PARTE A

1. Data $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$. Allora $f'(2)$ è uguale a

   A: N.A. B: 1 C: 2π D: 0 E: $-\frac{31}{9}$

2. L'integrale
$$\int_0^{-1} \arctan(x)\, dx$$
   vale

   A: 1 B: N.A. C: $\frac{\pi-\log(4)}{4}$ D: $\pi/2$ E: 0

3. La serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^2}(x-1)^n$$
   converge per

   A: $x \in [0,2]$ B: $x \in]-2,2[$ C: $x \in [0,2[$ D: N.A. E: $|x| < 1$

4. L'integrale
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[a]{x^4-1}}\, dx$$
   converge per a

   A: $a > 1$ B: $a \in [2,5]$ C: $a < 1$ D: $a \in]1,4[$ E: N.A.

5. Il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ di grado 3, relativo al punto $x_0 = 0$ vale

   A: $x + \frac{x^3}{3!}$ B: x^3 C: $x + \left(\frac{x}{2}\right)^3$ D: $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}$ E: N.A.

6. La funzione $f:\ [1,\pi^4] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - x$ è

   A: concava B: iniettiva C: non continua D: N.A. E: surgettiva

7. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y(t)y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$. Allora $y(\pi/3)$ vale

   A: $\sin(1)$ B: $\sqrt{2-\pi/3}$ C: $\pi/3$ D: 0 E: N.A.

8. L'argomento delle soluzioni di
$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$
   è

   A: $(\pi/3, \pi/6)$ B: $(0, \pi/2)$ C: $(\pi/2, -\pi/2)$ D: $(0, \pi)$ E: N.A.

9. Il limite
$$\lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x + x)^{1/x}$$
   vale

   A: 1 B: e C: N.E. D: N.A. E: e^2

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} :\ \tan(n^2/4) < 1\},$$
    valgono

    A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{-1, -1, 1, 1\}$ E: $\{0, 0, 1, 1\}$

CODICE=682238

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	●	○	○	○	○

CODICE=682238

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

PARTE B

1. Si studi per $\lambda > 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare se ne determinino gli intervalli di convessità.

Soluzione. La funzione $f(x)$ è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x^2}} = 0$$

da cui deduciamo che la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)/x = +1,$$

quindi la funzione ha asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$. Derivando la funzione una volta si ottiene, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x^2}}\left(1 + 2\lambda x^{-2}\right),$$

che è sempre positiva. Si verifica anche facilmente che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, da cui segue la continuità della derivata prima in 0. Derivando la funzione due volte troviamo, per $x \neq 0$,

$$f''(x) = \frac{2\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x^2}}\left(2\lambda - x^2\right)}{x^5}$$

La derivata seconda si annulla per $x = \pm\sqrt{2\lambda}$, è positiva per $x < -\sqrt{2\lambda}$ e per $0 < x < \sqrt{2\lambda}$, intervalli ove la funzione è convessa. Altrove è concava. Abbiamo quindi tre punti di flesso in $x_1 = -\sqrt{2\lambda}$, in $x_2 = 0$ e in $x_3 = \sqrt{2\lambda}$.

2. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3 y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

CODICE=441390

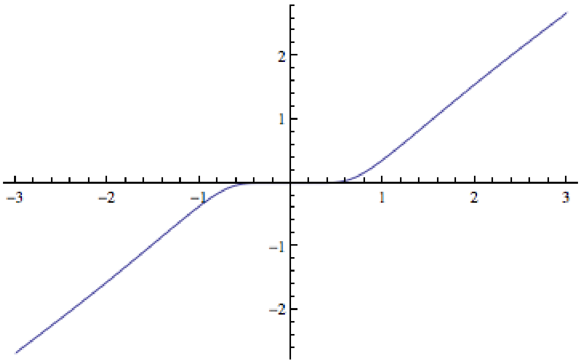

Figura 1: Grafico approssimativo di $f(x)$

per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

Si determini poi se esistono y_0 tali che la soluzione $y(x)$ corrispondente al dato iniziale y_0 è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$

Soluzione. L'equazione differenziale si può risolvere con il metodo del fattore integrante. Infatti se moltiplichiamo a sinistra e a destra dell'equazione per e^{x^4} troviamo

$$(\mathrm{e}^{x^4} y(x))' = x.$$

Integrando a sinistra e destra e tendendo conto della condizione iniziale $y(0) = y_0$ otteniamo

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x^4}\left(\int_0^x t\,dt + y_0\right)$$

ovvero

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x^4}\left(\frac{x^2}{2} + y_0\right).$$

Per ogni scelta di $y_0 \in \mathbb{R}$ vale $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\,dx$$

e chiamato $\Phi(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\,dx$, dove è definita, studiare

$$\lim_{\alpha\to0^+} \Phi(\alpha)$$

Soluzione. Ricordiamo che

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

e quindi

$$\frac{1}{\cosh(\alpha\, x)} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{e}^{-\alpha x}}.$$

Vogliamo verificare che gli integrali $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\,dx$ e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\,dx$ convergono per ogni $\alpha > 0$. Osserviamo che $\frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}$ è una funzione limitata ed integrabile su ogni intervallo del tipo $[0, c]$ con $c \in \mathbb{R}$ costante positiva arbitraria. Ci interessa quindi studiare il comportamento per $x \to +\infty$. In virtù della formula scritta sopra abbiamo per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\cosh(\alpha\, x)} \sim \frac{2}{\mathrm{e}^{\alpha x}}$$

CODICE=441390

ed in particolare possiamo dire per ogni α esiste $c_\alpha > 0$ tale che se $x > c_\alpha$ allora

$$\frac{1}{\cosh(\alpha\, x)} \sim \frac{2}{\mathrm{e}^{\alpha x}} < \frac{2}{x^2}.$$

Riassumendo, per ogni $\alpha > 0$ possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx = \int_0^{c_\alpha} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx + \int_{c_\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx$$

ove il primo integrale converge perché integriamo una funzione limitata su un intervallo limitato, mentre il secondo integrale converge perché maggiorato dall'integrale convergente $\int_{c_\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$. Infine, siccome $\cosh(\alpha x)$ è una funzione pari, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx$$

quindi anche l'integrale su $(-\infty, 0)$ converge. Usando che

$$\frac{1}{\cosh(\alpha\, x)} = \frac{2\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1},$$

calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx &= \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx \\
&= \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{2\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1}\, dx \\
&= \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{\alpha} \int_1^{\mathrm{e}^{\alpha a}} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt \\
&= \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{\alpha} [\arctan(t)]_1^{\mathrm{e}^{\alpha a}} \\
&= \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{\alpha} [\arctan(\mathrm{e}^{\alpha a}) - \pi/4] = \frac{\pi}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha\, x)}\, dx = \frac{\pi}{\alpha},$$

e

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \Phi(\alpha) = +\infty.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione continua e con derivata continua e che si annulla per $x = 0, 1$ Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\sin(nx)\, dx = 0.$$

Cosa si può dire invece di

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\cos(nx)\, dx?$$

Soluzione. Integrando per parti si ha

$$\int_0^1 f(x)\sin(nx)\, dx = -\frac{1}{n} f(x)\cos(nx)\Big|_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 f'(x)\cos(nx)\, dx$$

CODICE=441390

Il termine finito si annulla dato che $f(0) = f(1) = 0$, mentre l'integrale converge a zero, dato che f' è limitata e quindi

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^1 f'(x) \cos(nx)\, dx \right| \leq \frac{1}{n} \max_{[0,1]} |f'(x)| \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Con lo stesso ragionamento si ha anche

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(nx)\, dx = 0.$$

CODICE=441390