PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-4x}\log(x)}$$
vale

   A: $+\infty$ B: $1/3$ C: 0 D: N.E. E: N.A.

2. Per $t>1$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=(t\log(t))^{-1}$ sono

   A: $\log(\log(t))+c$ B: N.A. C: N.E. D: $t\log(t)+c$ E: $\frac{t^2}{\log(t^2)}+c$

3. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono

   A: N.A. B: $(2,-\pi/4)$ C: $(2,\pi/4)$ D: $(1,\pi/4)$ E: $(\sqrt{2},\pi/4)$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}:\log(x^2)-1<0\}$$
valgono

   A: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}}\}$ B: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,\sqrt{\mathrm{e}},N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,0,N.E.\}$
   E: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,0,0\}$

5. La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+\mathrm{e}}{\sqrt{2}}x^2+1 & \text{per } x<0\\ \cos(x) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

6. La funzione $f:\ \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log(|x|)$ è

   A: surgettiva B: iniettiva C: monotona crescente D: N.A. E: convessa

7. Dato $\alpha\geq 0$, la serie
$$\sum_{n=27}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$
converge per

   A: $\alpha>0$ B: $\alpha\geq 0$ C: N.A. D: $0<\alpha<1$ E: $\alpha>1$

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\cos(3x)$ nel punto $x_0=\pi/2$ vale

   A: $2x+\frac{\pi}{3}$ B: $3x$ C: $3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ D: N.A. E: $\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

9. Data $f(x)=(\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a

   A: $\log(3\mathrm{e})$ B: $\pi/2$ C: $\log(\pi/2)$ D: $2/\pi$ E: N.A.

10. L'integrale
$$\int_{-2}^{2}\sqrt{(x+1)^2}\,dx$$
vale

    A: 4 B: 0 C: N.A. D: $5/2$ E: -5

CODICE=320343

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=320343

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^6 + \alpha\, x^4 + 1 = 0$$

Soluzione: La funzione f è pari e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Per $\alpha \geq 0$ la funzione $f(x) = x^6 + \alpha\, x^4 + 1$ è maggiore o uguale a 1, quindi non si annulla mai e non ci sono radici.

Studiamo ora il caso $\alpha < 0$. Si ha $f'(x) = 2x^3(3x^2 + 2\alpha)$, che si annulla per $x = 0$ per $x = \pm\sqrt{-2\alpha/3}$. Dallo studio del segno della derivata risulta che in $x = 0$ si ha un punto di massimo locale, mentre in $x = \pm\sqrt{\alpha/3}$ si ha un minimo locale. Dato che $f(0) = 1$ bisogna stabilire il segno del minimo. Calcolando $f(\pm\sqrt{\alpha/3}) = 1 + 4\alpha^3/27$ e pertanto, se $\alpha > -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, non ci sono soluzioni. Se $\alpha = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, ci sono 2 soluzioni e per $\alpha < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ ce ne sono 4.

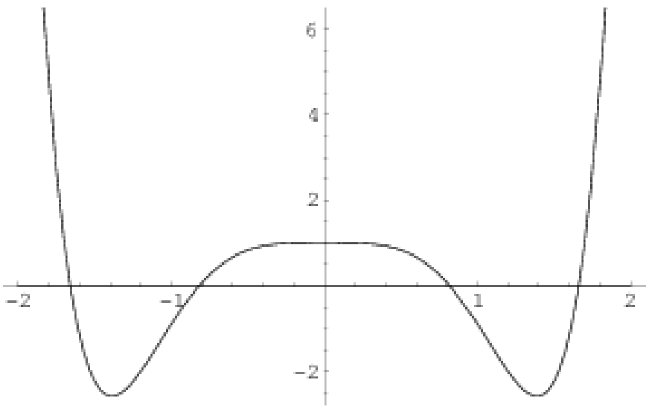

Figura 1: Andamento del grafico di f per $\alpha < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

CODICE=212670

Soluzione. Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ ha come radici $\lambda = 0, 1$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x.$$

Dato che 0 risolve l'equazione caratteristica abbiamo risonanza e quindi la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(x) = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ derivando e sostituendo otteniamo il sistema

$$-\alpha + 2\beta = -1 \qquad -2\beta + 6\gamma = 0 \qquad -3\gamma = 1,$$

che ha come soluzione

$$\alpha = -1 \qquad \beta = -1 \qquad \gamma = -1/3.$$

quindi l'integrale generale è

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x + c_1 + c_2 e^x$$

e imponendo le condizioni iniziali si trova la soluzione

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x - 2 + 2e^x.$$

3. Calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{1 - x^4}\, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge dato che la funzione integranda, sempre negativa nella semiretta considerata, si annulla come $-1/x^3$ per x che tende a più infinito. Scomponendola nella forma

$$\frac{x}{1-x^4} = \frac{1}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

si ottiene con facili calcoli che una primitiva è la funzione

$$G(x) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right|$$

da cui si ricava che

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{1-x^4}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{x}{1-x^4}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{4} \log \left| \frac{b^2+1}{b^2-1} \right| - \frac{1}{4} \log \left| \frac{3^2+1}{3^2-1} \right| = -\frac{1}{4} \log(5/4).$$

4. Sia per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\{a_n(x)\}_n$ la successione definita da

$$a_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k \right).$$

Verificare che $a_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ e usarlo per calcolare

$$\lim_{x \to 0} a_n(x)$$

Soluzione. Osserviamo che usando la formula per la somma di una progressione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{ix/2} e^{ix/2} (e^{inx} - 1)}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})},$$

CODICE=212670

pertanto

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{ix/2}}{\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2}} = \frac{\cos(n+1/2)x + i\sin(n+1/2)x - \cos(x/2) - i\sin(x/2)}{2i\sin(x/2)},$$

e quindi

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k\right) = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Sommando 1/2 si ottiene la formula cercata, da cui

$$\lim_{x\to 0} a_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2n+1)x/2 - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = n + \frac{1}{2}.$$

CODICE=212670