

Метод Зейделя

Підготувала:
Студентка ПМІ-23
Шувар Софія

Мета: реалізувати алгоритм методу Зейделя для розв'язання симетричних СЛАР. Продемонструвати роботу програми на конкретному прикладі.

Завдання:

22)
$$\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 38x_3 = 2,8 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5 \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$$

 $\epsilon = 10^{-3}$

Хід роботи:

1. Розв'язала систему лінійних рівнянь методом Зейделя.
2. Реалізувати алгоритм Зейделя на довільний мові програмування.
3. Продемонструвати результати роботи алгоритму на конкретному прикладі.

Розв'язок системи:

22.
$$\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 38x_3 = 2,8 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5 \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases} \quad \epsilon = 0,001$$

$$x_1 = \frac{2,8 + 11,5x_2 - 38x_3}{3,2}$$

$$x_2 = \frac{-6,5 - 0,8x_1 + 6,4x_3}{1,3}$$

$$x_3 = \frac{4,5 - 2,4x_1 - 7,2x_2}{-1,2}$$

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

I-ітерація:
$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0,875 \\ x_2^{(1)} &= \frac{-6,5 - 0,8 \cdot 0,875}{1,3} = -5,53846 \\ x_3^{(1)} &= \frac{4,5 - 2,4 \cdot 0,875 - 7,2 \cdot (-5,53846)}{-1,2} = -35,23076 \end{aligned}$$

II-ітерація:
$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 399,336 \\ x_2^{(2)} &= -424,189 \\ x_3^{(2)} &= -1750,21 \end{aligned}$$

...

Мног Зейделя не збігається для значення $\epsilon = 0,001$

Реалізація алгоритму:

Для реалізації алгоритму я обрала мову програмування Python. Алгоритм написаний з використанням бібліотеки numpy.

Глобальні змінні

MAX_ITERATIONS – максимальна кількість ітерацій, у випадку перевищення програма завершає роботу.

message – змінна для збереження інформації про ітерації.

```
1 import numpy as np
2
3 MAX_ITERATIONS = 100
4 message = ""
5
```

Функція user_input(вхідні дані):

Функція наповнює матрицю коефіцієнтів A введenu користувачем з клавіатури, масив B вільних членів та значення E.

```
7 def user_input():
8     n = int(input("Enter matrix size: "))
9     print("Enter A matrix:")
10    a = np.array([input().strip().split() for _ in range(n)], float)
11    print("Enter B vector:")
12    b = np.array(input().strip().split(), dtype=float)
13    exp = float(input("Enter exp:"))
14    return n, a, b, exp
15
```

Функція print_equation_system():

Аргументи: n – розмір матриці; A – початкова матриця; b – вектор вільних членів.

Функція виводить матрицю та вектор введений користувачем у вигляді системи лінійних рівнянь.

```
17 def print_equation_system(n, A, b):
18     for i in range(n):
19         print(" + ".join([str(A[i, j]) + "*x" + str(j + 1) for j in range(n)], "=", b[i])
20
```

Функція Seidel (реалізація алгоритму):

Аргументи: Аргументи: n – розмір матриці; A – початкова матриця; B – вектор вільних членів, eps – значення E.

Метод Зейделя: ітераційний метод розв'язку системи лінійних рівнянь.

Метод виражається формулою:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Алгоритм складається з наступних частин:

Рядок 24 – оголошуємо x – масив розв’язків системи;

Рядок 25 – розпочинаємо цикл довжини максимальної кількості ітерацій

Рядок [26-29] – обчислюємо проміжні значення x використовуючи формулу вище.

Рядок 34 – зупинити ітерацію, якщо при кожній наступній ітерації значення x змінюються менше ніж на E.

Рядок [31-32] – заповнюємо глобальну змінну message інформацією про ітерації та різницю.

```

22 def Seidel(A, B, n, eps):
23     global message
24     x = np.zeros(n, dtype=np.float64)
25     for iteration in range(MAX_ITERATIONS):
26         xx = x.copy()
27         for i in range(n):
28             x[i] = -(A[i, :]@x - B[i] - A[i, i] * x[i]) / A[i, i]
29
30         gap = abs(x - xx)
31         message += "Iteration " + str(iteration + 1) + ": " + str(x) + "\n"
32         message += "Difference: " + str(gap) + "\n\n"
33
34         if max(gap) < eps:
35             break
36
37     return x

```

Функція demonstration(вивід усіх отриманих результатів):

```

40 def demonstration():
41     n, A, B, eps = user_input()
42     print("\nEquation system:")
43     print_equation_system(n, A, B)
44     x = Seidel(A, B, n, eps)
45     print("\nIterations:")
46     print(message)
47     print("Solution:")
48     print(x)
49

```

Результати роботи програми на конкретному прикладі:

```
SeidelMethod x
Enter matrix size: 3
Enter A matrix:
3.2 -11.5 38
0.8 1.3 -6.4
2.4 7.2 -1.2
Enter B vector:
2.8 -6.5 4.5
Enter exp:0.001

Equation system:
3.2*x1 + -11.5*x2 + 38.0*x3 = 2.8
0.8*x1 + 1.3*x2 + -6.4*x3 = -6.5
2.4*x1 + 7.2*x2 + -1.2*x3 = 4.5

Iterations:
Iteration 1: [ 0.875 -5.53846154 -35.23076923]
Difference: [ 0.875 5.53846154 35.23076923]

Iteration 2: [ 399.33653846 -424.18934911 -1750.21301775]
Difference: [ 398.46153846 418.65088757 1714.98224852]

Iteration 3: [ 19260.22411243 -20473.87892581 -84326.57533 ]
Difference: [18860.88757396 20049.6895767 82576.36231224]

Iteration 4: [ 927800.95465407 -986105.65064249 -4061035.74454676]
Difference: [ 908540.73054165 965631.77171668 3976709.16921677]

Iteration 5: [ 4.46809832e+07 -4.74887860e+07 -1.95570753e+08]
Difference: [4.37531822e+07 4.65026803e+07 1.91509718e+08]

Iteration 6: [ 2.15173987e+09 -2.28695748e+09 -9.41826515e+09]
Difference: [2.10705889e+09 2.23946870e+09 9.22269440e+09]

Iteration 7: [ 1.03623145e+11 -1.10134933e+11 -4.53563309e+11]
Difference: [1.01471405e+11 1.07847976e+11 4.44145043e+11]

Iteration 8: [ 4.99026687e+12 -5.30386052e+12 -2.18426294e+13]
Difference: [4.88664373e+12 5.19372559e+12 2.13890661e+13]

Iteration 9: [ 2.40320475e+14 -2.55422468e+14 -1.05189386e+15]
Difference: [2.35330208e+14 2.50118607e+14 1.03005123e+15]

Iteration 10: [ 1.15733150e+16 -1.23005944e+16 -5.06560363e+16]
Difference: [1.13329946e+16 1.20451719e+16 4.96050424e+16]

Iteration 11: [ 5.57345857e+17 -5.92370060e+17 -2.43952865e+18]
Difference: [5.45772542e+17 5.80069466e+17 2.38887171e+18]

Iteration 12: [ 2.68405728e+19 -2.85272627e+19 -1.17482431e+20]
Difference: [2.62832269e+19 2.79348927e+19 1.15042902e+20]
```

...

```
SeidelMethod x
Iteration 86: [ 8.83384784e+143 -9.38097618e+143 -3.86661614e+144]
Difference: [8.65041254e+143 9.19401361e+143 3.78632566e+144]

Iteration 87: [ 4.25419033e+145 -4.52152815e+145 -1.86207882e+146]
Difference: [4.16585185e+145 4.42763839e+145 1.82341266e+146]

Iteration 88: [ 2.04872618e+147 -2.17747030e+147 -8.96736945e+147]
Difference: [2.00618428e+147 2.13225502e+147 8.78116157e+147]

Iteration 89: [ 9.86622283e+148 -1.04862267e+149 -4.31849146e+149]
Difference: [9.66135022e+148 1.02684797e+149 4.22881776e+149]

Iteration 90: [ 4.75135983e+150 -5.04994031e+150 -2.07969222e+151]
Difference: [4.65269760e+150 4.94507804e+150 2.03650730e+151]

Iteration 91: [ 2.28815228e+152 -2.43194219e+152 -1.00153486e+153]
Difference: [2.24063868e+152 2.38144278e+152 9.80737934e+152]

Iteration 92: [ 1.10192472e+154 -1.17117003e+154 -4.82317556e+154]
Difference: [1.07904320e+154 1.14685141e+154 4.72302207e+154]

Iteration 93: [ 5.30663146e+155 -5.64010579e+155 -2.32273718e+156]
Difference: [5.19643899e+155 5.52298871e+155 2.27450543e+156]

Iteration 94: [ 2.55555910e+157 -2.71615314e+157 -1.11858006e+158]
Difference: [2.50249279e+157 2.65975208e+157 1.09535269e+158]

Iteration 95: [ 1.23070207e+159 -1.30804069e+159 -5.38683999e+159]
Difference: [1.20514648e+159 1.28087916e+159 5.27498199e+159]

Iteration 96: [ 5.92679537e+160 -6.29924145e+160 -2.59418580e+161]
Difference: [5.80372516e+160 6.16843738e+160 2.54031740e+161]

Iteration 97: [ 2.85421665e+162 -3.03357864e+162 -1.24930385e+163]
Difference: [2.79494869e+162 2.97058622e+162 1.22336199e+163]

Iteration 98: [ 1.37452909e+164 -1.46090595e+164 -6.01637754e+164]
Difference: [1.34598693e+164 1.43057017e+164 5.89144715e+164]

Iteration 99: [ 6.61943525e+165 -7.03540756e+165 -2.89735748e+166]
Difference: [6.48198234e+165 6.88931696e+165 2.83719371e+166]

Iteration 100: [ 3.18777705e+167 -3.38810033e+167 -1.39530479e+168]
Difference: [3.12158270e+167 3.31774626e+167 1.36633121e+168]

Solution:
[ 3.18777705e+167 -3.38810033e+167 -1.39530479e+168]

Process finished with exit code 0
```


Оскільки приклад заданий у завданні не збігається до заданого Е. Тому продемонструю роботу програми, на прикладі запропонованому на практичному занятті.

```
Enter matrix size: 3
Enter A matrix:
10 1 1
2 10 1
2 2 10
Enter B vector:
12 13 14
Enter exp: 0.001

Equation system:
10.0*x1 + 1.0*x2 + 1.0*x3 = 12.0
2.0*x1 + 10.0*x2 + 1.0*x3 = 13.0
2.0*x1 + 2.0*x2 + 10.0*x3 = 14.0

Iterations:
Iteration 1: [1.2    1.06   0.948]
Difference: [1.2    1.06   0.948]

Iteration 2: [0.9992   1.00536  0.999088]
Difference: [0.2008   0.05464  0.051088]

Iteration 3: [0.9995552  1.00018016  1.00005293]
Difference: [0.0003552  0.00517984  0.00096493]

Iteration 4: [0.99997669  0.99999937  1.00000479]
Difference: [4.2149120e-04  1.8079104e-04  4.8140032e-05]

Solution:
[0.99997669  0.99999937  1.00000479]

Process finished with exit code 0
```

Висновок

Виконуючи дану практичну роботу, я навчилась навчилася розв'язувати систему лінійних рівнянь за допомогою ітераційного методу Зейделя та реалізувала алгоритм розв'язання на мові Python з використанням можливостей бібліотеки numpy.