SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Znanstveno računanje II.

Adams-Bashforth-Moulton metoda i metoda diferencija unazad za rješavanje inicijalnog problema

Petra Sočo
Zagreb, 7.7.2020.

1 Adams-Bashforth-Moulton metoda

Rješavamo inicijalni problem

$$v'(t) = f(t, v(t))$$
$$v(t_0) = v_0$$

na $[t_0, T]$ za neki $T > 0$. Općenito, linearne s-koračne metode su oblika:

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j v^{n+j} = h \sum_{j=0}^{s} \beta_j f^{n+j}, \quad n = 0, \ldots, N - s \tag{1}$$

gdje uzimamo da je $\alpha_s \neq 0$, a h je korak metode na ekvidistantnoj mreži $t_0, \ldots, t_N$. Jedne od starijih takvih metoda su Adamsove formule[1] koje imaju oblik:

$$v^{n+s} - v^{n+s-1} = h \sum_{j=0}^{s} \beta_j f^{n+j} \tag{2}$$

Vrijednosti $f^n, \ldots, f^{n+s-1}$ za Adams-Bashforth metodu, odnosno $f^n, \ldots, f^{n+s}$ za Adams-Moulton metodu, shvatimo kao uzorak na diskretnoj mreži funkcije $f(t, v(t))$ koju želimo integrirati na podintervalu $[t_{n+s}, t_{n+s-1}]$ [2]:

$$v(t_{n+s}) - v(t_{n+s-1}) = \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} v'(\tau) d\tau = \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} f(\tau, v(\tau)) d\tau$$

. Neka je $q(t)$ jedinstveni polinom stupnja najviše s (A-B), odnosno stupnja najviše $s - 1$ (A-M), koji interpolira prethodne podatke. Stoga, prethodni integral procjenjujemo sa:

$$v^{n+s} - v^{n+s-1} = \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} q(\tau) d\tau$$

Trebaju nam koeficijenti β_j kako bismo prethodni izraz napisali u obliku (2). U tu svrhu koristimo Newtonov interpolacijsku formulu. Pretpostavimo da trebamo interpolirati diskretne vrijednosti $\{y^n\}$ u točkama $x^0, \ldots, x^k$. polinomom $q(t)$ stupnja najviše k. Neka Δ i ∇ predstavljaju operatore diferencija unaprijed i unazad, tj.

$$\Delta y^n = y^{n+1} - y^n, \quad \nabla y^n = y^n - y^{n-1}$$

Iz prethodnog primjerice slijedi $\Delta^2 y^n = y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n$.

[1] J.C.Adams, 1855.

[2] $v(t_j)$ predstavljaju egzaktne vrijednosti funkcije v, a v^j aproksimaciju u čvoru t_j

Teorem 1 *Polinom*

$$q(t) = \left[1 + \binom{t}{1}\Delta + \binom{t}{2}\Delta^2 + \ldots + \binom{t}{k}\Delta^k\right] y^0$$

je jedinstveni polinom stupnja najviše k koji interpolira podatke $y^0, \ldots, y^k$ u točkama $x^0, \ldots, x^k$.

Sada prethodni teorem iskoristimo za izvod formule (2).

Teorem 2 *Za bilo koji $s \geq 1$, s-koračna **Adams-Bashforth** metoda je reda s i dana je s:*

$$v^{n+s} = v^{n+s-1} + h\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j \nabla^j f^{n+s-1}, \quad \gamma_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-\tau}{j} d\tau$$

Za $j \geq 0$, koeficijenti γ_j su dani sljedećom rekurzivnom relacijom:

$$\gamma_j + \frac{1}{2}\gamma_{j-1} + \frac{1}{3}\gamma_{j-2} + \ldots + \frac{1}{j+1}\gamma_0 = 1 \tag{3}$$

Sličan postupak možemo provesti i u svrhu izvoda Adams-Moultonovih formula.

Teorem 3 *Za bilo koji $s \geq 1$, s-koračna **Adams-Moulton** metoda je reda s+1 i dana je s:*

$$v^{n+s} = v^{n+s-1} + h\sum_{j=0}^{s} \gamma_j^* \nabla^j f^{n+s-1}, \quad \gamma_j^* = (-1)^j \int_{-1}^0 \binom{-\tau}{j} d\tau$$

Za $j \geq 0$, koeficijenti γ_j su dani sljedećom rekurzivnom relacijom:

$$\gamma_j^* + \frac{1}{2}\gamma_{j-1}^* + \frac{1}{3}\gamma_{j-2}^* + \ldots + \frac{1}{j+1}\gamma_0^* = 0 \tag{4}$$

2 Metoda diferencijama unazad

Za razliku od Adamsovih formula, koje "naštimavaju" koeficijente $\{\beta_j\}$, metoda diferencijama unazad stavlja uvjete na $\{\alpha_j\}$. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4 *Za bilo koji $s \geq 1$, s-koračna metoda diferencijama unazad ima red s i dana je s:*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j!}\nabla^j v^{n+s} = hf^{n+s}$$

3 Van der Pol-ova jednadžba

Želimo numerički rješiti van der Polovu jednadžbu na intevalu $[0, 100]$

$$y'' + \lambda(1 - y^2)y' + y = 0,\ \lambda \in [1, 200]$$

i "prisiljenu" van der Polovu jednadžbu

$$y'' + \lambda(1 - y^2)y' + y = 10\, cos(x),\ \lambda = 1, 100$$

s početnim uvjetom

$$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

Uvođenjem supstitucije $y_1 = y'$, $y_2 = y$ prethodni problem svodimo na oblik iz prethodnih razmatranja, tj. imamo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi s pripadnim početnim uvjetom:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(1 - y_2^2)y_1 - y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},\ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno, za "prisiljenu" van der Polovu jedndžbu:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(1 - y_2^2)y_1 - y_2 + 10\, cos(x) \\ y_1 \end{bmatrix},\ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

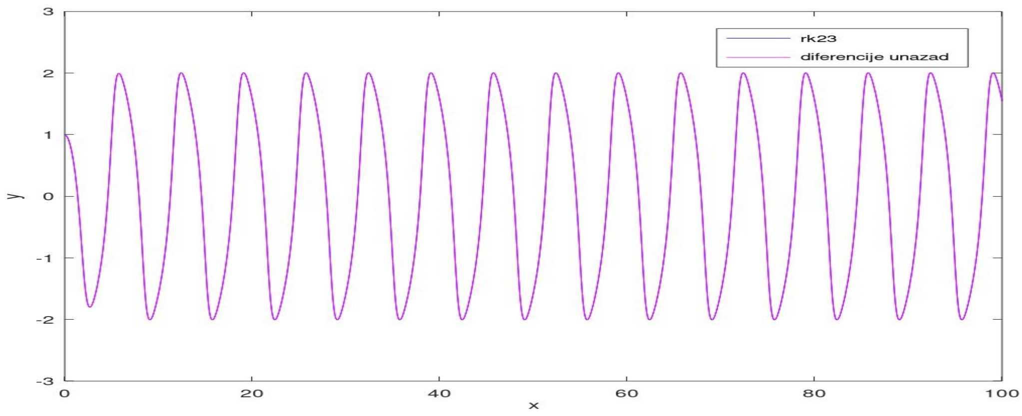
3.1 Neprisiljena jednadžba

Prvi problem pokušavamo riješiti za različite vrijednosti parametra λ, točnije $\lambda = 1, 10, 50, 100, 200$. Budući da nemamo dostupne egzaktne vrijednosti, aproksimaciju uspoređujemo s rezultatima metode RK23. To je metoda koja, za razliku od prethodno opisanih, u svakom koraku mijenja korak integracije h_i tako da bude zadovoljena neka unaprijed zadana točnost ϵ, a nastala je kao kombinacija Runge-Kutta metoda reda 2 i reda 3. Aproksimacije tražimo Adams-Bashforth-Moultonovom metodom [3] i metodom diferencija unazad.

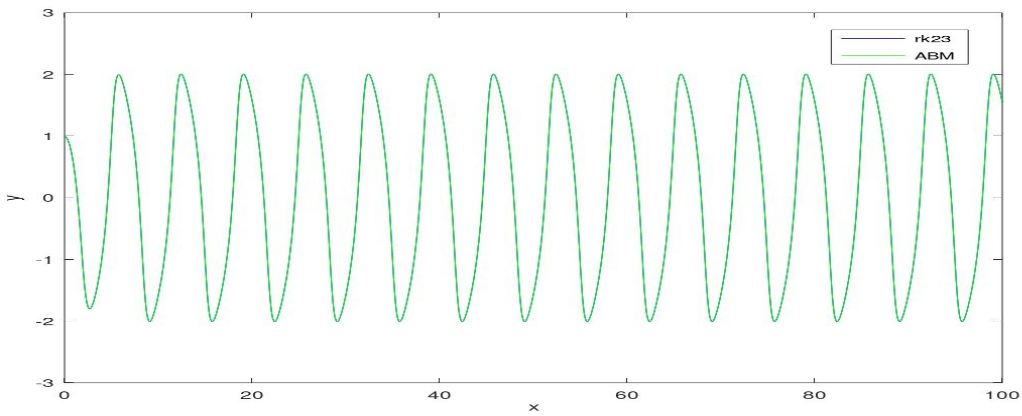
Za $\lambda = 1$, uz broj podintervala $N = 1000$, obje metode uspješno rješavaju problem. Metodi RK23 je bilo potrebno $N = 987$ podintervala. Traženo rješenje prikazano je na slici 1. Međutim, ako postavimo $\lambda = 10$ i zadržimo isti broj podintervala $N = 1000$, imamo rješenje prikazano na slici 3. Situacija se u ovom slučaju popravlja ako povećamo broj podintervala na $N = 3000$.

Van der Polova jednadžba, za velike vrijednosti parametra λ spada u krute probleme ('stiff'). Iako ne postoji općenita definicija za takve probleme, u ovom primjeru se radi o tome da postoje dijelovi rješenja koji sporo rastu/padaju (npr. interval $[20, 30]$ na slici 3) i brzo rastu/padaju (npr. trenutak $x = 20$ i $x = 30$ na slici 3) u usporedbi s duljinom intervala na kojem tražimo rješenje $[0, 100]$. Metoda će stoga zahtijevati mali korak h i taj efekt raste kako raste parametar λ. U tablici 1 i 2 su dani parametri za pojedine rutine koji su bili potrebni da se postigne traženo rješenje u skladu s rezultatima rutine RK23.

[3] prediktor-korektor metoda gdje je A-B uzeta za prediktor i A-M za korektor



Slika 1: $\lambda = 1$, $s = 4$, usporedba s diferencijama unazad

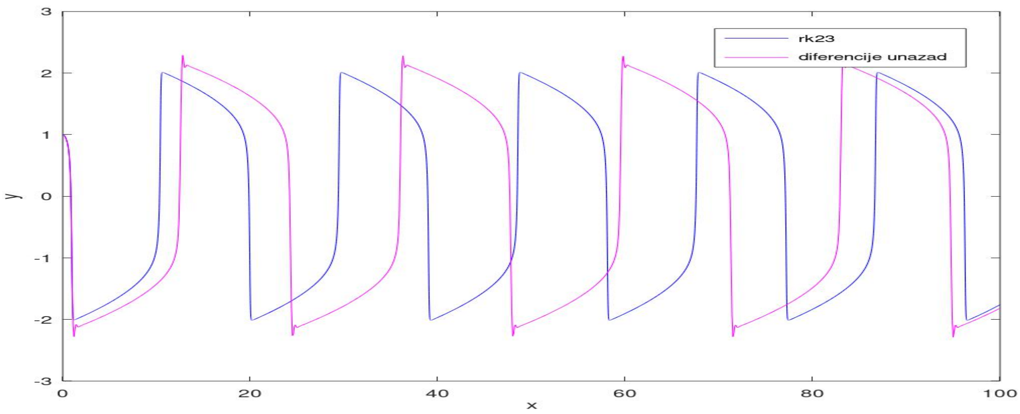


Slika 2: $\lambda = 1$, $s = 5$, usporedba s A-B-M metodom

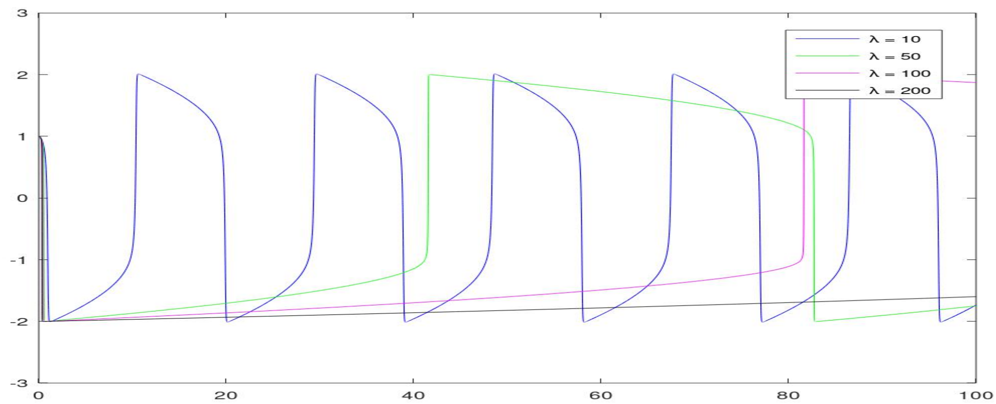
Vidimo kako je rastom parametra λ potrebno sve više intervala čime se smanjuje korak h što može dovesti do grešaka u računanju. Čak i ako rutina uspije doći do rješenja, proces postaje sve sporiji. Na slici 4 prikazana su dobivena rješenja za $\lambda \geq 10$.

Tablica 1: Diferencije unazad

λ	N	s	vrijeme (sec)	uspjeh
1	1000	5	2.201	1
10	3000	5	5.715	1
50	14000	5	25.16	1
100	27000	5	50.038	1
200	35000	3	73.416	1



Slika 3: $\lambda = 10$, $s = 3$, usporedba s diferencijama unazad



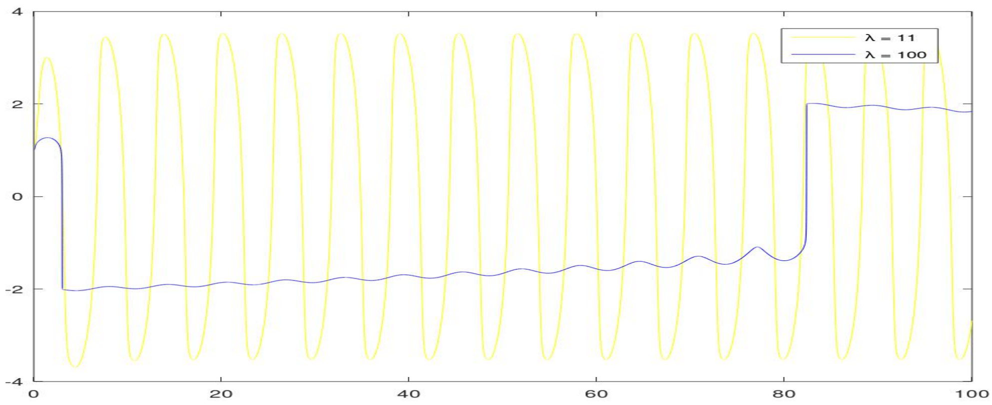
Slika 4: rastom parametra λ pojavljuje se manje oscilacija na $[0, 100]$

Tablica 2: Adams-Bashforth-Moulton				
λ	N	s	vrijeme (sec)	uspjeh
1	1000	5	0.2677	1
10	3000	5	0.8044	1
50	14000	5	3.717	1
100	27000	4	7.1746	1
200	35000	3	9.39	0

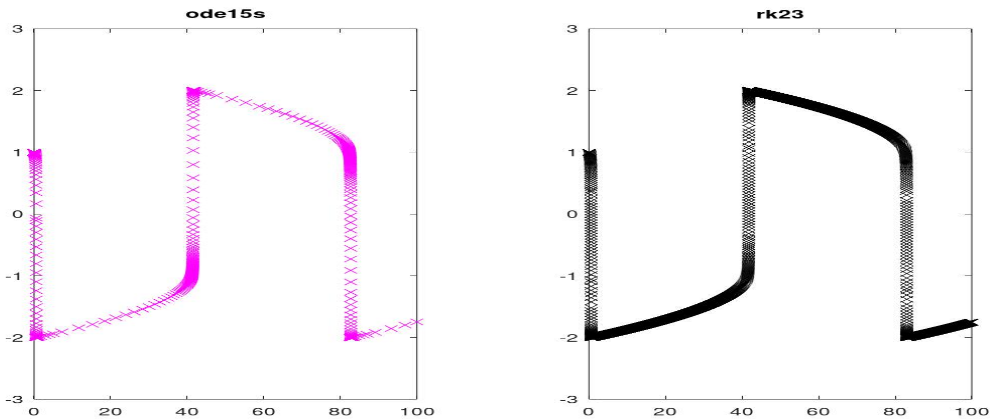
3.2 "Prisiljena" van der Polova jednadžba

Kod prisiljene jednadžbe imamo sličan utjecaj parametra λ.

Diferencije unazad				
λ	N	s	vrijeme (sec)	uspjeh
1	1000	5	2.35455	1
100	25000	5	49.0263	1



Slika 5: rastom parametra λ pojavljuje se manje oscilacija na $[0, 100]$



Slika 6: usporedba koraka h, $\lambda = 50$

Adams-Bashforth-Moulton				
λ	N	s	vrijeme (sec)	uspjeh
1	1000	5	0.3056	1
100	27000	5	8.2726	1

4 Zaključak

Dakle, možemo zaključiti da se, za velike λ, problem lakše rješava metodama koje mijenjaju korak h. Rezultati su uspoređivani s metodom RK23, ali to ne znači da je ta metoda najbolja za ovakve probleme. Matlab ima rutine koje su napravljene posebno za krute probleme i rješavaju van der Polovu jednadžbu u manje od 1 sekunde (npr ode15s ili ode23s). Taj utjecaj smanjivanja koraka možemo vidjeri na slici 6. Korak h se mijenja na mjestima gdje rješenje naglo mijenja brzinu promjene.

Literatura

[1] L.N.Trefethen, *Finite difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations.*

[2] Nela Bosner *Predavanja kolegija "Znanstveno računanje 2"*

[3] Zlatko Drmač, *Predavanja kolegija "Numerička analiza 2"*