- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

5 Giugno 2018

 (Cognome)							_			(No	me)			-	(N	ume	ro d	i ma	trice	ola)						

1	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
3	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
4	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
5	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
6	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
7	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
8	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
9	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
10						

1. Il polinomio di Taylor di grado 4, relativo al punto $x_0=0$ della funzione $\sin(x^2)^2$ vale vale A: x^4 B: 0 C: $1-\frac{x^4}{2!}$ D: N.A. E: $x-\frac{x^3}{3!}$

2. L'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{4+3x^2}$$

vale

A: 1 B: 0 C: 2π D: N.A. E: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

3. Sia y la soluzione di

$$y'(t) = (y(t))^3$$
 $y(0) = 1$

allora y(1/4) vale

A: 0 B: N.A. C: $\sqrt{2}$ D: N.E. E: 1

4. Il numero di elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 4\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \pi/2\}$$

è

A: 4 B: N.A. C: Infiniti D: 1 E: 2

5. Data la funzione $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ allora $f'(\pi/2)$ vale A: N.E. B: N.A. C: 0 D: $\pi \cos(\pi/3)$ E: 1

6. Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $xe^{-1} = 1$ è

A: 1 B: 2 C: N.A. D: infinite E: 0

7. La funzione $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{-1}$ per $x \neq 0$ e f(0) = 0 è A: monotona B: N.A. C: limitata D: derivabile E: convessa

8. Sia $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$ la funzione parte intera di x. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|^{[x]} \, dx$$

vale

A: N.E. B: 0 C: N.A. D: 1 E: -1

9. Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=17}^{+\infty} n \log(\frac{n}{e})(x-2)^n$$

è

A: 1 B: 0 C: 2e D: N.A. E: ∞

10. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(t^2) dt & x > 0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$$

nel punto x = 0 è

A: non continua e non derivabile B: continua ma non derivabile C: non continua ma derivabile D: continua e derivabile E: N.A.

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

5 Giugno 2018

 (Cognome)							_			(No	me)			-	(N	ume	ro d	i ma	trice	ola)						

1	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
3	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
4	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
5	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
6	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
7	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
8	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
9	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
10					0	

1. Sia $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$ la funzione parte intera di x. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|^{[x]} \, dx$$

vale

A: N.E. B: N.A. C: -1 D: 0 E: 1

2. Sia y la soluzione di

$$y'(t) = (y(t))^3$$
 $y(0) = 1$

allora y(1/4) vale

A: $\sqrt{2}$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

3. La funzione $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{-1}$ per $x \neq 0$ e f(0) = 0 è A: monotona B: convessa C: N.A. D: limitata E: derivabile

4. Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=17}^{+\infty} n \log(\frac{n}{e})(x-2)^n$$

è

A: 0 B: ∞ C: 1 D: 2e E: N.A.

5. L'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{4+3x^2}$$

vale

A: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ B: 2π C: N.A. D: 1 E: 0

6. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(t^2) dt & x > 0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$$

nel punto x = 0 è

A: non continua ma derivabile B: non continua e non derivabile C: N.A. D: continua e derivabile E: continua ma non derivabile

7. Il numero di elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C}: \ z\overline{z} = 4\} \cap \{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Re}(z) = \pi/2\}$$

è

A: 2 B: 1 C: N.A. D: Infiniti E: 4

8. Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $xe^{-1} = 1$ è

A: 0 B: 2 C: 1 D: infinite E: N.A.

9. Il polinomio di Taylor di grado 4, relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x^2)^2$ vale vale

A:
$$1 - \frac{x^4}{2!}$$
 B: 0 C: x^4 D: N.A. E: $x - \frac{x^3}{3!}$

10. Data la funzione $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ allora $f'(\pi/2)$ vale

A: N.E. B: N.A. C: 1 D: 0 E: $\pi \cos(\pi/3)$

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

5 Giugno 2018

			(Co	gno	me)				_			(No	me)			-	ume	ro d	li ma	atrice	ola)

1	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
3	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
4	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
5	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
6	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
7	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
8	0	\bigcirc	0	0	0	
9	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
10		\bigcirc				

1. Il polinomio di Taylor di grado 4, relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x^2)^2$ vale vale A: 0 B: $x - \frac{x^3}{3!}$ C: x^4 D: N.A. E: $1 - \frac{x^4}{2!}$

2. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(t^2) dt & x > 0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$$

nel punto x = 0 è

A: continua ma non derivabile B: non continua e non derivabile C: non continua ma derivabile D: N.A. E: continua e derivabile

3. Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $xe^{-1} = 1$ è

A: infinite B: 1 C: 0 D: N.A. E: 2

4. Data la funzione $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ allora $f'(\pi/2)$ vale

A: 0 B: $\pi \cos(\pi/3)$ C: 1 D: N.A. E: N.E.

5. Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=17}^{+\infty} n \log(\frac{n}{e})(x-2)^n$$

è

 $A: \infty$ B: N.A. C: 2e D: 1 E: 0

6. Sia $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$ la funzione parte intera di x. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|^{[x]} \, dx$$

vale

A: N.E. B: N.A. C: 0 D: -1 E: 1

7. La funzione $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{-1}$ per $x \neq 0$ e f(0) = 0 è

A: N.A. B: derivabile C: monotona D: convessa E: limitata

8. L'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{4+3x^2}$$

vale

A: N.A. B: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ C: 0 D: 1 E: 2π

9. Il numero di elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 4\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \pi/2\}$$

è

A: 1 B: Infiniti C: 2 D: N.A. E: 4

10. Sia y la soluzione di

$$y'(t) = (y(t))^3$$
 $y(0) = 1$

allora y(1/4) vale

A: N.A. B: 0 C: $\sqrt{2}$ D: 1 E: N.E.

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

5 Giugno 2018

 (Cognome)							_			(No	me)			-	(N	ume	ro d	i ma	trice	ola)						

1	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
3	0	\bigcirc	0	\bigcirc	\bigcirc	
4	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
5	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
6	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
7	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
8	0	\bigcirc	0	\bigcirc	\bigcirc	
9	0	\bigcirc	0	\bigcirc	\bigcirc	
10	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	

1. Data la funzione $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ allora $f'(\pi/2)$ vale A: N.A. B: 1 C: 0 D: N.E. E: $\pi \cos(\pi/3)$

2. Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=17}^{+\infty} n \log(\frac{n}{e})(x-2)^n$$

è

A: 1 B: N.A. C: 2e D: 0 E: ∞

3. Il numero di elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 4\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \pi/2\}$$

è

A: 1 B: 4 C: 2 D: Infiniti E: N.A.

4. Sia $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$ la funzione parte intera di x. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|^{[x]} \, dx$$

vale

A: 1 B: N.E. C: -1 D: 0 E: N.A.

5. L'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{4+3x^2}$$

vale

A: N.A. B: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ C: 2π D: 1 E: 0

6. La funzione $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{-1}$ per $x \neq 0$ e f(0) = 0 è

A: limitata B: derivabile C: monotona D: convessa E: N.A.

7. Il polinomio di Taylor di grado 4, relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x^2)^2$ vale vale

A:
$$x - \frac{x^3}{3!}$$
 B: N.A. C: 0 D: $1 - \frac{x^4}{2!}$ E: x^4

8. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(t^2) dt & x > 0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$$

nel punto x = 0 è

A: N.A. B: continua e derivabile C: non continua e non derivabile D: continua ma non derivabile E: non continua ma derivabile

9. Sia y la soluzione di

$$y'(t) = (y(t))^3$$
 $y(0) = 1$

allora y(1/4) vale

A: N.A. B: 0 C: $\sqrt{2}$ D: N.E. E: 1

10. Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $xe^{-1} = 1$ è

A: 0 B: 2 C: N.A. D: infinite E: 1

5 Giugno 2018

															L				
			(Co	gnor	me)						(No	me)				ume		trice	ola)

1	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	0	\bigcirc	•	
3	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc	
4	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	•	
5	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc	
6	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	•	
7	0	•	0	\bigcirc	0	
8	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
9	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
10	0	\bigcirc	\bigcirc		0	

5 Giugno 2018

			(Co	gnor	me)						(No	me)				ume	i ma	trico	ola)

1		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
2		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
3	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
4	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
5		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
6	0	\bigcirc	\bigcirc	•	\bigcirc
7		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
8		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
9	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
10	0	\bigcirc	\bigcirc		\bigcirc

5 Giugno 2018

			(Co	gnor	me)						(No	me)				ume		trice	ola)

1	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc	
2	0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc		
3	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc	
4	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
5	0	\bigcirc	\bigcirc		\bigcirc	
6	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
7		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
8	0	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	
9	0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc	
10						

5 Giugno 2018

(Cognome)									(No	me)			_	(Numero di matricola)													

0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
0	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
0	•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	•
0	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	•
0		\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc
0	\bigcirc	•	\bigcirc	\bigcirc
•	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc	\bigcirc

5 Giugno 2018

PARTE B

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1 + x \log(x)) & \text{se } 0 < x < e \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto.

Soluzione. La funzione risulta continua per 0 < x < e, mentre non è continua in 0 dato che $f(0) = 0 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = \sin(1)$. Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = (\log(x) + 1)\cos(x\log(x) + 1)$$
 per $0 < x < \epsilon$

Per studiare il segno della derivata osserviamo che $(\log(x) + 1) > 0$ se $e^{-1} < x < e$, mentre si annulla per $x = e^{-1}$ e Il suo grafico approssimativo risulta

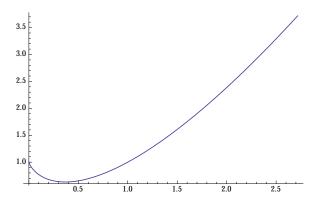


Figura 1: Grafico approssimativo di $1 + x \log(x)$

Per l'altro termine osserviamo che l'argomento del coseno, cioè $1+x\log(x)$ è decrescente per 0 < x < 1/e e crescente poi. Il minimo è positivo e l'estremo superiore viene raggiunto per x = e e vale $1 + e > \pi$.

La funzione $\cos(x \log(x) + 1)$ risulta positiva per $x < x_0$ dove $x_0 > 1/e$ è l'unico punto dove $\cos(1 + x_0 \log(x_0)) = 0$.

Pertanto risulta

$$f'(x) \quad \begin{cases} \text{negativa per } \{0 < x < e^{-1}\} \cup \{x_0 < x < e\} \\ \text{nulla per } x = e^{-1}, x_0 \\ \text{positiva per } \{e^{-1} < x < x_0\} \end{cases}$$

e quindi si ha un punto di minimo relativo in $x = e^{-1}$ e di massimo relativo in $x = x_0$. Il minimo assoluto non esiste perchè (ancora dalle considerazioni sull'argomento $1 + x \log(x)$ della figura 1) si ha che la funzione f(x) è positiva per $x < x_0$ e negativa e decrescente per $x_0 < x < e$.

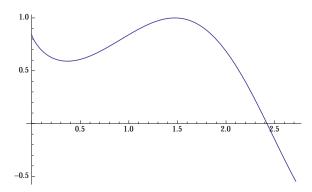


Figura 2: Grafico approssimativo di $f(x) = \sin(1 + x \log(x))$

2. Si risolva, per $n \in \mathbb{N}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'_n(x) + y_n(x) = x^n e^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si determini poi se esistono $n \in \mathbb{N}$ tali che la soluzione soddisfa

$$\lim_{x \to +\infty} y_n(x) = \frac{1}{n}$$

Soluzione L'equazione si può risolvere in vari modi, per esempio moltiplicando per e^x si ottiene

$$\frac{d}{dx}[y_n e^x] = x^n,$$

da cui si ottiene facilmente

$$y_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n+1}$$

e in particolare $\lim_{x\to+\infty} y_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} \, dx$$

e chiamato $\Phi(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha\,x+1}\,dx,$ dove è definita, calcolare

$$\lim_{\alpha \to 2} \Phi(\alpha)$$

Soluzione L'integrale è sempre convergente perchè il denominatore non si annulla mai per x>1, dato che $x^2+\alpha\,x+1\geq 1$ e $\frac{1}{x^2+\alpha\,x+1}<\frac{1}{x^2}$ permettendo di applicare il teorema del confronto. Svolgendo i calcoli si ha che se $0<\alpha<2$ il denominatore non si annulla mai e una primitiva è

$$\frac{2\arctan\left(\frac{\alpha+2x}{\sqrt{4-\alpha^2}}\right)}{\sqrt{4-\alpha^2}} \qquad 0 < \alpha < 2$$

e quindi

$$\Phi(\alpha) = \pi \sqrt{\frac{1}{4 - \alpha^2}} - \frac{2 \arctan\left(\frac{\alpha + 2}{\sqrt{4 - \alpha^2}}\right)}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \qquad 0 < \alpha < 2.$$

Nel caso $\alpha > 2$ il denominatore si annulla per $x_{1/2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4} \right)$ e quindi scomponendo la frazione come

$$\frac{1}{x^2+\alpha\,x+1}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

si ottiene

$$\frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha \right) + x} - \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4} \right) + x} \right]$$

e quindi una primitiva è

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \left[\log \left(\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha + 2x \right) - \log \left(-\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha + 2x \right) \right]$$

e pertanto si calcola

$$\Phi(\alpha) = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha + 2}{-\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha + 2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \qquad \alpha > 2$$

e con la regola de L'Hopital

$$\lim_{\alpha \to 2} \Phi(\alpha) = \frac{1}{2} = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \, dx.$$

4. Sia f(x) una funzione continua tale che $f \ge 1$ Dimostrare che per 0 < a < x si ha

$$\int_{a}^{x} f(t) dt \ge x - a.$$

Se f soddisfa $f(x) \ge x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ studiare la diseguaglianza

$$\int_{a}^{x} f(t) dt \ge \frac{(x-a)^2}{2}$$

Soluzione Dal teorema del confronto si ha

$$\int_{a}^{x} f(t) dt \ge \int_{a}^{x} 1 dt = x - a.$$

Nel secondo caso la diseguaglianza è corretta. Si ha infatti

$$\int_{a}^{x} f(t) dt \ge \int_{a}^{x} t dt = \frac{x^{2}}{2} - \frac{a^{2}}{2}.$$

e la diseguaglianza

$$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ge \frac{(x-a)^2}{2} = \frac{x^2 + a^2 - 2ax}{2}$$

quindi, semplificando, è soddisfatta se

$$a^2 < ax$$

e dato che a > 0 risulta vera se x > a.