Prova Antiga 3

Questão 1 (20 %)

Seja o grafo não-ponderado G=(V,E) definido a seguir:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

e,

$$E = \{\{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{b,h\}, \{c,e\}, \{c,d\}, \{d,h\}, \{e,f\}, \{e,g\}, \{e,h\}, \{f,g\}, \{g,h\}\}$$

0

a) (10 %) No estado de Minas Gerais, o DER-MG é o órgão responsável pela inspeção das estradas estaduais. Para o planejamento das manutenções, torna-se necessária uma inspeção periódica das estradas a ser realizada por um funcionário do DER-MG. Com o intuito de minimizar os custos da viagem, o funcionário deveria criar uma rota passando em cada estrada uma única vez voltando para a cidade de onde partiu. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G, é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

b) (10 %) Em um ano de eleição, os candidatos ao governo do estado precisam visitar todas as cidades do referido estado. É importante que as visitas tenham o menor custo possível para a campanha. O *marqueteiro* da campanha deseja planejar a rota da viagem de forma a passar por todas as cidades retornando à cidade de onde iniciou a viagem. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G, é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

Questão 2 (20 %)

Um *caminho crítico* é determinado pela identificação do maior período de atividades dependentes, além da consideração do tempo mínimo necessário para a realização de todas as tarefas (ou atividades). Uma aplicação interessante deste problema é a identificação do número mínimo de períodos para que um aluno possa se formar considerando todas as disciplinas de seu curso. Cumpre ressaltar que disciplinas que não estão na linha de pré-requisitos podem ser feitas em paralelo. Modele o problema do caminho crítico em grafos e projete um algoritmo para identificá-lo. Além disto, ilustre um exemplo da sua modelagem.

0

1- identifique a base (vértices c/ grau de entrada 0)

disciplina = vértice

aresta = dependência p/ a matéria anterior

2- remova a base e adicione esses vértices numa lista

3- repita o processo até o grafo ficar vazio

4- A lista retornada representa o caminho crítico

C, D, F
H, G

I, K, L
L, M, J, K

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$E = \{\{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{b,h\}, \{c,e\}, \{c,d\}, \{d,h\}, \{e,f\}, \{e,g\}, \{e,h\}, \{f,g\}, \{g,h\}\}$$

a) (10 %) No estado de Minas Gerais, o DER-MG é o órgão responsável pela inspeção das estradas estaduais. Para o planejamento das manutenções, torna-se necessária uma inspeção periódica das estradas a ser realizada por um funcionário do DER-MG. Com o intuito de minimizar os custos da viagem, o funcionário deveria criar uma rota passando em cada estrada uma única vez voltando para a cidade de onde partiu. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G, é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

b) (10 %) Em um ano de eleição, os candidatos ao governo do estado precisam visitar todas as cidades

a) Sim, um algoritmo que encontra ciclos eulerianos: ciclo euleriano

1- Percorra cada vértice do grafo, verificando se ele possui grau par ou ímpar e salve essa informação em uma lista.
2- Se ele tiver mais de 2 vértices de grau ímpar, essa rota não existe, e deve ser adicionado vértices até que existam...
3- Se ele tiver no máx. 2 vértices de grau ímpar, existe um caminho euleriano.

com BFS

4- Para encontrar esse caminho, percorremos o grafo:
- se só tiver graus pares, pode-se iniciar em qualquer vértice
- se tiver até 2 graus ímpares, precisa-se iniciar ou iniciar e terminar nos vértices de grau ímpar.

Assim, ao percorrer cada aresta não visitada, removemos ela do grafo e adicionamos o par de vértices dela à lista do caminho

↳ se sobrar algum vértice que não foi visitado,

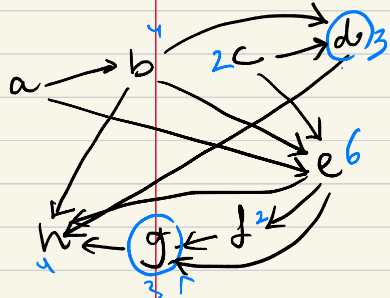
$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

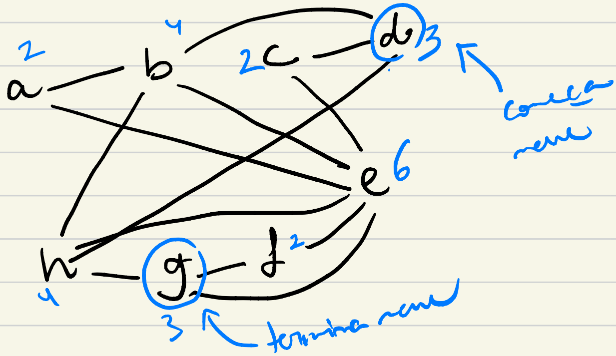
$$E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, h\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, h\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{e, h\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$$

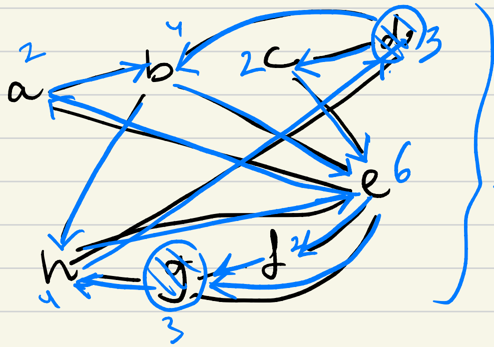
a) (10 %) No estado de Minas Gerais, o DER-MG é o órgão responsável pela inspeção das estradas estaduais. Para o planejamento das manutenções, torna-se necessária uma inspeção periódica das estradas a ser realizada por um funcionário do DER-MG. Com o intuito de minimizar os custos da viagem, o funcionário deveria criar uma rota passando em cada estrada uma única vez voltando para a cidade de onde partiu. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G, é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

b) (10 %) Em um ano de eleição, os candidatos ao governo do estado precisam visitar todas as cidades

(refazendo):







existe o ciclo (2 vértices ímpares)

1º - verifique se o grafo é conexo por uma busca em largura. Se todos os vértices c/ grau > 0 forem visitados, é conexo.

2º - se ele for conexo, percorremos os vértices novamente p/ ver se há vértices de grau ímpar:

- se tiver + que 2 ímpares, não tem caminho euleriano
- se tiver até 2 ímpares, pode existir um aberto

3º - p/ encontrá-lo, se não tiver ímpares, iniciamos a busca em qualquer vértice, removendo os visitados até chegar no vértice inicial que ainda tem vizinhos não visitados.

se tiver até 2 ímpares, ele deve ou começar no ímpar, ou começar e terminar nos ímpares.

4º - se não encontrarmos nenhum caminho, verificamos quais são os vértices de grau ímpar e conectamos eles com arestas para torná-los de grau par até que reste 2 ou menos vértices de grau ímpar.

Após isso, verificamos a conectividade do grafo novamente.

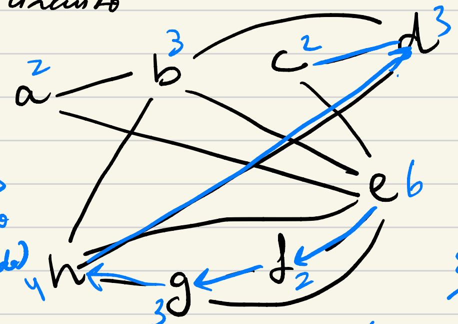
b) (10 %) Em um ano de eleição, os candidatos ao governo do estado precisam visitar todas as cidades do referido estado. É importante que as visitas tenham o menor custo possível para a campanha. O *marqueteiro* da campanha deseja planejar a rota da viagem de forma a passar por todas as cidades retornando à cidade de onde iniciou a viagem. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G, é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

Funcionam mas melhor dizer que o hamiltoniano tem relação c/ o grau

b) → Caminho, Hamiltoniano
circuito

↳ não há um algoritmo eficiente p/ encontrar o circuitos hamiltonianos.

não tem hamiltoniano. → (não atende o mínimo teorema ou o segundo)



2+4=6 ✗

3+6=9 ✓

8/2 = 4 → tem vértices c/ graus menores ✗

2+2=4 < 8

> BackTracking

ou

> teorema de Dirac = se todos os vértices do grafo tem grau maior ou igual a n/2, é hamiltoniano ✗

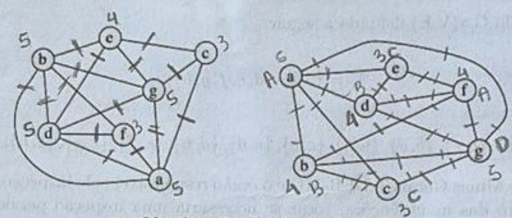
> teorema de Ore = se a soma dos graus de quaisquer dois vértices não adjacentes for maior ou igual a n, ele é hamiltoniano. ✗

- p/ fazer c/ que haja ciclo hamiltoniano, temos que adicionar arestas entre os v. de graus menores

Questão 3 (20 %)

20

Sejam os dois grafos que são ilustrados na figura a seguir. Indique se estes grafos são planares ou não-planares, justificando sua resposta. *Serão analisadas somente as respostas que tiverem justificativas.*



Verificação de planaridade

Questão 4 (20 %)

0

A capacidade mínima de um caminho em um grafo ponderado é definida como o peso da aresta de menor peso do caminho. O problema de *Widest path* é um definido como um problema de encontrar, entre dois vertices especificados em um grafo ponderado, um caminho que maximize o peso dentre todas as capacidades mínimas (dos caminhos) do grafo. Este problema também é conhecido como *problema de caminho de capacidade máxima*. Projete uma solução para resolver o problema de caminho de capacidade máxima entre estes vértices. Apresente uma instância do problema com uma solução.

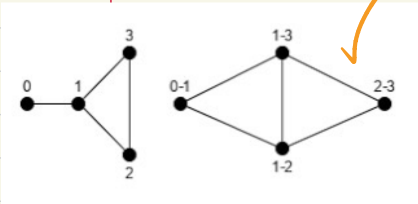
Questão 5 (20 %)

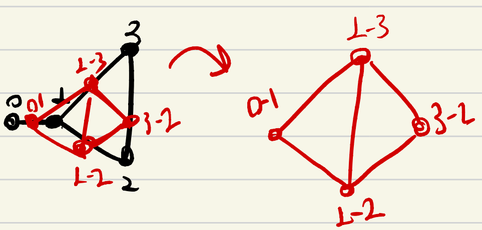
Em grandes cidades, a localização adequada de unidades de corpos de bombeiros pode ser muito importante para salvar vidas.

4

a) (8 %) Considerando que a cidade contenha somente uma unidade do corpo de bombeiros, projete uma solução para minimizar a maior distância distância em que um caminhão-tanque deve percorrer para atender a um chamado de incêndio. → Dijkstra

b) (12 %) Considerando que a cidade contenha *n* unidades do corpo de bombeiros, projete uma solução para minimizar a maior distância distância em que um caminhão-tanque, localizado em alguma unidade dos corpos de bombeiro, deve percorrer para atender a um chamado de incêndio.

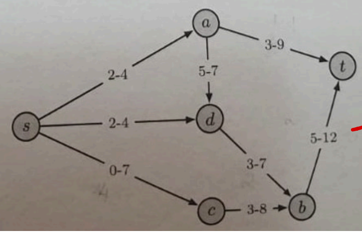




Questão 4 (30 %)

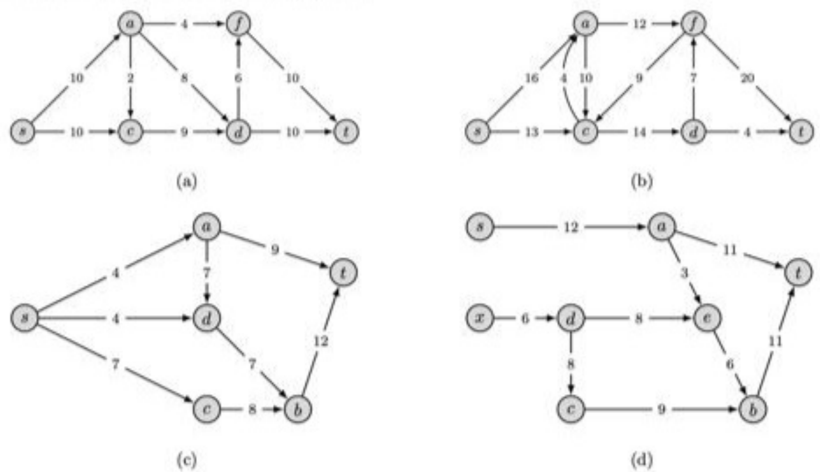
5

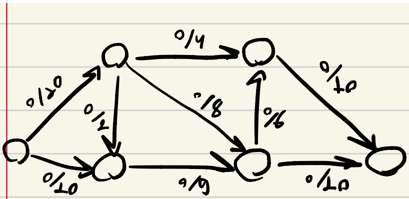
Compute, se possível, o fluxo máximo da seguinte rede, entretanto, há um fluxo mínimo que deve ser atingido em cada aresta. Nesta rede, capacidade mínimas e máximas são mostradas na forma $l - u$. Se não há fluxo possível, exlique porque e adapte a rede para encontrar o fluxo possível.



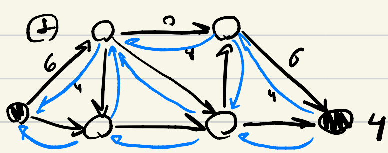
ele não vai cobrir o mínimo (m-t vou fazer o sem limite mínimo)

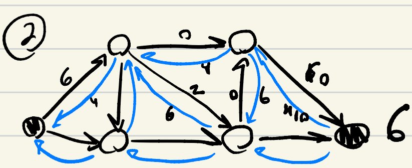
Compute the maximum flow of the following networks.

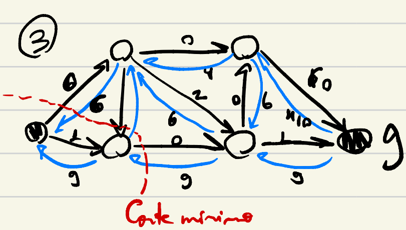




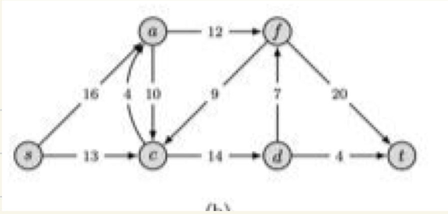
Grafo Residual

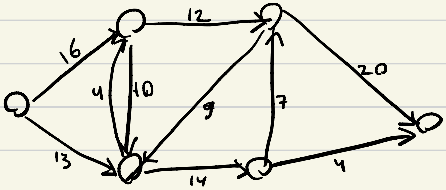


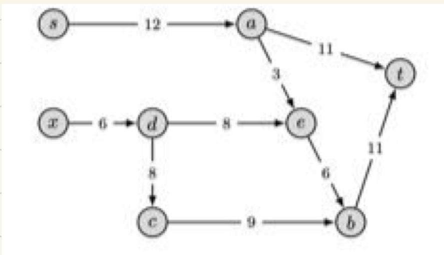




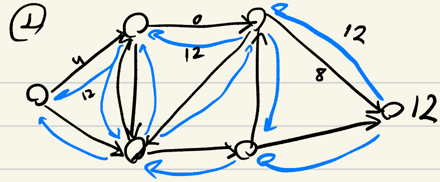
+9
4
+6
15

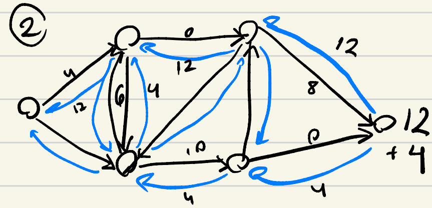

a
f
s
c
d
t
12
16
4
10
9
7
20
13
14
4

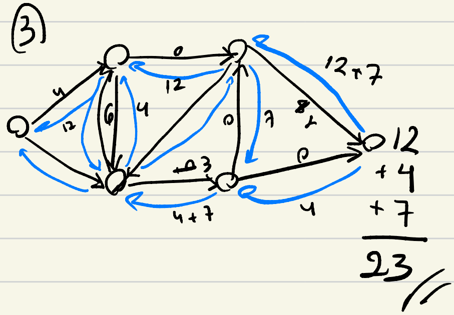

12
16
4
10
9
7
20
13
14
4

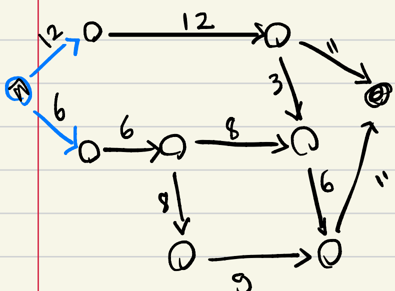

s
a
t
x
d
e
c
b
12
11
3
6
8
8
6
11
9

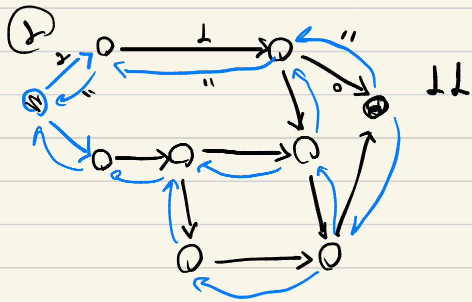
(d)

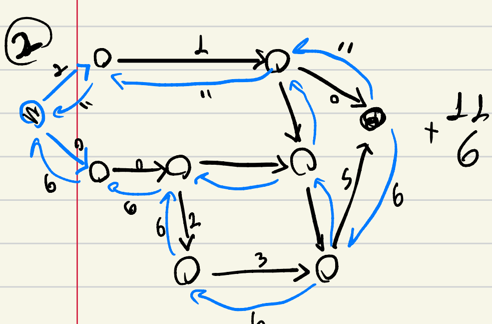

12

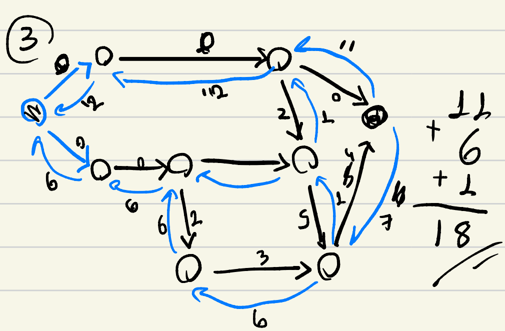

12
+4


12
+4
+7
23




11

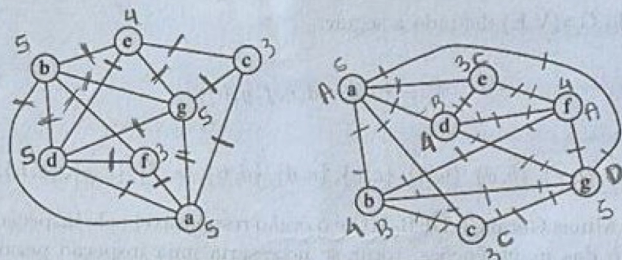

+11
6


+11
6
+1
18

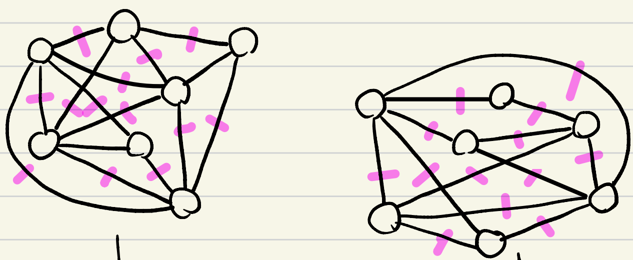
Questão 3 (20 %)

Sejam os dois grafos que são ilustrados na figura a seguir. Indique se estes grafos são planares ou não-planares, justificando sua resposta. *Serão analisadas somente as respostas que tiverem justificativas.*

20



Verificação de planaridade



$e \leq 3v - 6$

$e \leq 2v - 4$

$e \leq 3v - 6$

$e \leq 2v - 4$

7V
13E

7V
13E

Euler:

$V - E + F = 2$

$21 - 6$

$13 \leq 7 \cdot 3 - 6$

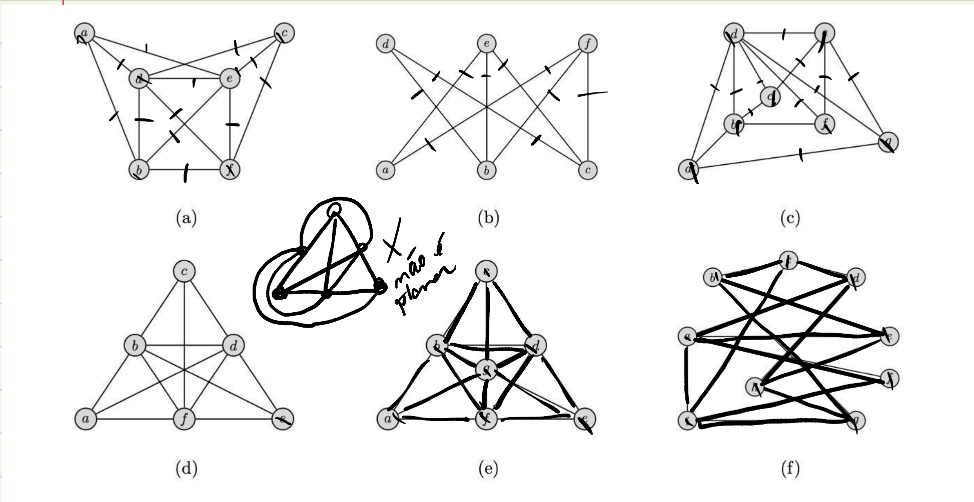
$13 \leq 15$ ✓

ambos os grafos são planares, pois eles satisfazem a condição e não possuem K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo

Questão 4 (20 %)

A capacidade mínima de um caminho em um grafo ponderado é definida como o peso da aresta de menor peso do caminho. O problema de *Widest path* é um definido como um problema de encontrar, entre dois vertices especificados em um grafo ponderado, um caminho que maximize o peso dentre todas as capacidades mínimas (dos caminhos) do grafo. Este problema também é conhecido como *problema de caminho de capacidade máxima*. Projete uma solução para resolver o problema de caminho de capacidade máxima entre estes vértices. Apresente uma instância do problema com uma solução.

4 – (Problema do gargalo) → Widest Path (Já caiu)



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

a) 6V, 12E

$12 \leq 6 \cdot 3 - 6$ ($18-6$)

$12 \leq 12$ ✓ → é planar

b) 6V, 10E

$10 \leq 6 \cdot 3 - 6$ ✓ → planar

$10 \leq 12$

c) 7V, 11E

$11 \leq 7 \cdot 3 - 6$? ($21-6$)

$11 \leq 15$ ✓ → planar

d) 6V, 13E

$13 \leq 6 \cdot 3 - 6$

$13 \leq 12$ ✗ → não é planar

$13 \leq \overset{12}{6 \cdot 2} - 4$

$13 \leq 8$ ✗

e) 7V, 15E

$15 \leq 7 \cdot 3 - 6$

$15 \leq 15$ ✓ planar

f) 9V, 14E

$14 \leq 9 \cdot 3 - 6$ ($27-6$)

$14 \leq 21$ ✓

→ é planar