PARTE A

1. Data $f(x) = -2\frac{x}{|x|}$. Allora $f'(-1)$ è uguale a

   A: N.E. B: -1 C: $\log(2)$ D: N.A. E: 0

2. inf min sup e max della funzione $2x^4 - x$ per $x \in (-1, 1)$ valgono

   A: $\{-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, 3, 3\}$ B: $\{1, 1, 3, 3\}$ C: N.A. D: $\{-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, N.E., 3, N.E.\}$

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log(1 + x + x^2)$ nel punto $x_0 = 1/2$ vale $\phi(x) =$

   A: $\log\left(\frac{8}{27}\right) + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$ B: $1 + x$ C: $\log\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{8}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ D: $\frac{8}{7}x + \log\left(\frac{7}{4}\right)$ E: N.A.

4. Sia $a > 0$, la funzione $f(x) = 3x^3 - ax$ è iniettiva da $[0, 1]$ in $[-6, 0]$ per

   A: $0 < a < 3$ B: $a > 8$ C: mai D: N.A. E: $a = 9$

5. Quante sono le soluzioni reali del'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0$

   A: 2 B: N.A. C: nessuna D: 3 E: 1

6. Il numero complesso $i/(1 - i) + (2i)^{-1}$ è uguale a

   A: N.A. B: $1 + i$ C: $-\frac{1}{2}$ D: $i - 1$ E: $2 + i$

7. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1 + x + x^{(10^9)}}$$

   vale

   A: 1 B: 1/2 C: N.A. D: N.E. E: 0

8. L'integrale

   $$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\log(t))^2}{t} dt$$

   vale

   A: 7/3 B: $\frac{8\mathrm{e}^3}{3}$ C: N.E. D: N.A. E: 5/3

9. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log(n)}{1 + n} x^n$$

   A: $x = -\sqrt{2}$ B: N.A. C: $x = 1/\pi$ D: $x = \pi$ E: $x = 1.99$

10. Il limite

    $$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\pi \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)$$

    vale

    A: N.E. B: N.A. C: 0 D: 1 E: $+\infty$

CODICE=152278

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

10 giugno 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=152278

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

10 giugno 2016

PARTE B

1. Si studi la funzione $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1|$ e se ne disegni un andamento approssimato. Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione f, dall'asse delle x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$.

   Soluzione. La funzione non è definita per $x = -1$. Si può esplicitare il valore assoluto della funzione ottenendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) & \text{per } x > -1 \\ \frac{x^2}{2} + \ln(-x-1) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

   Abbiamo che $f(0) = 0$. Poichè $\ln(-x-1)$ è positivo per $x < -2$ e tende a $-\infty$ per $x \to -1^-$, si può concludere che la funzione $f(x)$ ha almeno un altro zero per $x \in (-2, -1)$. La funzione inoltre è sicuramente positiva per $x > 0$ e $x < -2$.

   Ovviamente valgono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty.$$

   La derivata della funzione è

$$f'(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

   Se vogliamo studiare il segno basta vedere che $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ e considerare che il numeratore è sempre positivo.

   La derivata è sempre positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$. Possiamo concludere quindi che la funzione ha solo i due zeri trovati precedentemente.

   La derivata seconda vale

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

   quindi la derivata seconda è positiva per $x < -2$ e per $x > 0$ negativa per $-2 < x < -1$ e $-1 < x < 0$ e la funzione presenta due flessi (obliqui) in $x = -2$ e $x = 0$.

   Per il calcolo dell'integrale, basta calcolare l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ tra $x = 0$ e $x = 3/2$, ovvero

$$I = \int_0^{3/2} \frac{x^2}{2} + \ln(x+1)dx.$$

CODICE=550032

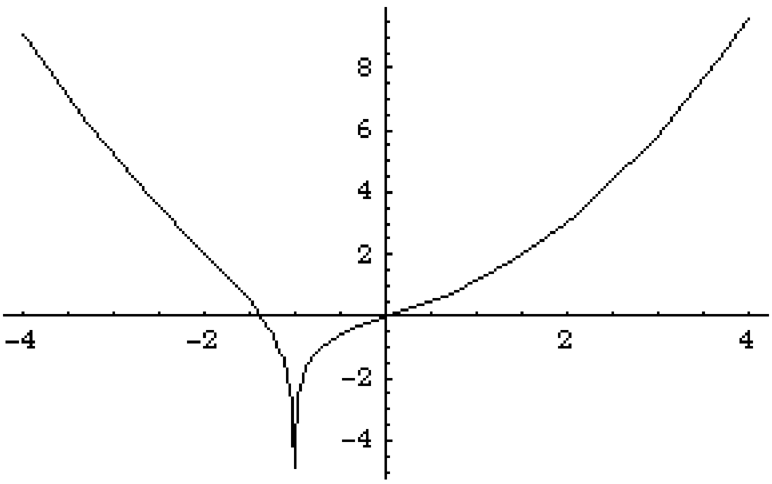

Figura 1: Grafico di $f(x)$

Immediatamente

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{16}.$$

Per il secondo termine usiamo l'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{3/2} 1 \cdot \ln(x+1)dx &= [x\ln(x+1)]_0^{3/2} - \int_0^{3/2} \frac{x}{x+1}dx \\ &= [x\ln(x+1)]_0^{3/2} - \int_0^{3/2} 1 - \frac{1}{x+1}dx \\ &= [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^{3/2} = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

quindi $I = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{15}{16}$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t)\log(y(t))}{t^2}, \\ y(-1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

e disegnarne il grafico.

Quanto vale $y(1)$?

Soluzione. Seprando le variabili si ottiene

$$\int \frac{dy}{y\log(y)} = \int \frac{dt}{t^2}$$

da cui

$$\log(\log(y(t)) = -\frac{1}{t} + c.$$

Tramite l'esponenziale si ottiene $y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{c-\frac{1}{t}}}$ e imponendo la condizione iniziale si ha pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}-1}}.$$

CODICE=550032

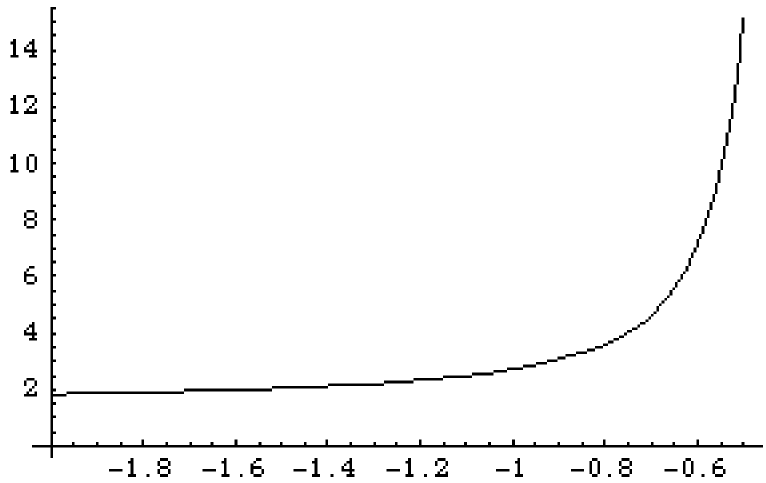

Figura 2: Grafico di $y(t)$

La soluzione deve essere una funzione di classe C^1 in un intervallo aperto contenente $t_0 = -1$ e risulta pertanto definita solo per $t < 0$, quindi $y(1)$ non esiste.

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx$$

Soluzione. Converge perchè $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \mathcal{O}(x^{-2})$. Inoltre, tramite la scomposizione in fratti semplici $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$ si ottiene

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx = -\frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + \log(x) + \arctan(x)$$

da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{4}(\pi + \log(4))$$

4. Sia $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione strettamente convessa, con un minimo in $x = 0$ di valore $f(0) = -1$.

   i) Si può affermare che $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$?

   ii) La conclusione precedente vale se valgono le stesse ipotesi, ma $f(x)$ è solo convessa (e non strettamente convessa)?

   iii) E se $f(x)$ è strettamente convessa ma non ha punti di minimo?

Soluzione. Se la funzione ha un minimo in $x = 0$ allora $f'(x) = 0$ per il teorema di Fermat, e, poichè f è strettamente convessa, allora $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Quindi $f(x)$ è crescente e quindi esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, per $L \in \mathbb{R}$ avremmo un assurdo, perchè la funzione dovrebbe avere un asintoto orizzontale, e quindi non potrebbe essere strettamente convessa.

Per una dimostrazione più formale, basta considerare un punto $x_0 > 0$. Sicuramente $f'(x_0) > 0$. La retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0 ha l'equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ e, per convessità, il grafico della funzione $f(x)$ è tutto sopra questa retta, quindi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \geq \lim_{x\to\infty} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = +\infty.$$

CODICE=550032

Se rimuoviamo l'ipotesi della stretta convessità possiamo solo concludere che il limite esiste, ma non che vale $+\infty$. Si prenda ad esempio la funzione $f(x) \equiv -1$.

Anche se rimuoviamo l'ipotesi dell'esistenza del minimo il risultato precedente non vale, si prenda ad esempio $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

CODICE=550032