Resumo 1a Prova GAAL

Sophia
Carrazza

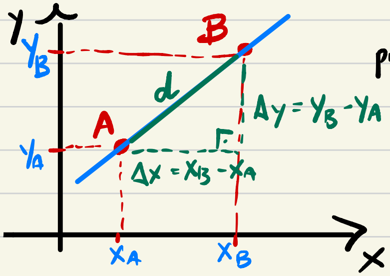
Matéria que vai cair:

- coordenadas cartesianas
  - ↳ localização de pontos no plano e no espaço
  - ↳ cálculo da distância entre 2 pontos
  - ↳ ponto médio de um segmento
- vetores como segmento de reta orientado - operações e propriedades algébricas.
- vetores no plano e no espaço
- produto escalar
- produto vetorial
- produto misto
- retas no espaço (equações, concorrentes, paralelas e reversas)
- planos no espaço

Coordenadas Cartesianas

área básica $= \dfrac{b \cdot h}{2}$

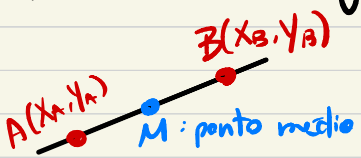
▷ distância entre 2 pontos



pontos : $\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \end{cases}$

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

▷ ponto médio do segmento

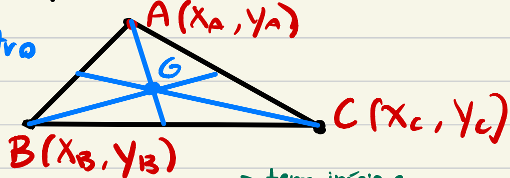


$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

▷ baricentro de um triângulo

↳ (ponto de encontro das medianas e centro de massa)

G = baricentro



$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

tem início e fim definidos

▷ mediana (segmento)

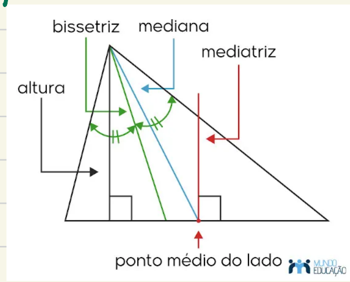
liga um vértice do Δ ao ponto médio do lado oposto.

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

é infinita

▷ mediatriz (reta)

↳ reta perpendicular a um lado do Δ que passa pelo ponto médio desse lado.



▷ teorema de pitágoras

$$\underset{\text{hipotenusa}}{c^2} = \underbrace{a^2 + b^2}_{\text{catetos}}$$

▷ fórmula de Heron

semiperímetro → $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

área de um Δ qualquer → $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

▷ Área de um triângulo definido por 3 pontos no plano cartesiano:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

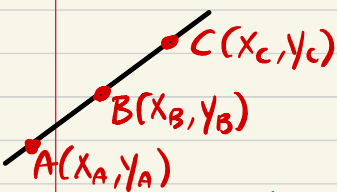
ou

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

↳ determinante ↳ módulo

▷ Condição de alinhamento de 3 pontos

↳ A, B e C são colineares se:



$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

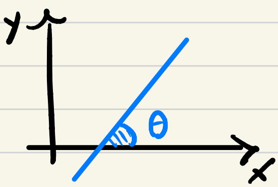
↳ ex: A(−3, 5), B(1, 1), C(3, −1) estão alinhados, são colineares ✓

$$\begin{matrix} -3 & 5 & \\ 1 & 1 & \\ 3 & -1 & \\ -3 & 5 & \text{→ repete} \end{matrix}$$

$11 \left\{ 5, 3, 3 \right.$ $\left. -3, -1, 15 \right\} 11$

$11 - 11 = 0$

▷ equação reduzida da reta



$$y = \underbrace{m}_{\text{coef. angular}} x + n$$

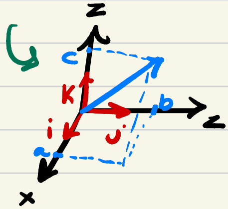
n → coef. linear (substitui os valores na equação p/ achar)

coef. angular ↳ $m = tg\,\theta$ ou $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Vetores

- módulo (ou intensidade) = valor
- direção = posição horizontal, diagonal, etc
- sentido = p/ onde ele aponta

Vetor em $\mathbb{R}^3$



$\vec{v} = (a, b, c)$
$= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

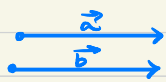
$|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

- $=$ (igualdade entre vetores): Indica que os vetores são iguais, ou seja, possuem mesma direção, sentido e módulo.
- $//$ (paralelismo): Dois segmentos são paralelos, significando que suas direções são iguais, mas podem ter sentidos e tamanhos diferentes.
- $\perp$ (perpendicularidade): Indica que dois segmentos são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90 graus entre si.
- $-$ (inversão do vetor): Por exemplo, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ significa que os vetores têm mesma direção e módulo, mas sentidos opostos.
- $|AB|$ (módulo ou comprimento do segmento): Mede o comprimento do segmento entre os pontos A e B.

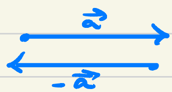
(ou ortogonais)

Indica-se o *módulo (ou norma)* de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
(x, y, z)

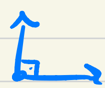


- vetores iguais = possuem o mesmo módulo, sentido e direção



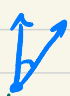
- vetores opostos = sentidos opostos

- vetores perpendiculares = formam um angulo de 90°



↳ calculado c/ pitágoras → $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

- vetores oblíquos = formam um ângulo diferente de 0°, 90° ou 180°. → podemos calculá-lo com lei dos cossenos e paralelogramo



$h^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \cos\theta$

▷ vetores paralelos = vetores ($\vec{u}$ e $\vec{v}$) que têm a mesma direção e você obtém $\vec{v}$ ao multiplicar $\vec{u}$ por uma constante e vice-versa.

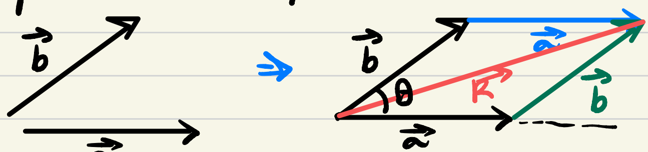
▷ vetores ortogonais = $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se algum representante de u forma um ângulo reto (90°∟) com algum de $\vec{v}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$)

▷ vetores colineares = pertencem à mesma reta.

▷ vetores coplanares = pertencem ao mesmo plano geométrico e o produto misto dos vetores deve ser = 0.

▷ vetor normal a um plano = o vetor é perpendicular ao plano. (plano = ax+by+cz+d, vetor normal = (a,b,c))

★ Regra do Paralelogramo



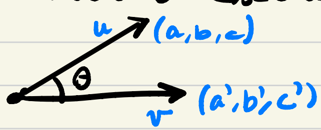
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \cdot b \cdot \cos\theta$$

★ Multiplicação de vetor por uma constante ou escalar:

$$\vec{A} = 2i + 3j + 4K$$
$$\vec{A} = c(2i) + c(3j) + c(4K)$$

★ Produto Escalar

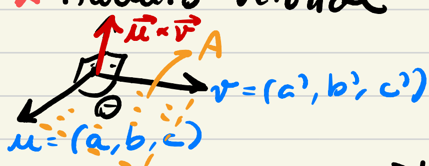


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

↳ encontro um <u>valor</u> como resposta

||

★ Produto Vetorial



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

encontro um <u>vetor</u> como resposta

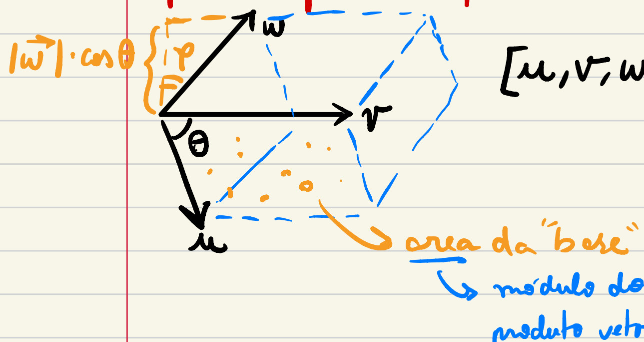
||

- usando a formula $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos\theta$, podemos encontrar o ângulo θ entre os dois vetores
- o produto escalar permite encontrar o comprimento da projeção ortogonal de um vetor em outro.
- dois vetores são perpendiculares se o produto escalar entre eles for $= 0$.

- encontra um vetor que é perpendicular aos $\vec{v}$ e $\vec{v}$
- o módulo deve vetor é a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ $\quad |\vec{v} \times \vec{v}| = A$

★ Produto Misto

com o produto misto calculamos volumes de uma figura especial formada por 3 vetores



$$[u, v, w] = (\underbrace{\vec{u} \times \vec{v}}_{\text{produto vetorial}}) \underbrace{\cdot}_{\text{produto escalar}} \vec{w}$$

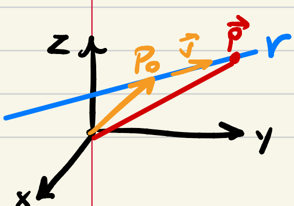
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

↳ vc tb pode achar o volume do tetraedro desses 3 vetores! (será o volume dividido por 6) $\quad Vol_{tet} = \frac{1}{6}[u, v, w]$

Retas no Espaço

★ Equação da Reta



$P = (x, y, z)$
$P_0 = (a, b, c)$
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{v}$$

$$r = \begin{cases} x = a + t v_1 \\ y = b + t v_2 \\ z = c + t v_3 \end{cases}$$

isolando t ⇓

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

★ duas retas são chamadas reversas quando não existir possibilidade de plano que possa conter ambas!

↳ P/ descobrir se as retas são:

- paralelas ⇒ calcule o produto vetorial entre seus vetores diretores ($\vec{d_1} \times \vec{d_2} = 0$). Se for nulo, os vetores são paralelos (um é múltiplo do outro) ou são coincidentes

- reversas ou concorrentes ⇒ Considerando $\vec{B} - \vec{A}$, calcule o produto misto $((\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{d_1} \times \vec{d_2}))$
  - ↳ se o resultado for 0, as retas são coplanares e, se não forem paralelas, são concorrentes (se intersectam)
  - ↳ se o resultado for $\neq 0$, as retas são reversas (não coplanares, não se cruzam).

- $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \vec{0}$: retas paralelas
- $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \neq \vec{0}$ e $(\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) = 0$: retas concorrentes (coplanares e se cruzam)
- $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \neq \vec{0}$ e $(\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \neq 0$: retas reversas (não coplanares)

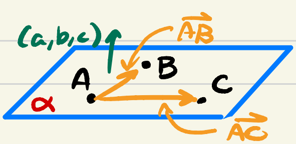
Planos no Espaço

↳ 3 pontos distintos e não colineares A, B, e C formam um plano

↳ A condição p/ que outro ponto P tb pertença a esse plano é que os vetores $\vec{AP}$, $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ devem ser coplanares (o produto misto entre eles é nulo!

$$\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0, \text{ onde } \begin{cases} P(x, y, z) & \text{um ponto do plano} \\ A(x_A, y_A, z_A) \\ \vec{n}(a, b, c) \end{cases}$$

★ Equação do Plano



$$\alpha = ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (a', b', c')$$

(produto vetorial)

Passo-a-passos + práticos:

> Produto vetorial (multiplicação de 2 vetores)

ordem 2
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ordem 3
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \Rightarrow a \cdot y_1 \cdot z_2 + b \cdot z_1 \cdot x_2 + c \cdot x_1 \cdot z_2 - (c \cdot y_1 \cdot x_2 + a \cdot z_1 \cdot y_2 + b \cdot x_1 \cdot z_2)$$

$c \cdot y_1 \cdot x_2$ $\quad a \cdot z_1 \cdot y_2$ $\quad b \cdot x_1 \cdot z_2$ $\quad a \cdot y_1 \cdot z_2$ $\quad b \cdot z_1 \cdot x_2$ $\quad c \cdot x_1 \cdot y_2$

> Produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$

★ P/achar o ângulo entre 2 vetores:

1- calcule o produto escalar entre os 2
2- calcule as normas (módulos) dos vetores
3- calcule o cosseno do ângulo θ e o ângulo θ

norma (magnitude) de um vetor $= \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
("x", "y", "z")

★ cálculo do cosseno usando o produto escalar

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

★ cálculo do ângulo a partir do cosseno (inversa do cosseno) → $\theta = \arccos(\cos\theta)$

Operação	Principais usos/geometria	Resultado	Exemplo/explicação
Produto escalar	- Ângulo entre vetores	Número real (escalar)	$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$
	- Comprimento (norma) de vetores	Número real (escalar)	$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$
	- Projeção de um vetor sobre outro	Número real (escalar)	$\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|}$
	- Perpendicularidade	produto escalar é = Zero se vetores são ortogonais (perpendiculares)	$u \cdot v = 0 \to$ ortogonais
	- Trabalho físico	Número real (escalar)	$W = F \cdot d$
Produto vetorial	- Encontrar vetor perpendicular a dois vetores	Novo vetor (ortogonal aos dois)	$u \times v$
	- Área de paralelogramo/triângulo definido por dois vetores	Número real (módulo do vetor)	área $= \|u \times v\|$
	- Normais de superfícies	Vetor normal	Utilizado em análise de planos
	- Momento/torque físico	Vetor representando direção força	$\tau = r \times F$
Produto misto	- Volume de paralelepípedo definido por três vetores	Número real (escalar)	$$V =
	- Coplanaridade de vetores	Zero se vetores são coplanares	$u \cdot (v \times w) = 0$
	- Orientação de base no 3D	Sinal indica orientação positiva	Determina a 'mão' da base

★ Planos perpendiculares têm normais perpendiculares!

$= n_1 \cdot n_2 = 0$

Dados os pontos extremos $M(x_1, y_1)$ e $N(x_2, y_2)$, os pontos que dividem o segmento em n partes iguais são:

posição! (se eu quero a 1ª divisão, a 2ª, etc)

$$P_k = \left(x_1 + k\frac{x_2 - x_1}{n}, \quad y_1 + k\frac{y_2 - y_1}{n}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Para o segmento $M(3, -2)$ e $N(15, 10)$ dividido em 4 partes iguais:

$$P_k = \left(3 + k \times \frac{15 - 3}{4}, \quad -2 + k \times \frac{10 - (-2)}{4}\right), \quad k = 1, 2, 3$$

Para escrever a equação de um plano em sua forma geral, você precisa de duas informações fundamentais:

1. Um vetor normal n ao plano (já encontrado pelo produto vetorial).
2. Um ponto qualquer $P(x_0, y_0, z_0)$ que pertence ao plano.

A forma ponto-normal do plano é:

$$n \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0.$$

Veja por que cada parte é necessária:

1. "Por que usar o ponto P?"
   - Qualquer plano em $\mathbb{R}^3$ é totalmente determinado por sua orientação (o normal) e por uma posição no espaço.
   - O vetor normal garante a inclinação do plano, mas não diz "onde" ele está. Precisamos de um ponto sobre o plano para fixar sua localização.
   - Você poderia usar Q em vez de P e chegaria à mesma equação (com constantes talvez rearranjadas), porque Q também pertence a π_1.
2. "Por que aparece $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$?"
   - O plano contém todos os pontos (x, y, z) tais que o vetor que vai do ponto fixo $P(x_0, y_0, z_0)$ ao ponto genérico (x, y, z) seja $\perp$ ao normal n.
   - Esse vetor é $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$.
   - O produto escalar $n \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$ expressa exatamente "ser perpendicular".

Forma Polar:

↳ é a forma de representar um vetor no plano, usando seu módulo e o ângulo que ele faz com o eixo X (ângulo diretor) ao invés de suas componentes cartesianas.

★ Se o vetor tem magnitude $|\vec{v}|$ e ângulo diretor θ:

- sua componente X será $|\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$
- sua componente Y será $|\vec{v}| \cdot \sin(\theta)$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y_{soma}}{X_{soma}}\right)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1 \quad \begin{cases} \alpha = \arccos \dfrac{x}{|\vec{v}|} \\ \beta = \arccos \dfrac{y}{|\vec{v}|} \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{|\vec{v}|} \end{cases}$$

— RESUMO GERAL —

magnitude
módulo
comprimento
norma
} =

VETORES EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x, y, z)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(vetor unitário) = Versor de $\vec{v}$ → $\vec{v}_v = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

OPERAÇÕES COM VETORES

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$K(x_1, y_1) = (Kx_1, Ky_1)$

PRODUTO VETORIAL

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

- achar vetor perpendicular a 2 vetores
- vetor normal de superfícies ★
- prod. vet. = 0 → vetores paralelos
- módulo do resultado → área de Δ ou paralelogramo de 2 vetores
- vetor representativo da direção força

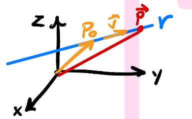
RETAS E PLANOS

★ retas:

$X = P_0 + t\vec{v}$ ou $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

$P = (x, y, z)$
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v} = (a, b, c)$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



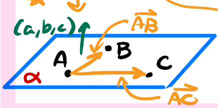
★ planos:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ou

$ax + by + cz + d = 0$

vetor NORMAL ★



$\vec{AB} \times \vec{AC} = (a', b', c')$
(produto vetorial)

PRODUTO MISTO

$$|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

- achar volume de paralelepípedo definido por 3 vetores
- definir se vetores são coplanares (se for = 0, vetores são coplanares)
- orientação de base no 3D (sinal indica orientação positiva).

OUTROS

★ Área de triângulo definido por 3 vetores:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

determinante (ou o produto vetorial)
módulo

★ ponto a ponto

$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

★ ponto à reta ★

$d(Q, r) = \dfrac{|\vec{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$

vetor diretor $= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
(indica direção da reta)
produto vetorial

★ ponto à plano ★

$d(S, \alpha) = \dfrac{|\vec{BS} \cdot \vec{v}_n|}{|\vec{v}_n|}$

produto escalar
vetor normal (prod. vetorial)

PRODUTO ESCALAR

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$ → $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$\theta = \arccos(\cos\theta)$

- achar o ângulo entre vetores
- encontrar o comprimento/norma de um vetor
- projeção de um vetor sobre outro ★
- descobrir se vetores (ou retas!) são perpendiculares (se $u \cdot v = 0$ → ortogonais).

produto escalar dos seus vetores diretores $\vec{n} = (a, b, c)$

*** outra forma de calcular distância de ponto a uma reta:**

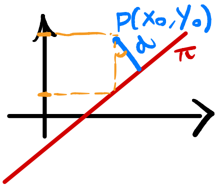
$$d_{pp'} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

*** outra forma de calcular distância de ponto ao plano:**

$$d(\pi, P) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

*** projeção de um vetor sobre outro:**

$$\vec{p} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|v\|^2}\right)\cdot\vec{v}$$



*** Verificar se 3 pontos são colineares:**

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(determinante)

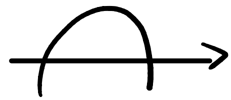
ou:

1- calcule os 2 vetores a partir dos 3 pontos
2- produto vetorial dos 2 vetores
3- se = 0, são colineares.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$$

$$\Downarrow$$

$d(t) \Rightarrow$ parabola p/ baixo

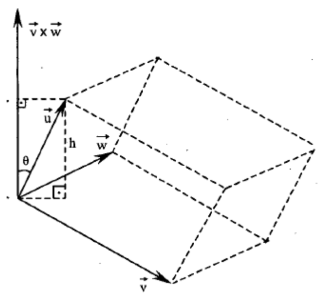


Uma aplicação importante do *produto escalar* é o cálculo do trabalho ***w*** realizado por uma força ***F*** sobre uma partícula em movimento, com deslocamento ***d*** em trajetória retilínea. <u>Em símbolos</u>: $w = \vec{F} \bullet \vec{d}$

produto escalar

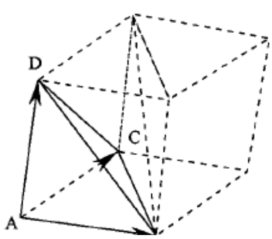
Trabalho = Vetor de Força · Vetor de deslocamento

W $\qquad \vec{F}$ $\qquad \vec{d}$

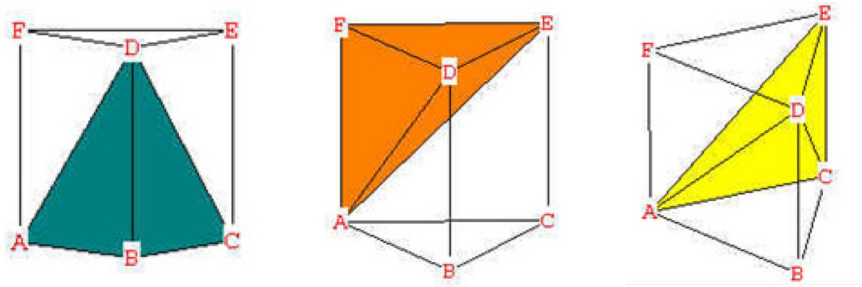


✓ <u>Nota</u>: O módulo (valor absoluto) do *produto misto* de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nos dá a medida do volume do paralelepípedo formado por esses vetores, assinalados na figura ao lado. Em símbolos: $\mathbf{V} = |(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})|$.

Este paralelepípedo, por sua vez, pode ser decomposto em dois prismas triangulares de mesmo tamanho (conforme figura abaixo) e, portanto, o volume V_p de cada prisma é a metade do volume V do paralelepípedo, isto é: $V_p = \frac{1}{2}V$.



Por outro lado, da Geometria Espacial, sabemos que o prisma pode ser desmembrado em três pirâmides de mesmo volume, sendo uma delas o tetraedro ABCD de volume V_t.



Nessas condições temos:

$$\mathbf{V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}V\right) = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}$$

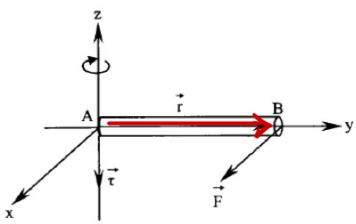
O *produto vetorial* é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Dentre algumas de suas aplicações pode-se citar o *torque*. O torque é uma grandeza vetorial $\vec{\tau}$ relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção (ou giro) ou alterar seu movimento de rotação.

Em símbolos: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, onde $\|\vec{r}\|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado.

A partir dessas informações, resolva o problema proposto a seguir:

$0i + 2j + 0K$ $\quad$ $10i + 0j + 0K$

Calcular a intensidade do torque sobre a barra $\overline{AB}$, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros) e $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons), quando $\overline{AB}$ é rotacionada em torno do eixo z, como ilustra a figura.



$\overrightarrow{AB}$

$\vec{r} = (0, 2, 0)$

$\vec{F} = (10, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -20)$$

intensidade do torque = $\|\text{prod. vet}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 20^2} = \sqrt{20^2} = 20$

3. Produto misto

Dada a *equação vetorial* de uma reta r é possível representá-la de outras formas:

<table>
<tr>
<th>Equação Paramétrica da Reta</th>
<th>Equação Reduzida da Reta</th>
</tr>
<tr>
<td>

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{at} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{bt} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z_1} + \mathbf{ct} \end{cases}$$

onde $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$ são as componentes de um ponto conhecido da reta r, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ são as componentes do vetor diretor e o parâmetro t é um número real.

</td>
<td>

Escrever a *equação reduzida* da reta r definida pelo ponto $A = (2, -4, -1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -3)$, na variável x.

$$\begin{cases} x = \mathbf{2} + \mathbf{1}t \rightarrow x - 2 = t \\ y = \mathbf{-4} + \mathbf{2}t \rightarrow y = 2x - 8 \\ z = \mathbf{-1} - \mathbf{3}t \rightarrow z = -3x + 5 \end{cases}$$

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{1x} + \mathbf{0}, \mathbf{2x} - \mathbf{8}, \mathbf{-3x} + \mathbf{5})$ é a *equação reduzida* da reta r na variável x.

Observe que $(\mathbf{0}, \mathbf{-8}, \mathbf{5})$ são as componentes de um outro ponto da reta r (distinto de A) e $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{-3})$ são as componentes do vetor diretor.

</td>
</tr>
</table>

P/ classificar 2 retas no espaço:

- extrair os vetores diretores de cada reta
- calcular o produto misto usando um ponto de cada reta e os vetores diretores

↳ se prod. misto $\neq 0 \rightarrow$ reversas (não se encontram)

↳ se prod. misto $= 0 \rightarrow$ coplanares

produto vetorial dos diretores

$= 0$ paralelas

$\neq 0$ concorrentes