Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática

Exercício 1

Conceitos envolvendo lema do aperto de mãos:

1) Prove que o número de vértices de grau ímpar em um grafo deve ser par.
2) Se 10 pessoas apertam as mãos umas das outras, quantos apertos de mão ocorreram? O que essa questão tem a ver com a teoria dos grafos?
3) Dado um grafo com 7 vértices; 3 deles de grau dois e 4 de grau um. Este grafo é conexo?
4) Em um grupo de 5 pessoas, é possível que todos sejam amigos de exatamente 2 pessoas do grupo? E quanto a 3 das pessoas no grupo?

Exercício 2

Conceitos envolvendo grafos:

1) Liste todos os grafos que possuem $\{a, b, c\}$ como seu conjunto de vértices. Organize a lista de forma que sejam ilustrados o grafo e o seu complemento (um ao lado do outro).
2) Encontre o número de vértices e arestas em cada um dos grafos (simples) e não-direcionados:
   i) Grafo nulo N_n
   ii) Grafo ciclo C_n
   iii) Grafo completo K_n
   iv) Grafo bipartido completo $K_{m,n}$
3) Seja G um grafo simples com pelo menos dois vértices. Prove que G deve conter pelo menos dois vértices de mesmo grau.
4) Uma string binária é uma sequência finita de 0s e 1s. O comprimento de uma string binária é o número total de símbolos que ocorrem nela.
   i) Desenhe o seguinte grafo: os vértices são rotulados por cadeias binárias de comprimento 3 (ou seja, todas as sequências possíveis de três 0's e 1's de 000 a 111); dois vértices são unidos por uma aresta quando diferem em exatamente um lugar. Assim, 000 é associado a 100, mas não a 110.
   ii) Desenhe o seguinte grafo: os vértices são rotulados por cadeias binárias de comprimento 4, dois vértices são unidos por uma aresta quando diferem em exatamente um lugar.

Exercício 3

Desenhe os seguintes grafos, caso exista, ou justifique a não existência.

1) Encontre todos os grafos não rotulados simples com 4 vértices
2) Um grafo simples com 5 vértices e 6 arestas.
3) Dois grafos regulares diferentes com 5 vértices.
4) Um grafo simples com sequência de graus $(2, 2, 2, 3, 3)$
5) Um grafo com sequência de graus $(2, 2, 2, 2, 3)$

① 1) O número de vértices de grau ímpar sempre deve ser par pois a soma dos graus de um grafo é $2 \cdot |E|$, ou seja, a soma de graus ímpares também deve ser par para ter este resultado:

Logo, x é par se $x = 2 \cdot K$
x é ímpar se $x = 2 \cdot K + 1$ $\Big\}$ $\sum (2 \cdot K_v + 1)$

★ só é possível que a soma dos graus ímpares seja par se houver um número par de vértices c/ grau ímpar.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{PAR} = \underbrace{\sum d(v)}_{PAR} + \underbrace{\sum d(v)}_{PAR} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum 2K_v}_{PAR} + \underbrace{\sum 1}_{PAR}$$

par

ímpar

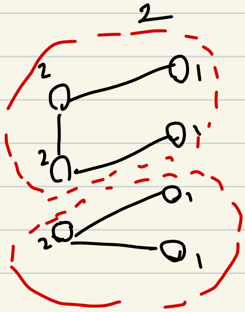
SOMA dos vértices de grau par + vértices de grau ímpar

logo, a soma dos graus ímpares tem que ser par.

2) grafo de 10 vértices $\longrightarrow$ nº de arestas $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{10 \cdot (9)}{2} = 45$ apertos de mão.

3)



$\sum d(v) = 10 = 2 \cdot E)$

$E = 5$ arestas

qntd de arestas p/ um grafo $= n - 1$ ser conexo

$7 - 1 = 6$

mas tem 5 arestas (não é conexo!)

Possui 2 componentes.

4) 5 vértices → todos têm grau 2?

ou

todos têm grau 3?

$5 \cdot 2 = 10$

$10 = 2 \cdot E$

$E = 5$ arestas → máx: $\frac{5(4)}{2} = 10$ arestas

✓ é possível

$5 \cdot 3 = 15$

$15 = 2 \cdot E$

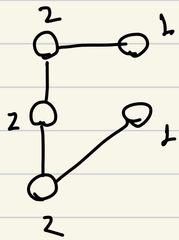
$E = 7{,}5$ arestas → número não-natural de arestas é impossível.

X

$2+2+2+1+1 = 8$

$8 = 2 \cdot E$

$E = 4$ ✓



② 3) Em um grafo simples, o grau de um vértice pode variar de 1 a $n-1$ ou de 0 a $n-2$, mas 0 e $n-1$ nunca podem coexistir. Assim, se existem mais vértices do que graus possíveis, pelo menos um deverá repetir seu grau / ter o mesmo grau que outro.

→ pois se há um vértice que está conectado a todos os outros ($n-1$), não pode existir um isolado (0)

6) Dois grafos diferentes com 6 vértices, 9 arestas e sequência de graus $(2, 2, 3, 3, 3, 5)$

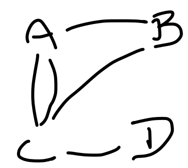
7) Um grafo simples não-direcionado com 6 vértices, 3 componentes conexos e 3 arestas.

Exercício 4

compartilham ao menos 1 vértice

Seja o grafo $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (a, c)\}$. Responda e justifique suas respostas:

1) O grafo é direcionado ou não direcionado?
2) Quais arestas são adjacentes?
3) Quais arestas são paralelas? → arestas que conectam o mesmo par de vértices



4) Ilustre os vértices incidentes das arestas. → os vertices incidentes em cada aresta são os vertices conectados por ela.
5) Há vertice isolado?
6) Há ciclo?

Exercício 5

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e não-direcionado.

1) Considerando que ainda não foi definido o conjunto de arestas, qual será o maior e o menor número de arestas de G?

   $\frac{n(n-1)}{2}$ → 0

2) Considerando que ainda não foi definido o conjunto de arestas, qual será o maior e o menor número de componentes conexos que pode haver em G?

   (nenhum vértice está conectado) n — 1 (quando o grafo é conexo).

3) Encontre três exemplos de grafos com mais de 4 vértices em que o número de arestas de G seja igual ao número de arestas do complemento de G. → tem as arestas que não estão em G
4) Para quais valores de $|V|$ é possível que um grafo G tenha o mesmo número de arestas de seu complemento? → $\frac{n(n-1)}{4}$

Exercício 6

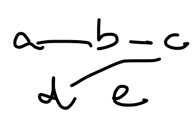
Sejam dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$.

1) Ilustre a união de G_1 e G_2.
2) Ilustre a soma de G_1 e G_2.
3) Mostre que a união de grafos é associativa e comutativa para grafos não-direcionados.

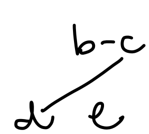
Exercício 7

Seja o grafo $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}$. Responda e justifique suas respostas:

1) Ilustre $G' = (V', E')$ em que a aresta (a, c) foi removida.



2) Ilustre $G' = (V', E')$ em que o vértice a foi removido.

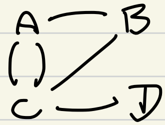


4) 1) não-direcionado. Já que não há especificação de direção das arestas, assume-se que é não-direcionado

2) A,B e A,C; A,C, C,D e C,B

3) A,C e A,C

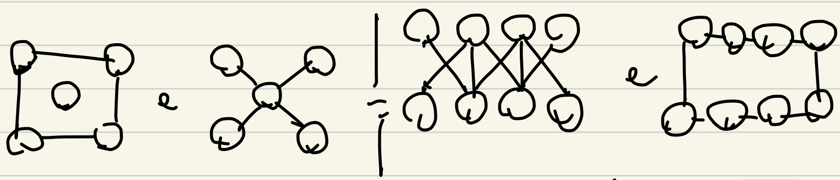
4)



5) Sim, o vértice E.

6) Sim, como A-C-A e A-B-C-A

5) - 3)

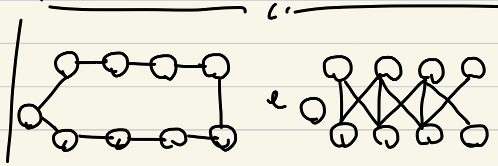


o nº de arestas de G e G' deve ser metade do nº de arestas em um grafo completo
↳ $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$

$\cancel{\frac{6(5)}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5}$

$\frac{8(7)}{4} = 14$ ✓

$9 \cdot 8/4 = 18$ ✓

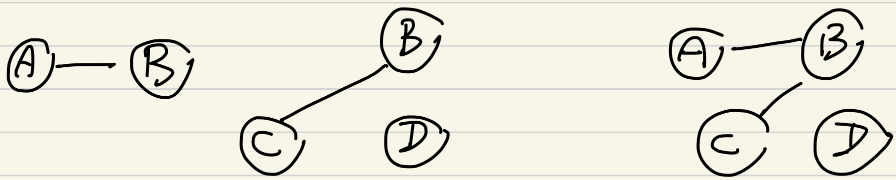


4) Para que o Grafo Complemento tenha o mesmo nº de arestas do Grafo original, o nº de arestas do grafo

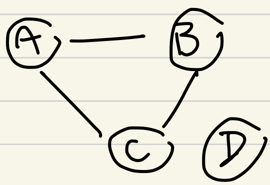
precisa ser divisível por 2, já que as arestas do grafo complemento são o grafo completo − as arestas do grafo, e esse número deve ser dividido igualmente. Assim, como a qnt de arestas é $\frac{n(n-1)}{2}$, isso é possível para os valores de n que entregam um resultado inteiro para $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

6

1) G1: G2: G1 ∪ G2:



2) G1 + G2:



3) $G \cup G' = G' \cup G$

$(G \cup G') \cup G'' = G \cup (G' \cup G'')$

b — ac — d
e

3) Ilustre $G' = (V', E')$ em que os vértices a e c foram contraídos.

4) Ilustre $G' = (V', E')$ em que um vértice f é inserido.

a-b-c
d e f

Exercício 8

Modele os seguintes problemas em grafos:

1) Como encontrar o menor caminho, na PUC Minas Coreu, para sair do prédio 34 e chegar no teatro João Paulo II? → Fazendo uma busca em largura entre os caminhos dos edifícios da puc.
2) Como identificar o menor número de períodos em que o aluno de Ciência da Computação consegue fazer todas as disciplinas?
3) Sejam os alunos da disciplina de Teoria de Grafos e Computabilidade, como identificar quantos pares podem ser formados considerando que somente alunos com mesma inicial podem formar uma dupla?

Exercício 9

O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.

1) $$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ A_2 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ A_3 &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ A_4 &= \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ A_5 &= \{0, 1, 8, 9\} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} A_1 &= \{-4, -3, -2, -1, 0\} \\ A_2 &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ A_3 &= \{-6, -4, -2, 0, 1, 2\} \\ A_4 &= \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} \\ A_5 &= \{-6, -3, 0, 3, 6\} \end{aligned}$$

Exercício 10

Determine se cada um dos grafos é bipartido.

1) $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$
2) $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{c, d\}\}$
3) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}\}$
4) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E = \{\{a, c\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

Exercício 11

Análise de alguns grafos especiais.

1) Para que valores de n os grafos abaixo são regulares?

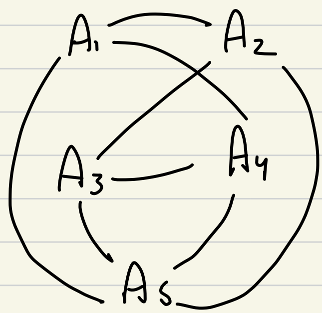
8) 1) Algoritmo de Dijkstra ou Bellman-Ford

2) Busca em largura?

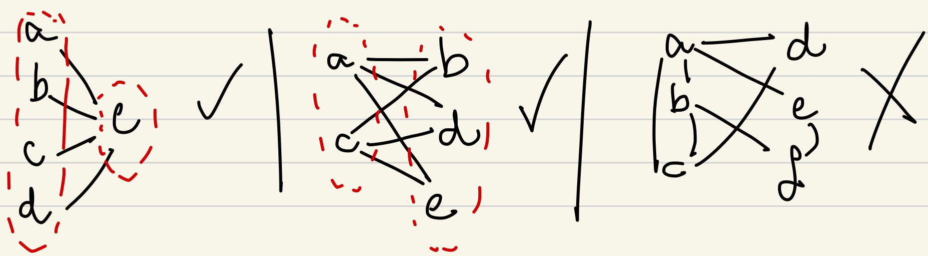
3) Agrupa os alunos pelas suas iniciais
conta as combinações possíveis dentro de cada grupo.

9) 1) $A_1 \cap A_2 = \{0, 2, 4\}$
$\cancel{A_1 \cap A_3} = \{-\}$ → não tem aresta entre A_1 e A_3
$A_1 \cap A_4 = \{6, 8\}$
$A_1 \cap A_5 = \{0, 8\}$
$A_2 \cap A_3 = \{1, 3\}$
$\cancel{A_2 \cap A_4} = \{-\}$
$A_2 \cap A_5 = \{0, 1\}$
$A_3 \cap A_4 = \{5, 7, 9\}$
$A_3 \cap A_5 = \{9\}$
$A_4 \cap A_5 = \{8, 9\}$

=



10) 1) grafo bipartido = seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V, tais que toda aresta conecta um vértice de U a outro de V



i) K_n (grafo completo)

ii) C_n (grafo ciclo)

iii) Q_n (grafo cubo) – Um cubo de dimensão n, ou n-cubo, é o grafo Q_n definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as sequências $b_1 b_2 \cdots b_n$ em que cada b_i pertence a $\{0, 1\}$; dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição.

iv) W_n (grafo roda)

2) O grafo complementar $\overline{G}$ de um grafo simples G tem os mesmos vértices de G. Dois vértices são adjacentes em G se, e somente se, eles não são adjacentes em $\overline{G}$. Determine os seguintes grafos.

i) $\overline{K_n}$

ii) $\overline{K_{m,n}}$

iii) $\overline{C_n}$

iv) $\overline{Q_n}$

3) O grafo tripartite completo $K_{r,s,t}$ consiste de três conjuntos de vértices de tamanhos r, s e t, com arestas unindo dois vértices se e somente se eles pertencem a conjuntos distintos.

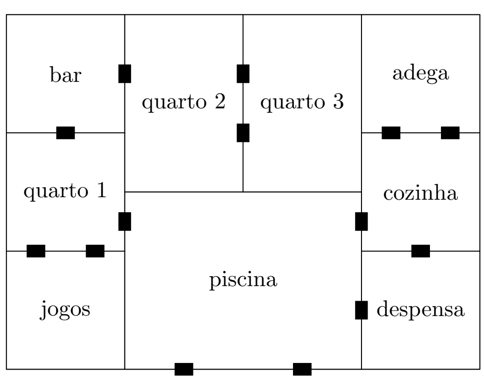
i) Desenhe os grafos $K_{2,2,2}$ e $K_{2,3,3}$.

ii) Quantos vértices e arestas o grafo $K_{r,s,t}$ possui (exprima sua resposta em função de r, s e t)?

iii) Qual é o complemento de $K_{r,s,t}$?

Exercício 12

O bilionário Count Mui Dinheiro acaba de ser assassinado. Um conhecido detetive, que é especializado em teoria dos grafos foi chamado para investigar o caso. O assassinato ocorreu na sala em que está a piscina, infelizmente, mesmo sendo muito rico, Count Mui Dinheiro não havia colocado câmeras em sua residência. A residência possui muito funcionários, dentre eles uma governanta e um piscineiro. A governanta afirma ter visto o piscineiro entrando e saindo pelo cômodo em que o bilionário foi assassinado vindo da parte externa. O piscineiro, entretanto, declara que a governanta mentiu pois ele não poderia ter sido a pessoa vista por ela uma vez que entrou na casa por uma porta, e passou por todas as outras portas uma única vez, antes de deixar a casa. O detetive, muito esperto, avaliou a planta da casa e rapidamente declarou quem mentiu. Quem poderia ser o suspeito indicado pelo detetive? Qual a linha de raciocínio que foi usada para apontar o suspeito?



baseado em http://www.inf.ufsc.br/grafos/problemas/assassin.htm

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática

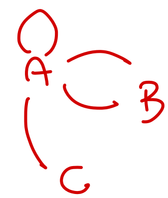
Exercício 13

Representação por meio de matriz de adjacência.

1) Desenhe os grafos com as seguintes matrizes de adjacência.

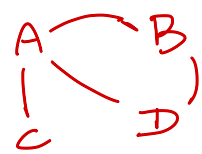
   i)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$



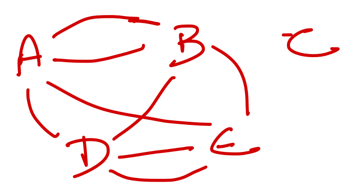
   ii)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$



   iii)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$



2) Como seriam as matrizes de adjacência de:

   i) grafo nulo N_n
   ii) grafo ciclo C_n
   iii) grafo completo K_n
   iv) grafo bipartido completo $K_{m,n}$

Exercício 14

Discussões acerca das representação de grafos usando matriz de adjacência.

1) Seja G um grafo simples com matriz de adjacência A

   i) O que pode se dizer sobre as entradas da diagonal principal de A?
   ii) O que pode se dizer sobre as entradas da diagonal principal de A^2?
   iii) O que pode se dizer sobre as entradas da diagonal principal de A^3?

2) Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

3) O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não-direcionado? E de um grafo direcionado?

Exercício 15

Tertuliano Gonçalves havia prometido casamento a Josefina das Graças. O evento deveria ser realizado, segundo ele, assim que acabasse o contrato de trabalho recém assinado com uma empresa encarregada de pavimentar toda a rede de estradas que ligava Santana do Caixa Prego (cidade onde morava Josefina) às cidades da região. O trabalho iria começar em Santana e prosseguir em continuidade, estada após estrada, terminando, segundo explicou Tertuliano, na própria Santa. A rede de estradas poderia ser representada pela matriz de adjacência que se segue, na qual a cidade de Santana é representada pelo número 1. Você que leu esta estória acha que Tertuliano estava sendo sincero com Josefina? Por quê? E se o itinerário 1-5-9-10 estivesse a cargo de outra empresa, estaria ele sendo sincero?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
6	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
9	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
10	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0

baseado em http://www.inf.ufsc.br/grafos/problemas/paviment.htm

Exercício 16

Seja P o produto cartesiano $\{1, 2, ..., p\} \times \{1, 2, ..., q\}$, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados (i, j) em que $i \in \{1, ..., p\}$ e $j \in \{1, ..., q\}$. Dois elementos (i, j) e (i', j') de P são adjacentes se $i = i'$ e $|j - j'| = 1$ ou $j = j'$ e $|i - i'| = 1$. O grafo $G = (V, E)$ é definido por $V = P$ e há uma aresta entre dois vértices de V se dois elementos de P forem adjacentes. O grafo G é conhecido como grafo em grade e comumente chamado de grafo em grade p-por-q. Responda as seguintes questões:

1) Quantas arestas há no grafo em grade p-por-q?
2) Ilustre visualmente o grafo em grade 3 por 4.
3) Escreva a matriz de adjacência do grafo em grade 3 por 4.

Exercício 17

O grafo de palavras é definido da seguinte forma: cada vértice é uma palavra na língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, corpo e corvo são adjacentes, enquanto que corpo e coroa não são adjacentes.

1) Desenhe uma figura da parte do grafo definida pelas seguintes palavras:
2) Escreva a matriz de adjacênciadesse grafo.

3) Escreva a matriz de incidência desse grafo.
4) Escreva a lista de adjacência de sucessores e de predecessores desse grafo.

Exercício 18

Seja P o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e V o conjunto $P \times P$ que é o conjunto de todos os subconjuntos de P que têm exatamente 2 elementos. Dois elementos u e v de V são adjacentes se $u \cap v = \emptyset$.

1) Defina o grafo em termos de vértices e arestas.
2) Faça uma figura do grafo.
3) Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo.
4) Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo?

Exercício 19

Seja $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$ um conjunto de intervalos de comprimento finito na reta dos reais. Dois intervalos são sobrepostos que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

1) Defina o grafo, conhecido como grafo de intervalos, em que a relação de sobreposição definirá a adjacência dos entre os vértices.
2) Faça uma figura do grafo em que o conjunto de intervalos é dado por $I = \{[0, 2], [1, 4], [3, 6], [5, 6], [1, 6]\}$
3) Escreva as matrizes de adjacência e incidência do grafo.
4) Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo?

Exercício 20

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e não-direcionado. Duas arestas de G são dita adjacentes se compartilham algum vértice. Um grafo de linha $G_l = (E, E')$ de grafo G é definido por: o conjunto de vértices do grafo de linha será o conjunto de arestas de G e o conjunto de arestas do grafo de linha é dado pelo conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G.

1) Faça uma figura do grafo K_4.
2) Escreva a matriz de adjacência.
3) Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo de linha?