PARTE A

1. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

   A: derivabile ovunque B: iniettiva C: surgettiva D: convessa E: invertibile per $x \in [-2, -1]$

2. Data $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a

   A: $\sqrt{e}$ B: N.A. C: $-\frac{1}{2}$ D: 1 E: $\frac{1}{2}$

3. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = te^t$ sono

   A: N.A. B: $t^2e^{t^2} + c$ C: $e^t(t-1) + c$ D: $t\log(t) + c$ E: N.E.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x^2 : x \in B\},\ \text{dove } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^2\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., 2, 2\}$ C: $\{0, N.E., 4, 4\}$ D: $\{0, 0, 4, N.E.\}$ E: $\{-1, N.E., 2, N.E.\}$

5. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + 2\right)\left(\log\left(x^2 + 1\right) - \log x^2\right)$$

   vale

   A: $+\infty$ B: N.A. C: N.E. D: 0 E: 1

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\pi}{3.1415} & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: N.A. C: non è né continua né derivabile. D: è continua e derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

7. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$

   converge per

   A: $\alpha > 0$ B: $0 < \alpha < 1$ C: $\alpha \geq \mathrm{e}$ D: $\alpha > \pi$ E: N.A.

8. L'integrale

   $$\int_{-1}^{1} |1 - x|^2\, dx$$

   vale

   A: 0 B: 3/2 C: 5/2 D: N.A. E: 5/3

9. Il polinomio di Taylor di ordine 1 per $f(x) = \cos^2(3x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{18}$ vale

   A: $-3\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ B: $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ C: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \left(x - \frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ D: $3x + \frac{\pi}{18}$ E: N.A.

10. Dati i numeri complessi $z = 2 + i$ e $w = 1 - 3i$, qual è il risultato di $\frac{z}{w}$?

    A: $(2+i)(3i+1)$ B: N.A. C: $\frac{5-2i}{\sqrt{10}}$ D: $\frac{5-2i}{10}$ E: $\frac{7i-1}{10}$

CODICE=712394

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=712394

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

PARTE B

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1},$$
determinare il più grande intervallo contenente l'origine su cui f risulta invertibile. Calcolare inoltre, se possibile, la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto 1.

Soluzione Si ha
$$f'(x) = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$
e quindi $f'(0) = 10 > 0$. Allora il più grande intervallo contenente l'origine su cui f risulta invertibile è quello contenente l'origine in cui $f'(x) \geq 0$. Adesso $x^4 - 7x^2 + 10 \geq 0$ quando $x^2 \geq 5$ o $x^2 \leq 2$, quindi se $x \geq \sqrt{5}$, $x \leq -\sqrt{5}$ o $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Di questi l'unico intervallo che contiene l'origine è $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Abbiamo che $f(0) = 1$ e $x = 0$ rientra nell'intervallo, quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y = 1$. Con la formula di derivazione della funzione inversa, ne possiamo calcolare la derivata. Abbiamo
$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{10}.$$

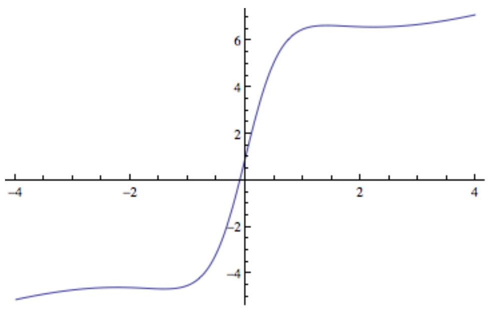

Figura 1: grafico approssimativo di $f(x)$

2. Risolvere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione Se $\alpha \neq 0$ le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y_0(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

Per trovare la soluzione particolare, partiamo da un polinomio di secondo grado $y_1(x) = ax^2 + bx + c$ e vediamo che $a = \frac{1}{\alpha^2}$, $b = 0$, $c = -\frac{2}{\alpha^4}$, quindi la soluzione generale diventa

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

e sostituendo le condizioni iniziali si ottiene $A = \frac{2}{\alpha^4}$ e $B = 0$. La soluzione dell'equazione differenziale per $\alpha \neq 0$ è

$$y(x) = \frac{2\cos(\alpha x) - 2}{\alpha^4} + \frac{x^2}{\alpha^2}$$

Per $\alpha = 0$, integrando semplicemente due volte, e imponendo le condizioni iniziali si ottiene immediatamente

$$y = \frac{x^4}{12}$$

3. Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}}\, dt$$

determinare l'insieme di definizione.

Soluzione Sicuramente per $x > 3$ la funzione F non è definita, per la presenza di $\sqrt{3-t}$ nell'integrale. I punti in cui l'integrando va controllato sono i due punti in cui il denominatore si annulla, ovvero $t = 0$ e $t = 3$. Per $t \to 3^-$ abbiamo che

$$\frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{3-t}}$$

e quindi la funzione risulta integrabile fino a $x = 3$. Quando $t \to 0$ abbiamo, usando il teorema dell'Hopital

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\sqrt{3-t} - \frac{t}{2\sqrt{3-t}}} = 0.$$

quindi la funzione in zero risulta limitata e quindi integrabile. Abbiamo quindi che il domino di F è $x \leq 3$.

4. Data la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$, dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)}$$

esiste ed è finito e eventualmente calcolarlo.

Soluzione Si vede immediatamente che il limite ha la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per vedere se esiste proviamo ad applicare il teorema dell'Hopital. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2f'(x) - 2f'(2x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\frac{\sin(x)}{x} - 2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1 - \frac{\sin(x)}{x}}$$

che continua ad essere una forma indeterminata. Sapendo però che lo sviluppo al secondo ordine in un intorno dell'origine di $\sin(x)$ vale $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ abbiamo

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad \text{e} \quad \frac{\sin(2x)}{2x} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2\frac{\sin(x)}{x} - 2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1-\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2-\frac{x^2}{3}) - (2-\frac{4x^2}{3}) + o(x^2)}{1-(1-\frac{x^2}{6}) + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 6.$$

Il teorema dell'Hopital ci garantisce allora che il limite cercato esiste, e vale 6 (e quindi è finito)