Stk1100 Oblig 1

Soran Hussein Mohmmed / soranhm

February 2017

Oppgave 1

Antar at en gitt komponent er defekt er uavhengig. X = antall komponenter som testes frem til og med første defekte.

a)

Ser på dette som en negativ binomisk fordeling pga den fyller alle de 4 kravene:

1. En potensielt ubegrenset sekvens av forsøk
2. To mulige utfall, S og F
3. Forsøkene er uavhengige og P(S) = p i hvert forsøk
4. Forsøkene gjennomføres intill totalt r S-er er observert

i vårt tilfelle ser vi på S som defekt, og vi skal gjøre forsøket til første defekt intreffer altså nå r = 1. Dette git oss nb(x;1,p) = $(1-p)^{x-1}p$ med x = 1,2,.... dett gjør at vi får opphøyd i x-1 og ikke x.

b)

Den momentgenerende funksjonen til X, $M_x(t)$ er gitt som $M_x = \frac{p}{(1-e^t(1-p))^r}$ med r = 1 får vi :

$$M_x = \frac{p}{1-e^t(1-p)} \tag{1}$$

for å finne E(X) og V(X) må jeg løse: $M_x'(0)$ = E(X), $M_x''(t) = E(X^2)$ dermed V(X) = E(X^2) - $(E(X))^2$

$$\begin{aligned} M_x'(t) &= (-1)p(1-e^t(1-p))^{-2} \\ &= \frac{-p(-e^t(1-p)}{(1-e^t(1-p))^2} = \underline{\frac{pe^t(1-p}{(1-e^t(1-p))^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

$$M_x`(0) = E(X) = \frac{\cancel{p}(1-p)}{(\cancel{1}-\cancel{1}-p)^{\cancel{2}}} = \underline{\frac{1-p}{p}} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$\begin{aligned} M_x''(t) &= \frac{pe^t(1-p)(1-(1-p)e^t)^{\cancel{2}} - 2pe^t(1-p)\cancel{(1-(1-p)e^t)}(-1(1-p)e^t)}{(1-(1-p)e^t)^{\cancel{4}}} \\ &= \frac{pe^t(1-p)(1-(1-p)e^t) + 2pe^t(1-p)((1-p)e^t)}{(1-(1-p)e^t)^3} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} M_x''(0) = E(X^2) &= \frac{p(1-p)(p) + 2p(1-p(1-p)}{p^3} = \frac{p^2-p^3+2p-4p^2+2p^3}{p^3} \\ &= \underline{\frac{2-3p+p^3}{p^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 &= \frac{2-3p+p^3}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{2-3p+p^2-1+2-p^2}{p^2} \\ &= \underline{\frac{1-p}{p^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

c)

Y er nå en binomisk fordelt pga den fyller nå alle de 4 kravene til en binomisk fordleing:

1. Vi skal teste for n = 200 tilfeler
2. Vi skal endten få defekt eller ikke defekt
3. Forsøkene er uavhengige
4. p for defekt er lik hele veien

d)

Regner ut på MATLAB som ligger nedenfor, med p = 0.02 og n = 200, for P(Y=y) med y = 0,1,...,10.

e)

Bruker formelen for forventning og varians i den binomiske fordelingen til å finne E(Y) og V(Y):
E(Y) = np = 200 * 0.02 = <u>4</u>
V(Y) = np(1-p) = E(Y)(1-0.02) = 4 * 0.98 = <u>3.92</u>

f)

Grunnen til at Y er tilnærmet Poisson-fordelt er pga n er veldig stor og p er veldig liten.

g)

verdien til λ er : $\lambda = \text{E(Y)} = \text{np} = 200 * 0.02 = \underline{4}$

h)

Bruker nå MATLAB til å beregne P(Y=y) for y = 0,1,...,10 på nytt, med bruk av Poisson-fordeling. Legger nå dette inn med d) og skriver programmet med forskjellen mellom Binomiske og Poisson fordelingen.

```
% regner ut P(Y = y) for y = 0,1,...,10
n = 200; p = 0.02; lambda = n*p;
for i = 0:10
    bino = binopdf(i,n,p)
    pois = poisspdf(i,lambda)
    forskjell = abs(bino - pois)
end
```

```
Binomisk: 0.017588, Poisson: 0.018316, forskjellen: 0.000728
Binomisk: 0.071788, Poisson: 0.073263, forskjellen: 0.001475
Binomisk: 0.145773, Poisson: 0.146525, forskjellen: 0.000752
Binomisk: 0.196347, Poisson: 0.195367, forskjellen: 0.000980
Binomisk: 0.197349, Poisson: 0.195367, forskjellen: 0.001982
Binomisk: 0.157879, Poisson: 0.156293, forskjellen: 0.001585
Binomisk: 0.104716, Poisson: 0.104196, forskjellen: 0.000520
Binomisk: 0.059227, Poisson: 0.059540, forskjellen: 0.000313
Binomisk: 0.029160, Poisson: 0.029770, forskjellen: 0.000610
Binomisk: 0.012696, Poisson: 0.013231, forskjellen: 0.000536
Binomisk: 0.004949, Poisson: 0.005292, forskjellen: 0.000344
```

Figure 1: Kjøring av programet over

Oppgave 2

En stokastisk variabel X har sannsynlighetstettheten:

$$f(x) = \begin{cases} \theta^{-1} x^{-(\theta+1)/\theta} & for x \geq 1 \\ 0 & for x < 1 \end{cases}$$

a)

Den kumulative fordelingensfunskjonen til X:

$$\begin{aligned}
F(X) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \int_{1}^{x} \theta^{-1}y^{-(\theta+1)/\theta}dy = \int_{1}^{x} \theta^{-1}y^{-(\theta+1)/\theta}dy \\
&= \int_{1}^{x} \frac{1}{\theta}y^{-1-\frac{1}{\theta}}dy = \frac{1}{\theta}\Bigg[\frac{1}{\cancel{-}1-\frac{1}{\theta}+\cancel{+}1}y^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg]_1^x = \frac{1}{\theta}\Bigg[-\theta y^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg]_1^x \\
&= \frac{1}{\theta}\Bigg[-\theta x^{\frac{-1}{\theta}} + \theta\Bigg] = \underline{1 - x^{-\frac{1}{\theta}}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dette gir da den kumulative fordelingen:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\frac{1}{\theta}} & for x \geq 1 \\ 0 & for x < 1 \end{cases}$$

b)

med $\theta = 0.45$, regner jeg ut P(2≤X≤5):
P(2≤X≤5) = F(5) - F(2) = [1 - $5^{-\frac{1}{0.45}}$] - [1 - $2^{-\frac{1}{0.45}}$] ≈ 0.97 -0.79 ≈ 0.1863

c)

Medianen i fordelingen er 50-perssentilen altså når μ tilfredsiller F(μ) = 0.5.

$$\begin{aligned}
F(\mu) = 0.5 = 1 - \mu^{-\frac{1}{\theta}} &\rightarrow 0.5 = \mu^{-\frac{1}{\theta}} \\
&\rightarrow ln(\frac{1}{2}) = ln(\mu^{-\frac{1}{\theta}}) \rightarrow ln(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\theta}ln(\mu) \\
&\rightarrow -\theta(-ln(2)) = ln(\mu) \\
&\rightarrow ln2^{\theta} = ln(\mu) \rightarrow \underline{\mu = 2^{\theta}}
\end{aligned} \tag{9}$$

Her bruker jeg (ln 1/2 = - ln 2 og θ ln 2 = ln 2^{θ})

d)

Skal bestemme E(X) utrykket med θ

$$\begin{aligned}
\mu_x = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \int_{1}^{\infty} \cancel{x}\frac{1}{\theta}\frac{1}{x^{\cancel{1}+\frac{1}{\theta}}}dx = \frac{1}{\theta}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} \\
&= \frac{1}{\theta}\int_{1}^{\infty} x^{-\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{\theta}\Bigg[\frac{1}{-\frac{1}{\theta}+1}x^{-\frac{1}{\theta}+1}\Bigg]_1^{\infty} \\
&= \frac{1}{\theta}\Bigg[\frac{\theta}{-1+\theta}x^{-\frac{1}{\theta}+1}\Bigg]_1^{\infty} = \frac{1}{-1+\theta}\Bigg[x^{-\frac{1}{\theta}+1}\Bigg]_1^{\infty} \\
&= -\frac{1}{-1+\theta} = \underline{\frac{1}{1-\theta}}
\end{aligned} \tag{10}$$

e)

For å utrykke V(X) ved θ så må jeg regne ut V(x) = E(X^2) = $[E(X)]^2$. har E(X) fra d), regner nå ut først $E(X^2)$ så V(X).

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_1^\infty x^2 * \frac{1}{\theta} * \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\theta}}} dx = \frac{1}{\theta} \int_1^\infty \frac{x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{1}+\frac{1}{\theta}}} dx \\
&= \frac{1}{\theta} \int_1^\infty x^{1-\frac{1}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{\theta}+1} * x^{1-\frac{1}{\theta}+1} \right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2-\frac{1}{\theta}} x^{2-\frac{1}{\theta}} \right]_1^\infty = \frac{1}{\theta} \left[\frac{\cancel{\infty^{2-\frac{1}{\theta}}}}{2-\frac{1}{\theta}} - \frac{1}{2-\frac{1}{\theta}} \right] \\
&= -\frac{1}{\theta(2-\frac{1}{\theta})} = \underline{\frac{1}{1-2\theta}} \qquad (11) \\
V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 &= \frac{1}{1-2\theta} - (\frac{1}{1-\theta})^2 = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{1-2\theta+\theta^2} \\
&= \frac{(1-2\theta+\theta^2)-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-2\theta+\theta^2)} = \frac{1-2\theta+\theta^2-1+2\theta}{1-2\theta+\theta^2-2\theta+4\theta^2-2\theta^3} \\
V(X) &= \underline{\frac{\theta^2}{-2\theta^3+5\theta^2-4\theta+1}} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Lar den stokastiske variablen X angi mannens gjenstående levetid i hele år dvs levetiden i hele år fratrukket 35 år. Vi vil først bestemme punktsannsynligheten p(x) = P(X=x) for denne stokastiske variabel.

a)

q_x er sannsynligheten for at en x år gammel mann skal dø i løpet av ett år. Kumulative fordelingesfunskjonen til X er gitt ved:
F(x) = P(X≥x) = 1 - $\prod_{y=o}^{x}(1-q_{35+y})$.
F(x) = P(X≥x) = 1 - P(X>x) = 1 - $\prod_{y=o}^{x}(1-q_{35+y})$.
$\prod$ er tegnet for produktet på tilsvarene måte som $\sum$ er for sum.

b)

Regner ut sannsynligheten for å ha akkurat x år igjen å leve. Dette er sannsynligheten å dø innen x år, minus sannsynligheten å dø innen x-1 år. Dermed p(x) = P(X=x) = F(x) - F(x-1)

c)

Filen "dodelighet.txt" har første kolonne alder fra 0 til 100, mens andre kolonne innholder tilhørenede etårige dødssanssynligheter i promille. bruker dødelighetstabelllen og resulatet i a) og b) til å bestemme punktsannsynligheten. Dette er gjort på MATLAB, har skrevet alt i et programm som er lagt ved nederst, med plottet:

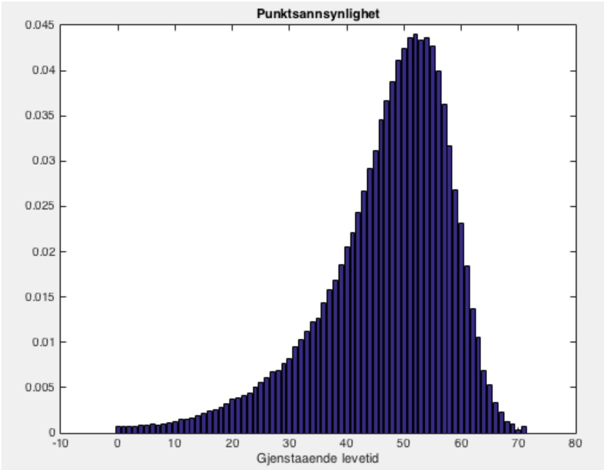


Figure 2: Grafen til punktsannsynligheten

d)

Ut fra teksten får vi vite at mannen ikke får utbetalt pensjon for X≥34 (alderen er da 34-69) altså h(X) = 0. mens i X≤35 har vi B = 100 000, k = 35 til X år, da er alderen fra 70 til han dør og i den perioden får han utbetaling pensjon hvert år.

$$h(X) = \begin{cases} \sum_{k=35}^{X} \frac{100000}{1.03^k} = \frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{1-(1/1.03)^{X-34}}{1-1/1.03} & for x \geq 35 \\ 0 & for x \leq 34 \end{cases}$$

e)

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x) = \frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{1-(1/1.03)^{X-34}}{1-1/1.03} * p(x) \\ &= \frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{p(x \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{X-34} p(x)}{1-1/1.03} \end{aligned} \tag{13}$$

p(x≥35) kommer fra sum tegnet til h(x). p(x≥35) = 1.

f)

Skriver ned formelen i e) i MATLAB med punktsannsynligheten i c) for å beregne nåverdien av pensjonsutbetaling som blir:
E(h(x)) = 571 740

g)

Nåverdien av mannens samlede permie innbetaling av et beløp der K er kroner om k år og det blir K * g(X) år det bergnes renter og renters rente.

h)

Fra forrige oppgave har vi fått oppgit g(X), der jeg bruker sumen av endelig geometrisk rekke på og får:

$$g(X) = \sum_{k=0}^{min(X,34)} \frac{1}{1.03k} = \frac{1-(1/1.03)^{min(X,34)+1}}{1-1/1.03} \tag{14}$$

Regner nå ut E(g(X)):

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x) \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{71} p(x) - \sum_{x=0}^{34} (\frac{1}{1.03})^{x+1} p(x) - \sum_{x=35}^{71} (\frac{x=35}{71})^{34+1} p(x)}{1-1/1.03} \\ &= \frac{1 - \sum_{x=0}^{34} (1/1.03)^{x+1} p(x) - (1/1.03)^{35} p(x \geq 35}{1-1/1.03} \end{aligned} \tag{15}$$

Her bruker jeg $\sum_{x=0}^{71} p(x) = 1$ og $\sum_{x=35}^{71} p(x) = P(X \geq 35)$.

i)

Bruker formelen og setter inn i MATLAB og får E(g(x)) = 21.6295

j)

Bruker E(h(x)) = 571 740 fra f) og E(g(x)) = 21.6295 fra i) til å finne K:

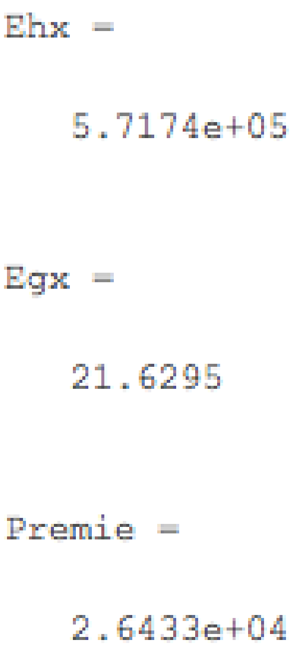
$$\begin{aligned} K * E(g(x)) = E(h(x) \longrightarrow K = \frac{E(h(x))}{E(g(x))} \\ K = \frac{571740}{21.6295} = 26433.34335 \approx 26433 \end{aligned} \tag{16}$$

Det årlige premien er <u>26433</u>.

MATLAB

```
% Beregner ettaarige doedssannsynligheter:
qk=dod/1000;

% Beregner kumulativ fordeling for gjenstaaende levetid X:
```

```
Fx = 1 - cumprod(1-qx(36:107));

% Beregner punktsannsynlighetene for X:
Fx2 = [0;Fx(1:71)];
px = fx - fx2;

% Plotter punktsannsynlighetene:
bar(0:71,px)
xlabel('Gjenstaaende levetid')
title('Punktsannsynlighet')

% Beregner forventet naaverdi av pensjonsutbetalingene:
Ehx1 = (100000/1.03^35);
Ehx = sum(Ehx1/(1-(1/1.03)) * (1-((1/1.03).^((36:72)-34))* px(36:72)))

% Beregner forventet naaverdi av premieinnbetalingne pr krone (dvs for K=1):
Egx = (1 - sum((1/1.03).^((1:35)+1)'.*px(1:35)) - (1/1.03)^35*sum(px(36:72)))/(1-1/1.03)

% Beregner premien:
Premie = Ehx/Egx
```



```
Ehx =

    5.7174e+05


Egx =

    21.6295


Premie =

    2.6433e+04
```

Figure 3: Kjøring av programet over