ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Методи комп'ютерних обчислень

Індивідуальне завдання №1

Виконала:

Ст. *Шувар Софія*

Група ПМІ-33

Оцінка

Прийняв:
ас. Остапов О.Ю.
проф. Шинкаренко Г.А

2022

Варіант 5

Постановка задачі

Знайти функцію $u = u(x)$, яка на відрізку $[0, 1]$ задовольняє наступне рівняння:

$$-\frac{d}{dx}\left(T(x)\frac{du}{dx}\right) + b(x)\frac{du}{dx} + \sigma(x)u = f(x) \qquad \forall\, x \in (0, 1),$$

$$u(1) = 0, \qquad -T(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=0} = \hat{q}$$

Варіаційне формулювання

1. Вибираю простір: $V := \{\, v(x) \in H^1(0,1):\ v(1) = 0 \,\}$
   Домножую обидві частини рівняння на функцію $v(x) \in V$ і інтегрую обидві частини рівняння на проміжку $(0, 1)$.

$$\int_0^1 \left(-\frac{d}{dx}\left(T(x)\frac{du}{dx}\right) + b(x)\frac{du}{dx} + \sigma(x)u\right) v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \left(-\left(T(x)\frac{d^2u}{d^2x} + \frac{dT}{dx}\frac{du}{dx}\right) + b(x)\frac{du}{dx} + \sigma(x)u\right) v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

2. Обчислюю:

$$\int_0^1 (-T(x)u'')v(x)dx = -T(1)v(1)u'(1) + T(0)v(0)u'(0) + \\ + \int_0^1 u'(x)\big(T(x)v(x)\big)'dx = -\hat{q}v(0) + \int_0^1 u'(x)\big(T(x)v(x)\big)'dx = \\ -\hat{q}v(0) + \int_0^1 u'(x)(T'(x)v(x) + T(x)v'(x))dx$$

3. Підставивши отриманий результат у рівняння (1) отримала:

$$\int_0^1 \left(u'(x)T(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + \sigma(x)u(x)v(x)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)v(x)dx + \hat{q}v(0)$$

4. Таким чином варіаційне формулювання:

   Знайти функцію $u(x) \in V$, таку, що для довільного $v(x) \in V$:
   $a(u, v) = < l, v >$, *де* $V := \{ v(x) \in H^1(0,1)\colon\ v(1) = 0 \}$.
   Білінійна форма*:*
   $a(u,v) = \int_0^1 \left(u'(x)T(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + \sigma(x)u(x)v(x)\right)dx$
   Лінійний функціонал*:*
   $< l, v > = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \hat{q}v(0)$.

Метод розв'язування (МСЕ)

1. Для обчислення кусково-лінійної апроксимації МСЕ U_h використовую сітку скінченних елементів утворену $n+1$ вузлами: $x_0, x_1 \ldots x_n$, *де* $x_0 = 0,\ x_n = 1,\ h = \frac{1}{n}$.

2. Використовую базисні функції Куранта $\varphi_i(x)$ $(i = 0, \ldots n)$*:*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, 1] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, \ \ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{\mathrm{h}}, \ \ x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

3. Функція $U_h = \sum_{i=0}^{n-1} q_i\, \varphi_i(x)$, *де* $\varphi_i(x)$ $(i = 0, \dots n-1)$ - базисні функції Куранта *(* $U_h(1) = 0$ *)*.

4. Коефіцієнти q_i знаходжу з системи за допомогою методу прогонки:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a\left(\varphi_{k,}\varphi_i\right) q_k = < l, \varphi_i >, i = 0, \dots n-1;$$

Тут коефіцієнти $a\left(\varphi_{k,}\varphi_i\right)$ утворюють тридіагональну матрицю A, а $< l, \varphi_i >$ - вектор *l*.

Матрицю та вектор заповнюю за формулами:

$$a_{ii} = \frac{1}{h}\, T\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{h} T\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\, b\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\, b\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{3} \sigma\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{3} \sigma\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$a_{ii+1} = -\ \frac{1}{h} T\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\, b\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{6} \sigma\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$a_{i+1i} = -\ \frac{1}{h} T\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\, b\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{6} \sigma\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$a_{00} = \frac{1}{h}\, T\left(x_{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\, b\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{3} \sigma\left(x_{\frac{1}{2}}\right).$$

$$l_i = \frac{h}{2}\, f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{h}{2}\, f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$l_0 = \frac{h}{2}\, f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + \hat{q}$$

5. Розв'язавши систему, знаходжу функцію апроксимації $U_h = \sum_{i=0}^{n-1} q_i\, \varphi_i(x)$, будую її графік.

6. Обчислюю норми:

$$\|U_h\|_0 = \sqrt{\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}({q_i}^2 + q_i q_{i+1} + {q_{i+1}}^2)}$$

$$\|U_h\|_1 = \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n-1}((q_i - q_{i+1})^2) + {\|U_h\|_0}^2}$$

Аналіз результатів

Продемонструю роботу своєї програми на конкретному прикладі:

$T(x) = -2x - 1$
$b(x) = 2x - 3$
$\sigma(x) = -2$
$f(x) = x^2 + x$
$\hat{q} = -2$

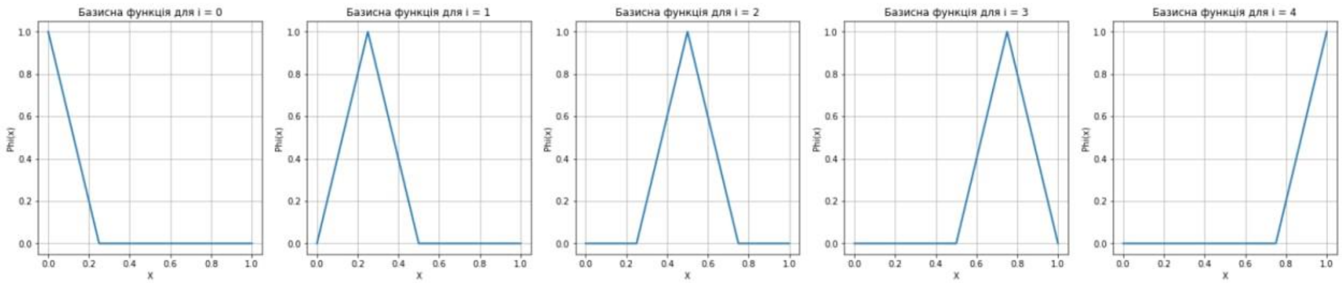
Розв'язавши диференціальне рівняння, отримала:

$$U(x) = \frac{1}{2}(3 - 4x + x^2)$$

Після виконання програми отримала такі результати:

Кількість вузлів (N+1)	**Кількість проміжків (N)**	$\|U_h\|_0$	$\|U_h\|_1$
5	*4*	*0.777460*	*1.675663*
11	*10*	*0.792836*	*1.714797*
31	*30*	*0.795490*	*1.721554*
51	*50*	*0.795703*	*1.722096*
101	*100*	*0.795792*	*1.722325*
501	*500*	*0.795821*	*1.722398*

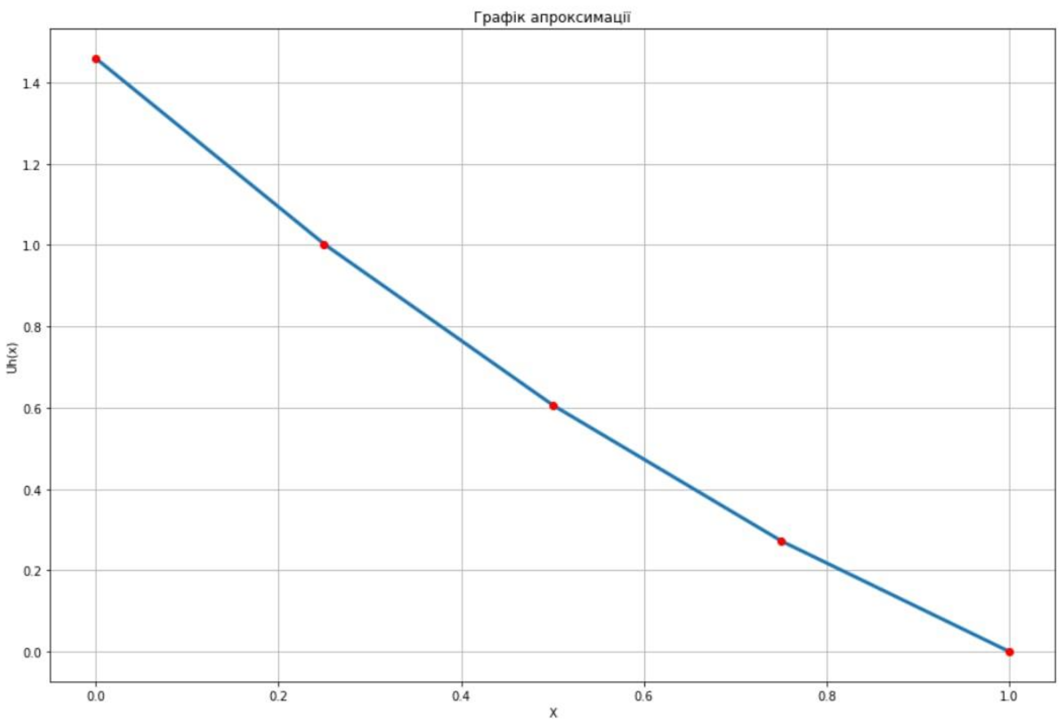
Проміжні результати:
Графік функцій Куранта для $N = 4$:



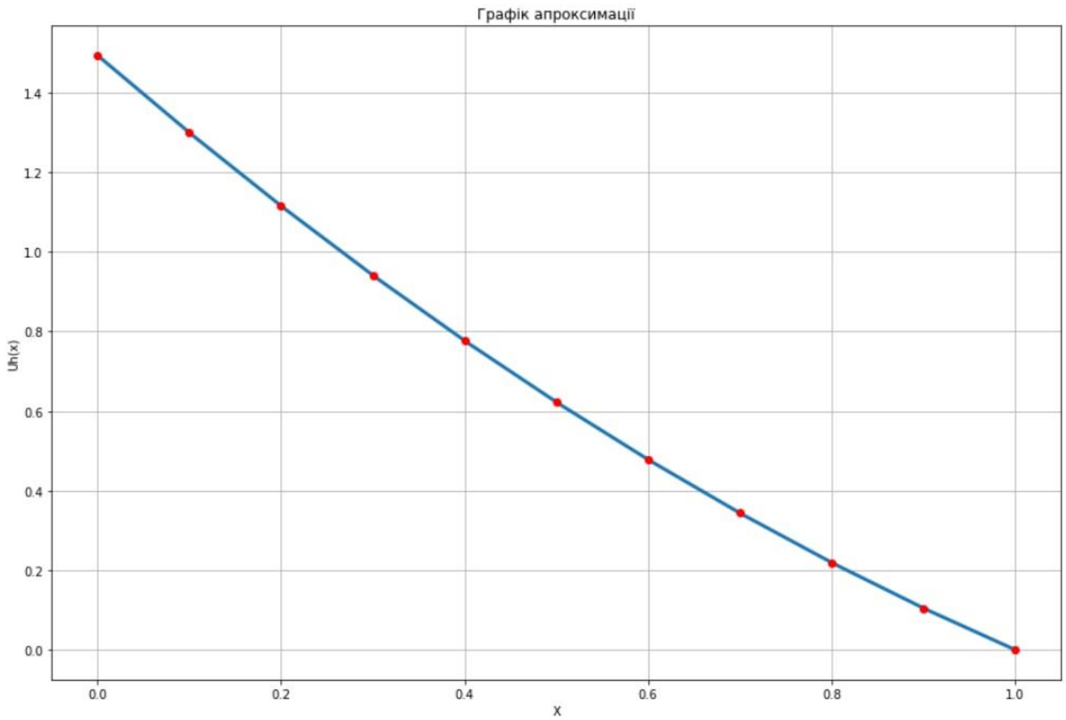
(Інші графіки функцій Куранта доступні у програмній реалізації)

Графіки апроксимацій:

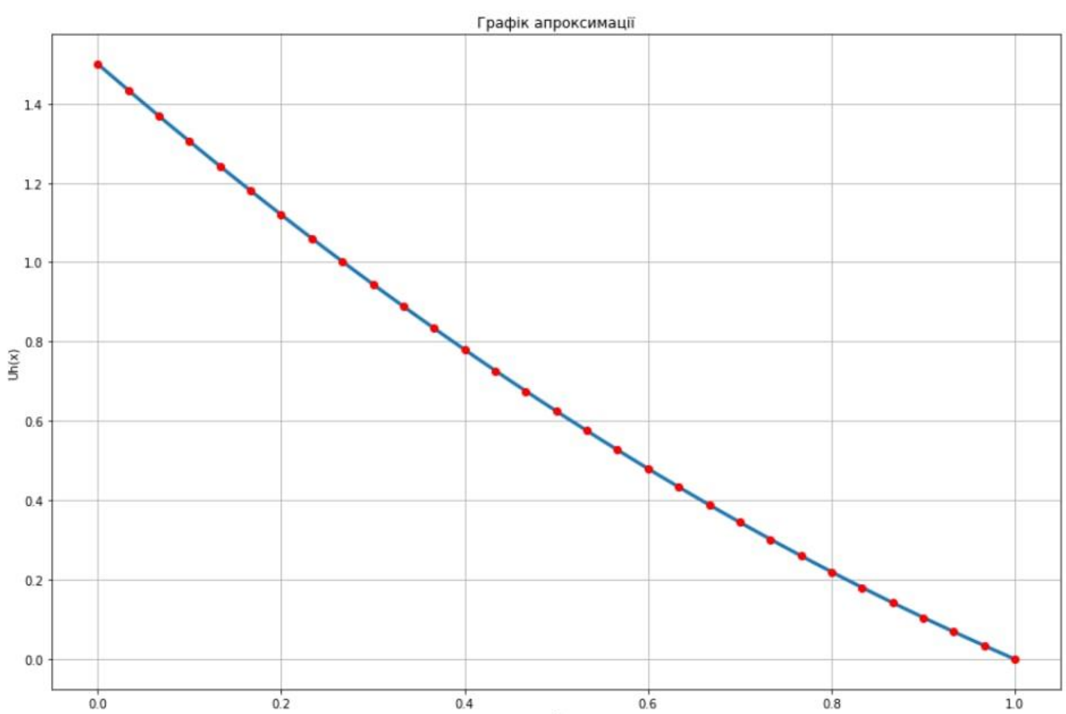
- $N = 4$



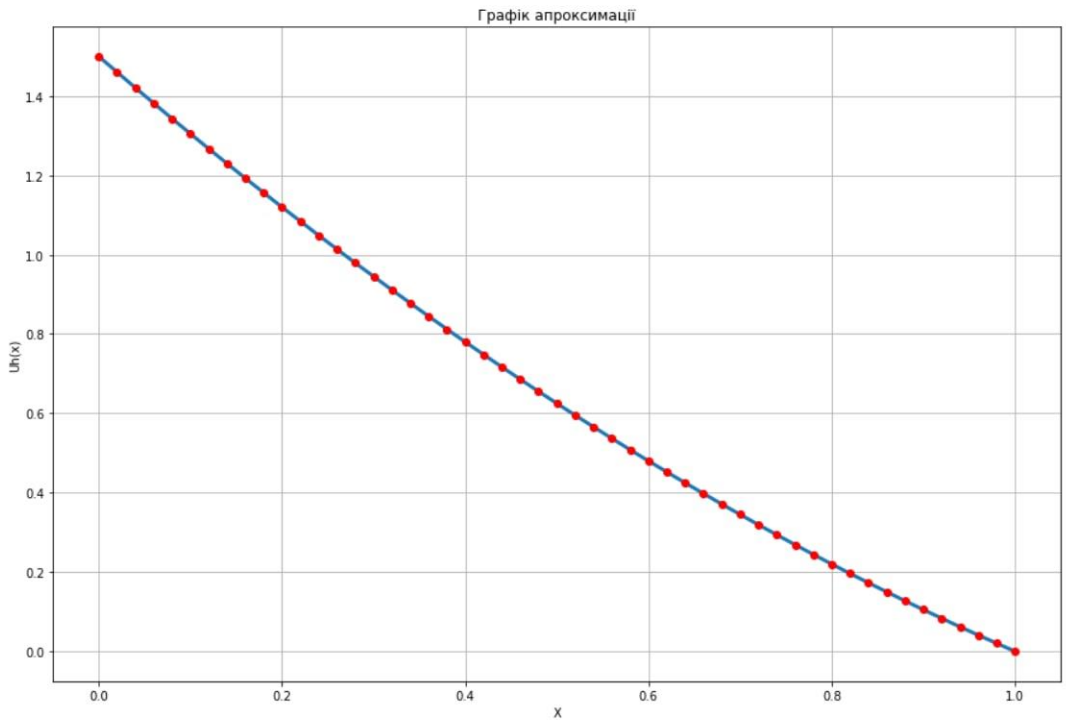
- *N = 10*



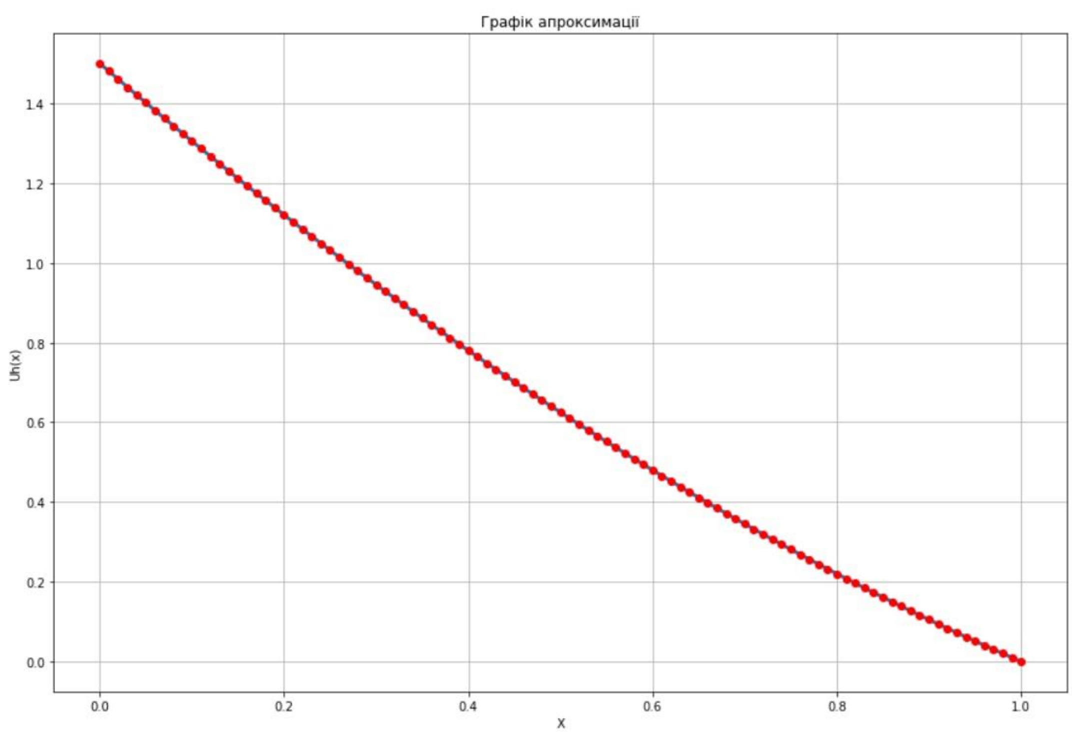
- *N = 30*



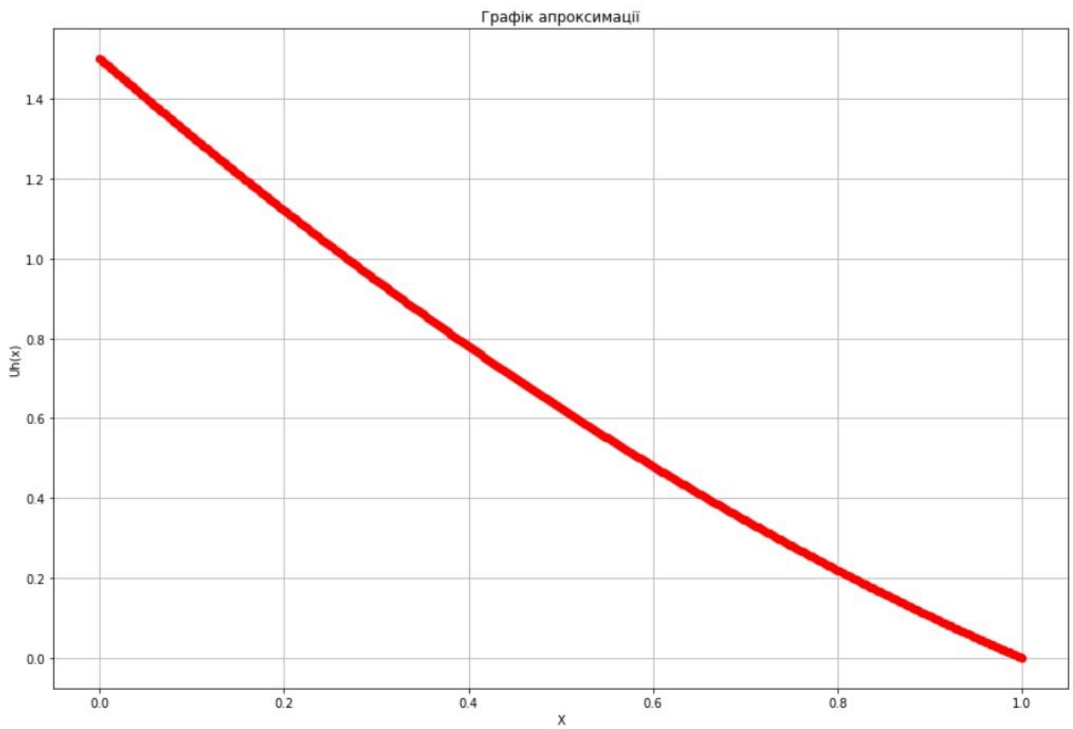
- *N = 50*



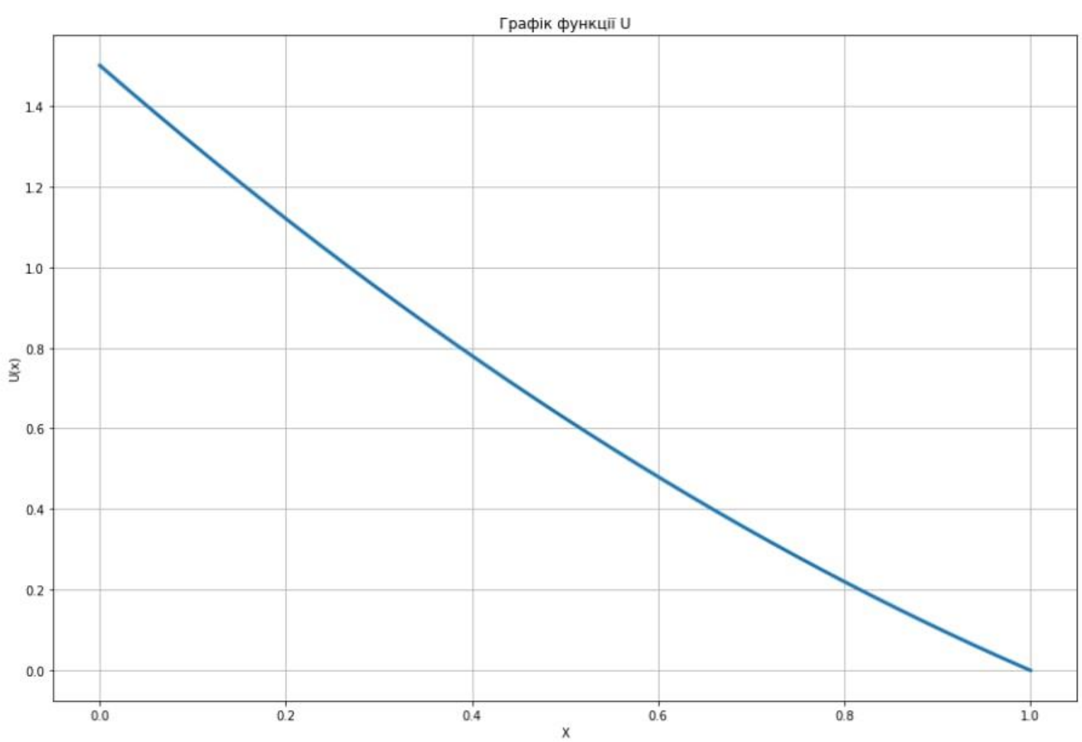
- *N = 100*



- $N = 500$



Графік функції $U(x)$:



Висновок:

Під час виконання даного завдання, я для даної крайової задачі сформулювала варіаційну задачу, здійснила програмну реалізацію методу скінченних елементів знаходження апроксимації розв'язку заданої крайової задачі та обчислення норм $\|U_h\|_0$ та $\|U_h\|_1$ для різного згущення сітки. Для цього я використовувала мову програмування Python, а саме бібліотеки: NumPy, Pandas та MatplotLib. Протестувала програму на конкретних прикладах та переконалась, що МСЕ дає достатньо точну апроксимацію для великої кількості вузлів.