PARTE A

1. Data $f(x) = x^{|\log(x)|}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: $\log(2\mathrm{e})$ B: 2 C: $3\mathrm{e}^3$ D: 1 E: N.A.

2. L'integrale
$$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: 2 C: 2/3 D: 1/2 E: 0

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^4 - x^2 > -\frac{\pi}{2}\}$$
   valgono

   A: $\{-1, -1, +\infty., N.E\}$ B: $\{-\infty, N.E., 1, N.E.\}$ C: $(-\infty, N.E, +\infty, N.E.)$ D: $\{-1, N.E, 1., N.E\}$ E: N.A.

4. Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \begin{cases} b & \text{per } x < 2 \\ 1 & \text{per } x \geq 2. \end{cases}$

   Allora i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \pi + \int_0^x g(t)\, dt$ è continua sono

   A: $|b| \leq 1$ B: $b = 1$ C: $b \in \mathbb{R}$ D: $b \leq 1$ E: N.A.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: $1 + x$ B: $x - 1$ C: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ D: x E: N.A.

6. Sia y la soluzione di $y'(x) = \sin(\log(y(x)))$ con $y(1) = 1$, allora $y'(1)$ vale

   A: 0 B: $\sin(\log(y(x))$ C: N.A. D: 1 E: N.E.

7. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{x}{x-3}} - \mathrm{e})$$
   A: N.E. B: 2e C: N.A. D: 3e E: 0

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1 + i\big)^{-3}$ sono

   A: $(1/4, \pi)$ B: $(1/(2\sqrt{2}), \pi/4)$ C: $(1/(2\sqrt{2}), \pi)$ D: $(4, 0)$ E: N.A.

9. Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte
$$e^{-x^4} = \beta$$
   A: $\beta \in (0, +\infty)$ B: $\beta \in \mathbb{R}$ C: Nessun valore di β D: $\beta \in]0, 1[$ E: N.A.

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n \log(n^2)}{\mathrm{e}^n} (x - 1/\mathrm{e})^n$$
    vale

    A: 1/e B: e C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

CODICE=315691

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica I

30 giugno 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=315691

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica I

30 giugno 2014

PARTE B

1. Studiare, il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x+1}.$$

Soluzione: Per prima cosa osserviamo che la funzione non è definita per $x = -1$ e

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \\ \dfrac{x^2 - x}{x+1} & x < 0,\ x \neq \{-1\} \end{cases}$$

Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \\ \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} & x < 0,\ x \neq \{-1\}. \end{cases}$$

Per $x < 0$ la derivata si annulla solo per $x_0 = -1 - \sqrt{2}$ (l'altra soluzione è positiva) e la funzione non risulta derivabile per $x = 0$, infatti $f'_+(0) = 1$, mentre $f'_-(0) = -1$. Inoltre $f' > 0$ per $x < -1-\sqrt{2}$, mentre $f' < 0$ per $-1-\sqrt{2} < x < 0$, $x \neq -1$. Quindi in $x_0 = -1-\sqrt{2}$ si ha un punto di massimo locale, mentre la funzione è decrescente in $\{-1 - \sqrt{2}\} < x < -1 \cup \{-1 < x < 0\}$. Quindi 0 è punto di minimo locale, anche se $f'(0)$ non esiste.

Per concludere

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

e in $x = -1$ si ha un asintoto verticale

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

2. Risolvere l'equazione complessa

$$\mathrm{e}^z = \frac{\mathrm{e}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

Soluzione: Osserviamo che $\mathrm{e}^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$, quindi dobbiamo trovare a e b reali in modo che

$$\mathrm{e}^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

CODICE=892670

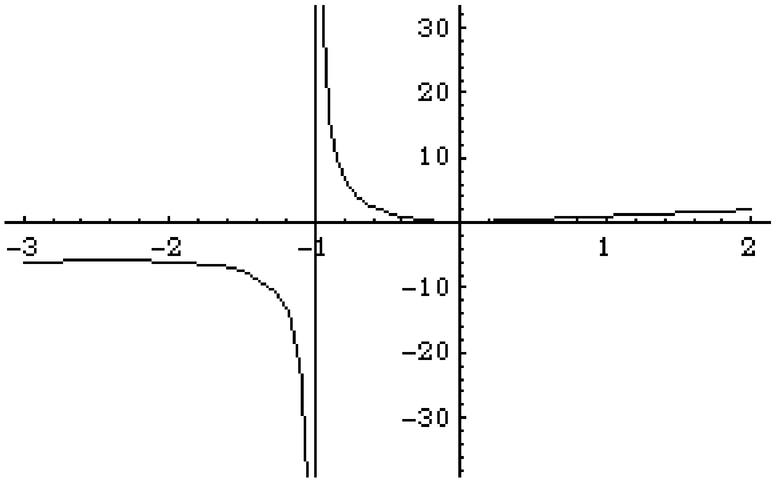

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x+1}$

da cui necessariamente $a = 1$, mentre $b = 2\pi/3$ a cui possiamo aggiungere multipli interi dell'angolo giro, da cui la soluzione

$$z = 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Studiare il limite

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y - 1}{y}$$

Soluzione: Il limite è del tipo $\frac{0}{0}$, applicando l'Hopital, si deve studiare il limite

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y(\log(y) + 1)}{1} = -\infty.$$

Il limite richiesto pertanto esiste ed assume lo stesso valore

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y - 1}{y} = -\infty.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione continua in $]0, 1[$, non necessariamente non negativa tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\sqrt{\sin(x)} = 2.$$

Dire, motivando la risposta se è vero che l'integrale

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

esiste ed è finito. Cosa si può dire se inoltre $f > 0$?

Soluzione: Se la funzione f non ha segno assegnato, può avvicinandosi a $x = 1$ assumere in valore assoluti numeri arbitrariamente grandi. Quindi f^2 può avere in $x = 1$ singolarità non integrabili, indipendentemente dal comportmento a 0. Inoltre anche supponendo che f sia positiva e limitata in un intorno di $x = 1$, dall'ipotesi si ha che $f(x) = O(1/\sqrt{x})$ per $x \to 0^+$. Quindi

$$f^2(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

in un intorno destro di zero, e pertanto risulta non integrabile.

CODICE=892670