PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^3 |x^2 - 1|\, dx$$
vale
A: $2/3$ B: N.A. C: $22/3$ D: 0 E: 6

2. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{x}{x-3}} - 2)$$
A: 3e B: N.E. C: $6\log(2)$ D: $-\log(64)$ E: 0

3. Sia data la funzione $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \begin{cases} b & \text{per } x < 2 \\ 1 & \text{per } x \geq 2. \end{cases}$
Allora i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \pi + \int_0^x \mathrm{e}^{\,g(t)}\, dt$ è continua sono
A: $|b| \leq 1$ B: $b \leq 1$ C: N.A. D: $b = 1$ E: $b \in \mathbb{R}$

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: N.A. B: x C: $1 + x$ D: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ E: $x - 1$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(2 + 2i\big)^{-3}$ sono
A: $(1/4, \pi)$ B: $(1/(2\sqrt{2}), \pi)$ C: $(1/(2\sqrt{2}), \pi/4)$ D: N.A. E: $(4, 0)$

6. Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte
$$e^{-x^3} = \beta$$
A: Nessun valore di β B: N.A. C: $\beta \in (0, +\infty)$ D: $\beta \in \mathbb{R}$ E: $\beta \in]0, 1[$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^4 - x^2 > -\frac{\pi}{2}\}$$
valgono
A: $(-\infty, N.E, +\infty, N.E.)$ B: $\{-1, -1, +\infty., N.E\}$ C: $\{-\infty, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E, 1., N.E\}$
E: N.A.

8. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n\, 3\log(n^3)}{\mathrm{e}^n}(x - 1/\mathrm{e})^n$$
vale
A: 1/e B: e C: 1 D: N.A. E: $+\infty$

9. Sia y la soluzione di $y'(x) = \cos(\log(y(x)))$ con $y(1) = 1$, allora $y'(1)$ vale
A: 1 B: N.E. C: N.A. D: 0 E: $\sin(\log(y(x))$

10. Data $f(x) = |x|^{|\log(x)|}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: 1 B: 2 C: N.A. D: $3\mathrm{e}^3$ E: log(2e)

CODICE=883578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=883578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2015

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin(x) \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Soluzione. La funzione in questione è continua e quindi assumerà massimo e minimo assoluto nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$. Risulta inoltre

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$$

pertanto la funzione risulta crescente in $]0, \pi/4[\cup]5\pi/4, 2\pi[$. Il punto $x_M = \pi/4$ è di massimo (assoluto), mentre $x_m = 5\pi/4$ è di minimo (assoluto). La derivata seconda

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \cos(x)$$

risulta positiva per $x \in]\pi, 2\pi[$, dove la funzione è convessa.

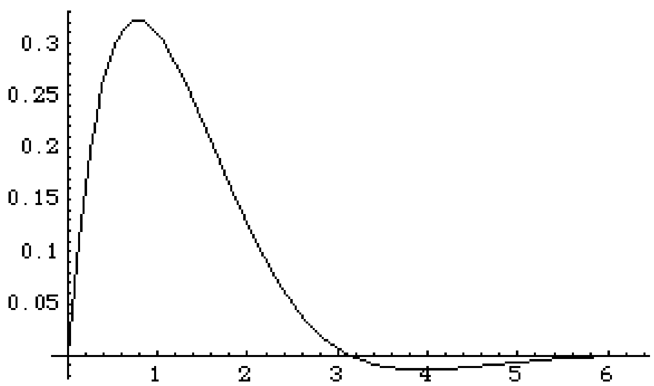

Figura 1: Andamento del grafico di $f(x)$.

2. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! n^3}{n^{\alpha n}}$$

CODICE=675508

Soluzione La serie è a termini non negativi e usiamo la formula di Stirling per approssimare il fattoriale. In tal modo

$$\frac{n!n^3}{n^{\alpha n}} \sim \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2+3-\alpha n}}{\mathrm{e}^n}$$

e usando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2+3-\alpha n}}{\mathrm{e}^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi}}\ \frac{n^{1+1/(2n)+3/n-\alpha}}{\mathrm{e}} = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ se } \alpha = 1 \\ +\infty, \text{ se } \alpha < 1 \end{cases}$$

e quindi si ha convergenza per $\alpha \geq 1$.

3. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{1/x}-1)^{2\alpha}}{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}$$

Soluzione La funzione integranda è non negativa e continua. Osserviamo che con lo sviluppo di Taylor in zero e cambiando variabile $y = 1/x$ si ha che $\mathrm{e}^{1/x} - 1 = \mathcal{O}(1/x)$ per $x \to +\infty$. Pertanto per $x \to +\infty$

$$\frac{(\mathrm{e}^{1/x}-1)^{2\alpha}}{1+x^\alpha+x^{2\alpha}} \sim \frac{x^{-2\alpha}}{1+x^\alpha+x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x^{4\alpha}}$$

e usando il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge per $\alpha > \frac{1}{4}$.

4. Trovare, se esistono dei valori $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tali che il problema

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

abbia soluzioni non nulle. **Soluzione** L'equazione caratteristica è $\xi^2 + \lambda = 0$ che ha come soluzioni $\xi = \pm i\sqrt{\lambda}$ quindi l'integrale generale risulta

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Imponendo $y(0) = 0$ si ottiene $c_1 = 0$. Pertanto la condizione

$$y(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

è soddisfatta con $c_2 \neq 0$ se

$$\sqrt{\lambda}\pi = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

cioè se $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

CODICE=675508