Université Grenoble Alpes

Mémoire Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques :

OPTIMISATION DE PESÉES

Par Benahcene Sophia
et Perrier Albane

Année universitaire 2022-2023

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Mise en situation :

On dispose de n pièces de monnaie visuellement identiques. Parmi elles figurent de fausses pièces. On sait que les fausses pièces sont d'un poids différents des vraies. Nous disposons d'une balance à plateau. L'objectif est d'identifier les fausses pièces avec le moins de pesées possible (sans poids de référence).

Balance à plateaux

n pièces dont une fausse

PROBLÈME : Comment identifier la fausse pièce avec le moins de pesées possible ?

Dans ce mémoire nous étudierons ce problème lorsqu'il y a une seule fausse pièce dans un tas de n pièce dans les deux cas suivants :

- Cas 1 : On sait que la fausse pièce est plus légère que les vraies.
- Cas 2 : On ne sait pas si la fausse pièce est plus légère ou plus lourde que les bonnes pièces.

CAS N°1 : IDENTIFIER LA PIÈCE LA PLUS LÉGÈRE

A/Comprendre ce qu'est une pesée et exploiter les observations

Dans ce problème nous disposons d'une **balance à plateaux**. Celle-ci permet de comparer le poids de deux entités placées de part et d'autres de la balance (dans notre cas des pièces). La clé du problème réside dans la compréhension minutieuse de la pesée. En effet, chaque pesée peut nous apporter **3** informations différentes.

Soient A et B deux paquets de pièces de **même effectif** que l'on compare. Alors 3 situations sont possibles :

-Soit A est plus léger que B

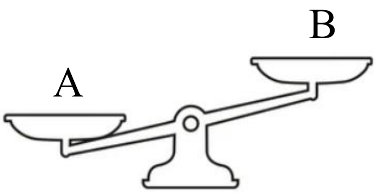
-Soit A est plus lourd que B

Déséquilibre des plateaux

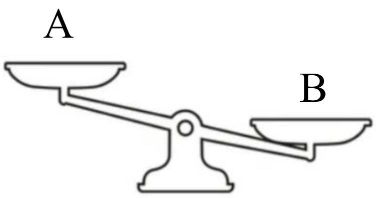
-Soit A fait le même poids que B

Equilibre des plateaux

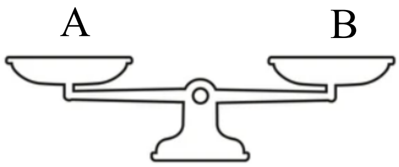
Exploitons alors ces données dans le contexte de notre problème. (Rappel : la fausse pièce est plus légère)



A plus lourd que B : alors je sais que la fausse pièce est dans B.



A plus léger que B : alors je sais que la fausse pièce est dans A.



A de même poids que B : alors je sais que la fausse pièce n'est pas sur les plateaux.

Pour pouvoir faire ces 3 affirmations, il faut nécessairement que A et B soient de même effectif (contiennent le même nombre de pièce). Sinon, les résultats sont faussés.

B/Déterminer la stratégie optimale afin d'identifier la fausse pièce

B.1 : Mais qu'est-ce que la stratégie optimale .

La stratégie optimale est la stratégie qui nous assure de trouver la fausse pièce avec le moins de pesées possible. Bien sûr, bien que la probabilité soit très faible, il est possible d'identifier la fausse pièce en un seul coup. Pour-cela, il suffit de prendre deux pièces aux hasard et avec un peu de chance, l'une (la fausse pièce) sera plus légère que l'autre. Néanmoins la probabilité d'une situation comme celle-ci est aussi peu probable que n est grand. Notre objectif est de déterminer le nombre de pesée **minimal** avec lequel je suis **certain** d'identifier la fausse pièce. La stratégie nous permettant d'atteindre ce nombre de pesée minimal sera alors la stratégie optimale.

B.2 : Etude de petits cas

Commençons par étudier des cas ou n (le nombre de pièce) est très petit. Voyons les cas où une seule pesée suffit à identifier la fausse pièce.

Cas n=2 :

Si j'ai 2 pièces, alors j'en place une de chaque côté de la balance. La pièce la plus légère est la fausse pièce. Alors lorsque n=2, je suis certain d'identifier la fausse pièce en une seule pesée.

Cas n=3 :

Si j'ai 3 pièces, j'en place une de chaque côté du plateau et j'en garde une de côté.

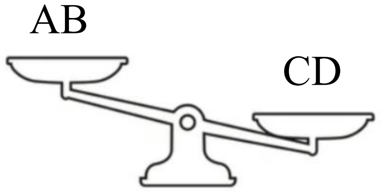
- Si il y a déséquilibre, alors la fausse pièce est la plus légère.
- Si il y a équilibre, alors la fausse pièce est celle mise de côté.

Dans tous les cas, lorsque n=3, une pesée me suffit forcément à trouver la fausse pièce.

Cas n=4 :

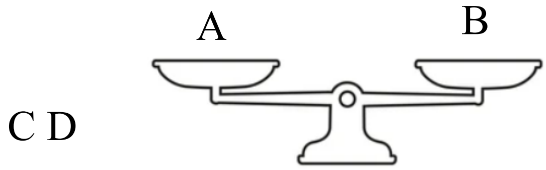
Nommons A,B,C,D les 4 pièces. Plusieurs découpage sont possibles :

-Si j'en place deux sur un plateau et deux sur l'autre alors le plateaux sera forcément déséquilibré. Je sais que la fausse pièce se trouve du côte le plus léger, cependant je ne sais pas laquelle des deux il s'agit. Ainsi, avec ce découpage, une pesée ne me suffit pas à identifier la fausse pièce.



Par exemple, dans ce cas, je sais que la fausse pièce est parmi A et B, cependant je ne sais pas si c'est A ou B.

-Si j'en place une par plateau et que j'en met deux de côté, je ne suis pas certain d'identifier la fausse pièce en une pesée. En effet, si il y a déséquilibre, alors ma fausse pièce est la plus légère. Cependant, si il y a équilibre, je ne sais pas laquelle des deux pièces mises de côté est la fausse.



Par exemple, dans ce cas, je sais que la fausse pièce est parmi C et D, cependant je ne sais pas si c'est C ou D.

Ainsi, peut-importe le découpage que l'on fait, une pesée est **insuffisante** pour être certain d'identifier la fausse pièce lorsque n=4.

De façon triviale, lorsque n > 4 le même problème se pose : une pesée est **insuffisante** pour certifier pouvoir identifier la fausse pièce.

Conclusion B.1 : Le plus grand nombre de pièces pour lequel nous pouvons identifier la fausse pièce avec une seule pesée est n=3.

Nous venons d'établir une **condition nécessaire**: si n<= 3 alors une pesée me permet nécessairement de d'identifier la fausse pièce.

B.3 : Raisonnement rétrograde

Nous allons raisonner de manière rétrograde, c'est-à-dire en partant de la fin et en remontant les étapes vers le début.

Intéressons-nous donc à la dernière pesée (la X-ième). Celle-ci nous permet nécessairement d'identifier la fausse pièce. D'après la conclusion du B.1, lors de cette dernière pesée il y a au maximum 3 pièces.

J'en déduis qu'à la pesée précédente il y avait au maximum 3 pièces par plateau, donc un total de 9 pièces.

Pourquoi cette déduction ?

Soit A,B et C des paquets de taille inconnue. Notons k(A), k(B) et k(C) l'effectif de chaque paquet. Alors en comparant A à B et en exploitant judicieusement les données de la balance, je sais forcément si la fausse pièce est dans A, B ou C. Nommons cette pesée : « pesée 1 »

Après la pesée 1, il me reste donc soit k(A), soit k(B), soit k(C)

Appelons « pesée 2 » la pesée suivant la pesée 1. En raisonnant de manière rétrograde, je sais déjà combien de pièce au maximum j'ai à lors de la pesée 2. Supposons que dans la pesée 2 j'ai maximum x pièce au total. Je sais donc que x est soit l'effectif de A, soit l'effectif de B, soit l'effectif de C. De plus, étant donné que x est le nombre maximum de pièce à la pesée n°2., on a : k(A)<=x, k(B)<=x et k(C)<=x.

Conclusion : Les paquets précédant la pesée 2 sont d'effectif maximum x chacun.

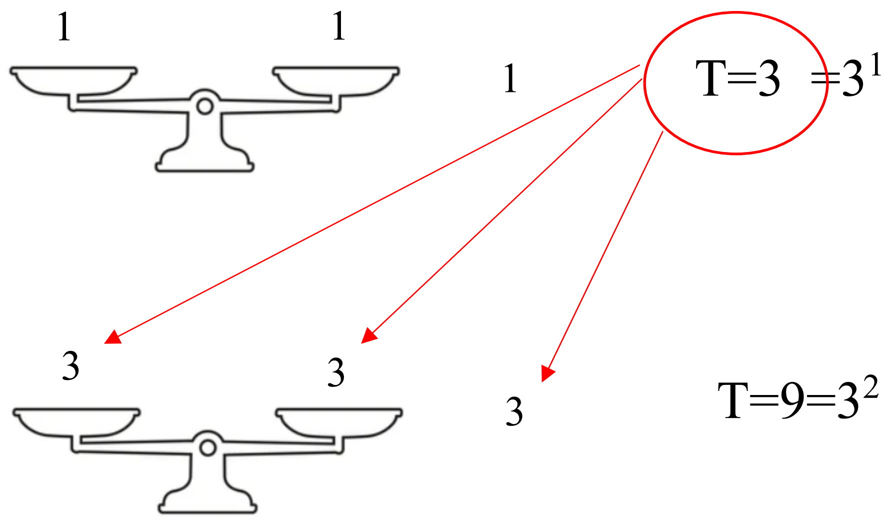
Dans notre cas, la pesée 2 est la dernière pesée. Je sais qu'à la dernière pesée il y a maximum 3 pièce. D'après ce raisonnement, à l'avant dernière pesée il y avait maximum 3 pièces par plateau soit un total de 9 pièces.

Ainsi nous pouvons établir ces différentes étapes en remontant chaque pesée :

On note T le **total de pièce maximal** lors de la pesée. (*dans le schéma l'inclinaison de la balance n'a pas d'importance)*

X-ième pesée :

(X-1)-ième pesée :



(X-2)-ième pesée :

9 9

9

$T=27=3^3$

• • •

1ère pesée :

Y Y

Y

$T=3^x$

<u>Comment interpréter ce schéma rétrograde?</u>

-Si n=27, alors il me suffit de 3 pesées pour atteindre la situation dans laquelle je suis sure de trouver la pièce falsifiée. Donc avec 3 pesée je suis sure de trouver la fausse pièce. De plus, 3 est le nombre le plus petit avec lequel je suis sure d'y arriver.

-Si $9<n<=27$, alors je suis sure qu'avec 3 pesée je trouve la fausse pièce et 3 est le nombre minimum de pesée avec lequel je suis sure de réussir.

-Si $n<=9$ alors je suis sure qu'avec 2 pesée je trouve la fausse pièce et 2 est le nombre minimal avec lequel je suis certain d'y parvenir.

De manière générale :

$3^{X-1}<n<=3^X$ et X correspond au nombre de pesée minimal avec lequel je suis sûr d'identifier la fausse pièce

Ce raisonnement théorique décris donc la stratégie optimal. En effet, pour construire le schéma rétrograde, on a considérer le nombre maximal de pièce à chaque pesée. Cela conduit donc au nombre de pesée le plus petit tel que je suis certain d'identifier la fausse pièce.

<u>C/Elaboration d'une stratégie pratique</u>

A partir du raisonnement rétrograde, nous avons théoriser la situation optimale. Mettons désormais en pratique cette théorie.

Dans le schéma précédant se dessine l'idée d'un découpage des n pièces en 3 paquets. Nommons A, B et C ces trois paquets. Alors A et B correspondent aux paquets de chaque côté de la balance et le paquet C est celui mis de côté.

Quel découpage choisir lors de la répartition n 3 paquets ?

Le découpage, pour mener à une stratégie optimal, doit respecter certaines conditions :

Condition n°1 :d'après le « A/Comprendre ce qu'est une pesée et exploiter les observations », je sais que les paquets A et B sont de même taille.

Condition n°2 : Mon objectif est d'atteindre la théorie optimale. D'après le B.3, je sais que chaque paquet doit contenir au maximum le total de la pesée suivante. Je peux traduire ca en écrivant la chose suivante :
Soit m l'effectif maximal d'un paquet.

Alors on a : $3^{k-1}<n<=3^k$ avec k représentant le nombre de pesée minimal pour trouver la fausses pièce pour n pièce. Donc dans la pesée suivante k diminue de 1 est n vaux maximum m. Il faut donc que m vérifie :

$m<=3^{k-1}$

Etudions les découpages cas par cas :

-Soit n=3k :

Nous proposons un découpage en 3 part égale. Donc :

A=m
B=m
C=m

On vérifie alors si les 2 conditions sont vérifiées :

-A=m=B ; La condition n°1 est **vérifiée.**

-Je sais que $3x<=3^k$. En divisant par 3 on a bien m $<=3^{k-1}$. La condition n°2 est vérifiée.

Donc lorsque n=3k, ce découpage nous permet de mettre en pratique la stratégie optimale.

-<u>Soit n=3k+1 :</u>

Voici le découpage que l'on propose :

A=k+1
B=k+1
C=k-1

On a bien A+B+C=n=3k+1.

De plus, A=B=k+1 (la condition n°1 est vérifiée).
De plus, on a bien x<=3^{k-1} (voir annexe pour justification)

<u>Soit n=3k+2</u> :

Voici le découpage que l'on propose :

A :k+1
B :k+1
C :k

Alors on a bien A+B+C=n=3k+2
Aussi A=B=k+1 (la condition n°2 est vérifiée)

De plus, on est sûr qu'à chaque fois k+1<=3^{k-1} (VOIR ANNEXE JUSTIFICATION)

Ainsi, nous avons déterminé théoriquement une stratégie optimale. Puis nous avons trouvé une solution nous permettant de mettre en pratique la théorie optimale. Donc nous avons trouvé la stratégie optimale.

<u>CAS N°2:</u> ON NE SAIT PAS SI LA FAUSSE PIÈCE EST PLUS LÉGÈRE OU PLUS LOURDE

<u>A2/Nuance avec le premier cas :</u>

Dans le cas précédent, un déséquilibre de la balance nous donnait forcément une information sur la position de la fausse pièce : celle-ci est plus légère, donc on savait qu'elle se trouvait sur le plateau plus léger. Cependant, dans ce cas ci, un déséquilibre nous informe simplement que la fausse pièce est sur la balance, nous ignorons sur quel plateau. Ce cas de figure fait apparaitre une notion de pièce de référence : il nous faut une pièce que nous savons forcément vraie pour faire des comparaisons et identifier la fausse pièce.

Par exemple, si n=2 il est impossible de trouver la fausse pièce. En effet, je sais qu'en mettant les deux pièces sur la balance, il y aura un déséquilibre. Cependant comment savoir laquelle est la bonne sans une pièce de référence ?

<u>Etude du cas n=3 :</u>

.

Ainsi, le plus petit n pour lequel il est possible d'identifier la fausse pièce est n=3. En effet, on nomme A, B et C les trois pièces. On place A et B sur la balance. *(On appelle nature de A le fait que A soit plus lourd ou plus léger)*

Cas 1 : Si A=B, alors la fausse pièce est C (A et B sont des pièces de référence)
Je compare ensuite C avec A (La fausse pièce est de nature C)

Cas 2 : Si A≠B, alors je sais que soit A soit B est une fausse pièce et je sais que C est authentique (C est une pièce de référence). Je compare donc A à C. *(je retiens si A est plus lourd ou plus léger)*

-Si A=C alors la fausse pièce est B (et elle est de nature différente de A)
-Si A≠C alors la fausse pièce est A (et elle est de nature A)

Ainsi, avec 2 pesées, je sais nécessairement où est la fausse pièce. Cependant, ce n'est pas la seule information que j'ai avec 2 pesées. En effet en faisant les instructions écrites en vert, je sais également déterminer si la fausse pièce est plus lourde ou plus légère. Ainsi, à l'issue de 2 pesées, nous retombons dans le cas n°1 car on connait désormais la nature de la fausse pièce.

(*Ne pas connaitre la nature de la fausse pièce au départ ne veut pas dire qu'on ne peut pas la déterminer)*

Analyse théorique :

Avec le cas n°1 , pour n pièces il me fallait X pesée(s) pour identifier avec certitude la fausse pièce (X étant le plus petit possible) . Dans le cas n°1, la dernière pesée contenait maximum 3 pièces et en une pesée, on pouvait extraire la fausse pièce parmi les 3. Ici, il faut 2 pesées pour être sure d'identifier la fausse pièce parmi les 3, soit une de plus que dans la solution optimale du cas n°1. Ainsi, théoriquement, pour n pièce, on devrait avoir besoin au minimum de X+1 pesée(s) pour déterminer la fausse pièce. En d'autres terme, pour n pièces, je sais qu'il me faut au moins X+1 pesée pour trouver la fausse pièce et je sais que X+1 est le plus petit possible.

Si on trouve une stratégie qui en pratique nous permet d'identifier la fausse pièce avec X+1 pesée(s) à coup sûr, alors c'est la stratégie optimale du cas n°2

B/ Existe-t-il une stratégie nécessitant maximum X+1 pesée pour identifier la fausse pièce ?

Je sais que le minimum que je puisse atteindre est X+1 pesée(s) pour n pièce. En d'autre termes, si ce minimum est atteignable, après une pesée je peux me retrouver dans le cas n°1 et appliquer la stratégie n°1 optimale. Autrement dit, pour n pièces, ma situation à l'issue de la 2ème pesée dans le cas 2 doit être identique à ma situation à l'issue de ma 1ère pesée du cas 1.
Mais est-ce possible ?

Procédons au cas par cas

-Si n=3k

Je fais 3 paquet de k pièces. A,B,C.

Cas 1 : 1ère pesée : Si A=B, alors la fausse pièce est dans C
2ème pesée : Je compare ensuite C avec A (La fausse pièce est de nature C)

Cas 2 : Si A≠B, alors je sais que soit A soit B contient la fausse pièce et je sais que les pièces de C sont authentiques. Je compare donc A à C. *(je retiens si A est plus lourd ou plus léger)*
-Si A=C alors la fausse pièce est B (et elle est de nature différente de A)
-Si A≠C alors la fausse pièce est A (et elle est de nature A)

Ainsi, à l'issue de la deuxième pesée, il me reste **k pièces** et **je connais la nature** de la fausse pièce.

Dans le cas n°1, lorsque n=3k, à l'issue de la 1ère pesée, il me reste **k pièces** et **je connais la nature** de la fausse pièce

Ainsi, ma situation à l'issue de la deuxième pesée dans le cas n°2 est la même qu'à l'issue de la première pesée dans le cas n°1, donc je peux utiliser la stratégie optimale du cas n° 1 dès la 3^{e} pesée. Cette stratégie me permet d'identifier la fausse en maximum X+1 pesées (situation optimale).

<u>-Si n=3k+1 :</u>

Alors je fais 3 paquets dont les effectifs sont les suivants :
-A=k
-B=k
C=k+1

Je compare A et B.

-Si A=B, je sais que la fausse pièce est dans C. Donc toutes les pièces dans A et B sont authentiques. Avec A et B, je constitue un paquet (D) de taille k+1.
Je compare ensuite D à C et je sais que la fausse pièce est de nature C.

-Si A≠B alors je sais que la fausse pièce est soit dans A soit dans B. (et que toutes les pièce de C sont authentiques) Je retiens la nature de B par rapport à A.
Ensuite, j'enlève une pièce dans C (aucun risque d'enlever la mauvaise) pour que C=k.
Je compare alors C avec A :

-Si A=C, alors la fausse pièce est dans B et est de nature B
-Si A≠C alors la fausse pièce est dans A et est de nature A.

Ainsi, à l'issue de la deuxième pesée, il me reste maximum **k+1 pièces** et **je connais la nature** de la fausse pièce.

Dans le cas n°1, lorsque n=3k+1, à l'issue de la 1ère pesée, il me reste maximum **k+1 pièces** et **je connais la nature** de la fausse pièce

Ainsi, ma situation à l'issue de la deuxième pesée dans le cas n°2 est la même qu'à l'issue de la première pesée dans le cas n°1, donc je peux utiliser la stratégie optimale du cas n° 1 dès la 3^{e} pesée. Cette stratégie me permet d'identifier la fausse en maximum X+1 pesées (situation optimale).

-<u>Si n=3k+2 :</u>

Dans ce cas je fais 4 paquets :
A=k
B=k
C=k+1

D=1

<u>Cas I : 1^{ère} pesée A=B</u>

Je sais que la fausse pièce n'est ni dans A ni dans B (elle est soit dans C soit c'est D). Alors je forme un paquet E d'effectif k+1 à partir des pièces de A et B. Je compare ensuite A et E.

-Si A≠E alors la fausse pièce est dans E et est de nature E
-Si A=E alors la fausse pièce est D (plus besoin de pesée, c'est terminée)

<u>Cas II : 1ère pesée A≠B</u>

Alors je sais que la fausse pièce est dans A ou dans B. Je retiens la nature de B par rapport à A. Je retire une pièce à C pour obtenir C=k=A=B. Je compare ensuite A et C.

-Si A≠C alors la fausse pièce est dans A et est de nature A
-Si A=C alors la fausse pièce est dans B et est de nature B

A l'issue de la deuxième pesée, soit j'ai terminé, soit j'ai au maximum k+1 pièce et je connais la nature de la fausse pièce.

Dans le cas n°1, lorsque n=3k+2, à l'issue de la 1ère pesée, il me reste maximum **k+1 pièces** et **je connais la nature** de la fausse pièce.

Ainsi, ma situation à l'issue de la deuxième pesée dans le cas n°2 est la même qu'à l'issue de la première pesée dans le cas n°1, donc je peux utiliser la stratégie optimale du cas n° 1 dès la 3e pesée. Cette stratégie me permet d'identifier la fausse en maximum X+1 pesées (situation optimale).

CONCLUSION : Peu importe la valeur de n, je sais déterminer la fausse pièce en maximum X+1 pesée(s). Or d'après, l'analyse théorique, on ne peut pas être sûr de trouver la fausse pièce avec moins de X+1 pesée(s). Nous avons donc trouvé la stratégie optimale.

ANNEXE

A partir du schéma réalisée par raisonnement rétrograde, on peut écrire ceci :

1 pesée $\quad T = 3^1$

$T = 4 = 3k+1$
$T = 5 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=1$

+1

$T = 6 = 3k$
$T = 7 = 3k+1$
$T = 8 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=2$

+1

2 pesée $\quad T = 9 = 3^2$

$T = 10 = 3k+1$
$T = 11 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=3$

+1

$T = 12 = 3k$
$T = 13 = 3k+1$
$T = 14 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=4$

+1

$T = 15 = 3k$
$T = 16 = 3k+1$
$T = 17 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=5$

+1

$T = 18 = 3k$
$T = 19 = 3k+1$
$T = 20 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=6$

+1

$T = 21 = 3k$
$T = 22 = 3k+1$
$T = 23 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=7$

+1

$T = 24 = 3k$
$T = 25 = 3k+1$
$T = 26 = 3k+2$ $\Big\}$ $k=8.$

3 pesée $\quad T = 27 = 9^3$

En generalisant ce shéma, on peut écrire :

$X-1$ pesée $\quad T = 3^{X-1}$

$$\left.\begin{array}{l} T = 3k+1 \\ T = 3k+2 \end{array}\right\} k = \frac{3^{k-1}}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 3k \\ T = 3k+1 \\ T = 3k+2 \end{array}\right\} k = \frac{3^{k-1}}{3} + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 3k \\ T = 3k+1 \\ T = 3k+2 \end{array}\right\} k = \frac{3^{k-1}}{3} + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 3k \\ T = 3k+1 \\ T = 3k+2 \end{array}\right\} k = \frac{3^{k-1}}{3} + 3$$

...

$$\left.\begin{array}{l} T = 3k \\ T = 3k+1 \\ T = 3k+2 \end{array}\right\} k = 3^{k-1} - 1$$

$T = 3^X$

Ainsi, on a ; pour $3^{k-1} < T \leq 3^k$, $\frac{3^{k-1}}{3} \leq k \leq 3^{k-1} - 1$

En gardant la 2e moitié de l'inegalité, j'ai :

$$k \leq 3^{X-1} - 1 \iff k+1 \leq 3^{X-1}$$

Donc j'ai bien $k+1 \leq 3^{X+1}$, donc la condition 2 est verifiée.