'_ϵ. Naime, funkcija $x \mapsto x_+$ nije diferencijabilna u $x = 0 \in \mathbb{R}$ pa, slično, j'_ϵ ima problem u točkama oblika

$$\begin{cases} x = \begin{bmatrix}x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{2n} & x_{2n+1}\end{bmatrix}^T, \\ x_{2i} = P_i \text{ za barem jedan indeks } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \end{cases}$$

gdje su $x_1, x_3, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$.

Definiramo funkciju zadanu matricom $M : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n+2)^2}$ koja će imati ulogu gradijenta funkcionala j'_ϵ

$$M(y) := diag \begin{pmatrix} m_0(y_0) & 0 & m_2(y_2) & 0 & \dots & m_{2n}(y_{2n}) & 0 \end{pmatrix},$$

gdje su funkcije $m_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, zadane sa

$$m_{2i}(y_{2i}) = \begin{cases} 1 & P_i > y_{2i}, \\ 0 & P_i \leq y_{2i}. \end{cases}$$

Newtonove iteracije sada imaju oblik

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(k)}))^{-1} G(x^{(k)}),$$

gdje je $G(x) = Cx + j'_\epsilon(x) - F$.

Algoritam 3.5: Newtonov algoritam za (7)

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon > 0$, $\eta > 0$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$
Sve dok $\left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\| / \left\|x^{(k)}\right\| \geq \eta$:

1. *riješiti sustav* $(C + \frac{1}{\epsilon}M(x^{(k)}))z = Cx^{(k)} + j_\epsilon'(x^{(k)}) - F$
2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} - z$
3. $k = k + 1$

Napomena 3.6: Gradijentna metoda za (7) uz Newtonovo pretraživanje po pravcu

Algoritam 3.5 možemo iskoristiti za pretraživanje po pravcu u algoritmu gradijentne metode (8) u kojem minimiziramo funkciju $f(\lambda) = J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)})$, tj. tražimo $\lambda > 0$ takav da $f'(\lambda) = 0$. Trebaju nam još:

$$f'(\lambda) = \langle \nabla J(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}), s^{(k)} \rangle,$$

$$f''(\lambda) = \langle s^{(k)}, \nabla^2 J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) s^{(k)} \rangle.$$

Umjesto $\nabla^2 J_\epsilon(x)$ koristimo $C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(k)})$ pa iteracije, za aproksimaciju $\lambda^{(k)}$, glase:

$$\lambda^{(j+1)} = \lambda^{(j)} - \frac{f'(\lambda^{(j)})}{f''(\lambda^{(j)})}.$$

Ekvivalencije diskretnog problema prepreke

Naći $x \in \tilde{K}$ *t.d.*

(i.) $\langle Cx, y - x\rangle \geq \langle F, y - x\rangle, \ \forall y \in \tilde{K},$

(ii.) $J(x) \leq J(y) = \frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle - \langle F, y\rangle, \ \forall y \in \tilde{K}.$

$\longrightarrow$ Octave funkcija 'qp'

Naći $x_\epsilon \in \mathbb{R}^{2n+2}$ *t.d.*

(i.) $\langle Cx_\epsilon, y - x_\epsilon\rangle + j_\epsilon(y) - j_\epsilon(x_\epsilon) \geq \langle F, y - x_\epsilon\rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2},$

(ii.) $J_\epsilon(x_\epsilon) \leq J_\epsilon(y) = \frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle + j_\epsilon(y) - \langle F, y\rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2},$

$\longrightarrow$ Penalizacija uz Gradijentnu m. (Alg. 3.3, 3.4 ili Nap. 3.6).

(iii.) $\langle Cx_\epsilon, y\rangle + \langle j'_\epsilon(x_\epsilon), y\rangle = \langle F, y\rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2}.$

$\longrightarrow$ Penalizacija uz Newtonovu m. (Alg. 3.5).

Treba promatrati niz rješenja (7) kada $\epsilon \to 0$ i pri tome radimo zamjenu $\frac{1}{\epsilon} \leftrightarrow \overline{\epsilon}$ počevši primjerice od $\overline{\epsilon} = 10$.
Za početnu aproksimaciju $x^{(0)}$ uzimamo rješenje problema bez prepreke, a dobiveni niz aprosimacija x_ϵ uspoređujemo s rješenjem Octave funkcije 'qp' koja rješava problem kvadratnog programiranja uz uvjete (ozn. $\overline{x}$).

Algoritam 4.1: Algoritam penalizacije za (P_h)

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\overline{\epsilon} > 0$, $\eta > 0$, $\tau = 10$
Izlaz: $x^{(IT)} \approx x$
Sve dok $\left\| x^{(IT-1)} - x^{(IT)} \right\| \geq \eta \ \vee \ j_\epsilon(x^{(IT)}) \geq \eta$:

1. Riješiti (7) pomoću Algoritma 3.3, 3.4, 3.5 ili Napomene 3.6
2. $IT = IT + 1$
3. $\overline{\epsilon} = \tau \overline{\epsilon}$

Ako u svim primjerima uzimamo da je poprečni presjek pravokutnik P visine h i širine w, za modul smicanja I dobivamo sljedeće:

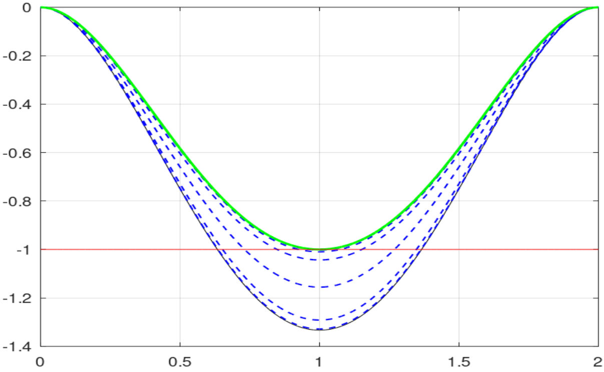
$$I(x) = \iint_P y^2 dydz = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz = \frac{1}{3}\frac{h^3}{4}w.$$

Napomena 4.2

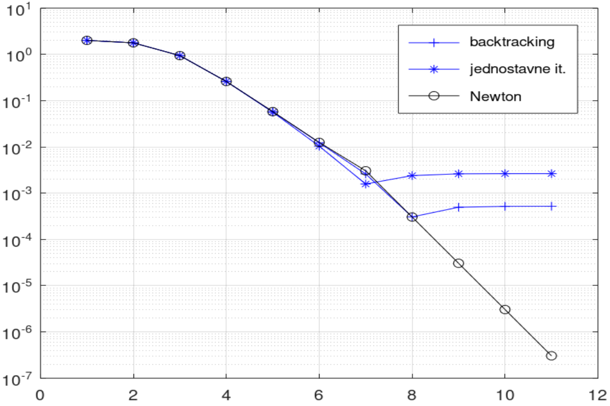
U svim simulacijama koje koriste neku verziju gradijentne metode treba kontrolirati broj iteracija. Točnije, nije poželjno da, za neki $\bar{\epsilon}$, algoritam penalizacije previše vremena provede u gradijentnoj metodi.

Uvodni primjer

$l = 2m,\ E = 2 \times 10^{11} Pa$ (čelik), $f = -2000N,\ h = 0.5cm = 0.005m,$
$w = 3cm = 0.03m,\ P = -1,\ \eta = 10^{-4}.$



Slika: Niz aproksimacija x_ϵ Algoritma 4.1 dobivenih Newtonovom metodom



Slika: Za svaku iteraciju algoritma penalizacije računamo $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$, gdje je $\overline{x}$ aproksimacija dobivena Octave funkcijom 'qp', a x_ϵ su dobiveni različitim varijantama gradijentne metode, $\eta = 10^{-4}$

Uspoređujemo gradijentnu metodu (s Newtonovim pretraživanjem po pravcu) i Newtonov algoritam 3.5. Povećanjem točnosti na $\eta = 10^{-8}$, gradijentna metoda ne konvergira. Uz već uvedeno ograničenje na 10 iteracija, uvodimo i ograničenje na broj iteracija u dijelu koji pretražuje po pravcu (v. Napomena 4.2). Ipak, za svaki $\bar{\epsilon}$ Algoritam 4.1 više vremena provede u gradijentnoj metodi nego u Newtonovoj.

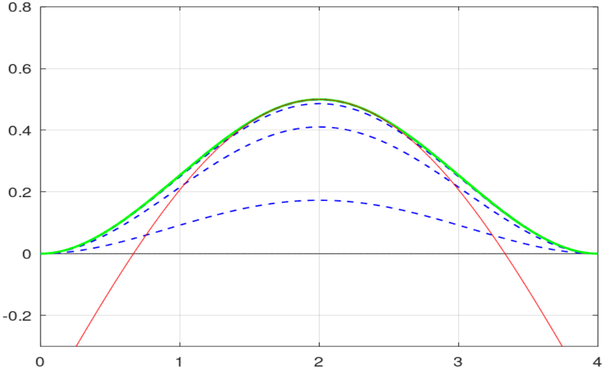
$\bar{\epsilon}$	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
G.M.	6	10	10	10	10	10	10
N.M.	2	3	3	4	4	4	3

$\bar{\epsilon}$	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}
G.M.	10	10	10	10	10	10
N.M.	2	1	1	1	1	1

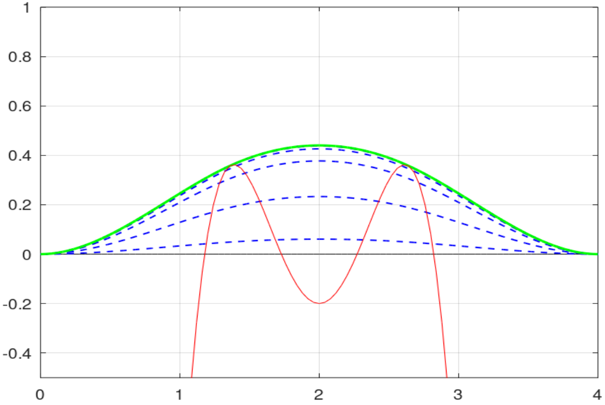
Tablica: Broj iteracija gradijentne (G.M) i Newtonove metode (N.M.) za svaki $\bar{\epsilon}$ u Algoritmu 4.1, $\eta = 10^{-8}$

Primjer: Ovisnost o obliku prepreke

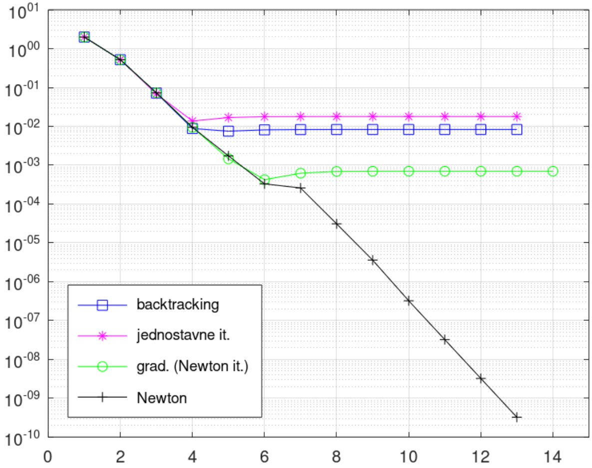
$l = 4m$, $E = 6.9 \times 10^{10} Pa$ (aluminij), $\eta = 10^{-8}$, $f = 0$,
$P_1(x) = sin(\frac{\pi}{4}x) - 0.4$ i $P_2(x) = (1 - 4(x-1)^2)((x-1)^2 - 0.5) + 1$.



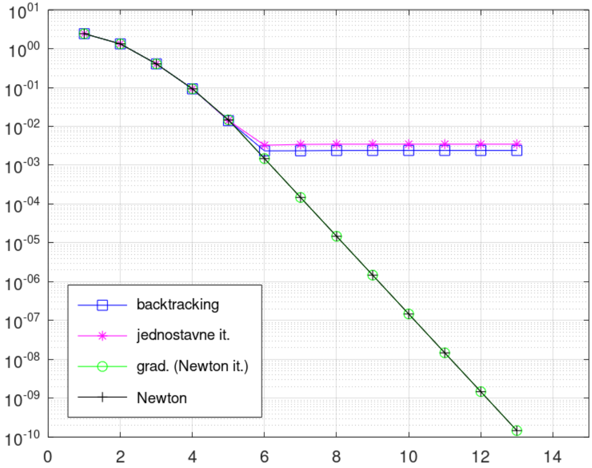
Slika: Algoritam penalizacije za P_1. $\eta = 10^{-8}$



Slika: Algoritam penalizacije za P_2. $\eta = 10^{-8}$



Slika: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ za P_1, $\eta = 10^{-8}$



Slika: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ za P_2, $\eta = 10^{-8}$

Za sve metode možemo usporediti i vrijeme izvršavanja ukupnog algoritma penalizacije uz sve oblike gradijentne metode i Newtonovu metodu.

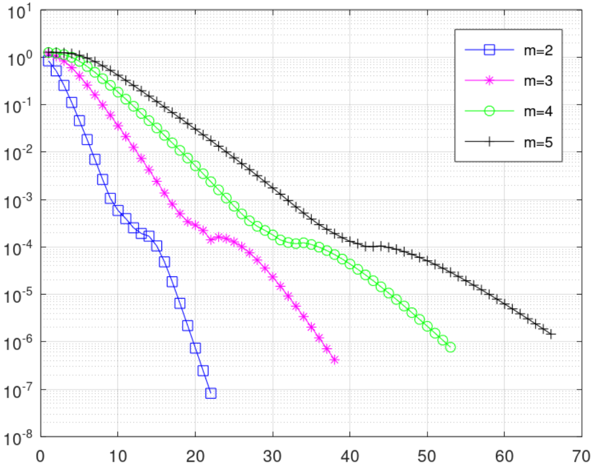
$[s]$	Alg. 3.3	Alg. 3.4	Nap. 3.6	Alg. 3.5
P_1	4.75	34.824	6.693	1.253
P_2	4.758	37.645	2.183	1.12179

Primjer: Izbor penalizacijskog funkcionala

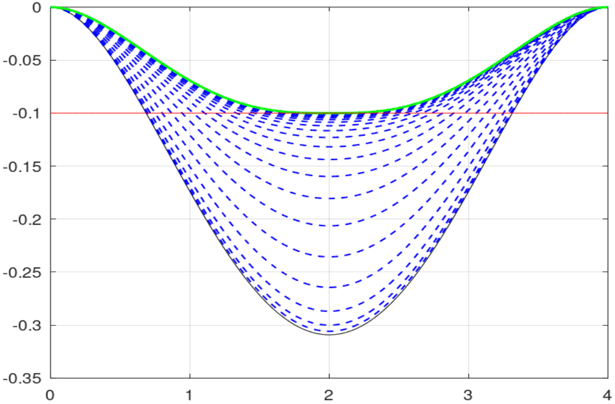
Pretpostavimo da smo, za neki $m \geq 3$, definirali

$$j_\epsilon^m(x) := \frac{1}{m\epsilon}\sum_{i=0}^{n}(P_i - x_{2i})_+^m.$$

Za svaki $m \geq 3$ vrijedi $j_\epsilon^m \in C^{m-1}$ (v. Primjer 3.2) $\implies$ svi su klase barem C^2.
$l = 4m$, $E = 6.9 \times 10^{10} Pa$ (aluminij), $P(x) = -0.1$, $f = -10N$, $\eta = 10^{-6}$.
Kao rezultat imamo da je za $m > 2$ potreban veći broj iteracija čime se i povećava vrijeme izvršavanja algoritma, a i postižemo manji pad norme razlike.



Slika: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ dobivenih Newtonovom metodom, $\eta = 10^{-6}$



Slika: Algoritam penalizacije za $m = 4$ i $\eta = 10^{-6}$