Mandatory Exersice 3

Laila Andersland

13. oktober 2017

Oppgave 2: Beregn avbøyingen av en kabel med sinus funksjoner.

Vi har en kabel med lenge L, signifikant spenning T og avbøying $\omega(x)$ slik at:

$$T\omega''(x) = l(x)$$

Hvor $l(x)$ er vertikal last per enhet lengde. Den skalerte vertikale avbøyingen u blir:

$$u'' = 1, u(0) = 0, u'(1) = 0$$

Kommentar:All kode for oppgaven er i vedlagt i python-skriptet: `cabel_sin.py`.

a) Finn den eksakte løsningen for avbøyingen.

Analytisk:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \int 1dx = x + c_0$$

$$u = \int x + c_0 dx = \frac{x^2}{2} + xc_0 + c_1 \tag{1}$$

Initialbetingelsene gir:

$$u'(1) = 0 \Rightarrow 1 + c_0 = 0 \Rightarrow \underline{c_0 = -1}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$$

Setter dette inn for (1) og får:

$$u = \frac{x^2}{2} - x = \frac{x^2 - 2x}{2} = \frac{x(x-2)}{2}$$

I koden løses dette symbolsk i Sympy med python funksjonen `symbolic_solver()`.

b) Bruk Galerkin og minste kvadraters metode for å finne koeffisientene.

En tilnærmet løsning u:

$$u = \sum_j c_j \psi_j(x)$$

hvor c_j er koeffisientene

Vi har at $\psi_i = \sin((2i+1)\frac{\pi}{2})$

Finner først restledd R:

$$\psi_i' = \frac{d\psi}{dx} = \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)\sin\left((2i+1)\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\psi_i'' = \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 - \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left((2i+1)\frac{\pi x}{2}\right) \tag{2}$$

Vi har da en rest:

$$R = u''_{exact} - u'' = 1 - u'' = 1 - \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_j c_j\psi_j(x)\right) = \sum_j c_j \frac{d^2}{dx^2}\psi_j(x)$$

Setter inn for (2):

$$R = 1 + \sum_j c_j \left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left((2j+1)\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3}$$

Bruker så **minste kvadraters metode** (eng. Least Square Method) til å finne de frie parametrene c_i slik at normen av resten $||R||$ er minimert.

Vi har:

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = 0, i = 0, ..., N$$

Deriverer R med hensyn på c_i:

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left((2i+1)\frac{\pi x}{2}\right) \tag{4}$$

Utifra likning (3) og (4) blir:

$$(R, \frac{\partial R}{\partial c_i}) = \left(1 + \sum_j^N c_j \left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left((2j+1)\frac{\pi x}{2}\right), \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left((2i+1)\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 0$$

Som blir:

$$\sum_j^N c_j((2j+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2j+1)\frac{\pi x}{2}), ((2i+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2i+1)\frac{\pi x}{2}))$$

$$+(1, ((2i+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2i+1)\frac{\pi x}{2})) = 0$$

Skriver om:

$$\sum_j^N c_j \underbrace{((2j+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2j+1)\frac{\pi x}{2}), ((2i+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2i+1)\frac{\pi x}{2}))}_{A_j,i}$$

$$= \underbrace{(-1, ((2i+1)\frac{\pi}{2})^2 \sin((2i+1)\frac{\pi x}{2}))}_{b_i}$$

Som tilsvarer:

$$\sum_j^N A_{j,i} c_j = b_i$$

Ser at $A_{j,i}$ er et indreprodukt av to ortogonale funksjoner som er null, med mindre $j = j$, og derfor blir:

$$\underline{\underline{c_i = \frac{b_i}{A_{ii}} = -\frac{16}{\pi^3(2i+1)}}}$$

Se `least_squares()` for løsning i Sympy.

Galerikin metoden
Vi får:

$$(R, v) = 0 \Rightarrow (1 - u'', v) = (1, v) - (u'', v) = 0$$

$$(1, v) = (u'', v)$$

$$\int_0^1 u''vdx = u'v|_0^1 - \int_0^1 u'v'dx = -(u', v')$$

hvor $u(0) = v(0) = 0$, slik at:

$$\Rightarrow (u', v') = -(1, v)$$

Vet at vi kan skrive u som $u = \sum_j c_j \psi_j$, hvor $v = \psi_i$:

$$\sum_j c_j \underbrace{(\psi_j', \psi_i')}_{A_{j,i}} = \underbrace{-(1, \psi_i)}_{b_i}$$

Resten blir løst i Sympy i python funksjonen `galerkin()`.

Resultat blir likt som i minste kvadraters metode:

$$\underline{\underline{c_i = \frac{b_i}{A_{ii}} = -\frac{16}{\pi^3(2i+1)}}}$$

Avtagende koeffisienter
Hvis koeffisientene avtar så må $c_j < c_{j-1}$ og forholdet $\frac{c_j}{c_{j-1}}$ vil være mindre enn 1. Funksjonen `galerkin()` regner ut et par verdier for økende i dette forholdet:

```
C: Users\Laila\INF5620\Madatory Exercises 3>python cable_sin.py
The Garlerkin method: ci =  -16.0/(pi**3*(2*i + 1)**3)
i=0 : -1.000000
i=1 : 0.037037
i=2 : 0.216000
i=3 : 0.364431
i=4 : 0.470508
i=5 : 0.547708
i=6 : 0.605826
i=7 : 0.650963
i=8 : 0.686953
i=9 : 0.716285
i=10 : 0.740633
```

Ser at koeffisientene avtar ganske fort for de første indeksene, hvilket betyr at det er disse koeffisientene/ledden som har størst innvirkning i tilnærmingen.

Feil i maks avbøyning
Vi skal finne feilen ved $x = 1$ med kun en basisfunskjon $N = 0$. Vi har den eksakte løsningen ved maks avbøying:

$$u_e(x = 0) = \frac{1(1-2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

For den tilnærmet løsningen $u = \sum_{j=0}^{N} c_j \psi_j(x)$, med $\psi_j = \sin((2i+1)\frac{\pi x}{2})$ og $c_j = -\frac{16}{\pi^3(2i+1)}$, har vi:

$$c_0 = -\frac{16}{\pi^3}, \psi_0 = \sin(\frac{\pi x}{2})$$

Slik at:

$$u = -\frac{16}{\pi^3}\sin(\frac{\pi x}{2})$$

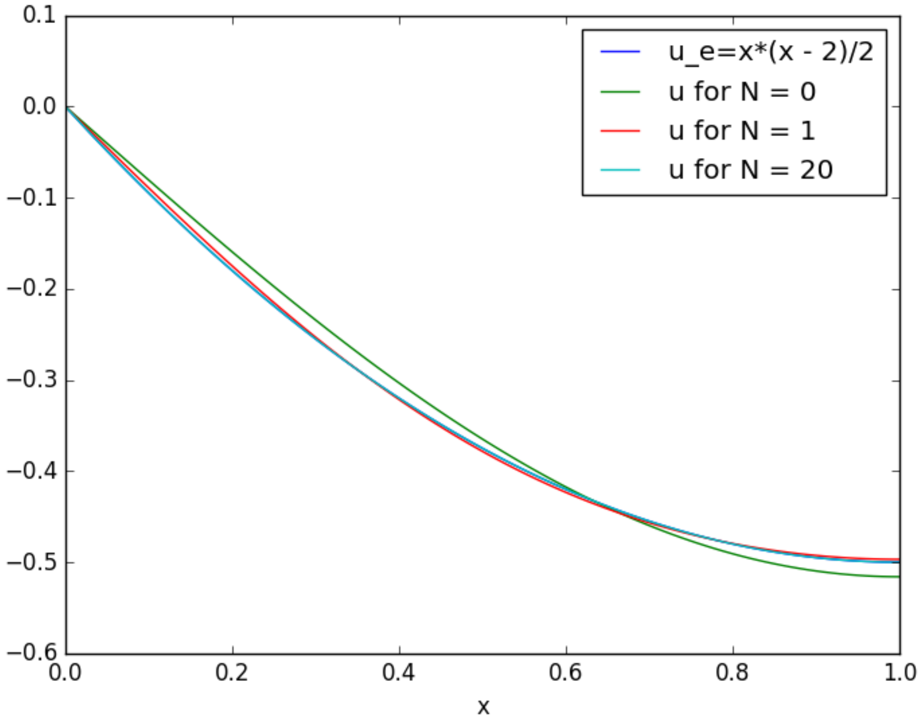
Og for $x = 0$:

$$u = -\frac{16}{\pi^3}$$

Feilen blir da $E = 100\% - \frac{u_e}{u} \cdot 100\% = 100\% - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{16}{\pi^3}} \cdot 100\% = \underline{\underline{3.1\%}}$

c) Visualiser løsningnene i b) for N=0,1,20.

Plotter dette i `visualize1()`og får følgende:



Hvor det ser ut som $N = 0$ gir en litt dårligere tilnærming, mens for $N = 1$ ser det ut til å gi en ganske god tilnærming, slik at man tenker at det kanskje ikke er nødvendig meg $N = 20$ for å få en tilstrekkelig god tilnærming.

d)

Vi har en ny basisfunskjon: $\psi_i = \sin((i+1)\frac{\pi x}{2})$

Med Galerkin:

$$(u', v') = -(1, v)$$

$$\sum_j c_j \underbrace{(\psi_j', \psi_i')}_{A_{i,j}} = \underbrace{-(1, \psi_i)}_{b_i}$$

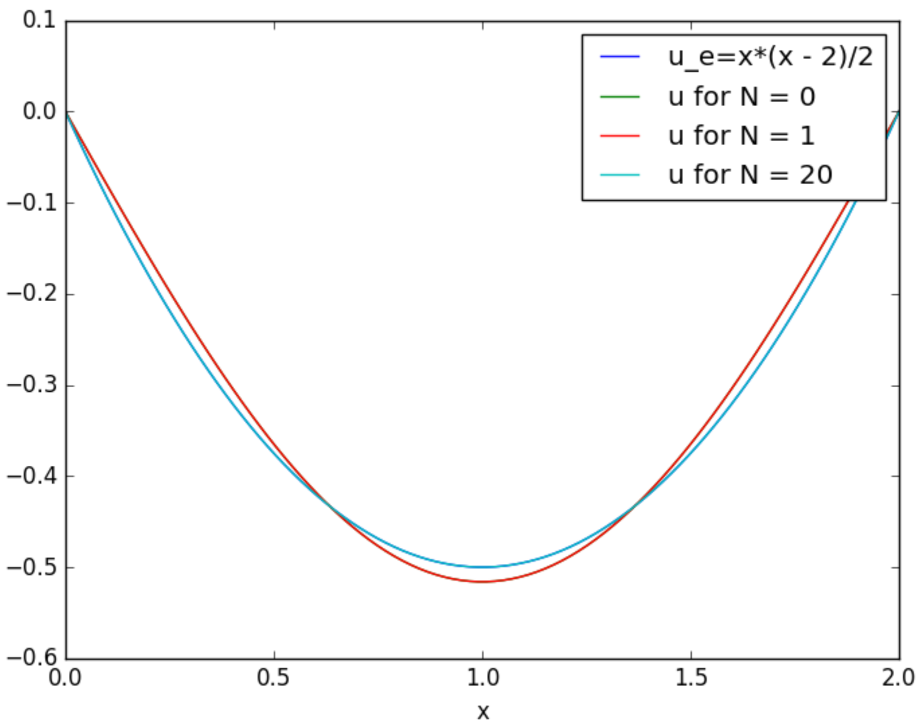
Får da:

$$A_{i,j} = (i+1)(j+1)\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos((j+1)\frac{\pi x}{2})\cos((i+1)\frac{\pi x}{2})dx$$

$$b_i = -\int_0^1 \sin((i+1)\frac{\pi x}{2})dx$$

e)

Implementer dette i `visualize2()` og får:



Ser at det er et større hopp mellom $N = 1$ og $N = 20$ enn det i forrige oppgave.

Oppgave 5: Beregn avbøyingen av en kabel med 2 P1 elementer.

I P1 elementer er det to noder per celle og koordinatene til nodene er:

$$x_i = ih, \quad h = \frac{L}{N_e}, \quad i = 0, \ldots, N_n - 1 = N_e$$

Hvor hver node i er assosiert med en basisfunksjon ψ_i.

Ekskluder koeffisientene ved x = 0:

Søker en tilnærming på formen $u = c_0\psi_1(x) + c_1\psi_2(x)$

Elementmatrisen til $\tilde{A}^{(e)}$ blir:

$$\tilde{A}^{(e)} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementvektor til $\tilde{b}^{(e)}$ blir:

$$\tilde{b}^{(e)} = -h\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Slik at vi får:

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = -h\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Som gir løsningene:

$$c_0 = -3h^2, \;\; c_1 = -4h^2 \Rightarrow \underline{\underline{u = -3h^2\psi_1(x) + -4h^2\psi_2(x)}}$$

Beholder koeffisientene ved x = 0:
Søker en tilnærming på formen $u = c_0\psi_1(x) + c_1\psi_2(x) + c_2\psi_3$

Elementmatrisen til $\tilde{A}^{(e)}$ blir:

$$\tilde{A}^{(e)} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementvektor til $\tilde{b}^{(e)}$ blir:

$$\tilde{b}^{(e)} = -h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Slik at vi får:

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Som gir løsningene:

$$c_0 = -\frac{4h^2}{3}, \ \ c_1 = -\frac{h^2}{3}, \ \ c_2 = 0 \Rightarrow u = -\frac{4h^2}{3}\psi_1(x) + -\frac{h^2}{3}\psi_2(x) + 0 \cdot \psi_3$$

$$\underline{\underline{u = -\frac{4h^2}{3}\psi_1(x) - \frac{h^2}{3}\psi_2(x)}}$$

Kommentar: Her vet jeg rett og slett ikke hva h skal være og kan derfor ikke konkludere med om dette er en god tilnærming sammenliknet med den eksakte løsningen.