PARTE A

1. Il polinomio di Taylor di grado 4, relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x^2)^2$ vale vale

   A: x^4 B: 0 C: $1 - \frac{x^4}{2!}$ D: N.A. E: $x - \frac{x^3}{3!}$

2. L'integrale

   $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$$

   vale

   A: 1 B: 0 C: 2π D: N.A. E: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

3. Sia y la soluzione di

   $$y'(t) = (y(t))^3 \quad y(0) = 1$$

   allora $y(1/4)$ vale

   A: 0 B: N.A. C: $\sqrt{2}$ D: N.E. E: 1

4. Il numero di elementi dell'insieme

   $$A = \{z \in \mathbb{C} : \ z\overline{z} = 4\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) = \pi/2\}$$

   è

   A: 4 B: N.A. C: Infiniti D: 1 E: 2

5. Data la funzione $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ allora $f'(\pi/2)$ vale

   A: N.E. B: N.A. C: 0 D: $\pi\cos(\pi/3)$ E: 1

6. Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x\mathrm{e}^{-1} = 1$ è

   A: 1 B: 2 C: N.A. D: infinite E: 0

7. La funzione $f : \ R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{-1}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

   A: monotona B: N.A. C: limitata D: derivabile E: convessa

8. Sia $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\}$ la funzione parte intera di x. L'integrale

   $$\int_{-1}^{1} |x|^{[x]}\, dx$$

   vale

   A: N.E. B: 0 C: N.A. D: 1 E: -1

9. Il raggio di convergenza della serie

   $$\sum_{n=17}^{+\infty} n\log(\frac{n}{\mathrm{e}})(x-2)^n$$

   è

   A: 1 B: 0 C: 2e D: N.A. E: ∞

10. La funzione

    $$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\, dt & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

    nel punto $x = 0$ è

    A: non continua e non derivabile B: continua ma non derivabile C: non continua ma derivabile D: continua e derivabile E: N.A.

CODICE=427089

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 Giugno 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=427089

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 Giugno 2018

PARTE B

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1 + x\log(x)) & \text{se } 0 < x < \mathrm{e} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto.

Soluzione. La funzione risulta continua per $0 < x < \mathrm{e}$, mentre non è continua in 0 dato che $f(0) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \sin(1)$. Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = (\log(x) + 1)\cos(x\log(x) + 1) \qquad \text{per } 0 < x < \mathrm{e}$$

Per studiare il segno della derivata osserviamo che $(\log(x) + 1) > 0$ se $\mathrm{e}^{-1} < x < \mathrm{e}$, mentre si annulla per $x = \mathrm{e}^{-1}$ e Il suo grafico approssimativo risulta

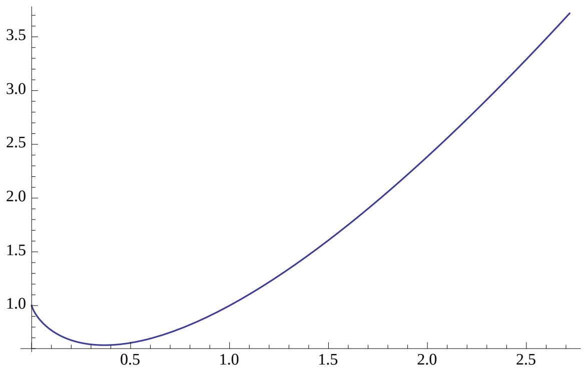

Figura 1: Grafico approssimativo di $1 + x\log(x)$

Per l'altro termine osserviamo che l'argomento del coseno, cioè $1 + x\log(x)$ è decrescente per $0 < x < 1/\mathrm{e}$ e crescente poi. Il minimo è positivo e l'estremo superiore viene raggiunto per $x = \mathrm{e}$ e vale $1 + \mathrm{e} > \pi$.

La funzione $\cos(x\log(x) + 1)$ risulta positiva per $x < x_0$ dove $x_0 > 1/\mathrm{e}$ è l'unico punto dove $\cos(1 + x_0\log(x_0)) = 0$.

CODICE=427812

Pertanto risulta

$$f'(x) \quad \begin{cases} \text{negativa per } \{0 < x < \mathrm{e}^{-1}\} \cup \{x_0 < x < \mathrm{e}\} \\ \\ \text{nulla per } x = \mathrm{e}^{-1}, x_0 \\ \\ \text{positiva per } \{\mathrm{e}^{-1} < x < x_0\} \end{cases}$$

e quindi si ha un punto di minimo relativo in $x = \mathrm{e}^{-1}$ e di massimo relativo in $x = x_0$.

Il minimo assoluto non esiste perchè (ancora dalle considerazioni sull'argomento $1 + x\log(x)$ della figura 1) si ha che la funzione $f(x)$ è positiva per $x < x_0$ e negativa e decrescente per $x_0 < x < \mathrm{e}$.

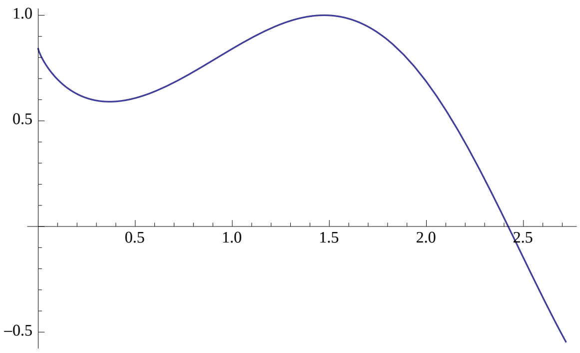

Figura 2: Grafico approssimativo di $f(x) = \sin(1 + x\log(x))$

2. Si risolva, per $n \in \mathbb{N}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_n'(x) + y_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si determini poi se esistono $n \in \mathbb{N}$ tali che la soluzione soddisfa

$$\lim_{x\to+\infty} y_n(x) = \frac{1}{n}$$

Soluzione L'equazione si può risolvere in vari modi, per esempio moltiplicando per e^x si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left[y_n\mathrm{e}^x\right] = x^n,$$

da cui si ottiene facilmente

$$y_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n+1}}{n+1}$$

e in particolare $\lim_{x\to+\infty} y_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \alpha\,x + 1}\,dx$$

e chiamato $\Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha\,x+1}\,dx$, dove è definita, calcolare

$$\lim_{\alpha\to 2} \Phi(\alpha)$$

CODICE=427812

Soluzione L'integrale è sempre convergente perchè il denominatore non si annulla mai per $x > 1$, dato che $x^2 + \alpha\, x + 1 \geq 1$ e $\frac{1}{x^2+\alpha\, x+1} < \frac{1}{x^2}$ permettendo di applicare il teorema del confronto. Svolgendo i calcoli si ha che se $0 < \alpha < 2$ il denominatore non si annulla mai e una primitiva è

$$\frac{2\arctan\left(\frac{\alpha+2x}{\sqrt{4-\alpha^2}}\right)}{\sqrt{4-\alpha^2}} \qquad 0 < \alpha < 2$$

e quindi

$$\Phi(\alpha) = \pi\sqrt{\frac{1}{4-\alpha^2}} - \frac{2\arctan\left(\frac{\alpha+2}{\sqrt{4-\alpha^2}}\right)}{\sqrt{4-\alpha^2}} \qquad 0 < \alpha < 2.$$

Nel caso $\alpha > 2$ il denominatore si annulla per $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}\right)$ e quindi scomponendo la frazione come

$$\frac{1}{x^2+\alpha\, x+1} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

si ottiene

$$\frac{1}{x^2+\alpha\, x+1} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4}}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha\right)+x} - \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}\right)+x}\right]$$

e quindi una primitiva è

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4}}\left[\log\left(\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha+2x\right) - \log\left(-\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha+2x\right)\right]$$

e pertanto si calcola

$$\Phi(\alpha) = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha+2}{-\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha+2}\right)}{\sqrt{\alpha^2-4}} \qquad \alpha > 2$$

e con la regola de L'Hopital

$$\lim_{\alpha\to 2}\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2\,x+1}\,dx.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione continua tale che $f \geq 1$ Dimostrare che per $0 < a < x$ si ha

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq x - a.$$

Se f soddisfa $f(x) \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ studiare la diseguaglianza

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq \frac{(x-a)^2}{2}$$

Soluzione Dal teorema del confronto si ha

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq \int_a^x 1\,dt = x - a.$$

Nel secondo caso la diseguaglianza è corretta. Si ha infatti

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq \int_a^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

e la diseguaglianza

$$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \geq \frac{(x-a)^2}{2} = \frac{x^2+a^2-2ax}{2}$$

quindi, semplificando, è soddisfatta se

$$a^2 \leq ax$$

e dato che $a > 0$ risulta vera se $x > a$.

CODICE=427812