Provas Antigas GAAL

(prova 1)

Sophia Carrozza

50

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – CorEu

110

Título: 1ª Avaliação	Data: 27/3/25
Curso: Ciência da Computação	Período: 6º
Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear	Professor: Révero Campos
Aluno(a): Suzane Lemos de Lima	Valor: 25,0 pts

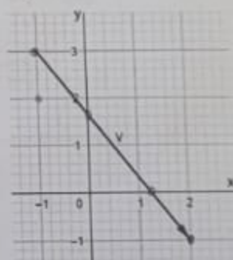
Atenção! Para a validação da sua resposta nas questões de 01 a 05 você deverá registrar, com clareza, o desenvolvimento do raciocínio utilizado.

5
QUESTÃO 01

Dada a equação da reta r: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 2 - x \end{cases}$ e do plano π: $2x + 4y - z = 4$, pede-se:

a) Indicar as coordenadas do ponto onde a reta *r* "fura" o plano π.

b) Determinar o escalar *k* para que o ponto de coordenadas $(k^2-1, k+1, -4)$ pertença ao plano π.



2,5
QUESTÃO 02

Considere a figura ao lado para responder aos itens abaixo:

a) Indique um vetor paralelo a $\vec{v}$ de comprimento 6.

b) Calcule a medida, em graus, do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w} = (-1, 6)$.

0
QUESTÃO 03

Considere o triângulo de vértices P(–2,1), Q(8,11) e R(4,–4), desenhado no $\Re^2$.

a) Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado PQ do triângulo PQR.

b) Utilizando a teoria sobre vetores, verifique se esse triângulo é retângulo.

0,5
QUESTÃO 04

Escrever a equação geral do plano π_1 que contém os pontos P(1, –2, 2) e Q(–3, 1, –2) e é perpendicular ao plano de equação π_2: $2x + y - z + 8 = 0$.

0
QUESTÃO 05

Analise as proposições abaixo e, em seguida, julgue cada uma das afirmativas em (V) verdadeiro ou (F) falso. Apresente cálculos matemáticos que justificam a sua análise.

I. ( ) Considere os pontos A(–2, 1, 5), B(3, –5, 2), C(–2, 2, 3) e D(–2, –1, 9) do $\Re^3$.
Nesse caso, não é possível construir um paralelepípedo apoiado sobre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

II. ( ) A medida da área do paralelogramo, em unidades adequadas, construído sobre os vetores $\vec{u} = (-7, 1, 8)$ e $\vec{v} = (3, -2, 0)$ é um número *I* no intervalo $31 < I < 32$.

?

0

QUESTÃO 01

Dada a equação da reta r: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 2 - x \end{cases}$ e do plano π: $2x + 4y - z = 4$, pede-se:

a) Indicar as coordenadas do ponto onde a reta r "fura" o plano π.

b) Determinar o escalar k para que o ponto de coordenadas $(k^2-1, k+1, -4)$ pertença ao plano π.

$z = \frac{22}{11} - \frac{18}{11} = \frac{4}{11}$

a) $r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 2 - x \end{cases}$ $x = t$ $\Rightarrow$ $r: \begin{cases} x = t \text{ = escalar} \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

$y = -3 + 2 \cdot \frac{18}{11}$

$-\frac{33}{11} + \frac{36}{11} = \frac{3}{11}$

o ponto de interseção:

$P = \left(\frac{18}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}\right)$

$\pi = 2x + 4y - z = 4$

$2t + 4(-3+2t) - (2-t) = 4$

$2t - 12 + 8t - 2 + t = 4$

$11t - 14 = 4$

$11t = 18$

$t = \frac{18}{11}$

"posição" da reta onde ela cruza o plano

(p/ achar a intersecção, precisamos encontrar valores das coordenadas que satisfaçam ambas as condições:

- coordenadas devem estar na reta (satisfazer as equações paramétricas)
- coordenadas devem estar no plano (satisfazer a equação do plano)

logo, a estratégia é substituir as equações paramétricas da reta na equação do plano!)

b) $(K^2 - 1, K + 1, -4)$

$r: \begin{cases} x = -1 + K^2 \text{ "escalar"} \\ y = 1 + K \\ z = -4 \end{cases}$

$2x + 4y - z = 4$

$2(-1 + K^2) + 4(1 + K) - (-4) = 4$

$-2 + 2K^2 + \cancel{4} + 4K + \cancel{4} = \cancel{4}$

$\frac{+2K^2 + 4K + 2 = 0}{2}$

$K^2 + 2K + 1 = 0$

$(K+1)^2 = 0$

-1

$x = -1 + (-1)^2 = 0$

$y = 1 + (-1) = 0$

$z = -4$

$P = (0, 0, -4)$

$K = -1$

QUESTÃO 02

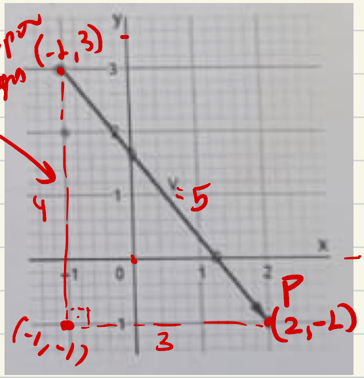
Considere a figura ao lado para responder aos itens abaixo:

a) Indique um vetor paralelo a $\vec{v}$ de comprimento 6.

b) Calcule a medida, em graus, do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w} = (-1, 6)$.

a) $\vec{v} = (2-(-1)), (-1-3) \Rightarrow (3, -4)$

$\|v\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$



$u = 6 \cdot \bar{v} \Rightarrow 6 \cdot \frac{3}{5}, 6 \cdot \frac{-4}{5} \Rightarrow \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$

$u = \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$

b) $\Rightarrow \begin{matrix} \bar{v} = (3, -4) \\ w = (-1, 6) \end{matrix} \Big\}$ produto escalar $\Rightarrow (3 \cdot -1) + (-4 \cdot 6)$

$= -3 + (-24)$

$= -27$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{3^2 + -4^2} = 5$

$\|\bar{w}\| = \sqrt{-1^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

$\cos\theta = \frac{-27}{\underbrace{\sqrt{37}}_{6.08} \cdot 5} \cong 0,8877$ $\quad$ 30.4

$\theta = \arccos(0,8877)$

$= 152,59°$

$\approx 153°$

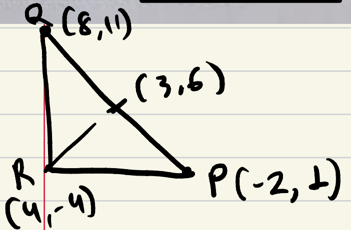
QUESTÃO 03

Considere o triângulo de vértices P(–2,1), Q(8,11) e R(4,–4), desenhado no $\Re^2$.

a) Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado PQ do triângulo PQR.

b) Utilizando a teoria sobre vetores, verifique se esse triângulo é retângulo.

a)



$P_{M_{PQ}} = \frac{-2+8}{2}, \frac{1+11}{2} \Rightarrow (3, 6)$

dist $P_{M_{PQ}}R = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{1+100} = \sqrt{101}$

comprimento da mediana relativa $= \sqrt{101} \cong 10,04$

b)

$\overline{PQ} = (-2-8),(1-11) \to (-10,-10)$
$\overline{QR} = (4-8),(-4-11) \to (-4,-15)$
$\overline{RP} = (-2-4),(1-(-4)) \to (-6,5)$

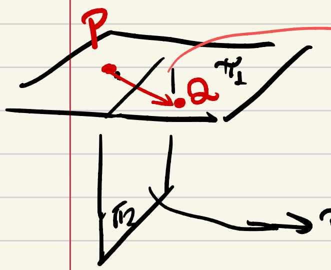
O triângulo não é retângulo!

$\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = +40+150 = 190 \neq 0$
$\overline{RP} \cdot \overline{QR} = +24-75 = -51 \neq 0$
$\overline{PQ} \cdot \overline{RQ} = +60-50 = 10 \neq 0$

nenhum dos ângulos é perpendicular um ao outro

QUESTÃO 04

Escrever a equação geral do plano π_1 que contém os pontos P(1, –2, 2) e Q(–3, 1, –2) e é perpendicular ao plano de equação π_2: 2x + y – z + 8 = 0.



$\overline{PQ} = (-3-1, 1-(-2), (-2-2)) \Rightarrow (-4, 3, -4)$

$\pi_2 = \underset{a}{2}x + \underset{b}{y} \underset{c}{-z} + \underset{d}{8} = 0$ $\qquad \alpha = ax + by + cz + d = 0$

$n = (a,b,c) \to n_2 = (2,1,-1)$

eq. geral de um plano $\Rightarrow n_1 \cdot (X - P) = 0$

vetor normal ao plano; ponto no plano

planos perpendiculares têm normais ortogonais!

$\Downarrow$

$n_1 \cdot n_2 = 0$

$n_2 \cdot \overline{PQ}$ → produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{matrix}$$

$-4\vec{k} \quad -3\vec{i} \quad -8\vec{j} \quad -4\vec{i} \quad +4\vec{j} \quad +6\vec{k}$

$-4\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} + (-4\vec{k} - 3\vec{i} - 8\vec{j})$
$= -1\vec{i} + 12\vec{j} + 10\vec{k}$

$n_1 (-1, 12, 10)$

forma "ponto-normal" do plano:

$n \cdot ((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)) = 0$

formando a equação:

$-1x + 12y + 10z = 0$

$P(1,-2,2) \to -1(x-1) + 12(y+2) + 10(z-2) = 0$
$= -x + 12y + 10z + 5 = 0$

$\boxed{x - 12y - 10z - 5 = 0}$

escolhemos o ponto P como o "inicial" do plano

QUESTÃO 05

Analise as proposições abaixo e, em seguida, julgue cada uma das afirmativas em (V) verdadeiro ou (F) falso. Apresente cálculos matemáticos que justificam a sua análise.

I. (V) Considere os pontos A(–2, 1, 5), B(3, –5, 2), C(–2, 2, 3) e D(–2, –1, 9) do $\Re^3$. Nesse caso, não é possível construir um paralelepípedo apoiado sobre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

II. (   ) A medida da área do paralelogramo, em unidades adequadas, construído sobre os vetores $\vec{u} = (-7, 1, 8)$ e $\vec{v} = (3, -2, 0)$ é um número I no intervalo $31 < I < 32$.

?

0

I. $\overline{AB} = (3-(-2), -5-1, 2-5) \Rightarrow (5, -6, -3)$

$\overline{AC} = (-2-(-2), 2-1, 3-5) \Rightarrow (0, 1, -2)$

$\overline{AD} = (-2-(-2), -1-1, 9-5) \Rightarrow (0, -2, 4)$

coplanaridade de vetores $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

0 20 0 20 0 0

20 - 20 = 0

os vetores são coplanares, logo NÃO podem formar um paralelepípedo.

II. $\vec{u} = (-7, 1, 8)$
$\vec{v} = (3, -2, 0)$

Área do paralelogramo $\Rightarrow$ módulo do vetor resultado do produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -7 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} \\ -7 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$3\bar{k}$ $-16\bar{i}$ $0\bar{j}$ $0\bar{i}$ $24\bar{j}$ $+14\bar{k}$

$14\bar{k} + 24\bar{j} - (3\bar{k} - 16\bar{i})$

$= 16\bar{i} + 24\bar{j} + 11\bar{k}$

$= (16, 24, 11)$

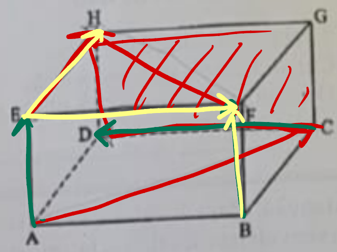
$\sqrt{(16)^2 + (24)^2 + (11)^2} = \sqrt{953} \cong \underline{30{,}87}$ u.a.

$256 + 576 + 121 = 953$

3

QUESTÃO 06

A figura ao lado representa um paralelepípedo retângulo.
Com base nela, assinale TODAS as afirmativas que julgar correta.



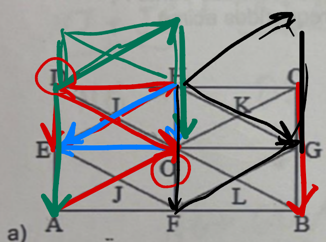
(V) O vetor $\overrightarrow{EH}$ é normal ao plano CDG.
(F) Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{FH}$ são paralelos.
(V) Os vetores $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{AE}$ são coplanares.
(V) As retas $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ são reversas.

duas retas são chamadas reversas quando não existir possibilidade de plano que passa conter ambas!

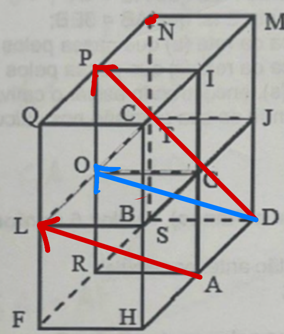
Questão 1 – (operações entre vetores no plano e no espaço) – valor: **4 pontos**

Observe as figuras, faça a letra a) na figura a) e a letra b) na figura b)

4,0



a)



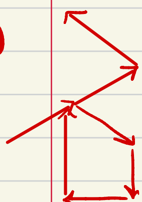
b)

Determine a soma dos vetores indicados:

a) AO + EF + DE – DH – BC + 2EI + FE;

b) MI + NJ + HR + DA + GA - AJ + HL;

a)



$$AO + EF + DE - DH - BC + EI + EI + FE$$

$$AO + \cancel{EF} + \underbrace{DE + HD}_{HE = -AO} + CB + \underbrace{EI + EI}_{EH = AO} + \cancel{FE}$$

$$AO + AO - AO + CB$$

$$AO + CB$$

$$DO \text{ (ou } HG\text{, etc)}$$

b) $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{HL}$

$\underbrace{\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NJ}}_{NG}+\underbrace{\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{DA}}_{\cancel{BD}}+\overrightarrow{GA}+\underbrace{\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{HL}}_{LG}$

NP, AS, GH, PS

$\underbrace{NG + BD}_{DP}$ $\quad$ $\underbrace{GA + LG}_{AL \to DO}$

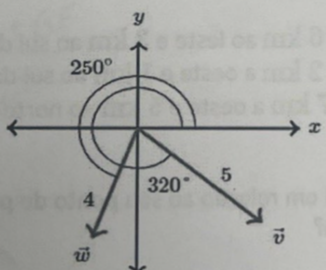
$\underbrace{DP + AL}_{\overrightarrow{MF}}$

?

Questão 2 – (forma polar e soma de vetores) – valor: 5 pontos

Veja a seguir os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

5,0



Determine a magnitude e o ângulo diretor (θ) de $\vec{v}+\vec{w}$.

$\theta_v = 320°$

$\vec{v}$ => modulo 5, ângulo diretor 320° → $V_x = 5\cdot\cos 320° = 3,83$; $V_y = 5\cdot\sin 320° = -3,21$

$\vec{w}$ => modulo 4, ângulo diretor 250° → $W_x = 4\cdot\cos 250° = -1,37$; $W_y = 4\cdot\sin 250° = -3,76$

$x = V_x + W_x \Rightarrow 3,83 + (-1,37) = 2,46$

$y = V_y + W_y \Rightarrow -3,21 + (-3,76) = -6,97$

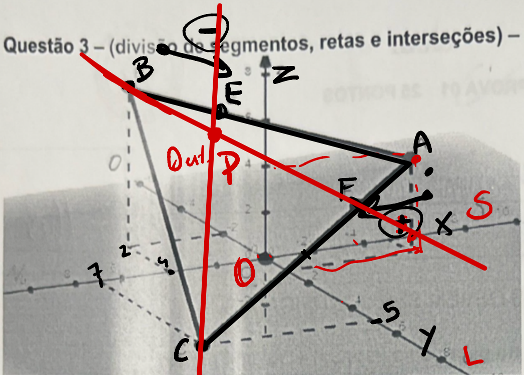
$\Downarrow$

$|\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{2,46^2 + (-6,97)^2} \cong 7,39$

ângulo diretor $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-6,97}{2,46}\right) = -70,55 + 360 = 289,45°$

(p/ completar uma volta)

Questão 3 – (divisão de segmentos, retas e interseções) – valor: **5 pontos**



Após o seqüestro de uma criança na cidade de Chicago, os bandidos fizeram contato com a família por três vezes. A polícia foi acionada e rastreou as ligações, feitas de três telefones públicos diferentes. Imediatamente, identificaram as posições dos telefones em um mapa da cidade através das coordenadas cartesianas: As coordenadas (a partir do marco O) são:

A: 5 km Sul, 1 km Leste, 4 m de altitude.
B: 4 km Norte, 2 km oeste, 7 m de altitude.
C: 7 km Norte, 5 km Leste, nível do mar.

Após várias investigações um perito em seqüestro afirmou que para determinar o local do cativeiro era necessário executar as seguintes atividades:

(v) ache as coordenadas do ponto F tal que AC = 4AF;
(vi) ache as coordenadas do ponto E tal que AB = 3EB; → $\frac{AB}{3} = EB$
(vii) ache a equação paramétrica da reta (s) que passa pelos pontos F e B;
(viii) ache a equação paramétrica da reta (r) que passa pelos pontos C e E;
(v) intercepta-se as retas (r) e (s), encontrando assim o cativeiro, denominado ponto P;

Lembre-se a vida desta criança depende de sua precisão nos cálculos requeridos acima.

4,0

v) $AC = 4AF$

$A = (-5, -1, 4)$
$C = (7, -5, 0)$
$B = (4, 2, 7)$

$d_{AC} = \sqrt{(7-(-5))^2 + (5-(-1))^2 + (0-4)^2}$
$= \sqrt{12^2 + 6^2 + 4^2}$
$= \sqrt{144 + 36 + 16}$
$= \sqrt{196}$
$= 14$

vi) $AB = (4-(-5),\ 2-(-1),\ 7-4)$
$= (9, 3, 3)$

$\frac{AB}{3} = (3, 1, 1) = EB$

$E = B - EB = (4-3,\ 2-1,\ 7-1)$

$E = (2, 1, 6)$

$AC = (7-(-5),\ -5-(-1),\ 0-(4))$
$AC = (12, -4, -4)$

$\frac{AC}{4} = (3, -1, -1)$

$F = A + \frac{AC}{4} = (-5+3,\ -1-1,\ -1+4)$

$F = (-2, -2, 3)$

vi) $F = (-2,-2,3)$
$B = (4,2,7)$

$$\overline{FB} = (4-(-2),\ 2-(-2),\ 7-3) = (6,4,4)$$

$$r = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} x = x_0 + 6t \\ y = y_0 + 4t \\ z = z_0 + 4t \end{cases}$$

$\Downarrow$

começa em F

$F(x_0, y_0, z_0)$

$$r = \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

C e E

viii) $E = (2,1,6)$
$C = (7,-5,0)$

$$CE = (7-2,\ -5-1,\ 6-0)$$

$$\overline{CE} = (5, -6, 6)$$

$$r = \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -5 - 6t \\ z = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

v) x: $-2 + 6t = 7 + 5t$
$t = 9$

y: $-5 - 6t = -2 + 4t$
$10t = -3$
$t = -3/10$

z: $3 + 4t = 6t$
$2t = 3$
$t = 3/2$

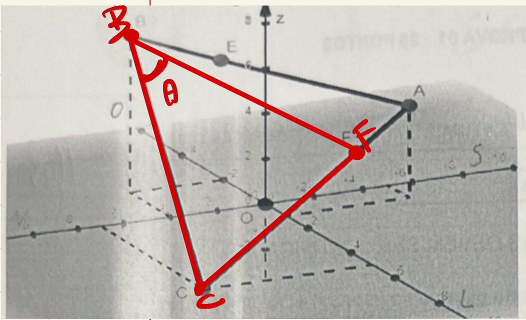
$$P = \left(9, -\tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Questão 4 – (Produto entre vetores e Planos) – valor: 6 pontos

Usando a figura e os dados da questão anterior calcule:

1,5

a) O ângulo B do triângulo BFC;
b) A área do triângulo BFC;
c) A equação do plano que passa pelos pontos B, F e C;
d) Calcule a distância da origem O(0,0,0) até o plano BFC;



a) $\theta \Rightarrow$ produto escalar entre $\overline{BF}$ e $\overline{BC}$

$F = (-2, -2, 3)$
$B = (4, 2, 7)$
$C = (7, -5, 0)$

$36+16+16$

$|\overline{BF}| = \sqrt{-6^2 + -4^2 + -4^2} = \sqrt{68} = 8{,}24$

$\overline{BF} = (-2-4, -2-2, 3-7)$

$(-\overline{FB}) \rightarrow (-6, -4, -4)$

$|\overline{BC}| = \sqrt{3^2 + -7^2 + -7^2} = \sqrt{107} = 10{,}34$

$\overline{BC} = (7-4, -5-2, 0-7)$

$(3, -7, -7)$

$\overline{BF} \cdot \overline{BC} = (-18, +28, +28)$

$\overline{BF} \cdot \overline{BC} = -18 + 28 + 28$

42
-18

$\overline{BF} \cdot \overline{BC} = 38$

$\cos\theta = \dfrac{38}{8{,}24 \cdot 10{,}34}$

$\cos\theta = \dfrac{38}{85{,}23} \Rightarrow 0{,}445$

$\theta = \arccos(0{,}445)$

$\theta = 63{,}5°$

b) Área do Δ = produto vetorial

$\cancel{28\vec{i}} - 12\vec{j} + 42\vec{K} + 12\vec{K} + \cancel{28\vec{i}} + 42\vec{j}$

$-54\vec{j} + 54\vec{K}$

$$\text{Área} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} & \vec{i} & \vec{j} \\ -6 & -4 & -4 & -6 & -4 \\ 3 & -7 & -7 & 3 & -7 \end{array}\right|$$

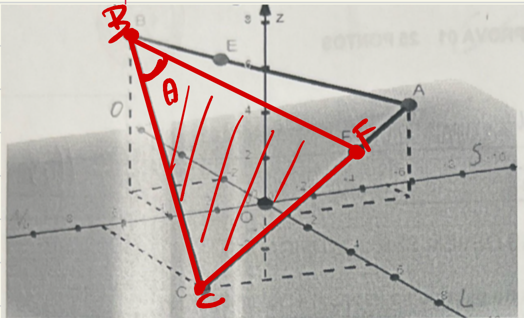
$-12\vec{K}$ $\quad 28\vec{i}$ $\quad 42\vec{j}$ $\quad 28\vec{i}$ $\quad -12\vec{j}$ $\quad 42\vec{K}$

$(0, -54, +54)$

$= \sqrt{0^2 + (-54)^2 + (+54)^2}$

$= \sqrt{5832}$

$= 76{,}36$ u.a.



c) eq do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

provindos do produto vetorial

$$-54y + 54z + d = 0$$

aplicando em um ponto p/ descobrir d.
$B = (4,2,7)$

$$-54 \cdot 2 + 54 \cdot 7 = -d$$
$$-108 + 378 = -d$$
$$-270 = d$$

$$eq = \frac{-54y + 54z - 270 = 0}{54} \text{ (SIMPLIFICANDO)}$$

$$-y + z - 5 = 0$$

d) distância da origem (0,0,0) até o plano BFC

dist. de ponto até plano $\Rightarrow \dfrac{|\overset{\text{PONTO}}{\text{origem}} - \text{plano} \cdot Vn|}{|Vn|}$

vetor normal = produto vetorial

P = $(\approx 0 + 0 - 5)$

$$\frac{|-5|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = +\frac{5}{\sqrt{2}} \cong 3{,}535$$

Questão 5 – (situação problema com vetores) – valor: **5 pontos**

Michel saiu para fazer algumas coisas no centro da cidade.

2,0

- Sua primeira parada é 6 km ao leste e 3 km ao sul de sua casa.
- Sua segunda parada é 2 km a oeste e 1 km ao sul da primeira parada.
- Sua terceira parada é 7 km a oeste e 5 km ao norte da segunda parada.

Qual é a direção de Michel em relação ao seu ponto de partida assim que ele chega à terceira parada?

$P_1 = (-3, 6)$

$-1 \quad -2$

$P_2 = (-4, 4)$

$+5 \quad -7$

$P_3 = (1, -3)$

direção $\Rightarrow$ vetor diretor

$= (1-(-3), -3-6)$

$= (4, -9)$

magnitude $= \sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{97} = 9,8$

$\theta = \arctan 2(9,8) \Rightarrow 87,0$

REFAZENDO:

$P_0 = (0, 0)$

$P_1 = (6, -3)$

$P_2 = (-2, -1)$

$P_3 = (-7, 5)$

$-9+6 \quad -4+5$

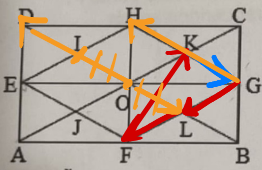
$+ \Rightarrow (-3, 1)$ → 3Km a oeste e 1Km ao norte

Questão 1 – (operações entre vetores no plano e no espaço) – valor: **4 pontos**

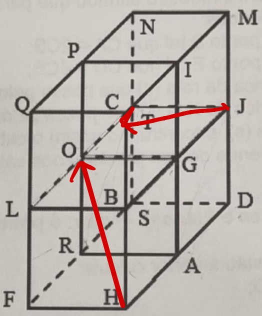
Observe as figuras, faça a letra a) na figura a) e a letra b) na figura b)

4,0

a)



b)



Determine a soma dos vetores indicados:

a) CG + AF + OC – HK + 2GL;

b) AD + HL + OJ + TR + GA;

a) CG + ~~AF~~ + ~~OC~~ – ~~HK~~ + 2GL (HC, FG, + KH, OJ FJ)

GH + FK + ~~2GL~~ GF

OD ~~GH~~ + ~~KG~~ OL

= ID

b) ~~AD~~ + HL + ~~OJ~~ + TR + GA (HA, RD)

HO + DC + ~~GA~~ JD

~~HO~~ + JC

?