# Exercícios de Treino

# FTC

10:21 Sun 21 Sep ••• 83%

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Fundamentos Teóricos da Computação
Prof. Mark Alan Junho Song

1. Dê a definição recursiva do conjunto de strings sobre o alfabeto { a, b } que contenha um número par de b´s.

2. Mostre que:

   a. $(ba)^+ (a^*b^* \cup a^*) = (ba)^* ba^+ (b^* \cup |)$.
   b. $b^+ (a^*b^* \cup |) b = b (b^*a^* \cup |) b^+$.

3. Forneça as expressões regulares para o conjunto de strings sobre:

   a. S = {a, b} de tamanho >= 2, no qual todos os a's precedem todos os b's.
   b. S = {a, b} que contém o substring aa.
   c. S = {a, b} que possui exatamente um par aa.
   d. S = {a, b, c} que começa com a, contém exatamente dois b's e termina com cc.
   e. S = {a, b} que contém o substring ab e o substring ba.
   f. S = {a, b, c} que contém o substring aa, bb e cc.
   g. S = {a, b, c} no qual cada b é imediatamente seguido por pelo menos um c.
   h. S = {a, b, c} de tamanho 3.
   i. S = {a, b, c} com tamanho menor que 3.
   j. S = {a, b, c} com tamanho maior que 3.
   k. S = {a, b} com um número par de a's e impar de b´s.

**1. Dê a definição recursiva do conjunto de strings sobre o alfabeto { a, b } que contenha um número par de b´s.**

O b's é um tamanho par

$$\begin{cases} \text{base: } \lambda \in L,\quad a \in L \\ \text{P.R: - se } w \in L: \begin{cases} wa \in L \\ aw \in L \end{cases} \end{cases}$$

se $w \in L$, já tem qntd par de b's, então odd. a's não altera

$$\text{- se } w \notin L: \begin{cases} wb \in L \\ bw \in L \end{cases}$$

se $w \notin L$, a qntd de b é impar, então adicionando + uma fica par.

$$\text{- se } w_1, w_2 \in L: \underbrace{w_1 bb w_2}_{\text{+ dois b's mantém a paridade par.}} \in L$$

**2. Mostre que:**

**a.** (ba)⁺ (a*b* U a*) = (ba)* ba⁺ (b* U λ).

**b.** b⁺ (a*b* U λ) b = b (b*a* U λ) b⁺.

$x^+ = xx^+ = x^*x$

a) $(ba)^+(a^*b^* \cup \cancel{a^*}) = (ba)^*ba^+(b^*\cup\lambda)$

$(ba)^*(ba)\,a^*(b^*\cup\lambda) =$ "

b) $b^+(a^*b^* \cancel{\cup\lambda})b = b(b^*a^* \cancel{\cup\lambda})b^+$

$b^+(a^*\underbrace{b^*)b} = (\underbrace{bb^*}a^*)b^+$

$b^+ a^* b^+ = b^+ a^* b^+$

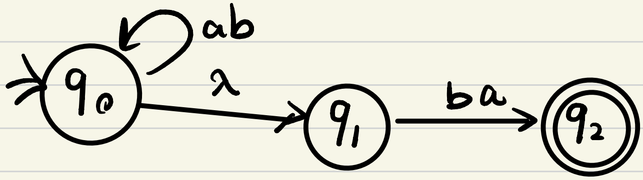
3. **Forneça as expressões regulares para o conjunto de strings sobre:**

a. S = {a, b} **de tamanho >= 2, no qual todos os a's precedem todos os b's.**
b. S = {a, b} **que contém o substring aa.**
c. S = {a, b} **que possui exatamente um par aa.**
d. S = {a, b, c} **que começa com a, contém exatamente dois b's e termina com cc.**
e. S = {a, b} **que contém o substring ab e o substring ba.**
f. S = {a, b, c} **que contém o substring aa, bb e cc.**
g. S = {a, b, c} **no qual cada b é imediatamente seguido por pelo menos um c.**
h. S = {a, b, c} **de tamanho 3.**
i. S = {a, b, c} **com tamanho menor que 3.**
j. S = {a, b, c} **com tamanho maior que 3.**
k. S = {a, b} **com um número par de a's e impar de b ´s.**

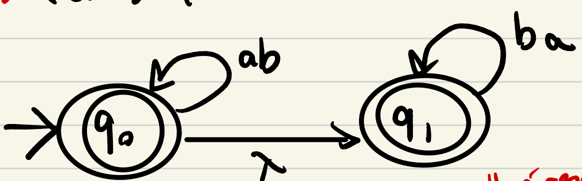
5. **Para cada uma das linguagens abaixo, dê um λ-AFN correspondente:**

a. $(ab)^*ba$
b. $(ab)^*(ba)^*$
c. $(ab)^*ba$ È $(ab)^*(ba)^*$
d. $(aa(a$ È $b)^+bb)^*$

a) $(ab)^*ba$



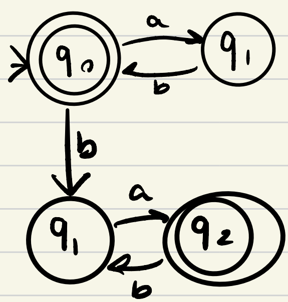

b) $(ab)^*(ba)^*$



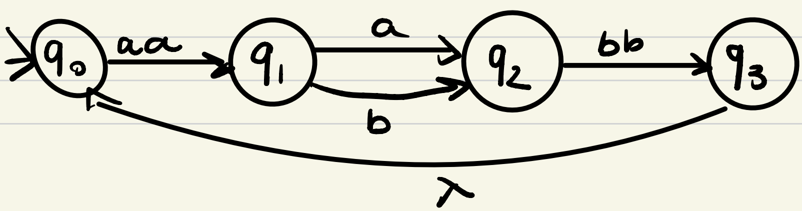

toda gerada por uma tb é gerada por uma

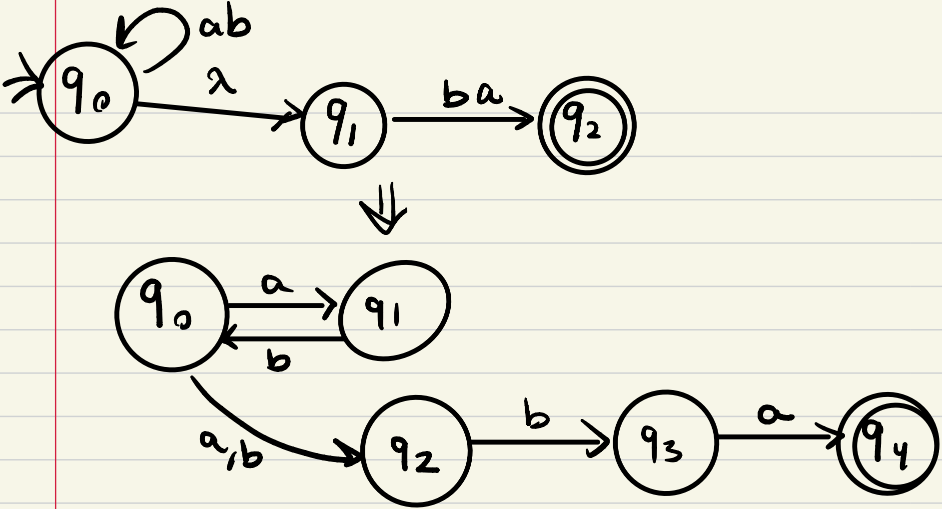
c) $(ab)^*ba \cup (ab)^*(ba)^*$

$(ab)^*(ba)^*$




d) $(aa(a \cup b)^+bb)^*$




ab
λ
q0
q1
ba
q2
a
b
a,b
q3
q4

7. **As seguintes linguagens são regulares? Prove.**

a. $\{ 0^n 1^m \mid m, n \; ^{3}\, 0 \}$ SIM

b. $\{ 0^n 1^m 0^n \mid m, n \; ^{3}\, 0 \}$ NÃO

a) $\{ \overbrace{0^n 1^m}^{K=2} \mid m, n \geq 0 \}$ $\qquad$ 00011001

$|w| \geq K$

I) $w = pqv$

II) $|pq| \leq K$

III) $|q| \neq 0$, $\neq \lambda$

IV) $pq^i v \in L \;\; \forall i \geq 0$

suponho

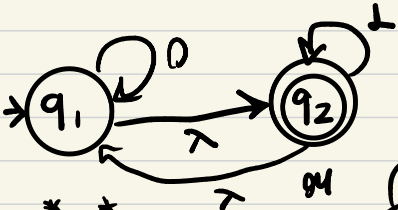
$w = \underbrace{0}_{p}\underbrace{0}_{q}\underbrace{111}_{v}$

$pq^{i=2}v \in L$?

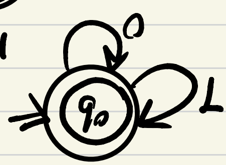
$\Downarrow$

$\underbrace{00011}_{\in L}1$ ✓

autômato =




ou




expressão = $0^* 1^*$

b)

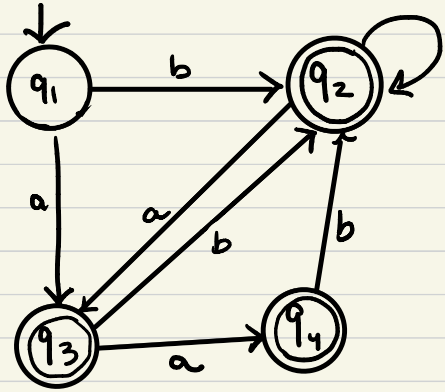
**4.** **Nos seguintes exercícios, construa AFD's segundo os enunciados.**

**a.** **O conjunto de strings sobre S = {a, b} que não contém o substring aaa.**

**b.** **O conjunto de strings sobre S = {a, b, c} que começa com a, tem exatamente dois b's e termina com exatamente cc.**

a. $S = \{a, b\}$ que não tem aaa

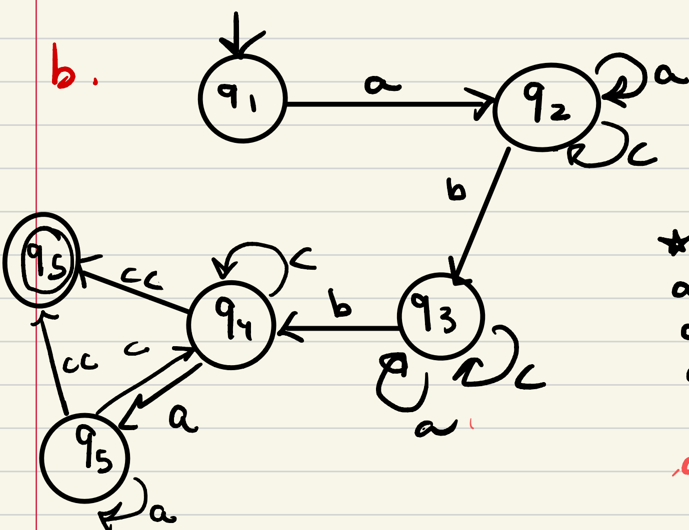
ab
aab
bba
baab




* exemplos de aplicação desse autômato:

aabbbba
ba
baa
aabbbb
abba
aabaabbb

b.




*ex:

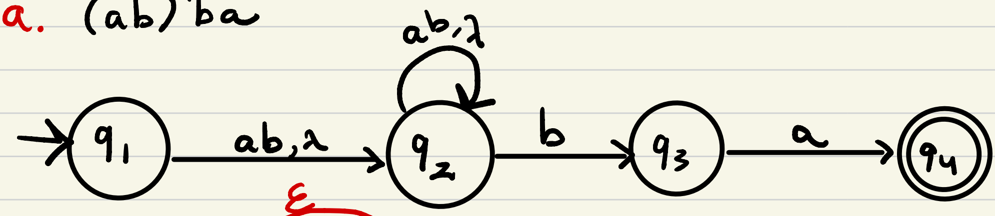
aaaabbcccc
acccbbcc
abbcaccc
abbaacc
aabccbcc

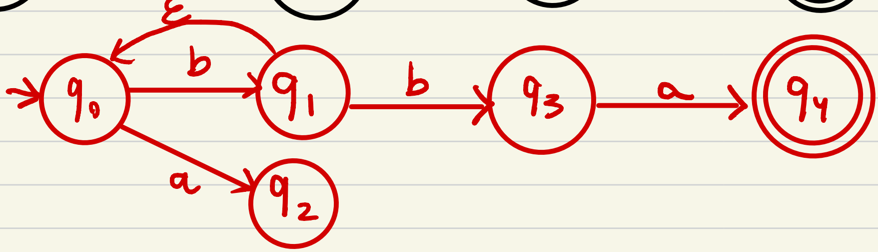
5. **Para cada uma das linguagens abaixo, dê um l-AFN correspondente:**

(ab)* ba  ababbba
0, a, b  aabba

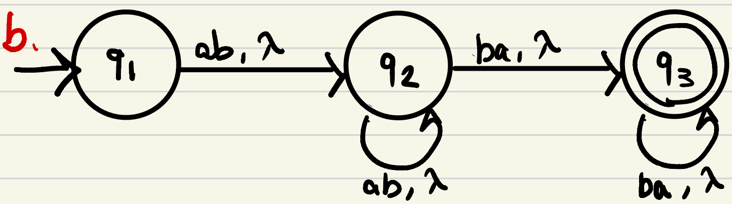
a. (ab)ba
b. (ab)*(ba)*
c. (ab)*ba È (ab)*(ba)*
d. (aa(a È b)+bb)*

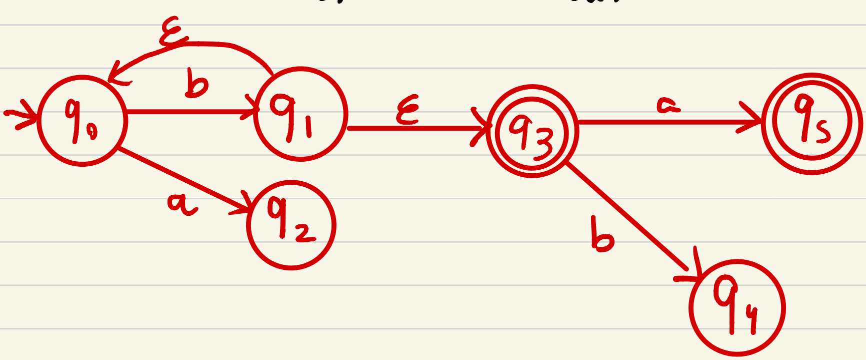
a. (ab)*ba



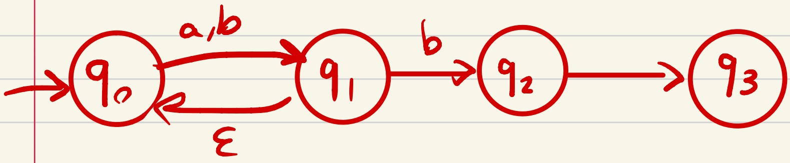




b.



c. $(ab)^* ba$ È =∪ $(ab)^* (ba)^*$




Nenhuma pergunta será respondida durante a prova. NÃO INSISTA.

1. Dê a definição recursiva para a operação de potência ($a^b$) em que $a \in N$ e $b \in N^*$.
Use apenas sucessor (S) e multiplicação na sua resposta.
(5 pontos)

$(a)^b$

$a \in \mathbb{N}$

$b \in \mathbb{N}^*$

potência: $\begin{cases} \text{base: } a^0 = S(0) \\ \text{P.R.: } a^{S(b)} = a^b \cdot a \end{cases}$

2. Escreva a expressão regular que represente o conjunto de $w \in \{a, b, c\}^*$ que não contenha o substring ac. (6 pontos)

$\Sigma = \{a, b, c\}^* \rightarrow \neq ac$

$((a \cup b)^* \cancel{a} \cup b)^* c^+ a^*$

$\cancel{((b \cup c) \cup \overset{a^+}{aa^*}\, b)^* \cup (b \cup c)\, a (a \cup b (b \cup c)^* a)^*}$

ou

$\boxed{((b \cup c) \cup a^+ \underline{b})^* \; a^*}$

vc pode não escolher nada e ter um λ.

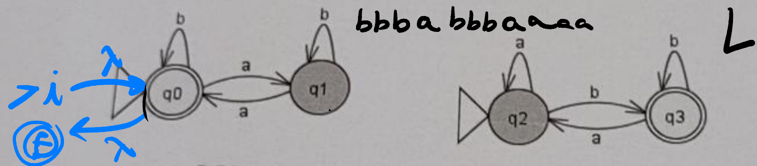
↳ obrigatoriamente, sempre depois de um "a" tem um "b".

3. Forneça um AFD que reconheça o conjunto de strings sobre $\Sigma = \{ a, b \}$ tal que $L( M3 ) = L( M1 ) \cap L( M2 )$. O que é L(M3)? (7 pontos)

baba

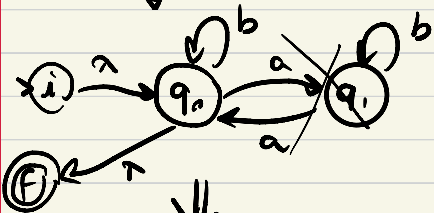
bbba bbbaaaa

L

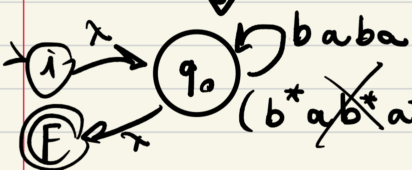



M1 M2

⇓




⇓




$(b^* a \cancel{b^*} a^*)^*$

$(b^* a\, b^* a)^* (\cancel{b^*} a b^* a b^*)^*$

⇓

$b^*(b^* a b^* a)^* b^*$

4. Mostre que $L = \{ w \in \{0, 1\}^* \mid \underbrace{w\,w}_{K=2} \}$ não é regular. (6 pontos)

0

0110

01|11|01

toda cadeia aqui terá tam. par

considerando a palavra

$w = 0^K 1 0^K 1$

como $|pq| \leq K$, temos que $q$ é composto só por 0's

★ bombeamento:

I) $w = pqv$

II) $|pq| \leq K$ → p e q estão inteiramente dentro dos primeiros K caracteres

III) $|q| \neq 0$,

IV) $w_i = pq^i v \in L \ \forall i \geq 0$

$|w| \geq K$ (p/ fazer o loop)

$K = 2 \Rightarrow w: \underbrace{0}_{p}\underbrace{0}_{q}\underbrace{1001}_{v}$

$|q| = 1$

$pq^2v = 0001001$

mas em $pq^2v \notin L$ pois resultou em uma palavra de tamanho ímpar (e a L só aceita tam. par)

CONTRADIÇÃO

L não é Regular!

---

## OUTRO EXEMPLO:

$L = \{ \overbrace{0^n 1 0^n}^{K=3} \mid n \geq 0 \}$

considerando $w = 0^K 1 0^K$

$q = 2$

$\underbrace{0}_{p}\underbrace{00}_{q}\underbrace{1000}_{v}$

$pq^{i=3}v = 0,00\,00,00\,00\,1\,000$

o nº de 0s não é igual em ambos os lados

não pertence a L

NÃO É REGULAR

# OUTRO EXEMPLO:

$L = \{1^n \mid n \text{ é primo}\}$

$m$ = comprimento da parte bombeada

bombeando $i$ vezes $\rightarrow$ $w = 1^{(n-m)+im}$

$= 1^{n+(i-1)m}$

$i = n+1 \rightsquigarrow w = 1^{n+(n+1-1)\cdot m}$

$= 1^{n+n\cdot m}$

$= 1^{n(1+m)}$

n' primo
||
divisível apenas por 1, e por ele mesmo

$\Downarrow$ exponte tb é divisível por ele mesmo

Logo:

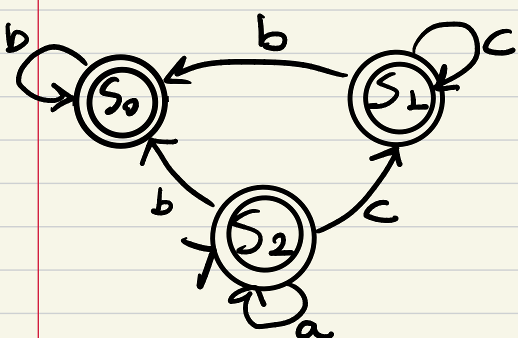
$xy^it \notin L$

5. Construa o AFD equivalente ao AFN dado abaixo. Considere $q_1$ e $q_2$ os estados de aceitação. (6 pontos)

| t | a | b | c |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{\ \}$ | $\{\ \}$ |
| $q_1$ * | $\{\ \}$ | $\{q_1\}$ | $\{\ \}$ |
| $q_2$ * | $\{\ \}$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1, q_2\}$ |

$2^3 = 8$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| ~~$\{q_0\}$~~ | ~~$\{q_0,q_1,q_2\}$~~ | ~~$\{\ \}$~~ | ~~$\{\ \}$~~ |
| * $\{q_1\}$ $S_0$ | $\{\ \}$ | $\{q_1\}$ $S_0$ | $\{\ \}$ |
| NÃO É ATINGIDO → ~~$\{q_2\}$~~ | ~~$\{\ \}$~~ | ~~$\{q_1\}$~~ | ~~$\{q_1,q_2\}$~~ |
| ~~$\{q_0,q_1\}$~~ | ~~$\{q_0,q_1,q_2\}$~~ | ~~$\{q_1\}$~~ | ~~$\{\ \}$~~ |
| ~~$\{q_0,q_2\}$~~ $S_1$ | ~~$\{q_0,q_1,q_2\}$~~ $S_2$ | ~~$\{q_1\}$~~ $S_0$ | ~~$\{q_1,q_2\}$~~ $S$ |
| * $\{q_1,q_2\}$ $S_1$ | $\{\ \}$ $S_2$ | $\{q_1\}$ $S_0$ | $\{q_1,q_2\}$ $S_1$ |
| * $\{q_0,q_1,q_2\}$ | $\{q_0,q_1,q_2\}$ | $\{q_1\}$ $S_0$ | $\{q_1,q_2\}$ $S_1$ |
| $\emptyset$ $S_2$ | | | |



O QUE É y?!

Passo 3:

considerando $s' = xy^2z$. Como y contém apenas os antes de $1^p0^p1^p$, resulta em uma string que não possui a forma ww.

4

Então, se $s' \notin L$, isso contradiz a propriedade do lema do bombeamento, provando que a linguagem não é regular.

---

2 - Para construir a expressão regular que represente o conjunto de $w \in \{a,b,c\}^*$ que não contenha o substring ac, temos que garantir que toda ocorrência de "a" não seja seguida diretamente por uma de "c". Então:

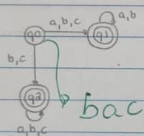
1) Qualquer número de caracteres pode aparecer antes de "a".

2) Se houver um "a", ele pode ser seguido por qualquer número de "a" ou "b", mas não "c".

3) O "c" pode aparecer em qualquer lugar, desde que não seja imediatamente antes de um "a".

2

AFN ⇝




bac ?

A expressão regular que representa o conjunto é $(a|b|c)^*(a|b)^*(b|c)^*(a|b|c)^*$.

bac ?

---

1 - Para definir uma definição recursiva para operação de potência ($a^b$) em que $a \in N$ e $b \in N^*$, devemos fazer:

* Base da recursão:

$a^1 = a$

5

* Recursão:

Para $b > 1$, definimos:

$a^{S(b)} = a \cdot a^b$

Então, a definição recursiva é $a^1 = a$ e $a^{S(b)} = a \cdot a^b$.