PARTE A

1. Calcolare
$$\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
A: $\frac{25}{2}$ B: $\frac{3}{2}$ C: N.A. D: $\frac{9}{2}$ E: $+\infty$

2. La soluzione particolare di $y^{(iv)} - y^{(iii)} = x\,\mathrm{e}^{-x}$ è della forma
A: $x\,(a+bx)\mathrm{e}^{-x}$ B: $ax(\sin(x)+\cos(x))$ C: N.A. D: $ax\mathrm{e}^{-x}$ E: $(a+bx)\mathrm{e}^{-x}$

3. Quante soluzioni ha l'equazione $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$ per $x \in]0, 2\pi[$?
A: N.A. B: 2 C: 1 D: 0 E: 3

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \log(\mathrm{e}^x + 1) < 1\}$$
valgono
A: $\{-\infty, \mathrm{e}-1, N.E., 0\}$ B: $\{-\infty, N.E., \log(\mathrm{e}-1), N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-\infty, 0, N.E., 0\}$ E: N.A.

5. Calcolare l'immagine di $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-3x}$, per $x \in [0, +\infty[$
A: $[1, +\infty[$ B: $[0, 1[$ C: $[0, 1]$ D: N.A. E: $]-\infty, 1]$

6. Il limite
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(\cos(1-x))}{\sin^2(1-x)}$$
vale
A: $-1/2$ B: N.A. C: -1 D: $1/2$ E: N.E.

7. Il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0 = 0$ della funzione $\log(1+\cos(x))$ vale
A: $-x$ B: N.A. C: $1+x$ D: $2x$ E: $1+x-x^2$

8. L'integrale
$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$$
vale
A: $\arctan(4/3)$ B: N.A. C: $-1/4+\log(4/3)$ D: 0 E: $1-\log(4/3)$

9. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^4)}$, allora $f'(\sqrt[4]{\pi})$ vale
A: -3 B: 0 C: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$ D: N.A. E: $\sqrt{2\pi}$

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{n^3+2^n}{n}(x-2)^n$$
vale
A: N.A. B: 1/2 C: 0 D: 2 E: π

CODICE=393979

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 settembre 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=393979

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 settembre 2017

PARTE B

1. Si studi la funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{5x-3}{x^2+2x-3} \right),$$
e si studi poi l'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{-2} f(x)\, dx.$$
Soluzione. Si può scrivere
$$f(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{5x-3}{(x-1)(x+3)} \right),$$
in modo da scoprire immediatamente che la funzione è definita per $x \neq -3, x \neq 1$ e da studiare semplicemente il segno della funzione (positiva per $-3 < x < 3/5$ e per $x > 1$, nulla per $x = 3/5$, negativa altrove).
Calcolando i limiti agli estremi del dominio si ha
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
e
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0; \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Derivando la funzione una volta si ottiene
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(x^2+2x-3)^2} \left[x(5x^2+2x-15) \right]$$
che si annulla per $x = 0$ (punto di massimo relativo) e in $x = \frac{-1+2\sqrt{19}}{5}$ e $x = \frac{-1-2\sqrt{19}}{5}$ (punti di minimo relativo).
Nel dominio di integrazione si trova il punto $x = -3$, in cui la funzione ha un asintoto verticale. Vicino al punto $x = -3$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{x+3}$, e quindi la funzione non è integrabile su $(-\infty, -2)$.

2. Si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = x^2(1+y^2(x)), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

CODICE=156219

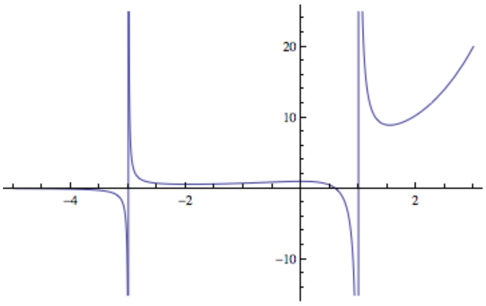

Figura 1: grafico approssimativo di $f(x)$.

Si dica poi se la soluzione $y(x)$ risulta convessa nell'intervallo $(0,1)$. La soluzione risulta convessa anche nell'intervallo $(0,2)$?

Soluzione. Si procede per separazione di variabili, ottenendo

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dY}{1+Y^2} = \int_0^x X^2 dX,$$

ovvero $\arctan(y(x)) - \arctan(1) = \frac{x^3}{3}$ e quindi

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Tale soluzione risulta definita per $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ ovvero per $-\sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi} < x < \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}$.

Per la convessità, si noti intanto che $\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi} > 1$ e quindi l'intervallo $(0,1)$ è contenuto nell'insieme di definizione della soluzione. Per calcolare la derivata seconda si può usare l'equazione differenziale, ottenendo

$$y''(x) = 2x(1+y^2) + x^2 \cdot 2yy' = 2x(1+y^2) + 2x^2y(x^2(1+y^2)).$$

Tutti i termini al quadrato sono sicuramente positivi. Il termine x è positivo su $(0,1)$ e anche $y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ è positivo su $(0,1)$ (perché in tal caso $0 < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$).

Se andiamo invece a considerare l'intervallo $(0,2)$ si scopre che non è più contenuto nell'insieme di definizione (infatti $\frac{3}{4}\pi < 8$, quindi $\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi} < 2$). Non ha senso, allora, chiedere se la soluzione sia convessa su $(0,2)$.

3. Sia data per $\alpha > 0$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^\alpha\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

Si determini:

a) per quali valori di α la serie è definitivamente a segno costante;

b) per quali valori di α il termine generico è infinitesimo;

a) per quali valori di α la serie è convergente.

CODICE=156219

Soluzione. a) Per $n >> 1$ sia $\frac{1}{n^3}$ che $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ diventano molto prossimi allo zero. Allora si ha $\sin^\alpha\left(\frac{1}{n^3}\right) > 0$ per ogni $\alpha > 0$ e $\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) > 0$. La serie risulta definitivamente a termini positivi.

b) Guardando all'ordine di infinitesimo si ha, definitivamente

$$\frac{\sin^\alpha\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{\frac{1}{n^{3\alpha}}}{\frac{1}{n^{9/2}}} = n^{\frac{9}{2}-3\alpha}.$$

Il termine generico è infinitesimo quando $\frac{9}{2} - 3\alpha < 0$ ovvero quando $\alpha > \frac{3}{2}$.

c) Per il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha, analogamente al punto precedente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^\alpha\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{9}{2}-3\alpha},$$

che converge se e soltanto se $\frac{9}{2} - 3\alpha < -1$ ovvero se $\alpha > \frac{11}{6}$.

4. Si dica (motivando adeguatamente le risposte) se le seguenti affermazioni sono vere

   a) $\sqrt{x^2} = x$ per $x \in \mathbb{R}$;

   b) $\sqrt{z^2} = z$ per $z \in \mathbb{C}$;

   c) $\sqrt[3]{z^3} = z$ per $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione. Sono tutte e tre false. Per a) basta considerare $x = -1$. Per b) e c) la radice complessa è l'insieme di *tutte* le soluzioni dell'equazione, quindi rappresenta un insieme di due (nel caso b)) o tre (nel caso c)) numeri complessi. A destra dell'uguaglianza invece abbiamo un solo numero complesso, che rappresenta una sola delle radici cercate.

CODICE=156219