

Лабораторная работа №6
Работа с системой компьютерной вёрстки T_EX
Вариант 81

Выполнила:
Абдуллаева София Улугбековна
Группа Р3108

Проверила:
Бострикова Дарья Константиновна

Решения задач

М436-М440; Ф448; Ф450-Ф452

М436. Дано 20 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_{10}$. Докажите, что множество из 100 чисел (необязательно различных) $a_1 + b_1, a_1 + b_2, \dots, a_{10} + b_{10}$ можно разбить на 10 подмножеств, по 10 чисел в каждом, так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.

Запишем наши 100 чисел в квадратную таблицу так, как изображено на рисунке 1; на пересечении i -й строки и j -го столбца поставим число $a_i + b_j$. Образует теперь 10 подмножеств так, как показано на рисунке 2 (на рисунке клетки-числа, относящиеся к одному и тому же подмножеству, обозначены одной и той же цифрой). Легко видеть, что в каждом столбце (и каждой строке) есть представители всех подмножеств, так что индексы i и j чисел $a_i + b_j$, входящих в каждое из подмножеств, принимают все значения от 1 до 10 (ровно по одному разу). Поэтому сумма чисел в каждом из подмножеств одна и та же: $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$.

С. Берколайко

	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{10}
a_1	$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$	$a_1 + b_3$	\dots	$a_1 + b_{10}$
a_2	$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$	$a_2 + b_3$	\dots	$a_2 + b_{10}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_{10}	$a_{10} + b_1$	$a_{10} + b_2$	$a_{10} + b_3$	\dots	$a_{10} + b_{10}$

Рис. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

Рис. 2.

М437. Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

Представлению нечетного числа a в виде разности двух квадратов $a = x^2 - y^2$ соответствует его разложение в произведение двух множителей $a = (x - y)(x + y)$. Это соответствие взаимно однозначно: по каждому разложению $a = r_1 q_1$ (где $r_1 < q_1$) из системы уравнений $x - y = r_1, x + y = q_1$ однозначно определяются $x = (r_1 + q_1)/2$ и $y = (q_1 - r_1)/2$ (поскольку a нечетно, оба множителя r_1 и q_1 тоже нечетны). Выясним, сколькими способами можно разложить число $a = p_1 p_2 \dots p_n$, где p_1, p_2, \dots, p_n - различные простые множители, в произведение двух натуральных чисел: $a = r_1 q_1$. Из n множителей p_1, \dots, p_n можно 2^n способами выбрать некоторое (в частности, пустое) подмножество - произведение этих множителей даст r_1 , а произведение остальных - q_1 (пустое подмножество соответствует единице). Таким образом, всех представителей $a = r_1 q_1$ существует 2^n , а таких, в которых $r_1 < q_1$, - вдвое меньше: 2^{n-1} .

О. Гончарик, С. Сергей



М438. В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания про-

Докажем, что все эти прямые проходят через точку M - середину дуги сегмента, дополняющего данный сегмент до круга. Обозначим границу этого круга через γ (рис 3).

Через K обозначим точку пересечения диаметра MN окружности γ с хордой AB данного сегмента. Пусть γ_1 и

где a_1, a_2, \dots, a_n - действительные, k_1, k_2, \dots, k_n - натуральные числа) имеет не более n положительных корней.

в) Докажите, что уравнение $ax^k(x+1)^p + bx^l(x+1)^q + cx^m(x+1)^r = 1$ (где a, b, c - действительные, k, l, m, p, q, r - натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

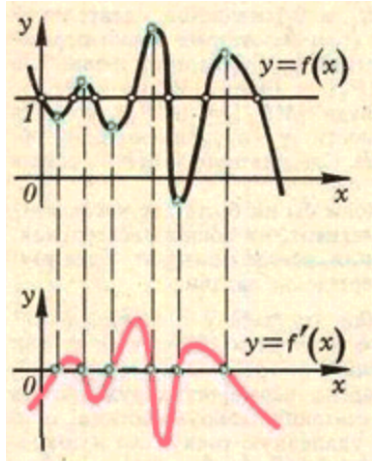


Рис. 5.

части уравнения (l') на $(-\bar{a}_n x^{k_n-1})$, получим уравнение $b_1 x^{k_1-k_n} + b_2 x^{k_2-k_n} + \dots + b_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n} = 1$ (2)

(имеющее более $n-1$ положительных корней). Продифференцировав обе части уравнения (2), получим уравнение $\bar{b}_1 x^{k_1-k_n-1} + \bar{b}_2 x^{k_2-k_n-1} + \dots + \bar{b}_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n-1} = 0$, (2')

имеющее более $n-2$ положительных корней. Поделив обе части (2') на $(-\bar{b}_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n-1})$, получим уравнение $c_1 x^{k_1-k_n-1} + c_2 x^{k_2-k_n-1} + \dots + c_{n-2} x^{k_{n-2}-k_n-1} = 0$, (3) имеющее более $n-2$ положительных корней.

Продолав указанные действия $n-1$ раз, мы придем к уравнению

$$\alpha x^m = 1, (m = k_1 - k_2),$$

которое, в силу сделанного предположения относительно уравнения (1), должно иметь более одного положительного корня. Но это невозможно; значит, исходное уравнение (1) не может иметь более n положительных корней. Утверждение задачи б) доказано.

Перейдем к задаче в). Нам понадобится следующий факт.

Пусть $P_m(x)$ - многочлен от x степени m . Тогда производная выражения $x^k(x+1)^p P_m(x)$ имеет вид $x^{k-1}(x+1)^{p-1} P_{m+1}(x)$, где $P_{m+1}(x)$ - многочлен от x степени $m+1$ (k и p - любые действительные числа).

Действительно,

$$\begin{aligned} (x^k(x+1)^p P_m(x))' &= kx^{k-1}(x+1)^p P_m(x) + \\ &+ px^k(x+1)^{p-1} P_m(x) + x^k(x+1)^p P_m'(x) = \\ &= x^{k-1}(x+1)^{p-1} (k(x+1)P_m(x) + pxP_m(x) + \\ &+ x(x+1)P_m'(x)) = x^{k-1}(x+1)^{p-1} P_{m+1}(x) \end{aligned}$$