PARTE A

1. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\,dz$ vale
   A: $2t\sin(t^2+1)$ B: N.A. C: $2t\sin(t^2)$ D: $\sin(t^2)$ E: N.E.

2. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx$$
   vale
   A: $\sqrt{2}$ B: $7/2$ C: N.A. D: 0 E: $3/2$

3. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a
   A: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ B: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ C: $\alpha\log(3\mathrm{e})$ D: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$ E: N.A.

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
   A: N.A. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale
   A: N.A. B: $1 + x + x^2$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ D: $1 + x$ E: $1 + \sin(x)\,x$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono
   A: $(1, 44\pi)$ B: $(1, 3\pi/2)$ C: $(2, 44\pi)$ D: $(2, 2\pi/3)$ E: N.A.

7. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale
   A: 0 B: N.A. C: $+\infty$ D: 1 E: N.E.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$
   valgono
   A: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

9. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n>[\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge per
   A: N.A. B: $\alpha > 1$ C: $\alpha > 2$ D: $3 < \alpha < \pi$ E: $\alpha \geq 1$

10. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è
    A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: derivabile ovunque

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}} \qquad x > 0.$$

Soluzione. Se $\lambda = 0$ la funzione si riduce al logaritmo naturale, pertanto cominciamo a discutere il caso $\lambda > 0$ per poi passare a $\lambda < 0$, osservando che $f(1) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e che la derivata risulta

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}}(x - \lambda\log(x))}{x^2}.$$

Se $\lambda > 0$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Il segno della derivata dipende solo dal termine $g(x) = x - \lambda\log(x)$, dato che gli altri sono positivi. Osserviamo che per $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

La funzione g ha come derivata

$$g'(x) = 1 - \frac{\lambda}{x}$$

che si annulla con un cambio di segno per $x = \lambda$. Pertanto la funzione g ha un minimo per $x = \lambda$. Se il minimo è positivo non ci sono cambi di segno della derivata di f. Il valore minimo di g risulta $g(\lambda) = \lambda(1 - \log(\lambda))$ che è positivo se $\lambda < \mathrm{e}$, nullo se $\lambda = \mathrm{e}$ e negativo se $\lambda > \mathrm{e}$. Pertanto se $0 < \lambda < \mathrm{e}$ la funzione f' è sempre strettamente positiva e quindi f è monotona crescente. Se $\lambda = \mathrm{e}$ la derivata f' è sempre positiva eccetto che in $x = \mathrm{e}$, ma ancora la funzione f è strettamente crescente. Invece se $\lambda > \mathrm{e}$ la funzione f' si annulla in 2 punti $x_1 < \lambda < x_2$ e quindi f risulta crescente in $]0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ e decrescente all'interno. Il punto x_1 è un punto di massimo relativo mentre x_2 è un punto di minimo relativo.

Nel caso $\lambda < 0$ abbiamo invece

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

e di nuovo il segno della derivata dipende solo da g che ora soddisfa

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

CODICE=233769

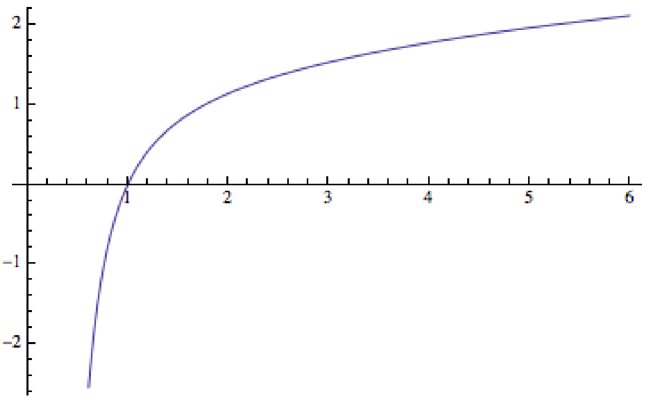

Figura 1: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < e$

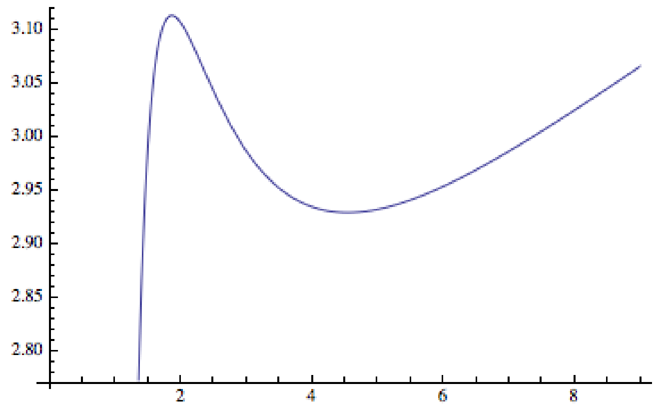

Figura 2: Andamento del grafico di f per $e < \lambda$

Inoltre $g'(x)$ non si annulla mai perchè $x = \lambda$ non ha soluzioni se $x > 0$ e $\lambda < 0$ quindi la derivata è negativa per $x < x_3$ e positiva per $x > x_3$. Il punto x_3 è quello dove si annulla $g(x)$ e osserviamo che $x_3 < 1$, dato che $g(1) = 1$ per ogni λ.

2. Studiare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)}$$

Soluzione. La serie in questione è a termini non negativi e usando lo sviluppo di Taylor si ottiene che

$$\sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)} = \log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)^{1/\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\beta/\alpha}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto la serie converge se e solo se

$$\frac{\beta}{\alpha} > 1.$$

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\, dx$$

CODICE=233769

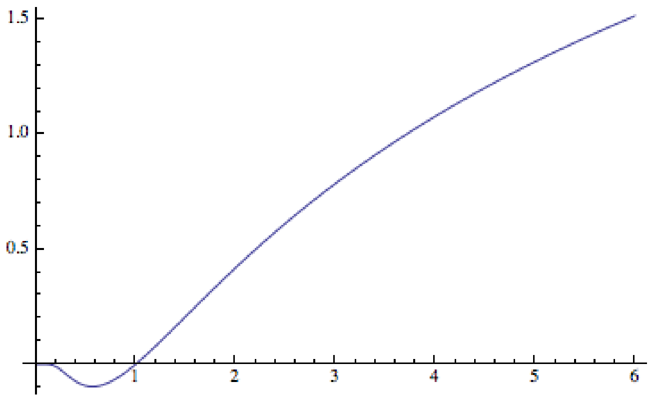

Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda < 0$

Soluzione. L'integrale in questione converge perchè la funzione integranda è non-negativa e

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Utilizzando la scomposizione in fattori razionali

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+3)}$$

si ottiene che una primitiva di f è la funzione $\frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)$. Pertanto

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)\Big|_1^b = \frac{1}{6}\log\left(\frac{256}{27}\right)$$

4. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che $y(0) = 0$ rende senza senso il lato destro, o perlomeno questo va inteso in un senso particolare di limite come per esempio risolvendo

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} \qquad \text{per } t \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0. \end{cases}$$

Manipolando comunque in maniera formale l equazione, separiamo le variabili ottenendo $ydy = \sin(t)dt$ e integriamo ottenendo

$$y^2 = 2(C - \cos(t)).$$

Se vogliamo $y(0) = 0$, allora $C = 1$. Quindi le soluzioni risultano

$$y(t) = \sqrt{2(1-\cos(t))} \qquad y(t) = -\sqrt{2(1-\cos(t))}$$

In questo caso entrambe le soluzioni sono accettabili, dato che sono funzioni derivabili per $t \neq 0$ e che si annullano per $t = 0$. Si ha un fenomeno di non unicità.

CODICE=233769

Osserviamo che in realtà non ci sono solo queste due soluzioni, dato che lo stesso fenomeno si ha anche per $t = 2k\pi$. Quindi ogni volta che viene raggiunto uno di questi punti, si può avere una soluzione che mantiene il segno o lo cambia e si può costruire una soluzione scegliendo arbitrariamente il segno davanti alla radice in ognuno degli intervalli $t \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

CODICE=233769