PARTE A

1. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$
A: $x = 1.99$ B: $x = -\sqrt{2}$ C: N.A. D: $x = \pi$ E: $x = -1.99$

2. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale
A: $1 + 2\cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: $1 + x^2 + o(x^5)$ D: N.A. E: $x^2 + o(x^3)$

3. inf min sup e max della funzione $x\sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono
A: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$ D: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$
E: N.A.

4. Date le funzioni $f(x) = \log(x + 1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in
A: $\mathbb{R}$ B: $(-1, +\infty)$ C: $(-\infty, 0)$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: N.A.

5. Il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x)\sin(2x)}$$
vale
A: 2 B: $\log(1/3)$ C: N.A. D: $1/2$ E: $1/3$

6. Data $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}\,|1 - x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a
A: N.A. B: N.E. C: $-2\mathrm{e}^2$ D: $2\mathrm{e}^2$ E: 0

7. L'integrale
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{\mathrm{e}^{3x} - 3x}\, dx$$
vale
A: $\log\left((\mathrm{e}^3 - 3)^{1/3}\right)$ B: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

8. L'argomento principale del numero complesso $i\frac{\mathrm{e}^{i27\pi}}{\mathrm{e}^{-i54\pi}}$ è uguale a
A: $\pi/4$ B: $\pi/2$ C: N.A. D: 0 E: $-\pi/2$

9. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale
A: N.A. B: $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

10. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $\mathrm{e}^x = -x + q$
A: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$ B: 1 C: N.A. D: nessuna E: 2

CODICE=406308

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=406308

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log|x + \lambda| - \lambda$$

Calcolare per $\lambda = 1$ e $x > 0$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f.

Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \neq -\lambda\}$ e in D la funzione risulta continua e derivabile (essendo composizione di funzioni derivabili per ogni $x \neq -\lambda$, dove la funzione non è definita). Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \log(x + \lambda) - \lambda & \text{se } x > -\lambda \\ \\ \log(-x - \lambda) - \lambda & \text{se } x < -\lambda \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to -\lambda} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x + \lambda}$$

che è positiva per $x > -\lambda$ e inoltre

$$f''(x) = -\frac{1}{(x + \lambda)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava nelle due semirette $\{x < -\lambda\}$ e in $\{x > -\lambda\}$, ma si osservi che non è globalmente concava. Il grafico approssimativo è quindi il seguente

La regione di piano in questione è delimitata dai punti $x_1 = 0$ dal punto di intersezione con l'asse delle x che è $x_2 = \mathrm{e} - 1$ (in tale intervallo la funzione f è negativa e quindi

$$A = \int_0^{\mathrm{e}-1} |\log|x + 1| - 1|\, dx = -\int_0^{\mathrm{e}-1} (\log((x) + 1) - 1)\, dx = \mathrm{e} - 2$$

CODICE=795200

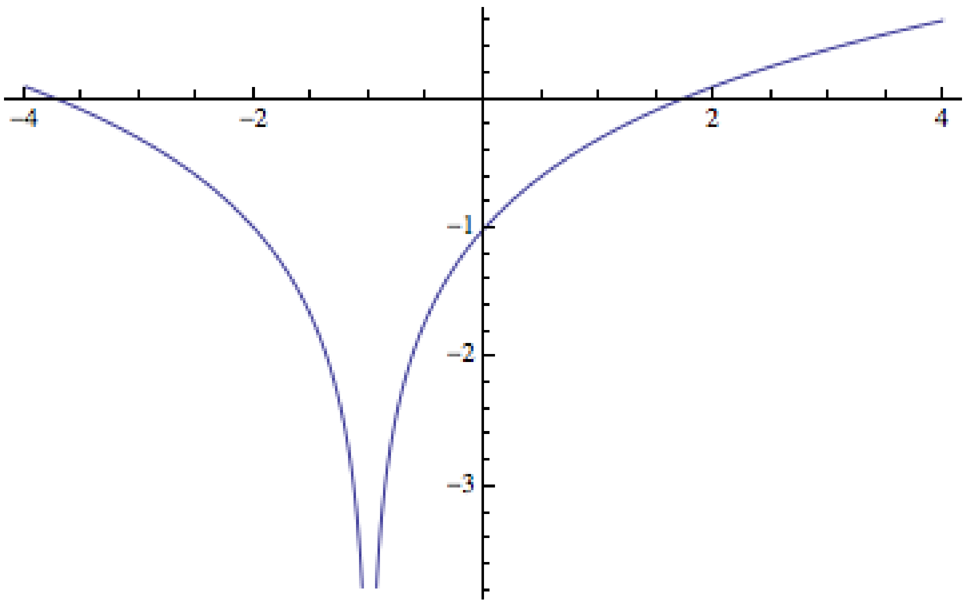

Figura 1: $f(x)$ per $\lambda = 1$

2. Trovare le soluzioni di
$$y''(x) - y(x) = -x.$$
Esistono soluzioni limitate su tutto $\mathbb{R}$?

Esistono soluzioni con un asintoto obliquo $\phi(x) = x$ per $x \to +\infty$?

Esistono soluzioni limitate inferiormente su tutto $\mathbb{R}$?

Soluzione. Troviamo intanto le soluzioni di $y'' - y = 0$. L'equazione associata ha la forma $\lambda^2 - 1 = 0$, quindi $\lambda = \pm 1$. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea si scrive come
$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$
Si vede immediatamente che una soluzione particolare è $y_f(x) = x$, quindi la soluzione generale dell'equazione data è
$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + x, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$
Vediamo che
$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } A \geq 0 \\ -\infty & \text{se } A < 0 \end{cases}$$
quindi non esistono soluzioni limitate su tutto $\mathbb{R}$.

Perchè la soluzione abbia un asintoto obliquo a destra, basta scegliere $A = 0$, infatti $\lim_{x\to\infty} Be^{-x} = 0$ per ogni $B \in \mathbb{R}$.

Per trovare se esistano soluzioni limitate inferiormente vediamo che
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } B > 0 \\ -\infty & \text{se } B \leq 0. \end{cases}$$
Allora se $A \geq 0$ e $B > 0$ abbiamo $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = +\infty$. Questo, unito allla continuità di $y(x)$ ci dice che scegliendo $A \geq 0$ e $B > 0$ otteniamo soluzioni limitate.

CODICE=795200

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)|\log(x)-1|^n$$

Soluzione.

Vediamo immediatamente che per $x = 1$ la serie diventa identicamente nulla, quindi converge (a zero).

Per $x \neq 1$ usiamo il criterio della radice, ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(x-1)|\log(x)-1|^n} = |\log(x)-1|$$

Quindi se $|\log(x)-1| < 1$ ovvero se

$$1 < x < e^2$$

la serie converge, mentre se

$$x > e^2 \text{ oppure } x < 1$$

la serie diverge.

Sappiamo già che per $x = 1$ la serie converge, mentre per $x = e^2$ la serie diventa

$$\sum_n n(e^2-1) = +\infty.$$

Concludendo, la serie converge se e solo se $1 \leq x < e^2$.

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x \sin^2(t)\,dt}{x^2} & x > 0 \\ a \quad x = 0 \\ x^2 + bx & x < 0 \end{cases}$$

Si determini per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua e per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile.

Calcolare, se esiste, la retta tangente al grafico nel punto $x_0 = \pi$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$,

Soluzione. La funzione è sicuramente continua e derivabile se $x \neq 0$ ed è rilevante studiare il comportamento solo in 0. Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

quindi intanto per avere la continuità da sinistra condizione necessaria è $a = 0$. La funzione è continua se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

e tale limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Usando l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{2x} = 0,$$

quindi f è continua se $a = 0$. Per la derivabilità (che ha senso studiare solo se $a = 0$) la derivata sinistra in zero vale

$$f'_-(0) = b.$$

La derivata destra è uguale a $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sin^2(t)\,dt}{x^3}$ che di nuovo è una forma indeterminata risolvibile con l'Hopital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

quindi la funzione è derivabile se $b = \frac{1}{3}$.
La retta tangente nel punto $x_0 = \pi$ vale

$$\phi(x) = f(\pi) + \phi'(\pi)(x - \pi)$$

calcoliamo $f(\pi)$

$$f(\pi) = \frac{\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi},$$

mentre

$$f'(\pi) = \frac{\pi^2 \sin^2(\pi) - 2\pi \int_0^\pi \sin^2(t)\,dt}{\pi^4} = -\frac{1}{\pi^2}.$$

dove abbiamo usato che $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x))$.

CODICE=795200