Решения задач

М436—М440; Ф448, Ф450—Ф452

М436. *Дано 20 чисел a_1, a_2, …, a_{10}, b_1, b_2 …, b_{10}. Докажите, что множество из 100 чисел (необязательно различных) a_1+b_1, a_1+b_2, …, $a_{10}+b_{10}$ можно разбить на 10 подмножеств, по 10 чисел в каждом так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.*

Запишем наши 100 чисел в квадратную таблицу так, как изображено на рисунке 1; на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим число a_i+b_j. Образуем теперь 10 подмножеств так, как показано на рисунке 2 (на рисунке клетки-числа, относящиеся к одному и тому же подмножеству, обозначены одной и той же цифрой). Легко видеть, что в каждом столбце (в каждой строке) есть представители всех подмножеств, так что индексы i и j чисел a_i+b_j, входящих в каждое из подмножеств, принимают все значения от 1 до 10 (ровно по одному разу). Поэтому сумма чисел в каждом из подмножеств одна и та же: $a_1+a_2+\ldots+a_{10}+b_1+b_2+\ldots+b_{10}$.

С. Берколайко

	b_1	b_2	b_3	• • •	b_{10}
a_1	a_1+b_1	a_1+b_2	a_1+b_3	• • •	a_1+b_{10}
a_2	a_2+b_1	a_2+b_2	a_2+b_3	• • •	a_2+b_{10}
a_3	a_3+b_1	a_3+b_2	a_3+b_3	• • •	a_3+b_{10}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
a_1	$a_{10}+b_1$	$a_{10}+b_2$	$a_{10}+b_3$	• • •	$a_{10}+b_{10}$

Рис. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

Рис. 2.

М437. *Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.*

Представлению нечетного числа a в виде разности двух квадратов $a=x^2-y^2$ соответствует его разложение в произведение двух множителей $a=(x-y)(x+y)$. Это соответствие взаимно однозначно: по каждому разложению $a=rq$ (где $r<q$) из системы уравнений $x-y=r$, $x+y=q$ однозначно определяются $x=(r+q)/2$ и $y=(q-r)/2$ (поскольку a нечетно, оба множителя r и q тоже нечетны). Выясним, сколькими способами можно разложить число $a=p_1p_2\ldots p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые множители, в произведение двух натуральных чисел: $a=rq$. Из n множителей $p_1, \ldots, p_n$ можно 2^n способами выбрать некоторое (в частности, пустое) подмножество — произведение этих множителей даст r, а произведение остальных — q (пустое подмножество соответствует единице) Таким образом, всех представлений $a=rq$ существует 2^n, а таких, в которых $r<q$, — вдвое меньше: 2^{n-1}.

О. Гончарик, С. Сергей

◆

М438. *В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей Для каждой пары окружностей через точку касания про-*

Докажем, что все эти прямые проходят через точку M — середину дуги сегмента, дополняющего данный сегмент до круга. Обозначим границу этого круга через γ (рис 3)

Через K обозначим точку пересечения диаметра MN окружности γ с хордой AB данного сегмента. Пусть γ_1 и *(где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — натуральные числа) имеет не более n положительных корней.*

в) Докажите, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p+bx^l(x+1)^q+ +cx^m(x+1)^r=1$$

(где a, b, c — действительные, k, l, m, p, q, r — натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

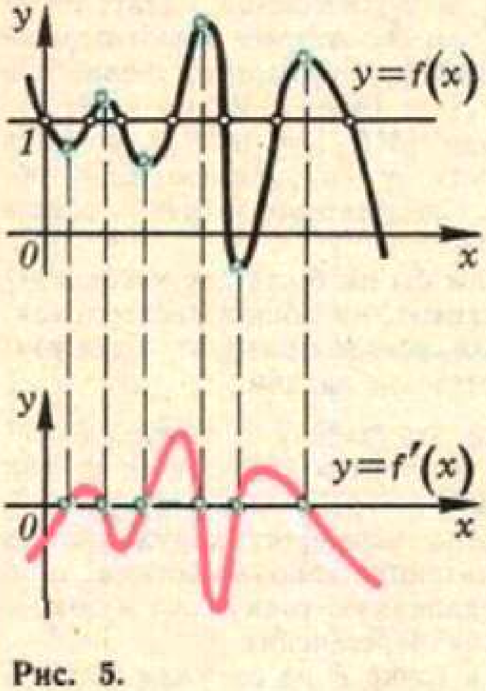

Рис. 5.

части уравнения (1′) на $\left(-\bar{a}_n x^{k_n-1}\right)$, получим уравнение

$$b_1x^{k_1-k_n}+b_2x^{k_2-k_n}+\ldots+b_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n}=1 \qquad (2)$$

(имеющее более $n-1$ положительных корней). Продифференцировав обе части уравнения (2), получим уравнение

$$\bar{b}_1x^{k_1-k_n-1}+\bar{b}_2x^{k_2-k_n-1}+\ldots$$
$$+\bar{b}_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n-1}=0, \qquad (2')$$

имеющее более $n-2$ положительных корней. Поделив обе части (2′) на $\left(-\bar{b}_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n-1}\right)$, получим уравнение

$$c_1x^{k_1-k_{n-1}}+c_2x^{k_2-k_{n-1}}+\ldots+c_{n-2}x^{k_{n-2}-k_{n-1}}=0, \quad (3)$$

имеющее более $n-2$ положительных корней.

Проделав указанные действия $n-1$ раз, мы придем к уравнению

$$\alpha x^m=1, \ (m=k_1-k_2),$$

которое, в силу сделанного предположения относительно уравнения (1), должно иметь более одного положительного корня. Но это невозможно; значит, исходное уравнение (1) не может иметь более n положительных корней. Утверждение задачи б) доказано.

Перейдем к задаче в). Нам понадобится следующий факт. Пусть $P_m(x)$ — многочлен от x степени m. Тогда производная выражения $x^k(x+1)^p P_m(x)$ имеет вид $x^{k-1}(x+1)^{p-1}P_{m+1}(x)$, где $P_{m+1}(x)$ — многочлен от x степени $m+1$ (k и p — любые действительные числа). Действительно,

$$(x^k(x+1)^p P_m(x))' = kx^{k-1}(x+1)^p P_m(x)+$$
$$+px^k(x+1)^{p-1}P_m(x)+x^k(x+1)^p P'_m(x)=$$
$$=x^{k-1}(x+1)^{p-1}[k(x+1)P_m(x)+pxP_m(x)+$$
$$+x(x+1)P'_m(x)=x^{k-1}(x+1)^{p-1}P_{m+1}(x),$$