1. 行列

第一回〜第三回、第十三回の内容。

行列を求める

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

これを図式化すれば以下のようになる。

	$R_1(R_2=0)$	$R_2(R_1=0)$
L_1	$m_{11} = \left.\frac{L_1}{R_1}\right\vert_{R_2=0}$	$m_{12} = \left.\frac{L_1}{R_2}\right\vert_{R_1=0}$
L_2	$m_{21} = \left.\frac{L_2}{R_1}\right\vert_{R_2=0}$	$m_{22} = \left.\frac{L_2}{R_2}\right\vert_{R_1=0}$

電源の除去

$1-1'$ および $2-2'$ には仮想的に電源 V_1 および V_2 が接続されていると考える。

ここで行列の各成分を求めるためには、仮想的な電源を除去しなけらばならない。

その電源の除去について以下の二通りがある。

- **短絡** : 電源部分を導線に置換する。つまり $V=Z=0$ とする。
- **解放** : 電源部分を断線する。つまり $I=Y=0$ とする。

こうして得られた行列の要素 m_{ij} それぞれについて、以下の名前を与える。

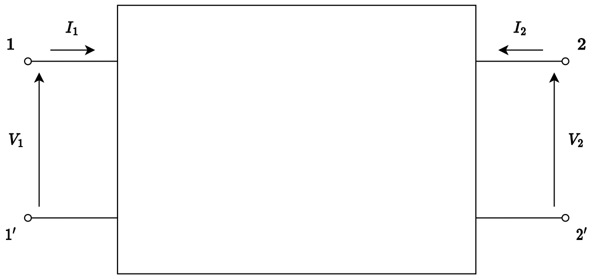
除去端	除去方法	方向	抵抗
入力端（$1-1'$）	短絡（$V=0$）	駆動点（$1\to 1'$）	インピーダンス（$Z=V/I$）
出力端（$2-2'$）	開放（$I=0$）	伝達（$1\to 2$）	アドミタンス（$Y=I/V$）

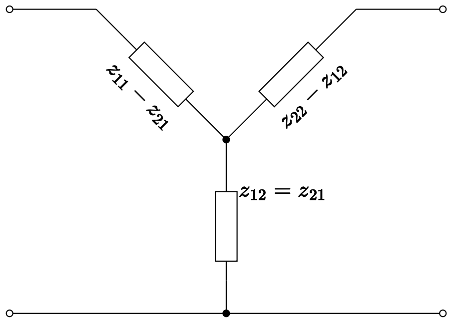
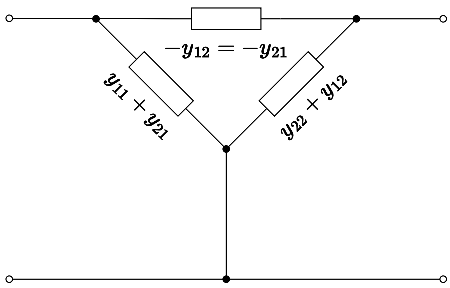
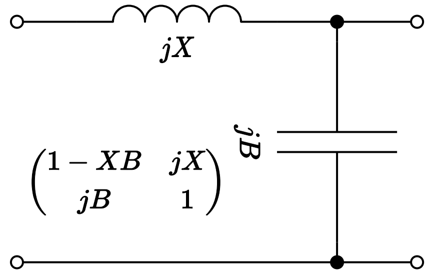
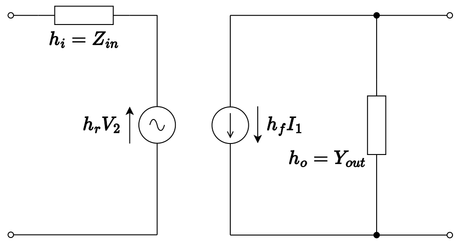
除去端	除去方法	要素	抵抗
入力端（$1-1'$）	短絡（$V=0$）	電圧（V/V）	増幅率（$2/1$）
出力端（$2-2'$）	開放（$I=0$）	電流（I/I）	帰還率（$1/2$）

とくに「出力端短絡駆動点」抵抗を「入力」抵抗、「入力端開放駆動点」抵抗を「出力」抵抗という。

各行列の意味

相反条件 とは $V_1 I_1 = V_2 I_2$ を満足するための条件のことである。



行列	定義	Z 行列との変換	相反条件	等価回路
Z	$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$		$z_{12} = z_{21}$	
Y	$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$\lvert Z\rvert^{-1} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$	$y_{12} = y_{21}$	
K	$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$	$z_{21}^{-1} \begin{pmatrix} z_{11} & \lvert Z\rvert \\ 1 & z_{22} \end{pmatrix}$	$\lvert K\rvert = 1$	
H	$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$z_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \lvert Z\rvert & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$h_{12} = -h_{21}$	

行列の変換

Z 行列

Z	$I_1(I_2=0)$	$I_2(I_1=0)$
V_1	$z_{11}=\left.\dfrac{V_1}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$z_{12}=\left.\dfrac{V_1}{I_2}\right\|_{I_1=0}$
V_2	$z_{21}=\left.\dfrac{V_2}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$z_{22}=\left.\dfrac{V_2}{I_2}\right\|_{I_1=0}$

Y 行列

$Y=Z^{-1}$ より

Y	$V_1(V_2=0)$	$V_2(V_1=0)$
I_1	$y_{11}=\left.\dfrac{I_1}{V_1}\right\|_{V_2=0}=\dfrac{z_{22}}{\|Z\|}$	$y_{12}=\left.\dfrac{I_1}{V_2}\right\|_{V_1=0}=-\dfrac{z_{12}}{\|Z\|}$
I_2	$y_{21}=\left.\dfrac{I_2}{V_1}\right\|_{V_2=0}=-\dfrac{z_{21}}{\|Z\|}$	$y_{22}=\left.\dfrac{I_2}{V_2}\right\|_{V_1=0}=\dfrac{z_{11}}{\|Z\|}$

K 行列

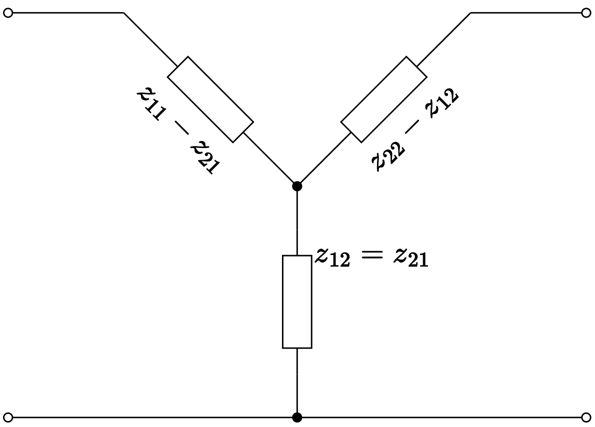
K	$V_2(I_2=0)$ [Z の左側]	$-I_2(V_2=0)$ [Y の左側]
V_1	$A=\left.\dfrac{V_1}{V_2}\right\|_{I_2=0}=\left.\dfrac{V_1}{I_1}\dfrac{I_1}{V_2}\right\|_{I_2=0}=\dfrac{z_{11}}{z_{21}}$	$B=\left.\dfrac{V_1}{-I_2}\right\|_{V_2=0}=-\dfrac{1}{y_{21}}=\dfrac{\|Z\|}{z_{12}}$
I_1	$C=\left.\dfrac{I_1}{V_2}\right\|_{I_2=0}=\dfrac{1}{z_{21}}$	$D=\left.\dfrac{I_1}{-I_2}\right\|_{V_2=0}=-\left.\dfrac{I_1}{V_1}\dfrac{V_1}{I_2}\right\|_{V_2=0}=-\dfrac{y_{11}}{y_{21}}=\dfrac{z_{22}}{z_{21}}$

H 行列

H	$I_1(V_2=0)$ [Y の左側]	$V_2(I_1=0)$ [Z の右側]
V_1	$h_i=\left.\dfrac{V_1}{I_1}\right\|_{V_2=0}=\dfrac{1}{y_{11}}=\dfrac{\|Z\|}{z_{22}}$	$h_r=\left.\dfrac{V_1}{V_2}\right\|_{I_1=0}=\left.\dfrac{V_1}{I_2}\dfrac{I_2}{V_2}\right\|_{I_1=0}=\dfrac{z_{12}}{z_{22}}$
I_2	$h_f=\left.\dfrac{I_2}{I_1}\right\|_{V_2=0}=\left.\dfrac{I_2}{V_1}\dfrac{V_1}{I_1}\right\|_{V_2=0}=\dfrac{y_{21}}{y_{11}}=-\dfrac{z_{21}}{z_{22}}$	$h_o=\left.\dfrac{I_2}{V_2}\right\|_{I_1=0}=\dfrac{1}{z_{22}}$

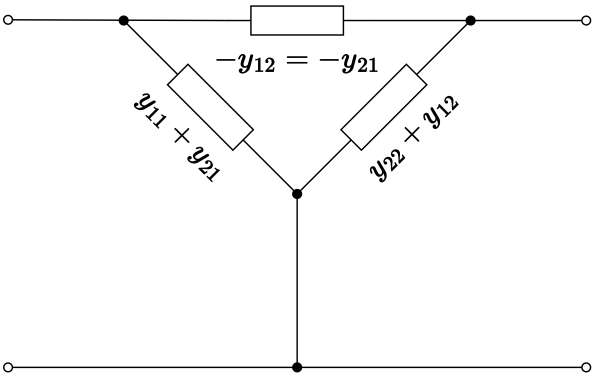
等価回路の確認

Z 行列の等価回路



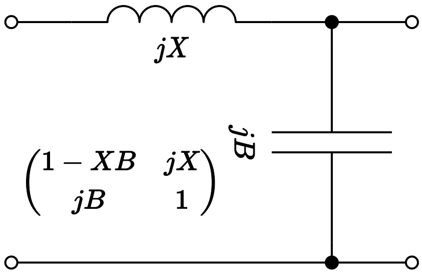
Z	$I_1(I_2=0)$	$I_2(I_1=0)$
V_1	$z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right\|_{I_2=0}=(z_{11}-z_{21})+z_{21}$	$z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right\|_{I_1=0}$
V_2	$z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right\|_{I_1=0}=(z_{22}-z_{12})+z_{12}$

Y 行列の等価回路



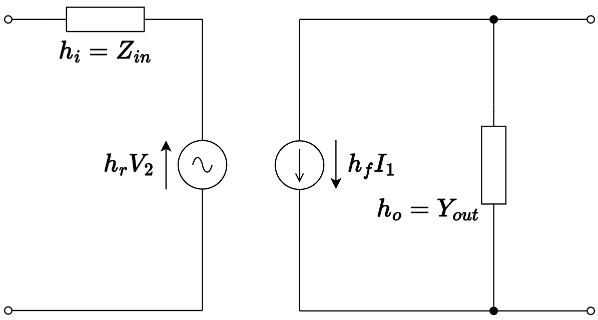
Y	$V_1(V_2=0)$	$V_2(V_1=0)$
I_1	$y_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right\|_{V_2=0}=(y_{11}+y_{21})-y_{21}$	$y_{12}=\left.\frac{I_1}{V_2}\right\|_{V_1=0}$
I_2	$y_{21}=\left.\frac{I_2}{V_1}\right\|_{V_2=0}$	$y_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right\|_{V_1=0}=(y_{22}+y_{12})-y_{12}$

K 行列の等価回路



K	$V_2(I_2=0)$	$-I_2(V_2=0)$
V_1	$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right\vert_{I_2=0} = \frac{jX - jB^{-1}}{-jB^{-1}} = 1 - XB$	$B^{\dagger} = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right\vert_{V_2=0} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\vert_{V_2=0} = jX$
I_1	$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right\vert_{I_2=0} = jB$	$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right\vert_{V_2=0} = \left.\frac{I_1}{I_1}\right\vert_{V_2=0} = 1$

H 行列の等価回路



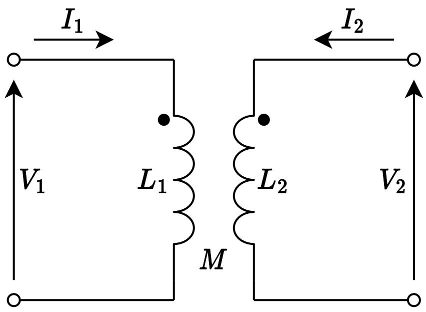
H	$I_1(V_2=0)$	$V_2(I_1=0)$
V_1	$h_i = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\vert_{V_2=0} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\vert_{h_r V_2=0}$	$h_r = \left.\frac{V_1}{V_2}\right\vert_{I_1=0} = \left.\frac{h_r V_2}{V_2}\right\vert_{I_1=0}$
I_2	$h_f = \left.\frac{I_2}{I_1}\right\vert_{V_2=0} = \left.\frac{h_f I_1}{I_1}\right\vert_{V_2=0}$	$h_o = \left.\frac{I_2}{V_2}\right\vert_{I_1=0} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right\vert_{h_f I_1=0}$

H 行列等価回路の $1-1'$ 側は **テブナンの等価回路** 、 $2-2'$ 側は **ノートンの等価回路** である。

トランス

相互インダクタンス M の 2 コイル $L_1 = vn_1^2$, $L_2 = vn_2^2$ よりなる **トランス** を考える。

ただしコイルの向きが違う場合は相互インダクタンスは $-M$ となることに注意。



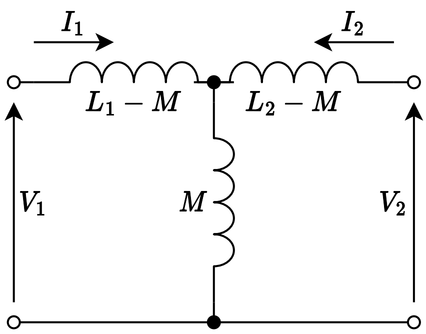
等価回路

$$
\begin{cases}
v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\
v_2(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + M \dfrac{di_1(t)}{dt}
\end{cases}
$$

これを複素数表示すれば

$$
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}
$$

と書けることより Z 行列が求まるので、その等価回路を考えれば、以下のようになる。



密結合変成器

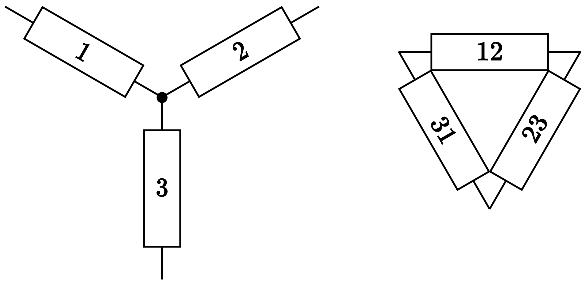
相互インダクタンスが $M = \sqrt{L_1 L_2} = v(n_1 n_2)$ である、磁束漏れのない変成器を **密結合変成器** という。

理想変成器

以下を満たす、電力を消費/蓄積しない変成器を **理想変成器** という。

$$
\frac{V_2}{V_1} = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \mathrm{sgn} M
$$

$Y-\Delta$ 変換



Y 型回路

Y 型回路は Z 行列の等価回路であるため

$$\begin{cases} Z_1 = z_{11} - z_{21} \\ Z_2 = z_{22} - z_{12} \\ Z_3 = z_{12} = z_{21} \end{cases} \iff Z_Y = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

その行列式は

$$|Z_Y| = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1$$

ゆえに $Y = Z^{-1}$ より

$$Y_Y = \frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{pmatrix}$$

Δ 型回路

Δ 型回路は Y 行列の等価回路であるため

$$\begin{cases} Y_{12} = -y_{12} = -y_{21} \\ Y_{23} = y_{22} - y_{12} \\ Y_{31} = y_{11} - y_{21} \end{cases} \iff Y_\Delta = \begin{pmatrix} Y_{31} + Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{23} + Y_{12} \end{pmatrix}$$

その行列式は

$$|Y_\Delta| = (Y_{31} + Y_{12})(Y_{23} + Y_{12}) - (-Y_{12})^2 = Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{31} Y_{12}$$

ゆえに $Z = Y^{-1}$ より

$$Z_\Delta = \frac{1}{Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{31} Y_{12}} \begin{pmatrix} Y_{23} + Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{31} + Y_{12} \end{pmatrix}$$

ただし以下に注意せよ。

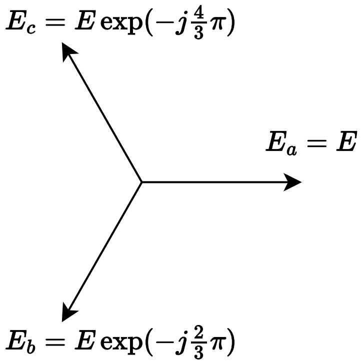
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad \det(\lambda A)^{-1} = (\lambda^n \det A)^{-1}$$

$Y-\Delta$ 変換表

$Z_Y - Y_\Delta$ 変換から以下が導出できる

	$Y \to \Delta$	$\Delta \to Y$
$Z \to Z$	$Z_{ij} = \dfrac{Z_iZ_j + Z_jZ_k + Z_kZ_i}{Z_k}$	$Y_k = \dfrac{Z_iZ_j}{Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{ki}}$
$Z \to Y$	$Y_{ij} = \dfrac{Z_k}{Z_iZ_j + Z_jZ_k + Z_kZ_i}$	$Y_k = \dfrac{Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{ki}}{Z_iZ_j}$
$Y \to Z$	$Z_{ij} = \dfrac{Y_i + Y_j + Y_k}{Y_iY_j}$	$Z_k = \dfrac{Y_{ij}}{Y_{ij}Y_{jk} + Y_{jk}Y_{ki} + Y_{ki}Y_{ij}}$
$Y \to Y$	$Z_{ij} = \dfrac{Y_iY_j}{Y_i + Y_j + Y_k}$	$Y_k = \dfrac{Y_{ij}Y_{jk} + Y_{jk}Y_{ki} + Y_{ki}Y_{ij}}{Y_{ij}}$

三相交流



三相交流とは、以下の三つの電源により電力を供給する方式である。

$$E_a = E, \quad E_b = Ee^{-j\frac{2}{3}\pi}, \quad E_c = Ee^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

この実現方法には Y 型結線と Δ 型結線の二つがある。