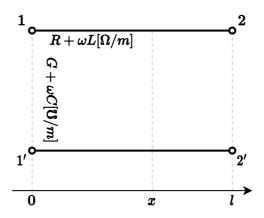
sec4.md 2025-08-03

4. 分布定数回路

第十回の内容。



単位長当たりの直列インピーダンス $Z=R+j\omega L$ および並列アドミタンス $Y=G+j\omega C$ を持つケーブルを考えると、電信方程式

$$egin{cases} rac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LCrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL + RC)rac{\partial v}{\partial t} + GRv \ rac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LCrac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL + RC)rac{\partial i}{\partial t} + GRv \end{cases}$$

において、仮定より

$$\left\{ egin{aligned} rac{dV}{dx} + ZI &= 0 \ rac{dI}{dx} + YV &= 0 \end{aligned}
ight. \implies \left\{ egin{aligned} rac{d^2V}{dx^2} &= ZYV \ rac{d^2I}{dx^2} &= ZYI \end{aligned}
ight.$$

が得られるので、 伝搬定数γを

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{R + j\omega L}\sqrt{G + j\omega C}$$

と定義すれば一般解 V(x) は

$$V(x) = A \exp(-\gamma x) + B \exp(\gamma x) = V_i(x) + V_r(x)$$

とおける。また **特性インピーダンス** Z₀ を

$$Z_0 = \sqrt{rac{Z}{Y}} = rac{\sqrt{R + j\omega L}}{\sqrt{G + j\omega C}}$$

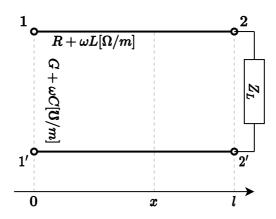
と定義すれば一般解 I(x) は

$$Z_0I(x) = A\exp(-\gamma x) - B\exp(\gamma x) = Z_0I_i(x) - Z_0I_r(x)$$

とおける。

sec4.md 2025-08-03

2ポートとしての分布定数回路



$$egin{cases} a(x) riangleq \sqrt{V_i(x)I_i(x)} = Z_0^{-1/2}A\exp(-\gamma x) = rac{Z_0^{-1/2}V(x) + Z_0^{1/2}I(x)}{2} \ b(x) riangleq \sqrt{V_r(x)I_r(x)} = Z_0^{-1/2}B\exp(\gamma x) = rac{Z_0^{-1/2}V(x) - Z_0^{1/2}I(x)}{2} \end{cases}$$

とおけば、ある地点 x=x におけるインピーダンス Z(x) は

$$Z(x) = rac{V(x)}{I(x)} = rac{Z_0^{1/2} a(x) + Z_0^{1/2} b(x)}{Z_0^{-1} \Big[Z_0^{1/2} a(x) - Z_0^{1/2} b(x) \Big]} = Z_0 rac{a(x) + b(x)}{a(x) - b(x)}$$

と表せる。またこれらは x=l における V(l), I(l) を用いて

$$egin{aligned} a(x) &= Z_0^{-1/2} A \exp\left[-\gamma l + \gamma (l-x)
ight] = rac{Z_0^{-1/2} V(l) + Z_0^{1/2} I(l)}{2} \exp{\gamma (l-x)} \ b(x) &= Z_0^{-1/2} B \exp\left[\gamma l - \gamma (l-x)
ight] = rac{Z_0^{-1/2} V(l) - Z_0^{1/2} I(l)}{2} \exp\left[-\gamma (l-x)
ight] \end{aligned}$$

と表せるので

$$egin{cases} a(x) + b(x) &= Z_0^{-1/2} Z_L I(l) \cosh \gamma (l-x) + Z_0^{1/2} I(l) \sinh \gamma (l-x) \ a(x) - b(x) &= Z_0^{-1/2} Z_L I(l) \sinh \gamma (l-x) + Z_0^{1/2} I(l) \cosh \gamma (l-x) \end{cases}$$

に注意して

$$Z(x) = Z_0 rac{Z_L \cosh \gamma (l-x) + Z_0 \sinh \gamma (l-x)}{Z_L \sinh \gamma (l-x) + Z_0 \cosh \gamma (l-x)}$$

と導けて、とくにインピーダンス整合 $Z_0=Z_L$ のとき

$$b(x) = rac{[a(x) + b(x)] - [a(x) - b(x)]}{2} \equiv 0, \quad Z(x) = Z_0 rac{Z_0 \exp \gamma (l - x)}{Z_0 \exp \gamma (l - x)} \equiv Z_0$$

がいえる。

sec4.md 2025-08-03

K 行列による表現

$$egin{cases} a(0)+b(0)=Z_0^{-1/2}V(0)=Z_0^{-1/2}V(l)\cosh(\gamma l)+Z_0^{1/2}I(l)\sinh(\gamma l)\ a(0)-b(0)=Z_0^{1/2}I(0)=Z_0^{-1/2}V(l)\sinh(\gamma l)+Z_0^{1/2}I(l)\cosh(\gamma l) \end{cases}$$

すなわち

$$egin{pmatrix} V(0) \ I(0) \end{pmatrix} = egin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \ Z_0^{-1} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix} egin{pmatrix} V(l) \ I(l) \end{pmatrix}$$

S 行列

S	$a_1(Z_2=Z_0)$	$oxed{a_2(Z_1=Z_0)}$
b_1	$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big _{Z_2 = Z_0}$	$oxed{s_{12} = } rac{b_1}{a_2}ig _{Z_1 = Z_0}$
b_2	$s_{21} = rac{b_2}{a_1}igg _{Z_2 = Z_0}$	$oxed{s_{22} = } rac{b_2}{a_2}ig _{Z_1 = Z_0}$

S行列による表現

$$K = egin{pmatrix} ilde{A} & Z_0 ilde{B} \ Z_0^{-1} ilde{C} & ilde{D} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$S = rac{1}{ ilde{A} + ilde{B} + ilde{C} + ilde{D}} egin{pmatrix} ilde{A} + ilde{B} - ilde{C} - ilde{D} & 2(ilde{A} ilde{D} - ilde{B} ilde{C}) \ 2 & - ilde{A} + ilde{B} - ilde{C} + ilde{D} \end{pmatrix}$$