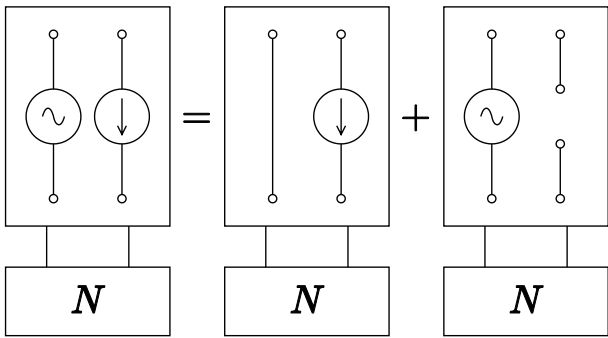


2. 回路定理

第四回～第六回の内容。

重ね合わせの理

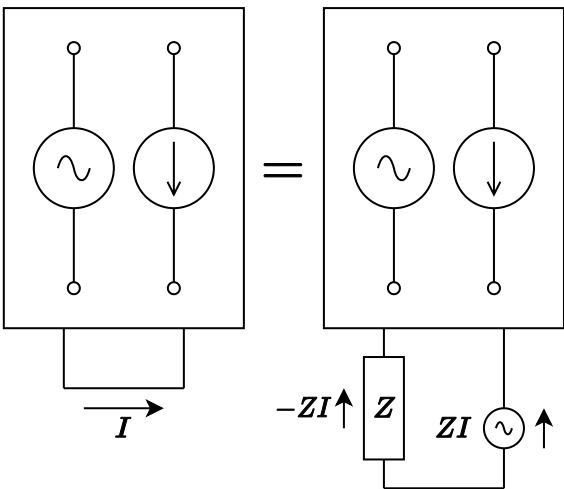
各電源が与える影響は、それぞれを独立して観測したときの影響を重ね合わせたものである。



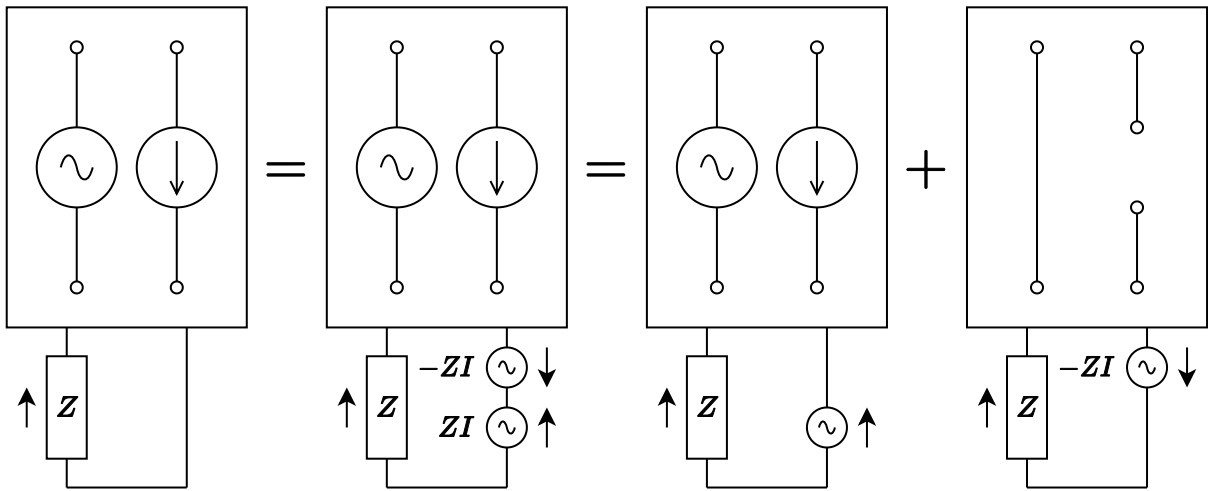
電源回路 $N_0 = E_1, \dots, E_m, J_1, \dots, J_n$ に抵抗 N を接続したとき、 N にかかる電圧と電流について

$$V_{N_0} = \sum_{1 \leq i \leq m} V_{E_i} + \sum_{1 \leq j \leq n} V_{J_j}, \quad I_{N_0} = \sum_{1 \leq i \leq m} I_{E_i} + \sum_{1 \leq j \leq n} I_{J_j}$$

補償定理



電源回路で電流 I が走る枝に Z を挿入しても、これに代わる電圧源 ZI を直列に挿入すれば等価である。

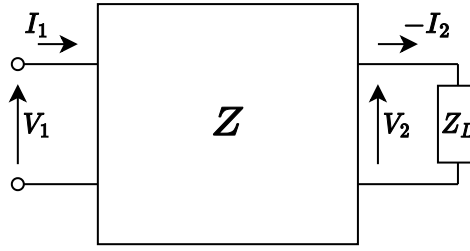


挿入した ZI を取り除く手順は、これと並列に更なる電圧源 $-ZI$ を挿入することと等価である。

これは元と等価な回路と、電源を無効化の上で $-ZI$ を挿入した回路との重ね合わせで表される。

ゆえに Z を挿入したことによる影響は、電源を無効化の上で $-ZI$ を挿入した回路の分と同じである。

入力インピーダンス Z_{in}



Z と Z_L の接続について

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = Z_L(-I_2) \implies I_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L}I_1$$

がいえるから入力インピーダンス $Z_{in} = \langle Z + Z_L \rangle$ は

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11}I_1 + z_{12}I_2}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$$

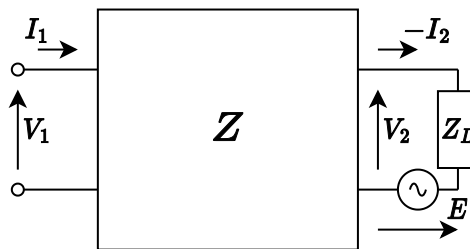
であり、ここで Z 行列と K 行列の変換式

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & AD - BC \\ 1 & D \end{pmatrix}$$

を用いると以下の整った形となる。

$$Z_{in} = \frac{A}{C} - \frac{AD - BC}{C(D + CZ_L)} = \frac{AD + ACZ_L - AD + BC}{C^2Z_L + CD} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

入力端開放電圧



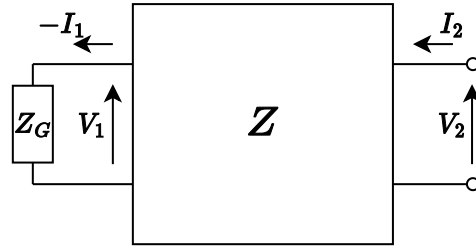
さらに抵抗 Z_L と直列に電圧源 E を接続した場合を考える。ただし入力電流は無視できるものとする。

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = Z_L(-I_2) + E \implies I_2 = \frac{1}{z_{22} + Z_L}E$$

となるから入力端開放電圧は次のようになる。

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = \frac{z_{12}}{z_{22} + Z_L}E = \frac{AD - BC}{CZ_L + D}E$$

出力インピーダンス Z_{out}



Z と Z_G の接続について

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = Z_G(-I_1) \implies I_1 = -\frac{z_{12}}{z_{11} + Z_G}I_2$$

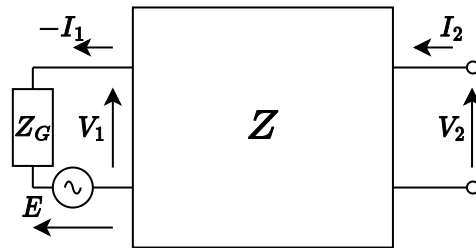
がいえるから出力インピーダンス $Z_{out} = \langle Z + Z_G \rangle$ は

$$Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{z_{21}I_1 + z_{22}I_2}{I_2} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_G}$$

であり、 K 行列を用いると以下の形で表される。

$$Z_{out} = \frac{D}{C} - \frac{AD - BC}{C(A + CZ_G)} = \frac{AD + CDZ_G - AD + BC}{C^2Z_G + CA} = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A}$$

出力端開放電圧 V_{open}



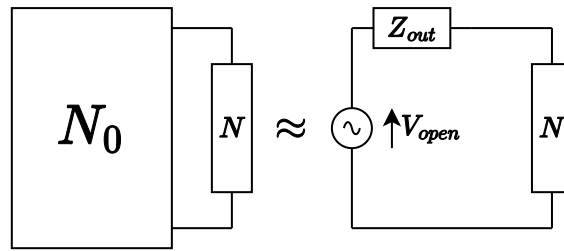
さらに抵抗 Z_G と直列に電圧源 E を接続した場合を考える。ただし出力電流は無視できるものとする。

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = Z_G(-I_1) + E \implies I_1 = \frac{1}{z_{11} + Z_G}E$$

となるから出力端開放電圧は入力端開放電圧と比べても簡単な形となる。

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_G}E = \frac{1}{CZ_G + A}E$$

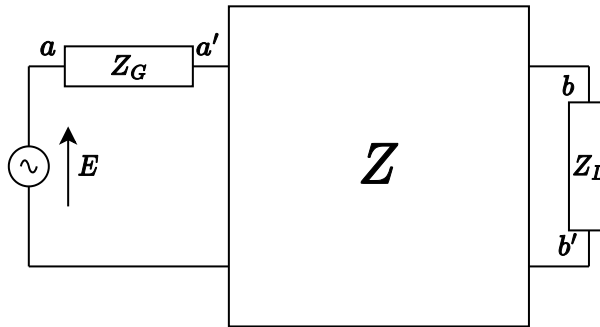
テブナンの定理



電源を含むどんな複雑な回路 N_0 も、内部インピーダンス Z_{out} を直列接続した電圧源 V_{open} により等価表現できる。

- 出力インピーダンス Z_{out} : N_0 内の電源をすべて無効化したときの N_0 のインピーダンス
- 出力開放電圧 V_{open} : N を開放消去したとき N_0 に生じる電圧

行列への適用



上の Z 行列を用いた回路の等価回路を考える。

ノートンの定理を適用してみる。具体値の計算は前節を参照。

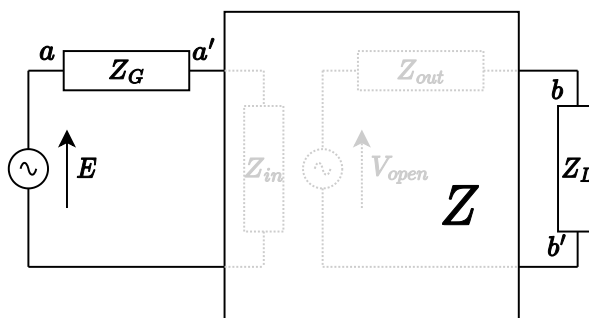
1. $N \leftarrow Z_G$ としたとき

- $Z_{in} = Z'_{out} = \langle Z + Z_L \rangle = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$
- $V'_{open} = E$ (\because 断線により回路に電流は流れず抵抗で電圧が降下しないから)

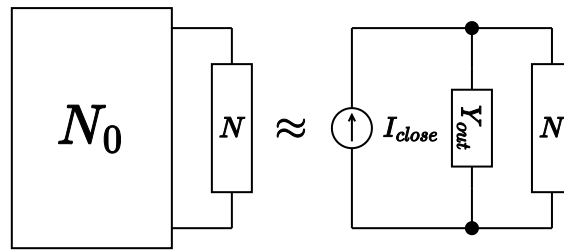
2. $N \leftarrow Z_L$ としたとき

- $Z_{out} = \langle Z + Z_G \rangle = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_G} = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A}$
- $V_{open} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_G} E = \frac{1}{CZ_G + A} E$

これより等価回路は次のように書ける。



ノートの定理



電源を含むどんな複雑な回路 N_0 も、内部アドミタンス Y_{out} を並列接続した電圧源 I_{close} により等価表現できる。

- 出力アドミタンス Y_{out} : N_0 内の電源をすべて無効化したときの N_0 のアドミタンス
- 出力短絡電流 I_{close} : N を短絡消去したとき N_0 に生じる電流

供給電力最大の法則

内部インピーダンス Z_0 の電圧源 E に接続したインピーダンス Z の消費電力 P を最大化したい。

回路を走る電流は

$$I = \frac{E}{Z + Z_0}$$

これより P は

$$P = \operatorname{Re}[V\bar{I}] = \operatorname{Re}[Z]|I|^2 = \frac{\operatorname{Re}[Z]|E|^2}{|Z + Z_0|^2}$$

$Z = R + jX; Z_0 = R_0 + jX_0; R, R_0 > 0$ と仮定すれば

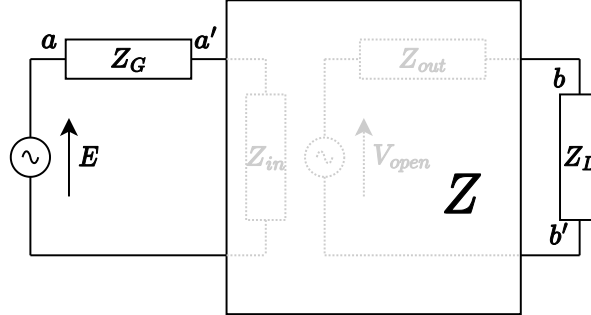
$$P = \frac{R|E|^2}{(R + R_0)^2 + (X + X_0)^2} \stackrel{X+X_0=0}{\leq} \frac{R|E|^2}{(R + R_0)^2} = \frac{|E|^2}{\left(R + \frac{R_0^2}{R}\right) + 2R_0} \stackrel{R=R_0}{\leq} \frac{|E|^2}{4R_0}$$

これより $Z = \overline{Z_0}$ のときに P は最大値 $\frac{|E|^2}{4\operatorname{Re}[Z]}$ をとる。

また、 $Z = \overline{Z_0}$ であることを電力的に「**整合が取れている**」といい、このときの電力を「**有能電力**」という。

電力利得

次の回路において、発電側回路の Z_{in} で消費される電力 P_{in} と供給側回路の Z_L で消費される電力 P_L に関する電力利得 $G = \frac{P_L}{P_{in}}$ を考える。



整合が取れていないとき

$Z_{in} \neq \overline{Z_G}, Z_L \neq \overline{Z_{out}}$ であるときの消費電力を「動作電力利得」という。

$$G_p = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{\text{Re}[Z_L] |V_{open}|^2}{|Z_L + Z_{out}|^2} \bigg/ \frac{\text{Re}[Z_{in}] |E|^2}{|Z_{in} + Z_G|^2} = \frac{\text{Re}[Z_L]}{\text{Re}[Z_{in}]} \frac{|Z_{in} + Z_G|^2}{|Z_L + Z_{out}|^2} \frac{|V_{open}|^2}{|E|^2}$$

発電側の整合が取れているとき

$Z_{in} = \overline{Z_G}, Z_L \neq \overline{Z_{out}}$ であるときの消費電力を「変換電力利得」という。

$$G_t = \frac{P_L}{\text{Max}[P_{in}]} = \frac{\text{Re}[Z_L] |V_{open}|^2}{|Z_L + Z_{out}|^2} \bigg/ \frac{|E|^2}{4\text{Re}[Z_{in}]} = \frac{4\text{Re}[Z_L]\text{Re}[Z_G]}{|Z_L + Z_{out}|^2} \frac{|V_{open}|^2}{|E|^2}$$

両側の整合が取れているとき

$Z_{in} = \overline{Z_G}, Z_L = \overline{Z_{out}}$ であるときの消費電力を「有能電力利得」という。

$$G_a = \frac{\text{Max}[P_L]}{\text{Max}[P_{in}]} = \frac{|V_{open}|^2}{4\text{Re}[Z_L]} \bigg/ \frac{|E|^2}{4\text{Re}[Z_{in}]} = \frac{\text{Re}[Z_G]}{\text{Re}[Z_L]} \frac{|V_{open}|^2}{|E|^2}$$