

PARTE A

1. La derivata della funzione $(\sin(x))^{\cos(\pi x)}$ nel punto $x = 1/2$ vale

A: N.A. B: $\pi \sin(1/2)^{\cos(\pi/2)} \sin(\pi/2)$ C: $+\infty$ D: $-\pi \log(\sin(\frac{1}{2}))$ E: $\pi \log(\frac{\pi}{2})$

2. La funzione $f(x) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ è

A: iniettiva B: surgettiva C: derivabile almeno una volta D: N.A. E: negativa o nulla

3. La serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{3n + 4n^2} x^n$$

risulta convergente per

A: $|x| < 1$ B: $x = 0$ C: N.A. D: $-1 \leq x \leq 1$ E: \mathbb{R}

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x^2} > \frac{1}{e}\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ C: $\{1/e, 1/e, e, e\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

5. Il minimo della funzione $f(x) = 1 + |\tan(x)| e^{\sqrt[4]{1+x^2}}$ su $(-1, 1)$ è

A: N.A. B: N.E. C: 0 D: 1 E: $1 + \tan(\pi/4) |e^{\sqrt[4]{1+\pi^2/16}}|$

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\sin(x) \tan(x)}$$

vale

A: 1 B: 0 C: $+\infty$ D: N.A. E: $1/2$

7. L'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 3x} dx$$

vale

A: $\log(3/2)$ B: N.A. C: $\log(2/3)$ D: 0 E: 1

8. L'integrale

$$\int_2^3 \frac{2x}{1 - x^2} dx$$

vale

A: $\log(3/8)$ B: N.A. C: $\log(8/3)$ D: N.E. E: $\arctan(3) - \arctan(2)$

9. Data y soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ allora $y(1)$ vale

A: 0 B: e C: N.A. D: N.E. E: \sqrt{e}

10. Trovare il modulo del numero complesso $z \cdot \bar{w}$ dove $z = 2e^{i\pi}$ e $w = 1 + i$

A: $2 + 2i$ B: 2 C: $2\sqrt{2}$ D: N.A. E: $\sqrt{5}$

CODICE=658852

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2017

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=446754

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2017

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
8	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

CODICE=035270

CODICE=035270

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2017

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
10	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

CODICE=796987

CODICE=796987

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2017

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

CODICE=446754

CODICE=446754

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2017

PARTE B

1. a) Si studi la funzione $f(x) = |x^3|e^{-x}$ per $x > 0$, individuando in particolare i punti di massimo e minimo locale e assoluto.
b) Si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni di

$$ke^x = |x^3|.$$

Soluzione. a) La funzione si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x^3e^{-x}, & x \geq 0 \\ -x^3e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

e si ha immediatamente che $f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Per la derivata prima abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} (3-x)x^2e^{-x}, & x > 0 \\ (x-3)x^2e^{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

La funzione risulta anche derivabile in zero con $f'(0) = 0$. Inoltre la funzione è decrescente fino a zero, crescente fino al punto $x = 3$ e di nuovo decrescente per $x > 3$, quindi in $x = 0$ abbiamo un minimo locale e in $x = 3$ un massimo locale di valore $f(3) = \frac{27}{e^3}$. Per la derivata seconda abbiamo

$$f''(x) = \begin{cases} (x^2 - 6x + 6)xe^{-x}, & x > 0 \\ -(x^2 - 6x + 6)xe^{-x}, & x < 0 \end{cases},$$

e la funzione in zero è derivabile anche una seconda volta con $f''(0) = 0$. Dall'espressione della derivata segue che la funzione ha un flesso per $x = 3 - \sqrt{3}$ e uno in $x = 3 + \sqrt{3}$.

b) Per trovare il numero di soluzioni basta vedere quante soluzioni ammette $|x^3|e^{-x} = k$. Dallo studio di funzione segue immediatamente che il numero di soluzioni è : nessuna per $k < 0$; una per $k = 0$; tre per $0 < k < 27/e^3$; due per $k = 27/e^3$; una per $k > 27/e^3$.

2. a) Si consideri, per $n \in \mathbb{N}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = x^n \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Chiamata $y_n(x)$ la soluzione, si calcoli, al variare di n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(1/2).$$

CODICE=446754

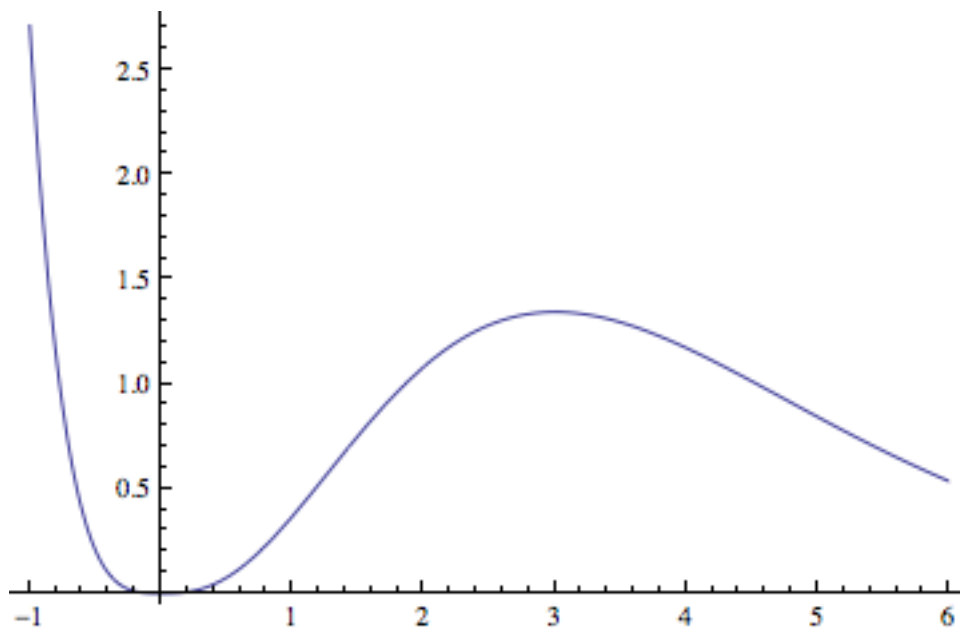


Figura 1: grafico approssimativo di $f(x) = |x^3|e^{-x}$

b) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = x^{-2} \\ y(1) = 0 \quad \text{e} \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. a) Integrando una volta si ottiene che $y'_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1$ e integrando una seconda volta si ha $y_n = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + c_1x + c_2$ e sostituendo le condizioni iniziali si ottiene che $y_n = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + x$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+2}(n+2)(n+1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Procedendo come prima si ha $y'_n = -\frac{1}{x} + c_1$ e $y_n = -\log(x) + c_1x + c_2$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $y_n = 2x - \log(x) - 2$.

3. Studiare, al variare di $a > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_0^5 \frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x^2 - 1} dx.$$

Se esistono valori di a per cui l'integrale risulta convergente, calcolarne il valore.

Soluzione. a) L'integrando si può scrivere come $\frac{(x-a)(x-2a)}{(x-1)(x+1)}$. Se $a \neq 1, 1/2$ allora vicino a $x = 1$ si ha che

$$\frac{x^2 - 3ax - 2a^2}{x^2 - 1} \sim \frac{1}{x - 1},$$

che diverge. Se invece $a = 1$ o $a = 1/2$ il denominatore si semplifica e la funzione risulta limitata in $[0, 5]$, dunque integrabile. Quindi l'integrale è convergente se e solo se $a = 1$ o $a = 1/2$.

CODICE=446754

b) Per $a = 1$ si ha

$$\int_0^5 \frac{x-2}{x+1} dx = \int_0^5 \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) dx = [x - 3 \log |x+1|]_0^5 = 5 - 3 \log(6).$$

In modo del tutto analogo per $a = 1/2$ si ottiene

$$\int_0^5 \frac{x-1/2}{x+1} dx = \int_0^5 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x+1}\right) dx = 5 - \frac{3}{2} \log(6).$$

4. Data la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \quad x \in]1/100, 1].$$

sia A l'insieme dei punti di massimo relativo e B l'insieme dei punti di minimo relativo. Calcolare

$$\#A - \#B.$$

Soluzione. Con la sostituzione $x = 1/t$, si scopre che il problema è equivalente a calcolare la differenza tra il numero di massimi e il numero dei minimi locali della funzione $g(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ per $t \in]1, 100[$. Sappiamo che i massimi relativi si ottengono quando $\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero per $t = 1 + 4k$ e che i minimi relativi si ottengono quando $\frac{\pi}{2}t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero per $t = 3 + 4k$. Quanti di questi punti stanno in $]1, 100[$? Per $k = 0$ nessun punto appartiene all'intervallo. Per $k = 1, \dots, 24$ entrambi i punti stanno nell'intervallo, mentre per $k \geq 25$ nessun punto appartiene all'intervallo considerato. Quindi $\#A - \#B = 0$.