3. 動作減衰量

第七回〜第九回の内容。

伝送量

電流の **伝送量** θ_I を以下で定義する

$$\theta_I = \ln \frac{I_1}{-I_2}$$

電圧の **伝送量** θ_V と **振幅減衰量** $\tilde{\alpha} = \mathrm{Re}[\theta_V]$ および **位相量** $\tilde{\beta} = \mathrm{Im}[\theta_V]$ を以下で定義する

$$\theta_V = \ln \frac{V_1}{V_2} = \ln \left| \frac{V_1}{V_2} \right| + j \arg \frac{V_1}{V_2} = \tilde{\alpha} + j\tilde{\beta}$$

動作減衰量

振幅減衰量 $\tilde{\alpha}$ は以下のようにデシベル表記できる

$$\tilde{\alpha}' = 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad [\mathrm{dB}]$$

ただし底の変換公式より変換式は以下のようになる

$$\tilde{\alpha}' = (20 \log_{10} e)\tilde{\alpha} \approx 8.6859\tilde{\alpha} \quad [\mathrm{dB}]$$

ここで $V_1 \le E/2$ [要出典] であるから、以下の α を **動作減衰量** という

$$\alpha = 20 \log_{10} \left| \frac{E/2}{V_2} \right| \quad [\mathrm{dB}]$$

また **電流比** は

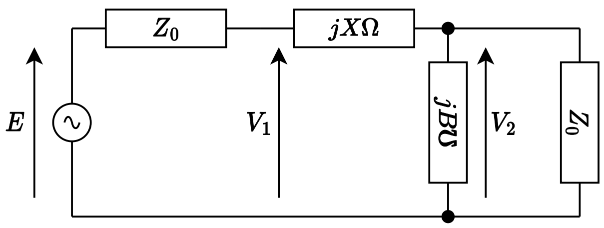
$$20 \log_{10} \left| \frac{I_1}{-I_2} \right| \quad [\mathrm{dB}]$$

電力の損失比 は

$$20 \log_{10} \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} \quad [\mathrm{dB}]$$

K行列における動作減衰量

次の回路を考える。



テブナンの等価回路を用いると以下のように書ける。

$$V_2 = \frac{Z_L V_{open}}{Z_L + Z_{out}} = \frac{Z_L \cdot \dfrac{E}{CZ_G + A}}{Z_L + \dfrac{DZ_G + B}{CZ_G + A}} = \frac{Z_L E}{(CZ_G + A)Z_L + (DZ_G + B)}$$

ここで

$$Z_G = Z_L = Z_0, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 - XB & jX \\ jB & 1 \end{pmatrix}$$

を代入して

$$\frac{E}{2V_2} = \frac{(jBZ_0 + 1 - XB)Z_0 + Z_0 + jX}{2Z_0} = \left(1 - \frac{XB}{2}\right) + j\left(\frac{X}{2Z_0} + \frac{BZ_0}{2}\right)$$

となるから

$$\left|\frac{E}{2V_2}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{XB}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2Z_0} + \frac{BZ_0}{2}\right)^2}$$

これより動作減衰量 $\alpha_{X,B}$ は次のようになる。

$$\alpha_{X,B} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{XB}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2Z_0} + \frac{BZ_0}{2}\right)^2}\,[\mathrm{dB}]$$

とくに $B = 0\mho$ の回路 N_X における動作減衰量 α_X は

$$\alpha_X = 20\log_{10}\sqrt{1 + \left(\frac{X}{2Z_0}\right)^2}\,[\mathrm{dB}]$$

あるいは $X = 0\Omega$ の回路 N_B における動作減衰量 α_B は

$$\alpha_B = 20\log_{10}\sqrt{1 + \left(\frac{BZ_0}{2}\right)^2}\,[\mathrm{dB}]$$

Filter

フィルター (Filter) とは、ある領域の角周波数を遮断するような、つまり **周波数により動作減衰量を調整する** ような 2 ポート素子のことである。

ここで遮断角周波数 ω_c における動作減衰量 α_c は以下の通りとなる。

$$\alpha_c = 20\log_{10}\sqrt{2}\mathrm{dB} = 10\log_{10}2\mathrm{dB} \approx 3.0103\mathrm{dB}$$

Low Pass Filter (LPF)

低周域 $[0, \omega_c]$ の動作減衰量を小さくする。

	$0 \leq \omega \leq \omega_c$	$\omega_c < \omega$
動作減衰量 α_l	$\alpha_l \leq \alpha_c$	$\alpha_l > \alpha_c$
領域	通過域	減衰域

$$\alpha_l = 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad [\mathrm{dB}]$$

LPF の N_X による実装

α_X と比較すれば $\dfrac{X}{2Z_0} = \pm\dfrac{\omega}{\omega_c}$ となるため、仮に $jX \equiv j\omega L$ とすれば、遮断角周波数は

$$\omega_c = 2\cdot\frac{Z_0}{L}$$

LPF の N_B による実装

α_B と比較すれば $\dfrac{BZ_0}{2} = \pm\dfrac{\omega}{\omega_c}$ となるため、仮に $jB \equiv j\omega C$ とすれば、遮断角周波数は

$$\omega_c = 2\cdot\frac{1}{CZ_0}$$

High Pass Filter (HPF)

高周域 $[\omega_c, \infty)$ の動作減衰量を小さくする。

	$0 \le \omega < \omega_c$	$\omega_c \le \omega$
動作減衰量 α_h	$\alpha_h > \alpha_c$	$\alpha_h \le \alpha_c$
領域	減衰域	通過域

$$\alpha_h = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad [\mathrm{dB}]$$

HPF の N_X による実装

α_X と比較すれば $\dfrac{X}{2Z_0} = \pm\dfrac{\omega_c}{\omega}$ となるため、仮に $jX \equiv (j\omega C)^{-1}$ とすれば、遮断角周波数は

$$\omega_h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{CZ_0}$$

HPF の N_B による実装

α_B と比較すれば $\dfrac{BZ_0}{2} = \pm\dfrac{\omega_c}{\omega}$ となるため、仮に $jB \equiv (j\omega L)^{-1}$ とすれば、遮断角周波数は

$$\omega_h = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_0}{L}$$

LPF to HPF

α_l と α_h を比較すれば $\dfrac{\omega}{\omega_c} = \pm\dfrac{\omega_c'}{\omega'}$ となるため、負号を採用して両辺に $j\omega_c$ をかけて

$$j\omega \xrightarrow{\text{LPF}\to\text{HPF}} \frac{\omega_c \omega_c'}{j\omega}$$

Band Pass Filter (BPF)

通過帯域 $[\omega_1, \omega_2]$ の動作減衰量を小さくする。

	$0 \le \omega < \omega_1$	$\omega_1 \le \omega \le \omega_2$	$\omega_2 < \omega$
動作減衰量 α_b	$\alpha_b > \alpha_c$	$\alpha_b \le \alpha_c$	$\alpha_h > \alpha_c$
領域	減衰域	通過帯域	減衰域

中心周波数 $\omega_0 \equiv \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ と比帯域 $w \equiv \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ を用いて

$$\alpha_b = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{w^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \quad [\mathrm{dB}]$$

BPF の N_X による実装

α_X と比較すれば $\dfrac{X}{2Z_0} = \pm\dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ となるため、仮に $jX \equiv j\omega L + (j\omega C)^{-1}$ とすれば

$$\frac{L}{2Z_0} = \frac{1}{w\omega_0}, \qquad \frac{1}{2CZ_0} = \frac{\omega_0}{w}$$

であるから、中心周波数と比帯域は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad w = 2Z_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

BPF の N_B による実装

α_B と比較すれば $\dfrac{BZ_0}{2} = \pm\dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ となるため、仮に $jB \equiv (j\omega L)^{-1} + j\omega C$ とすれば

$$\frac{CZ_0}{2} = \frac{1}{w\omega_0}, \qquad \frac{Z_0}{2L} = \frac{\omega_0}{w}$$

であるから、中心周波数と比帯域は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad w = \frac{2}{Z_0}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

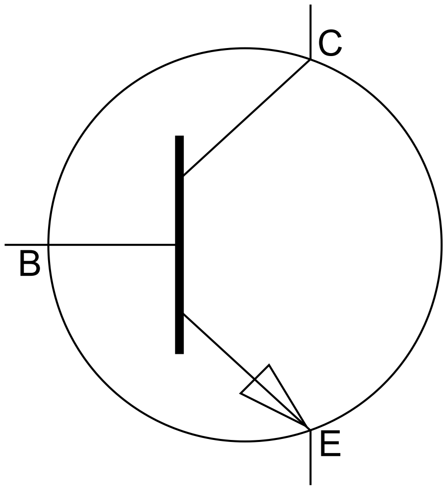
LPF to BPF

α_l と α_b を比較すれば $\dfrac{\omega}{\omega_c} = \pm\dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ となるため、正号を採用して両辺に $j\omega_c$ をかけて

$$j\omega \xrightarrow{\text{LPF}\to\text{BPF}} \frac{\omega_c}{w}\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega}\right)$$

能動ポート

Bipolar Junction Transistor (BJT)



Base、Emitter、Collector の三端子素子であり、それぞれに相当する抵抗 r_B, r_E, r_C 等価回路を設計できる。

BJT の継続行列はエミッタ効率 $\alpha \lesssim 1$ および電流増幅率 $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \gg 1$ により以下で表せる。

$$H = \begin{pmatrix} r_B + \dfrac{r_E r_C (1-\alpha)}{r_E + r_C(1-\alpha)}(1+\beta) & \dfrac{r_E}{r_C(1-\alpha)+r_E} \\ \dfrac{\alpha r_C - r_E}{r_C(1-\alpha)+r_E} & \dfrac{1}{r_C(1-\alpha)+r_E} \end{pmatrix}$$

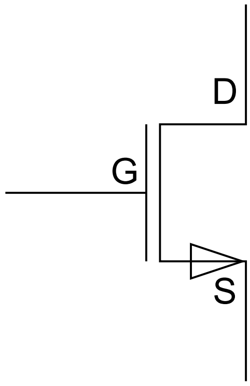
この BJT は以下を満たす。

- **非相反条件** $h_r + h_f \neq 0$
- **高利得性** $h_f \gg 1$
- **単方向性** $h_r = 0$

とくに $r_C(1-\alpha) \gg r_E, r_B$ 条件下では

$$H = \begin{pmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_B + r_E(1+\beta) & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Field Effective Transistor (FET)



Gate、Source、Drain の三端子素子であり、Gate C_1 Drain-Source C_2 Gate-Drain C_3 の各容量と、相互インダクタンス g_m および出力抵抗 R によりそのアドミタンス行列は以下で示される。

$$Y = \begin{pmatrix} j\omega(C_1 + C_3) & -j\omega C_3 \\ g_m - j\omega C_3 & \dfrac{1}{R} + j\omega(C_2 + C_3) \end{pmatrix}$$

単方向性 $C_3 = 0$ を考慮すれば

$$Y = \begin{pmatrix} j\omega C_1 & 0 \\ g_m & \dfrac{1}{R} + j\omega C_2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} (j\omega C_1)^{-1} & 0 \\ g_m (j\omega C_1)^{-1} & \dfrac{1}{R} + j\omega C_2 \end{pmatrix}$$