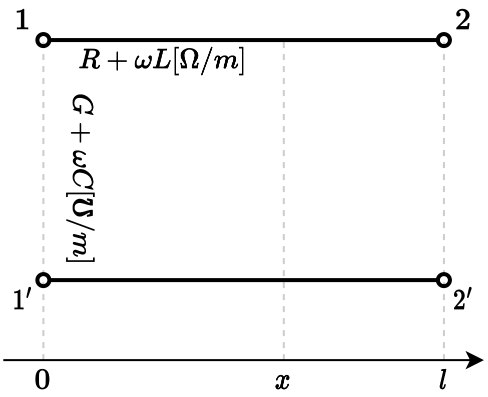
分布定数回路

線路の一次定数



単位長当たりの直列インピーダンス $Z=R+j\omega L$ および並列アドミタンス $Y=G+j\omega C$ を持つケーブルを考えると、電信方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL+RC)\dfrac{\partial v}{\partial t} + GRv \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL+RC)\dfrac{\partial i}{\partial t} + GRv \end{cases}$$

において、仮定より

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx} + ZI = 0 \\ \dfrac{dI}{dx} + YV = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} = ZYV \\ \dfrac{d^2I}{dx^2} = ZYI \end{cases}$$

が得られるので、 **伝搬定数** γ を

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{R+j\omega L}\sqrt{G+j\omega C}$$

と定義すれば一般解 $V(x)$ は

$$V(x) = A\exp(-\gamma x) + B\exp(\gamma x) = V_i(x) + V_r(x)$$

とおける。また **特性インピーダンス** Z_0 を

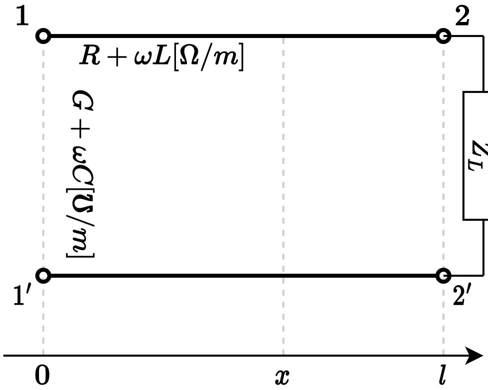
$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \frac{\sqrt{R+j\omega L}}{\sqrt{G+j\omega C}}$$

と定義すれば一般解 $I(x)$ は

$$Z_0 I(x) = A\exp(-\gamma x) - B\exp(\gamma x) = Z_0 I_i(x) - Z_0 I_r(x)$$

とおける。

2 ポートとしての分布定数回路



$$\begin{cases} a(x) \triangleq \sqrt{V_i(x)I_i(x)} = Z_0^{-1/2}A\exp(-\gamma x) = \dfrac{Z_0^{-1/2}V(x)+Z_0^{1/2}I(x)}{2} \\ b(x) \triangleq \sqrt{V_r(x)I_r(x)} = Z_0^{-1/2}B\exp(\gamma x) = \dfrac{Z_0^{-1/2}V(x)-Z_0^{1/2}I(x)}{2} \end{cases}$$

とおけば、ある地点 $x=x$ におけるインピーダンス $Z(x)$ は

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{Z_0^{1/2}a(x)+Z_0^{1/2}b(x)}{Z_0^{-1}\left[Z_0^{1/2}a(x)-Z_0^{1/2}b(x)\right]} = Z_0\frac{a(x)+b(x)}{a(x)-b(x)}$$

と表せる。またこれらは $x=l$ における $V(l), I(l)$ を用いて

$$\begin{cases} a(x) = Z_0^{-1/2}A\exp\left[-\gamma l+\gamma(l-x)\right] = \dfrac{Z_0^{-1/2}V(l)+Z_0^{1/2}I(l)}{2}\exp\gamma(l-x) \\ b(x) = Z_0^{-1/2}B\exp\left[\gamma l-\gamma(l-x)\right] = \dfrac{Z_0^{-1/2}V(l)-Z_0^{1/2}I(l)}{2}\exp\left[-\gamma(l-x)\right] \end{cases}$$

と表せるので

$$\begin{cases} a(x)+b(x) = Z_0^{-1/2}Z_L I(l)\cosh\gamma(l-x) + Z_0^{1/2}I(l)\sinh\gamma(l-x) \\ a(x)-b(x) = Z_0^{-1/2}Z_L I(l)\sinh\gamma(l-x) + Z_0^{1/2}I(l)\cosh\gamma(l-x) \end{cases}$$

に注意して

$$Z(x) = Z_0\frac{Z_L\cosh\gamma(l-x)+Z_0\sinh\gamma(l-x)}{Z_L\sinh\gamma(l-x)+Z_0\cosh\gamma(l-x)}$$

と導けて、とくにインピーダンス整合 $Z_0=Z_L$ のとき

$$b(x) = \frac{[a(x)+b(x)]-[a(x)-b(x)]}{2} \equiv 0, \quad Z(x) = Z_0\frac{Z_0\exp\gamma(l-x)}{Z_0\exp\gamma(l-x)} \equiv Z_0$$

がいえる。

K 行列による表現

$$
\begin{cases}
a(0)+b(0)=Z_0^{-1/2}V(0)=Z_0^{-1/2}V(l)\cosh(\gamma l)+Z_0^{1/2}I(l)\sinh(\gamma l)\\
a(0)-b(0)=Z_0^{1/2}I(0)=Z_0^{-1/2}V(l)\sinh(\gamma l)+Z_0^{1/2}I(l)\cosh(\gamma l)
\end{cases}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix}V(0)\\ I(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh(\gamma l) & Z_0\sinh(\gamma l)\\ Z_0^{-1}\sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V(l)\\ I(l)\end{pmatrix}
$$

S 行列

S	$a_1(Z_2=Z_0)$	$a_2(Z_1=Z_0)$
b_1	$s_{11}=\left.\frac{b_1}{a_1}\right\|_{Z_2=Z_0}$	$s_{12}=\left.\frac{b_1}{a_2}\right\|_{Z_1=Z_0}$
b_2	$s_{21}=\left.\frac{b_2}{a_1}\right\|_{Z_2=Z_0}$	$s_{22}=\left.\frac{b_2}{a_2}\right\|_{Z_1=Z_0}$

S 行列による表現

$$
K=\begin{pmatrix}\tilde{A} & Z_0\tilde{B}\\ Z_0^{-1}\tilde{C} & \tilde{D}\end{pmatrix}
$$

とおけば

$$
S=\frac{1}{\tilde{A}+\tilde{B}+\tilde{C}+\tilde{D}}\begin{pmatrix}\tilde{A}+\tilde{B}-\tilde{C}-\tilde{D} & 2(\tilde{A}\tilde{D}-\tilde{B}\tilde{C})\\ 2 & -\tilde{A}+\tilde{B}-\tilde{C}+\tilde{D}\end{pmatrix}
$$