1. 行列

第一回〜第三回、第十三回の内容。

分圧と分流

- 直列接続では I が等しいため $V_i = Z_i I$ より各抵抗のインピーダンス Z_i 比で電圧が分圧される。
- 並列接続では V が等しいため $I_i = Y_i V$ より各抵抗のアドミタンス Y_i 比で電流が分流される。

行列を求める

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

これを図式化すれば以下のようになる。

	$R_1(R_2=0)$	$R_2(R_1=0)$
L_1	$m_{11} = \frac{L_1}{R_1}\Big\vert_{R_2=0}$	$m_{12} = \frac{L_1}{R_2}\Big\vert_{R_1=0}$
L_2	$m_{21} = \frac{L_2}{R_1}\Big\vert_{R_2=0}$	$m_{22} = \frac{L_2}{R_2}\Big\vert_{R_1=0}$

電源の除去

$1-1'$ および $2-2'$ には仮想的に電源 V_1 および V_2 が接続されていると考えるが、行列の各成分を求めるためにはこのうち一方を短絡除去あるいは開放除去しなければならない。

- **短絡** : 電源部分を導線に置換する。つまり $V = Z = 0$ とする。
- **開放** : 電源部分を断線する。つまり $I = Y = 0$ とする。

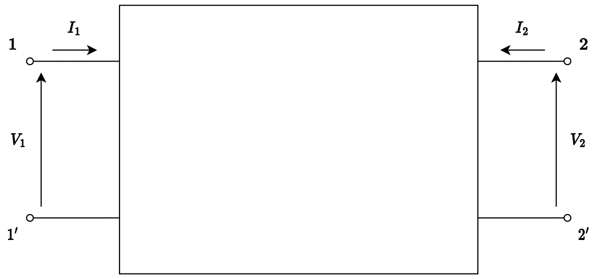
こうして得られた行列の要素 m_{ij} それぞれについて、以下の名前を与える。ただし、とくに「出力端短絡駆動点」抵抗を「入力」抵抗、「入力端開放駆動点」抵抗を「出力」抵抗ということがある。

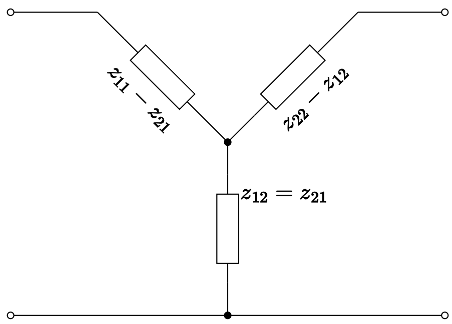
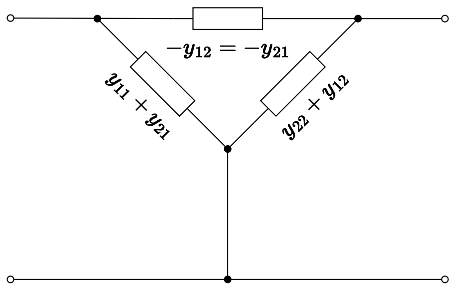
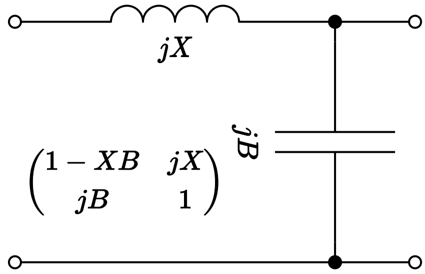
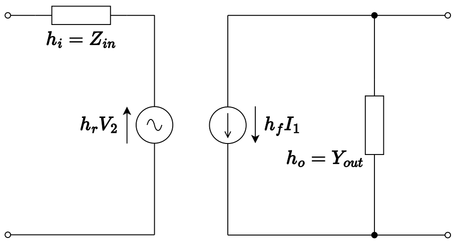
除去端	**除去方法**	**方向**	**抵抗**
入力端（$1-1'$）	短絡（$V=0$）	駆動点（$1 \to 1'$）	インピーダンス（$Z = V/I$）
出力端（$2-2'$）	開放（$I=0$）	伝達（$1 \to 2$）	アドミタンス（$Y = I/V$）

除去端	**除去方法**	**要素**	**抵抗**
入力端（$1-1'$）	短絡（$V=0$）	電圧（V/V）	増幅率（$2/1$）
出力端（$2-2'$）	開放（$I=0$）	電流（I/I）	帰還率（$1/2$）

各行列の意味

相反条件 とは $V_1 I_1 = V_2 I_2$ を満足するための条件のことである。



行列	定義	Z 行列との変換	相反条件	等価回路
Z	$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$		$z_{12} = z_{21}$	
Y	$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$\lvert Z\rvert^{-1} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$	$y_{12} = y_{21}$	
K	$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$	$z_{21}^{-1} \begin{pmatrix} z_{11} & \lvert Z\rvert \\ 1 & z_{22} \end{pmatrix}$	$\lvert K\rvert = 1$	
H	$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$z_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \lvert Z\rvert & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$h_{12} = -h_{21}$	

各行列の成分

Z 行列

Z	**出力端開放** $I_1(I_2=0)$	**入力端開放** $I_2(I_1=0)$
V_1	駆動点インピーダンス $z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right\rvert_{I_2=0}$	伝達インピーダンス $z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right\rvert_{I_1=0}$
V_2	伝達インピーダンス $z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right\rvert_{I_2=0}$	駆動点インピーダンス $z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right\rvert_{I_1=0}$

Y 行列

$Y=Z^{-1}$ より

Y	**出力端短絡** $V_1(V_2=0)$	**入力端短絡** $V_2(V_1=0)$
I_1	駆動点アドミタンス $y_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right\rvert_{V_2=0}$	伝達アドミタンス $y_{12}=\left.\frac{I_1}{V_2}\right\rvert_{V_1=0}$
I_2	伝達アドミタンス $y_{21}=\left.\frac{I_2}{V_1}\right\rvert_{V_2=0}$	駆動点アドミタンス $y_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right\rvert_{V_1=0}$

K 行列

K	**出力端開放** $V_2(I_2=0)$	**出力端短絡** $-I_2(V_2=0)$
V_1	電圧帰還率 $A=\left.\frac{V_1}{V_2}\right\rvert_{I_2=0}$	伝達インピーダンス $B=\left.\frac{V_1}{-I_2}\right\rvert_{V_2=0}$
I_1	伝達アドミタンス $C=\left.\frac{I_1}{V_2}\right\rvert_{I_2=0}$	電流帰還率 $D=\left.\frac{I_1}{-I_2}\right\rvert_{V_2=0}$

H 行列

H	**出力端短絡** $I_1(V_2=0)$	**入力端開放** $V_2(I_1=0)$
V_1	駆動点インピーダンス $h_i=\left.\frac{V_1}{I_1}\right\rvert_{V_2=0}$	電圧帰還率 $h_r=\left.\frac{V_1}{V_2}\right\rvert_{I_1=0}$
I_2	電流増幅率 $h_f=\left.\frac{I_2}{I_1}\right\rvert_{V_2=0}$	駆動点アドミタンス $h_o=\left.\frac{I_2}{V_2}\right\rvert_{I_1=0}$

行列の変換

$Z \to Z$

Z	$I_1(I_2=0)$	$I_2(I_1=0)$
V_1	$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right\|_{I_1=0}$
V_2	$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right\|_{I_1=0}$

$Y \to Z$

$Y = Z^{-1}$ より

Y	$V_1(V_2=0)$	$V_2(V_1=0)$
I_1	$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right\|_{V_2=0} = \frac{z_{22}}{\|Z\|}$	$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right\|_{V_1=0} = -\frac{z_{12}}{\|Z\|}$
I_2	$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right\|_{V_2=0} = -\frac{z_{21}}{\|Z\|}$	$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right\|_{V_1=0} = \frac{z_{11}}{\|Z\|}$

$K \to Z$

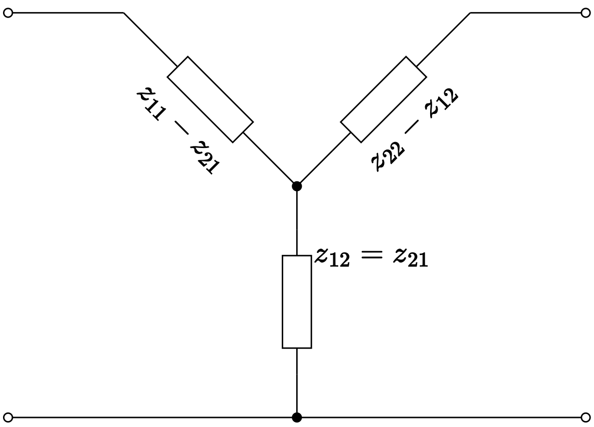
K	$V_2(I_2=0)$ [Z の左側]	$-I_2(V_2=0)$ [Y の左側]
V_1	$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right\|_{I_2=0} = \left.\frac{V_1}{I_1}\frac{I_1}{V_2}\right\|_{I_2=0} = \frac{z_{11}}{z_{21}}$	$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right\|_{V_2=0} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{\|Z\|}{z_{12}}$
I_1	$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right\|_{I_2=0} = \frac{1}{z_{21}}$	$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right\|_{V_2=0} = -\left.\frac{I_1}{V_1}\frac{V_1}{I_2}\right\|_{V_2=0} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{z_{22}}{z_{21}}$

$H \to Z$

H	$I_1(V_2=0)$ [Y の左側]	$V_2(I_1=0)$ [Z の右側]
V_1	$h_i = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\|_{V_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{\|Z\|}{z_{22}}$	$h_r = \left.\frac{V_1}{V_2}\right\|_{I_1=0} = \left.\frac{V_1}{I_2}\frac{I_2}{V_2}\right\|_{I_1=0} = \frac{z_{12}}{z_{22}}$
I_2	$h_f = \left.\frac{I_2}{I_1}\right\|_{V_2=0} = \left.\frac{I_2}{V_1}\frac{V_1}{I_1}\right\|_{V_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$h_o = \left.\frac{I_2}{V_2}\right\|_{I_1=0} = \frac{1}{z_{22}}$

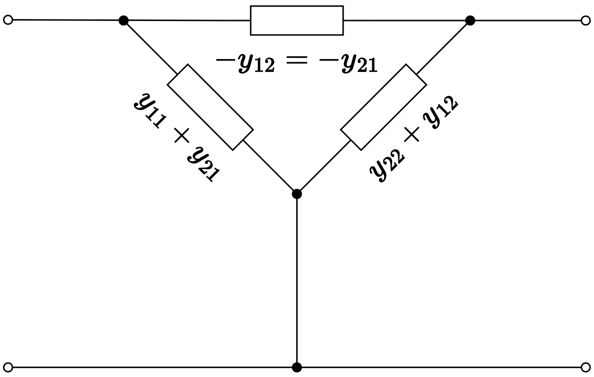
等価回路の確認

Z 行列の等価回路



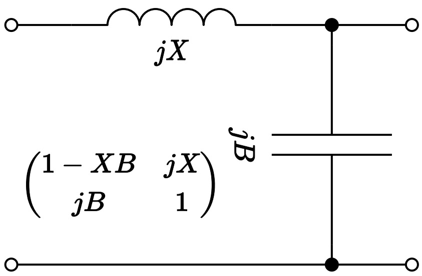
Z	$I_1(I_2=0)$	$I_2(I_1=0)$
V_1	$z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right\vert_{I_2=0}=(z_{11}-z_{21})+z_{21}$	$z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right\vert_{I_1=0}$
V_2	$z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right\vert_{I_2=0}$	$z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right\vert_{I_1=0}=(z_{22}-z_{12})+z_{12}$

Y 行列の等価回路



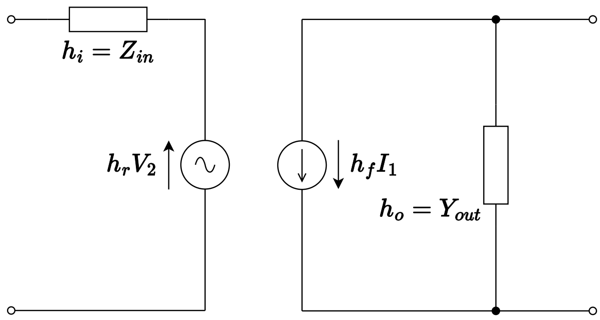
Y	$V_1(V_2=0)$	$V_2(V_1=0)$
I_1	$y_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right\vert_{V_2=0}=(y_{11}+y_{21})-y_{21}$	$y_{12}=\left.\frac{I_1}{V_2}\right\vert_{V_1=0}$
I_2	$y_{21}=\left.\frac{I_2}{V_1}\right\vert_{V_2=0}$	$y_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right\vert_{V_1=0}=(y_{22}+y_{12})-y_{12}$

K 行列の等価回路



K	$V_2(I_2=0)$	$-I_2(V_2=0)$
V_1	$A = \dfrac{V_1}{V_2}\Big\vert_{I_2=0} = \dfrac{jX - jB^{-1}}{-jB^{-1}} = 1 - XB$	$B^\dagger = \dfrac{V_1}{-I_2}\Big\vert_{V_2=0} = \dfrac{V_1}{I_1}\Big\vert_{V_2=0} = jX$
I_1	$C = \dfrac{I_1}{V_2}\Big\vert_{I_2=0} = jB$	$D = \dfrac{I_1}{-I_2}\Big\vert_{V_2=0} = \dfrac{I_1}{I_1}\Big\vert_{V_2=0} = 1$

H 行列の等価回路

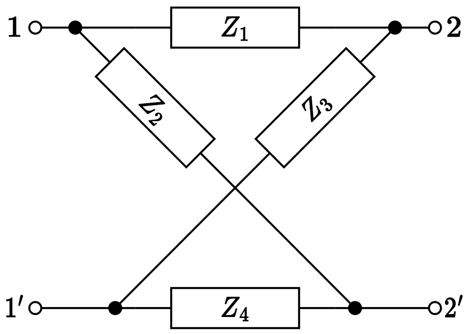


H	$I_1(V_2=0)$	$V_2(I_1=0)$
V_1	$h_i = \dfrac{V_1}{I_1}\Big\vert_{V_2=0} = \dfrac{V_1}{I_1}\Big\vert_{h_r V_2=0}$	$h_r = \dfrac{V_1}{V_2}\Big\vert_{I_1=0} = \dfrac{h_r V_2}{V_2}\Big\vert_{I_1=0}$
I_2	$h_f = \dfrac{I_2}{I_1}\Big\vert_{V_2=0} = \dfrac{h_f I_1}{I_1}\Big\vert_{V_2=0}$	$h_o = \dfrac{I_2}{V_2}\Big\vert_{I_1=0} = \dfrac{I_2}{V_2}\Big\vert_{h_f I_1=0}$

H 行列等価回路の $1-1'$ 側は **テブナンの等価回路** 、 $2-2'$ 側は **ノートンの等価回路** である。

格子回路

Z 行列による格子回路の表現



出力端の開放を考えると $Z_1 \to Z_3$ を通る電流 I_{13} と $Z_2 \to Z_4$ を通る電流 I_{24} により

$$I_1 = I_{13} + I_{24}, \quad V_1 = (Z_1 + Z_3)I_{13} + (Z_2 + Z_4)I_{24}$$

であるからからただちに

$$I_{13} = \frac{Z_2 + Z_4}{\sum Z} I_1, \quad I_{24} = \frac{Z_1 + Z_3}{\sum Z} I_1, \quad V_1 = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{\sum Z} I_1$$

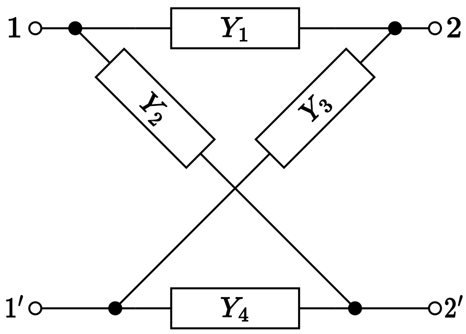
がいえるので

$$V_2 = Z_2 I_{24} - Z_1 I_{13} = \frac{(Z_1 + Z_3)Z_2 - (Z_2 + Z_4)Z_1}{\sum Z} I_1 = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{\sum Z}$$

であり、同様にして入力端の開放を考えれば $V_1 \leftrightarrow V_2$ および $Z_2 \leftrightarrow Z_3$ の置換により以下の Z 行列が求まる。

$$Z = \frac{1}{\sum Z} \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) & Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4 \\ Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4 & (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) \end{pmatrix}$$

Y 行列による格子回路の表現



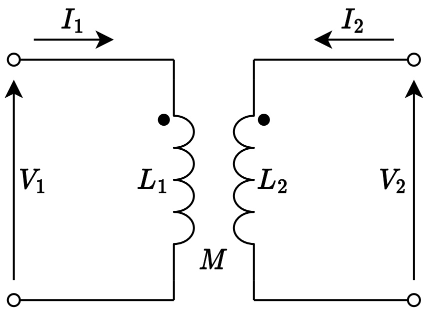
Z 行列の場合と同様にして求めればよい。

$$Y = \frac{1}{\sum Y} \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) & Y_2 Y_3 - Y_1 Y_4 \\ Y_2 Y_3 - Y_1 Y_4 & (Y_1 + Y_3)(Y_2 + Y_4) \end{pmatrix}$$

トランス

相互インダクタンス M の 2 コイル $L_1 = vn_1^2$, $L_2 = vn_2^2$ よりなる **トランス** を考える。

ただしコイルの向きが違う場合は相互インダクタンスは $-M$ となることに注意。



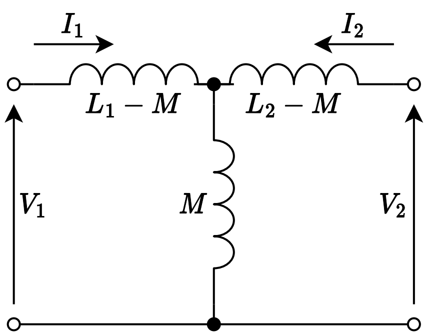
等価回路

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + M \dfrac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

これを複素数表示すれば

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

と書けることより Z 行列が求まるので、その等価回路を考えれば、以下のようになる。



密結合変成器

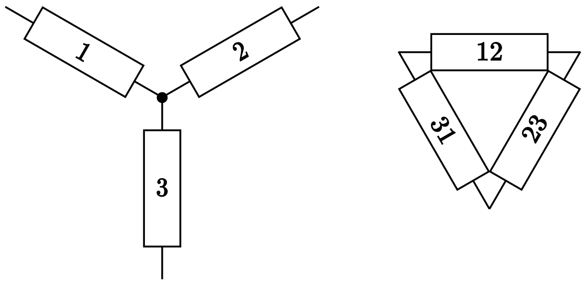
相互インダクタンスが $M = \sqrt{L_1 L_2} = v(n_1 n_2)$ である、磁束漏れのない変成器を **密結合変成器** という。

理想変成器

以下を満たす、電力を消費/蓄積しない変成器を **理想変成器** という。

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{-I_2} = n = \frac{n_2}{n_1} \cdot \mathrm{sgn} M$$

$Y-\Delta$ 変換



Y 型回路

Y 型回路は Z 行列の等価回路であるため

$$\begin{cases} Z_1 = z_{11} - z_{21} \\ Z_2 = z_{22} - z_{12} \\ Z_3 = z_{12} = z_{21} \end{cases} \iff Z_Y = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

その行列式は

$$|Z_Y| = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1$$

ゆえに $Y = Z^{-1}$ より

$$Y_Y = \frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{pmatrix}$$

Δ 型回路

Δ 型回路は Y 行列の等価回路であるため

$$\begin{cases} Y_{12} = -y_{12} = -y_{21} \\ Y_{23} = y_{22} - y_{12} \\ Y_{31} = y_{11} - y_{21} \end{cases} \iff Y_\Delta = \begin{pmatrix} Y_{31} + Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{23} + Y_{12} \end{pmatrix}$$

その行列式は

$$|Y_\Delta| = (Y_{31} + Y_{12})(Y_{23} + Y_{12}) - (-Y_{12})^2 = Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{31} Y_{12}$$

ゆえに $Z = Y^{-1}$ より

$$Z_\Delta = \frac{1}{Y_{12} Y_{23} + Y_{23} Y_{31} + Y_{31} Y_{12}} \begin{pmatrix} Y_{23} + Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{31} + Y_{12} \end{pmatrix}$$

ただし以下に注意せよ。

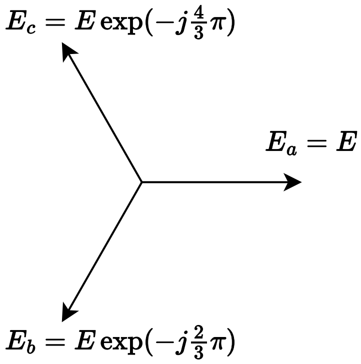
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad \det(\lambda A)^{-1} = (\lambda^n \det A)^{-1}$$

$Y-\Delta$ 変換表

$Z_Y - Y_\Delta$ 変換から以下が導出できる

	$Y \to \Delta$	$\Delta \to Y$
$Z \to Z$	$Z_{ij} = \dfrac{Z_iZ_j + Z_jZ_k + Z_kZ_i}{Z_k}$	$Z_k = \dfrac{Z_iZ_j}{Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{ki}}$
$Z \to Y$	$Y_{ij} = \dfrac{Z_k}{Z_iZ_j + Z_jZ_k + Z_kZ_i}$	$Y_k = \dfrac{Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{ki}}{Z_iZ_j}$
$Y \to Z$	$Z_{ij} = \dfrac{Y_i + Y_j + Y_k}{Y_iY_j}$	$Z_k = \dfrac{Y_{ij}}{Y_{ij}Y_{jk} + Y_{jk}Y_{ki} + Y_{ki}Y_{ij}}$
$Y \to Y$	$Y_{ij} = \dfrac{Y_iY_j}{Y_i + Y_j + Y_k}$	$Y_k = \dfrac{Y_{ij}Y_{jk} + Y_{jk}Y_{ki} + Y_{ki}Y_{ij}}{Y_{ij}}$

三相交流



三相交流とは、以下の三つの電源により電力を供給する方式である。

$$E_a = E, \quad E_b = Ee^{-j\frac{2}{3}\pi}, \quad E_c = Ee^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

この実現方法には Y 型結線と Δ 型結線の二つがある。