Provas antigas

Grafos

(prova 1)

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas e Informática

Dpto de Ciência da Computação – Ciência da Computação

Teoria de Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães

2022/2 (Prova 1)

76

Aluno: [redacted] Total da Prova: 62 / 100 %

Questão 1 (10 %)

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 11 vértices e 6 componentes, responda e justifique as seguintes questões:

(regular)

11-6=5 mínimo de arestas ?

3 a) (3 %) É possível que esse grafo possua 05 arestas? Sim, o mínimo é 5

3 b) (3 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 12? Sim

$12 = 2 \cdot E$

$E = 6$

6 componentes

4 c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 100?

Questão 2 (30 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$ e representado pela seguinte matriz de adjacência

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	1
E	0	1	0	1	0	0
F	0	0	1	0	0	0

todos os vértices que podem ser alcançados a partir de pelo menos um vértice do conjunto (é a união dos fechos transitivos diretos de cada um).

Responda e justifique as seguintes questões:

4 a) (4 %) Qual o fecho transitivo direto do vértice A?

6 b) (6 %) Qual o fecho transitivo inverso do conjunto de vértices $\{B, F\}$?

1 c) (10 %) Como seria um algoritmo para identificar uma base em um grafo? Sua solução funciona para quais tipos de grafos?

não tem arestas que saem (nenhuma q chega nele)

1 d) (10 %) Como seria um algoritmo para identificar uma ant-base em um grafo? Sua solução funciona para quais tipos de grafos?

pode ser alcançado por todos mas não alcança ninguém.

~~nº de subgrafos de um grafo completo~~ ~~= $2^{\text{n. de arestas}}$~~

nº máximo de arestas de um grafo regular $= \dfrac{v(v-1)}{2}$

soma dos graus $= 2\cdot|E|$

$\left(\sum_{v\in V} d(v)\right)$

nº mínimo de arestas em um grafo simples e conexo $= v - 1$ (nº de vértices)

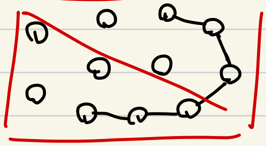
1

a) 11 V
5A

11 − 6 = 5 arestas (o mínimo)

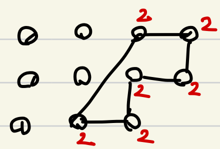
→ Sim, é possível um grafo simples de 11 vértices possuir 5 arestas, basta ele não ser conexo.

exemplo!



b) $12 = 2\cdot|E|$
$E = 6$

→ Sim, é possível, se o grafo tiver 6 arestas (sem loops ou arestas múltiplas)



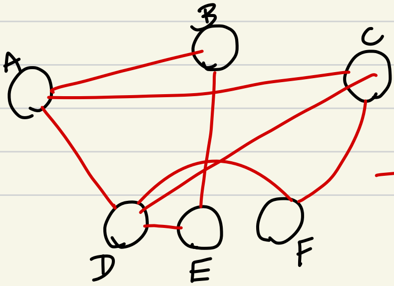
2+2+2+2+2+2=12

c) $\cancel{\dfrac{11(11-1)}{2} = \dfrac{11\cdot 10}{2}} = \dfrac{110}{2} = 55$ → $\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot 55 = 110$

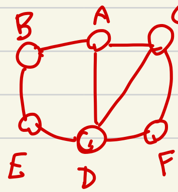
$\dfrac{(11-6)\cdot(11-6-1)}{2} = 10$ → $\sum d(v) = 20$ $(2\cdot 10)$

→ ~~Sim~~ Não, é possível que essa soma seja maior que 100. Isso pois, descobrindo que o nº máx de arestas do grafo regular de 11V é 10, a soma dos graus desse grafo é 20.

2



6V e 8A



a) $\Gamma^+(a) = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) (todos U todos) $\longrightarrow$ $\Gamma^+(a, b) = \{a, b, c, d, e, f\}$

c) Um algoritmo para encontrar uma base em um grafo verificaria, por cada vértice, qual o seu grau de entrada e seu grau de saída. Se o vértice tiver grau de entrada igual a zero, ele é uma base.

Porém, essa solução somente funciona para grafos direcionados (que sabemos o grau de entrada e saída do vértice)

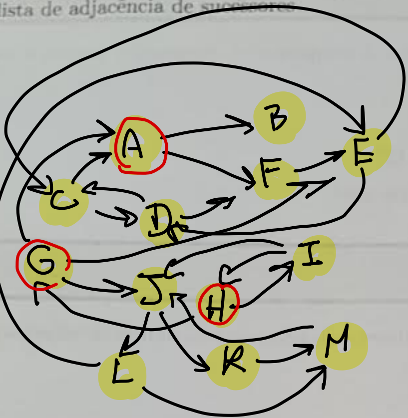
d) Um algoritmo para encontrar uma anti-base seria da mesma forma que o anterior, mas verificando se o vertice tem grau de <u>saída</u> igual a zero. (Também somente funciona para grafos direcionados).

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Dpto de Ciência da Computação – Ciência da Computação
Teoria de Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães
2022/2 (Prova 1)

Questão 3

(20 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ e representado pela seguinte lista de adjacência de sucessores



	lista de sucessores
A	B – F
B	–
C	A – D
D	C – F
E	C – D
F	E
G	A – E – J
H	G – I
I	H – J
J	K – L
K	M
L	E – M
M	J

ele percorre de um vértice até os vértices filhos, o mais profundo possível, p/ somente depois retroceder.

percorrer ou buscar itens dentro das estruturas de dados (grafos)

6 a) (6 %) Qual seria a ordem de visita dos vértices na busca em profundidade, iniciando no vértice A, considerando a ordem alfabética para a prioridade na visita dos vizinhos?

14 b) (14 %) O grafo é acíclico? Justifique sua resposta mostrando um algoritmo para detectar ciclos.

Questão 4

(20 %)

é o grafo simples que possui o mesmo conjunto de vértices de G, e tal que, dois vértices são adjacentes em G' se não são em G

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado. O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G} = (V', E')$, é definido por $V' = V$ e $E' = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E\}$. Um grafo é dito *auto-complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

6 a) (6 %) Dê um exemplo de um grafo *auto-complementar* com mais de 3 vértices.

0 b) (14 %) Mostre o que o número de arestas de um grafo *auto-complementar* é divisível por 4.

↳ isomorfo

Questão 5

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado.

0 a) (6 %) Mostre todos os subgrafos de um grafo completo com 3 vértices.

14 b) (14 %) Quantos subgrafos existem em um grafo completo com n vértices em que $n = |V|$?

2 ?

$\sum_{i=1}^{\infty} n^{\frac{i(i-1)}{2}} \binom{n}{i}$

array de cores

3) pilha de chamada = [A] [B] [F] [E] [C] [D] [G] [J] [K]

~~A~~ ~~A~~ ~~C~~ ~~F~~ ~~A~~ ~~E~~

[M] [L] [H] [I]

~~J~~

a)

acontecia a G. Próx = H

ordem de visita: A, B, F, E, C, D, G, J, K, M, L, H, I

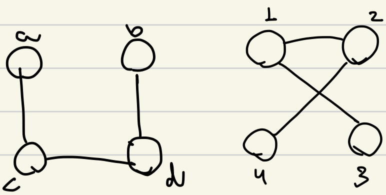
acontecia a A acabam aqui (continua pelo próx. ainda não visitado da ordem alfabética) = G

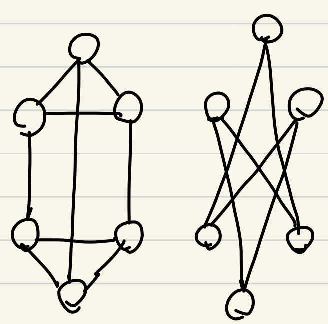
b) O grafo não é acíclico, pois podemos observar ciclos, como C-D-C e J-K-M-J.

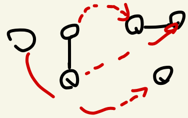
Um algoritmo para detectar ciclos seriam labels para cada vértice do grafo: branco para não visitados, cinza para parcialmente explorado e preto para totalmente explorado.
Todos os vértices (nós) começam como brancos. Ao visitar um, ele se torna cinza e continua-se percorrendo seus vizinhos. Quando acabar, ele se torna preto. Se, no meio dos vizinhos, encontrarmos um cinza, encontrou-se um ciclo.

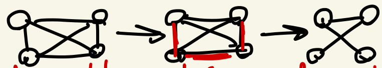
4)

a)









grafo completo − grafo G = grafo complementar

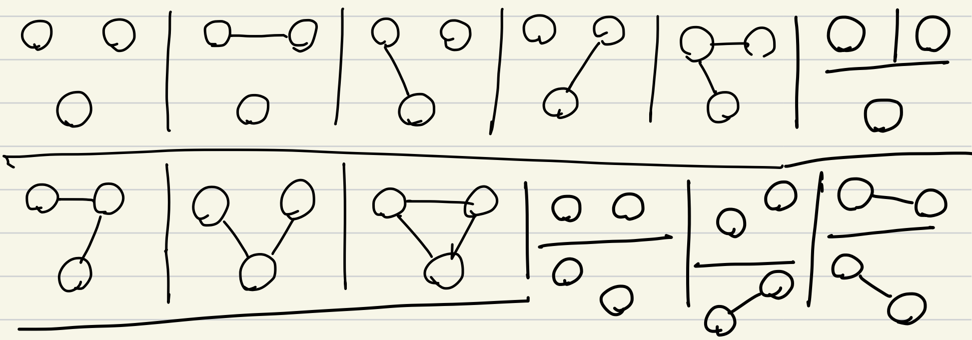
b) Para que o complementar de G seja isomorfo a G, eles precisam ter o mesmo número de arestas.

Como o grafo complementar é o grafo completo menos o grafo G, devemos dividir o número de arestas do grafo completo igualmente entre o G e o complementar, realizando: $\dfrac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}{2} \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{4}$

Logo, o nº de arestas de um grafo auto complementar é divisível por 4.

5

a)



São 17 subgrafos

b) Um grafo completo tem $\frac{v(v-1)}{2}$ arestas, e a qntd. de subgrafos de um grafo regular é $2^{\text{nº de arestas}}$. Logo:

$$\cancel{\text{qnt de subgrafos} = 2^{\frac{v(v-1)}{2}}}$$

Correção:

Cada aresta do grafo pode estar presente ou ausente no subgrafo, logo, o número de subgrafos é a soma de todas as combinações possíveis

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i(i-1)}{2}} \cdot \binom{n}{i} \qquad \binom{n}{i} \to \frac{n!}{i!(n-i)!}}$$

$3 + 6 + 8 = 17$ //

$\frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0 \quad 2^0 = 1$

$1 \cdot 3$

$\frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 3$

$2^{\frac{2 \cdot 1}{2} = 1} \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$

$\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

$2^{\frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}} = 3 \rightarrow 2^3 = 8$

$\frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1 \rightarrow 1 \cdot 8 = 8$

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Dpto de Ciência da Computação – Ciência da Computação
Teoria de Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães
2023/1 (Prova 1)

Aluno: [redacted] Total da Prova: 28 / 100 %

Questão 1

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado, $|V| = n$ e $|E| = m$.

4

- a) (4 %) Mostre que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
- b) (4 %) Mostre que se G é um grafo bipartido então $m \leq \frac{n^2}{4}$.
- c) (4 %) G pode ser regular se $n = 15$ e o grau de cada vértice for 3?
- d) (4 %) A seguinte sequência de graus 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 pode representar um grafo G?
- e) (4 %) Se G é um grafo tripartido, qual o maior número de arestas de G. Faças as considerações que julgar necessárias.

Questão 2

(20 %)

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 13 vértices e 6 componentes, responda e **justifique** as seguintes questões (respostas sem justificativas serão desconsideradas):

11

- a) (3 %) É possível que esse grafo possua 06 arestas?
- b) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 14?
- c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 56?
- d) (4 %) É possível transformar este grafo em um grafo conexo com a inclusão de 5 arestas?
- e) (5 %) É possível que esse grafo seja regular?

Questão 3

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado. O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G} = (V', E')$, é definido por $V' = V$ e $E' = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E\}$. Um grafo é dito *auto-complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

2 a) (6 %) Dê dois exemplos de grafos *auto-complementar* com mais de 4 vértices.

0 b) (14 %) Prove que um grafo *auto-complementar* tem $4k$ ou $4k + 1$ vértices, para k um inteiro não negativo

Questão 4

(15 %)

7 a) (7 %) Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

4 b) (8 %) O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não-direcionado? E de um grafo direcionado?

Questão 5

(25 %)

0

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado e um vértice $v \in V$. Projete um algoritmo para encontrar o número de arestas entre v e todos os outros vértices do grafo G. Portanto, a saída do algoritmo deverá ser, para cada vértice $u \in V$ a distância, em número de arestas, entre v e u. *Deixe claro todos os elementos e etapas de seu algoritmo.*

distância mínima em nº de arestas → BFS

1

a) Sempre será menor ou igual a $\frac{n(n-1)}{2}$ pois, para encontrar a maior quantidade possível de arestas de um grafo, cada vértice tem que se ligar a todos os demais. Assim, todo vértice terá grau igual a $n-1$, e $n \cdot (n-1)$ o somatório de todos esses graus. Como esse somatório é igual a $2 \times$ o nº de arestas, temos $\frac{n(n-1)}{2}$.

b) Em um grafo bipartido, os vértices de um mesmo conjunto não podem combinar entre si. Logo, p/ maximizar o nº de arestas, dividimos a mesma quantidade de vértices p/ m e n. Como a formula p/ o máx. de arestas num bipartido é $n \cdot m$, e os 2 têm a mesma qnt de vertices, então:

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \boxed{\frac{n^2}{4}}$$

c) 15 vértices ⟶ todos de grau 3
$(3 \cdot 15 = 45)$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

$$45 = 2 \cdot |E|$$

$$E = 45/2$$

⇓

impossível ter um número que não seja natural de arestas.

grafo regular = todos os vértices possuem o mesmo grau.

NÃO É POSSÍVEL.

d) $(1, 1, \underbrace{3, 3, 3, 3}_{2+12}, \underbrace{5, 6, 8, 9}_{28}) \rightarrow 42 = 2 \cdot |E|$
(10v)

$14 \quad 42$

$$E = 21$$

Sim, é possível (com 21 arestas) e 10 vértices

e) Para encontrar o maior nº de arestas de G, devemos somar a combinação entre os 3 conjuntos $(x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z)$

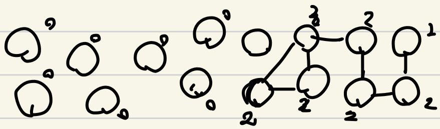
$$\frac{n^2}{3}$$

2 - 13 vertices | 6 componentes → ele é formado por 6 subconjuntos disjuntos.

a) $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{13\cdot 12}{2} = 78$ arestas (MAX) → Sim, pode ter 6 arestas

b) $14 = 2\cdot E$

$E = 7$ arestas



} 14 → Sim, é possível

c) $\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot|E|$ $\frac{13\cdot 12}{2} = 78$ arestas

$56 > 2\cdot|E|$

$E > 28$ arestas

Sim, é possível que essa soma seja maior que 56

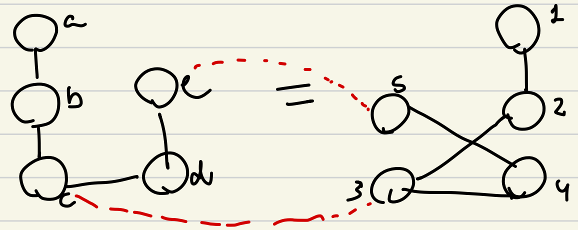
d) Não. Um grafo conexo deve ter pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices, logo, ele deve ter pelo menos $n-1$ arestas para conectar todos os n vertices. $n-1$ nesse caso é 12, então, 5 arestas seriam insuficientes.

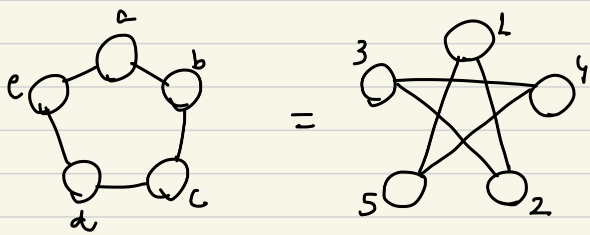
e) Para ser regular o nº de vértices deve ser divisível por 6, já que a quantidade de arestas deve ser dividida igualmente entre os vertices de cada componente. Porém, esse não é o caso, 13 não é divisível por 6.

Logo, esse grafo não pode ser regular.

3 -

a)





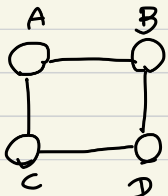
a = 1
b = 2
c = 3
d = 4
e = 5

b) Em um grafo bipartido, devemos dividir a quantidade de vertices ao meio para a quantidade de cada conjunto ser idêntica (ou identica +1 isolado) e não ter vértices de um mesmo conjunto entre si. Como a fórmula para a qntd. de arestas é $\frac{n^2}{4}$ temos que a quantidade de vértices é $4n$ ou $4n+1$ quando há 1 vértice isolado

4

a)

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	0	1
C	1	0	0	1
D	0	1	1	0



grafo simples
(sem loops ou arestas paralelas)

Sim, essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples, já que, como a diagonal é completa de 0s, não há loops (vertices apontando p/ eles mesmos) no grafo.

b) A soma das entradas de uma coluna na matriz de adjacência de um grafo não-direcionado significa o grau desse vértice (a quantos vértices ele está conectado.
Já para um grafo direcionado, ela indica o grau de entrada desse vértice (quantos vertices apontam para ele).
(Se fosse a soma das entradas da linha, indicaria o grau de saída desse vértice).

5

grafo G

```
n = numVertices (G)
distancias = [-1] · n   } inicializa todos os vertices como -1 (não visitado)
distancias [v] = 0      } adiciona um vertice v → a distância dele p/ ele mesmo é 0.
fila = [v]              } inicializa a fila c/ o v.

enquanto a fila não está vazia:
    v_atual = fila.removerInicio ()
    p/ cada vizinho u de v_atual de G:
        se distancias [u] == -1:
            distancias [u] = distancias [v_atual] + 1
            fila.adicionarFim (u)
retorna distâncias.
```

→ se a fila estiver vazia, é pq não tem mais nenhum vértice que não foi visitado

Questão 1 (10 %)

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 10 vértices e 5 componentes, responda e justifique as seguintes questões:

9

a) (3 %) É possível que esse grafo possua 04 arestas?

b) (3 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 10? → soma = 2 . arestas

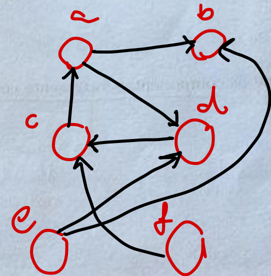
c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 100?

↳ qtd arestas = $\frac{n.(n-1)}{2}$ → $\frac{5.4}{2}$

Questão 2 (25 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$ e representado pela seguinte matriz de adjacência

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	1
E	0	1	0	1	0	0
F	0	0	1	0	0	0



Responda e justifique as seguintes questões:

5 a) (6 %) Qual o fecho transitivo direto do vértice A;

5 b) (6 %) Qual o fecho transitivo inversos do conjunto de vértices $\{B, F\}$;

10 c) (13 %) Como seria um algoritmo para identificar uma base em um grafo? Sua solução funciona para quais tipos de grafos?

Questão 3 (30 %)

25

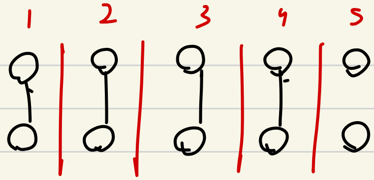
Isomorfismo em grafos é usualmente feito a partir de grafos não-direcionados. Transponha a definição de isomorfismo de grafos não-direcionados para grafos direcionados discorrendo sobre todas as definições necessárias para tal transposição. Apresente um exemplo de dois grafos direcionados com mais de 5 vértices e 6 arestas. Justifique suas respostas.

Questão 4 (20 %)

10

Forneça um algoritmo (passo a passo) para calcular o diâmetro de um grafo não-direcionado. Apresente um exemplo que ilustre cada uma das etapas do método descrito.

maior excentricidade

1) a) 

Sim, é possível que ele tenha 4 arestas.

b) $\sum d(v) = 2 \cdot |E| \rightarrow 10 = 2 \cdot |E| \Rightarrow |E| = 5$ → número natural de arestas

↳ Sim, é possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 10.

c) Já que há 5 componentes conexos, o nº de arestas deve ser dividido p/ cada componente $\frac{(|V|-|C|)\cdot(|V|-|C|-1)}{2}$ = nº máx. de arestas p/ que cada componente seja conexo

$$\frac{\overset{5}{(10-5)}\cdot\overset{\cancel{8}\,4}{(10-5-1)}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

e o mínimo de arestas $= |V| - |C|$

$10 - 5 = 5$

Não pode chegar a 100

$\sum d(v) = 2 \cdot 10 \Rightarrow 20$ é o máx. de soma de graus //

(considerando que é um direcionado)

2) a) $\Gamma^{+}(a) = \{a, b, c, d\}$

b) $\Gamma^{-}(b, f) = \{a, b, c, d, e, f\}$

↳ nulo (ngm chega em f)

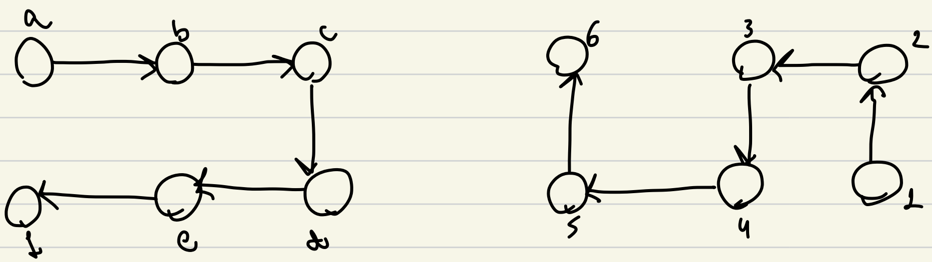
c) Para grafos direcionados, um algoritmo que detecta uma base verificaria, na matriz de adjacência, a soma da coluna do vértice, que indica o grau de entrada dele. Se for igual a 0, ele é uma base.

3) Para transpor a definição de isomorfismo de grafos não-direcionados para os direcionados, deve-se primeiro

desconsiderar as direções e verificar os requisitos para serem isomórficos padrão. (devem ter a mesma qnt. de vértices, arestas e componentes conexos).
(caminhos completos)

Depois, verifica-se as relações de incidência para verificar se existe a correspondência um-para-um entre seus vértices e arestas.

* Não existe um algoritmo eficiente p/ determinar se dois grafos são isomorfos!



4) diâmetro de um grafo = excentricidade máxima de qualquer vértice do grafo. É a maior das menores distâncias entre os pares de vértices.

Selecionar um vértice v e a
1- Realizar uma busca em largura p/ calcular as distâncias mínimas de v p/ todos os outros vértices.
base p/ caminho + curto
2- Selecionar o vértice com maior distância de v
3- Realizar uma segunda busca em largura a partir do novo vértice selecionado p/ encontrar a maior distância possível no grafo (o diâmetro)

* BFS na pg. de baixo

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Dpto de Ciência da Computação – Ciência da Computação
Teoria dos Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães
2022/1 (Prova 1)

Questão 5

(20 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ e representado pela seguinte lista de adjacência de sucessores

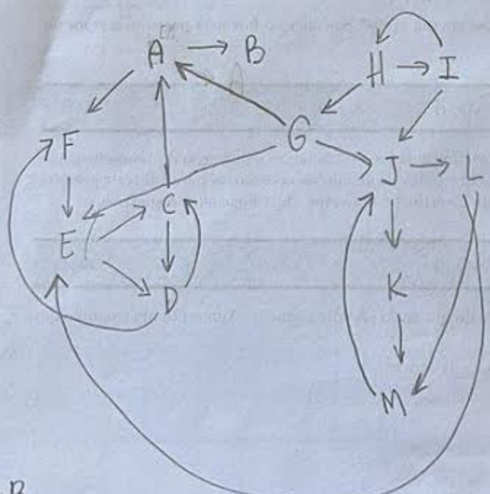
18

	lista de sucessores
A	B – F
B	–
C	A – D
D	C – F
E	C – D
F	E
G	A – E – J
H	G – I
I	H – J
J	K – L
K	M
L	E – M
M	J

Determine os componentes fortemente conexos do grafo G, justificando suas respostas.

→ Todos os vértices tem caminho de ida e volta p/ todos os outros vértices

1. Busca em profundidade incluindo tempo de início e de fim
2. Gerar grafo transposto → inverter a direção das arestas
3. A partir do vértice de maior tempo de fim, fazer nova busca em profundidade pintando os que foram visitados
4. Se ainda houverem vértices não visitados depois disso, repetir a busca em profundidade a partir do vértice de maior tempo de fim não visitado até que não sobrem vértices
5. Cada uma das buscas realizadas nos passos 3 e 4 identifica um componente fortemente conexo

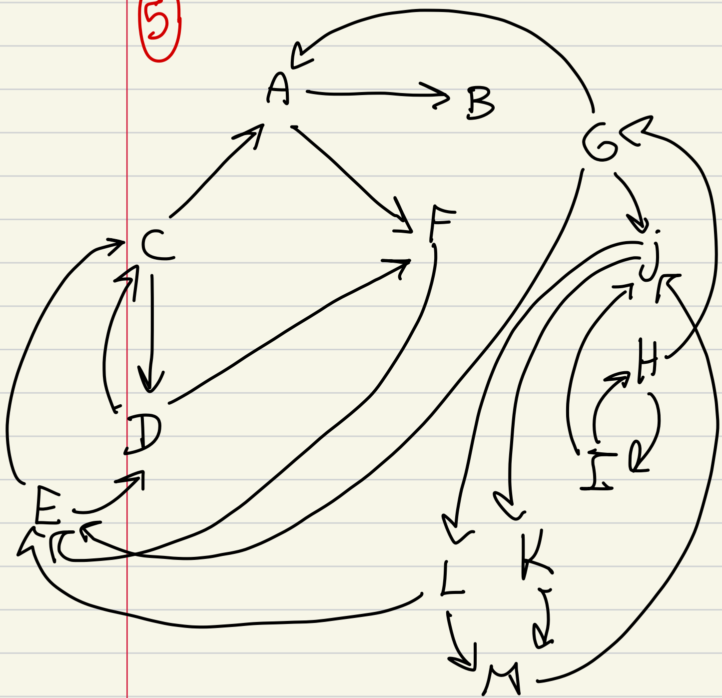


A, B
L, M, J, K
E, C, D, F
I, H, G

B
F, E, D, C, A
I, H, G
L, M, J, K

componentes fortemente conexos = todos os vértices são mutuamente alcançáveis (têm grau de entrada e saída)
↳ caminho

5



	lista de sucessores
A	B – F
B	–
C	A – D
D	C – F
E	C – D
F	E
G	A – E – J
H	G – I
I	H – J
J	K – L
K	M
L	E – M
M	J

NÃO EH P/ FZR ESSA QST.

★ BFS → busca em largura

↳ inicializa todas as distâncias c/ -1
começa em um vértice v.
a distância de v para si mesmo é 0
fila += v
enquanto a fila não estiver vazia:
    remover início da fila
    p/ cada vizinho de v:
        se o vizinho ñ foi visitado,
        adiciona o vizinho ao fim da fila
        adiciona à distância atual.
retorna as distâncias

...IA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
...NSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E INFORMÁTICA
... DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE – PROF. SILVIO JAMIL F. GUIMARÃES
2024/1 (PROVA 1)

Aluno: Dalton de Oliveira Cardoso Total da Prova: 50 / 100 %

QUESTÃO 1 (30 %)

25 Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e direcionado. Projete uma solução para encontrar (i) (15%) uma base e (ii) (15%) uma anti-base em G. Cumpre reforçar que a cardinalidade de ambos os conjuntos deva ser a menor possível.

QUESTÃO 2 (20 %)

0 Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado completo com n vértices. Determine o número de subgrafos de G. Justifique sua resposta.

$\sum 2^{(n-1)(\frac{n-(+1)}{2})} \quad \frac{m}{k}$

QUESTÃO 3 (22 %)

0 Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com pelo menos dois vértices. Prove que G conterá pelo menos dois vértices de mesmo grau.

QUESTÃO 4 (28 %)

Seja o grafo $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e 9

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\{b, d\}\{c, g\}\{d, e\}\{d, g\}\{d, h\}\{c, f\}, \{h, i\}, \{a, i\}\}.$$

25

Responda e justifique suas respostas:

(i) (08%) Encontre a excentricidade de cada vértice.

(ii) (05%) Qual o raio e o diâmetro de G?

(iii) (05%) Defina o(s) centro(s) de G.

(iv) (10%) Projete um algoritmo para encontrar o diâmetro de um grafo simples e não-direcionado.

1) ☆ A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de G.

i) Uma base pode ser encontrada com o algoritmo:

para cada vértice v:
  verifica-se o grau de entrada de v → considerando a qntd. de vértices da lista de adjacência (na coluna)
  se o grau de entrada de v for 0:
    adiciona esse vértice v à lista de bases
retorna a lista de bases.

ii) mesma coisa de i) mas verificando o grau de saída (verificando a linha da matriz de adjacência
ou calcula o grafo transposto ao G e aplica o mesmo algoritmo).

2) n° de subgrafos de um grafo completo $= \boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i(i-1)}{2}} \cdot \binom{n}{i}}$

$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Como cada aresta pode estar presente ou ausente em cada subgrafo e com ordens de 1 a n, o resultado da fórmula é o somatório do n° de subgrafos com o n° máx de arestas de um grafo completo vezes todas as combinações de arestas p/ os vértices de cada ordem possível (desde 1 até n).

$\frac{i(i-1)}{2}$ = n° de arestas de um grafo

$2^{\text{n° de arestas}}$ = n° de subgrafos de um grafo completo

3) ~~G conterá pelo menos 2 vértices de mesmo grau, pois a soma dos graus de um grafo é dada por $2 \cdot |E|$, já que cada aresta é uma relação de 2 vértices.~~

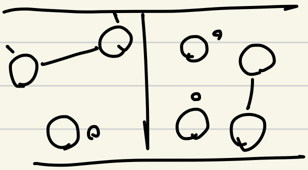
↳ Um grafo (simples e não-direcionado) pode ter os graus:

~~$0 \longrightarrow n-1$~~ X → não pode ter esses 2 graus ao mesmo tempo

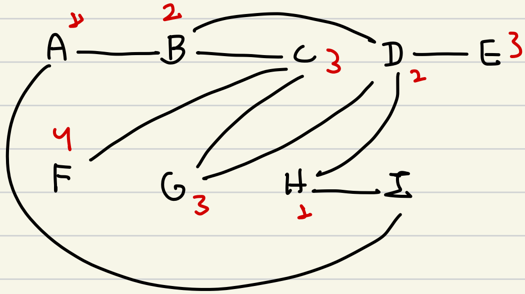
→ 0 e $n-1$ não podem coexistir, logo, um deles deve assumir o valor de algum do intervalo, gerando repetição.

$[1 \longrightarrow n-1]$
$[0 \longrightarrow n-2]$ } $\underline{n-1}$ → não tem como todos os vértices terem graus diferentes, logo, vai sempre sobrar um grau que é repetido. (já que cada aresta é uma relação de $\underline{2}$ vértices).

↳ quando há 1 vértice isolado



4



excentricidade = maior das menores distâncias entre um vértice v e os demais.

i) A = 3 ; B = 2 ; C = 3 ; D = 3 ; E = 4 ; F = 4 ; G = 3 ;
H = 4 ; I = 4

ii) raio (a menor excentricidade) = 2
diâmetro (a maior excentricidade) = 4

iii) centro (conjunto de vértices com a menor excentricidade) = B

iv) Um algoritmo para encontrar o diâmetro de um grafo → algoritmo de busca em largura para encontrar o vértice de maior distância e faz um algoritmo de busca a partir deste novo vértice para encontrar a maior excentricidade de todos (o diâmetro)

↳ o algoritmo de busca em largura já está escrito neste pdf (eu tinha escrito aq mas apaguei a página :( )

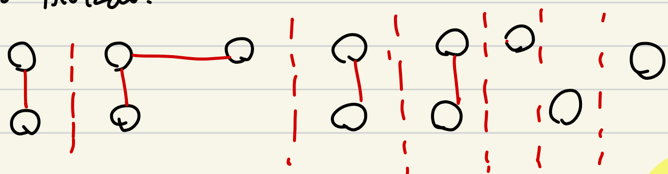
Refazendo uma qst:

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 13 vértices e 6 componentes, responda e justifique as seguintes questões (respostas sem justificativas serão desconsideradas):

- a) (3 %) É possível que esse grafo possua 06 arestas?
- b) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 14?
- c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 56?
- d) (4 %) É possível transformar este grafo em um grafo conexo com a inclusão de 5 arestas?
- e) (5 %) É possível que esse grafo seja regular?

13 vértices e 6 componentes → conjunto isolado minimal de um grafo (que não inclui nenhum outro conjunto isolado).

a) Não é possível, já que, para que cada componente seja isolado, deve haver ao menos 7 arestas para cada componente não incluir nenhum outro conjunto isolado.



número mínimo de arestas = $n - \underbrace{c}_{\text{nº de componentes}} = 13 - 6 = 7$

c) ~~b)~~ 6 componentes → o nº de arestas deve ser dividido p/ cada componente

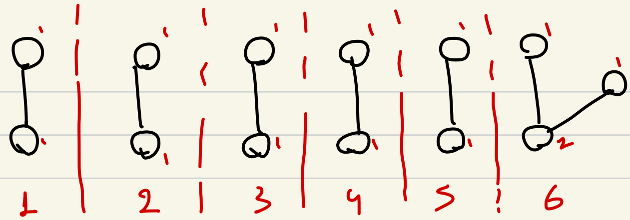
nº máx de arestas p/ que cada componente seja conexo $= \frac{(|V| - |c|)\cdot(|V| - |c| - 1)}{2} \rightarrow \frac{\overset{8}{(13-5)}\cdot\overset{7}{(13-6)}}{2} = 28$ arestas

(ou: 5 componentes de 1 vértice e 1 de 8)
↳ $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$

Não é possível que a $\sum d(v)$ seja maior que 56. → $\sum_{v \in V} d(v) = 2\cdot 28 = 56$

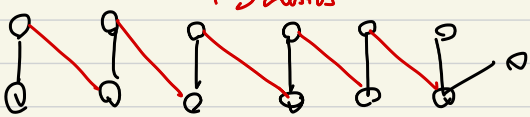
b) $14 = 2 \cdot |E|$

$E = 7$ arestas



Sim, é possível que a soma dos graus seja 14.

d) +5 arestas

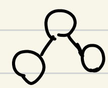


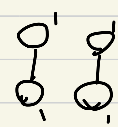
→ todos os vértices não atingiram ✓ sim.

e) grafo regular: todos os vertices têm o mesmo grau.

Não é possível que esse grafo seja regular, visto que sempre haverá um vertice com 1 grau a mais para que eles fiquem divididos em 6 componentes diferentes

A soma de graus deve ser divisível por 6, e como ~~a soma mínima é 14 (que não é divisível por 6), não há como dividir os graus igualmente.~~





4 é divisível por 2

a qnt de vértices (13) não é divisível por 6, não há como dividir os graus igualmente.