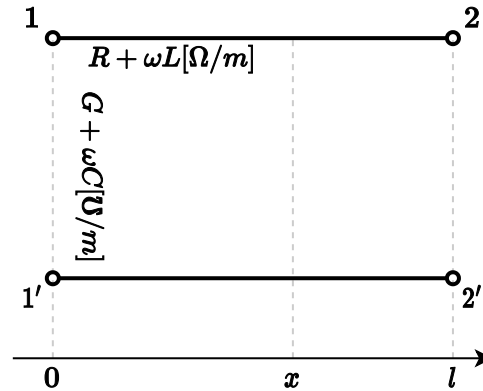


4. 分布定数回路

第十回の内容。



単位長当たりの直列インピーダンス $Z = R + j\omega L$ および並列アドミタンス $Y = G + j\omega C$ を持つケーブルを考えると、電信方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL + RC) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL + RC) \frac{\partial i}{\partial t} + GRv \end{cases}$$

において、仮定より

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} + ZI = 0 \\ \frac{dI}{dx} + YV = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 V}{dx^2} = ZYV \\ \frac{d^2 I}{dx^2} = ZYI \end{cases}$$

が得られるので、伝搬定数 γ を

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{R + j\omega L} \sqrt{G + j\omega C}$$

と定義すれば一般解 $V(x)$ は

$$V(x) = A \exp(-\gamma x) + B \exp(\gamma x) = V_i(x) + V_r(x)$$

とおける。また特性インピーダンス Z_0 を

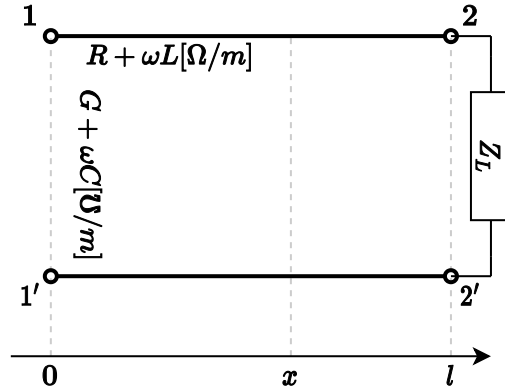
$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \frac{\sqrt{R + j\omega L}}{\sqrt{G + j\omega C}}$$

と定義すれば一般解 $I(x)$ は

$$Z_0 I(x) = A \exp(-\gamma x) - B \exp(\gamma x) = Z_0 I_i(x) - Z_0 I_r(x)$$

とおける。

2 ポートとしての分布定数回路



$$\begin{cases} a(x) \triangleq \sqrt{V_i(x)I_i(x)} = Z_0^{-1/2} A \exp(-\gamma x) = \frac{Z_0^{-1/2}V(x) + Z_0^{1/2}I(x)}{2} \\ b(x) \triangleq \sqrt{V_r(x)I_r(x)} = Z_0^{-1/2} B \exp(\gamma x) = \frac{Z_0^{-1/2}V(x) - Z_0^{1/2}I(x)}{2} \end{cases}$$

とおけば、ある地点 $x = x$ におけるインピーダンス $Z(x)$ は

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{Z_0^{1/2}a(x) + Z_0^{1/2}b(x)}{Z_0^{-1/2}[Z_0^{1/2}a(x) - Z_0^{1/2}b(x)]} = Z_0 \frac{a(x) + b(x)}{a(x) - b(x)}$$

と表せる。またこれらは $x = l$ における $V(l), I(l)$ を用いて

$$\begin{cases} a(x) = Z_0^{-1/2} A \exp[-\gamma l + \gamma(l-x)] = \frac{Z_0^{-1/2}V(l) + Z_0^{1/2}I(l)}{2} \exp \gamma(l-x) \\ b(x) = Z_0^{-1/2} B \exp[\gamma l - \gamma(l-x)] = \frac{Z_0^{-1/2}V(l) - Z_0^{1/2}I(l)}{2} \exp[-\gamma(l-x)] \end{cases}$$

と表せるので

$$\begin{cases} a(x) + b(x) = Z_0^{-1/2} Z_L I(l) \cosh \gamma(l-x) + Z_0^{1/2} I(l) \sinh \gamma(l-x) \\ a(x) - b(x) = Z_0^{-1/2} Z_L I(l) \sinh \gamma(l-x) + Z_0^{1/2} I(l) \cosh \gamma(l-x) \end{cases}$$

に注意して

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma(l-x) + Z_0 \sinh \gamma(l-x)}{Z_L \sinh \gamma(l-x) + Z_0 \cosh \gamma(l-x)}$$

と導けて、とくにインピーダンス整合 $Z_0 = Z_L$ のとき

$$b(x) = \frac{[a(x) + b(x)] - [a(x) - b(x)]}{2} \equiv 0, \quad Z(x) = Z_0 \frac{Z_0 \exp \gamma(l-x)}{Z_0 \exp \gamma(l-x)} \equiv Z_0$$

がいえ。

K 行列による表現

$$\begin{cases} a(0) + b(0) = Z_0^{-1/2} V(0) = Z_0^{-1/2} V(l) \cosh(\gamma l) + Z_0^{1/2} I(l) \sinh(\gamma l) \\ a(0) - b(0) = Z_0^{1/2} I(0) = Z_0^{-1/2} V(l) \sinh(\gamma l) + Z_0^{1/2} I(l) \cosh(\gamma l) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} V(0) \\ I(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ Z_0^{-1} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(l) \\ I(l) \end{pmatrix}$$

S 行列

S	$a_1(Z_2 = Z_0)$	$a_2(Z_1 = Z_0)$
b_1	$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big _{Z_2=Z_0}$	$s_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big _{Z_1=Z_0}$
b_2	$s_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big _{Z_2=Z_0}$	$s_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big _{Z_1=Z_0}$

S 行列による表現

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{A} & Z_0 \tilde{B} \\ Z_0^{-1} \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$S = \frac{1}{\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} + \tilde{D}} \begin{pmatrix} \tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{C} - \tilde{D} & 2(\tilde{A}\tilde{D} - \tilde{B}\tilde{C}) \\ 2 & -\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{C} + \tilde{D} \end{pmatrix}$$