PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} [x] & \text{per } x < 1/2 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + a & \text{per } x \geq 1/2 \end{cases}$ è derivabile in $x_0 = 1/2$ per

   A: $a = k\pi$ B: $a \in \mathbb{R}$ C: mai D: N.A. E: $a = 1/8$

2. Dato $\alpha > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}}}{n^\alpha}$$
   converge per

   A: N.A. B: $\alpha > 0$ C: $1 < \alpha$ D: $\alpha = 2$ E: $\alpha \leq 1$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{1 + \frac{2n}{n^2+1} \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1\}$$
   valgono

   A: N.A. B: $\{1, N.E., 2, N.E.\}$ C: $\{2, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, 2, 2\}$ E: $\{1, N.E., 2, 2\}$

4. Sia y la soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{y(x)}$, $y(\pi/4) = 1$. Allora $y'(\pi/4)$ vale

   A: $\frac{\sqrt{3-2\cos^2(x)}}{\sqrt{2}}$ B: 0 C: N.A. D: 1/2 E: N.E.

5. L'integrale
$$\int_1^{\mathrm{e}} \log(x^2)\, dx$$
   vale

   A: $\sqrt{\mathrm{e}} - 1$ B: 2/e C: 2 D: 0 E: N.A.

6. Per $w = 1 + i\pi$, modulo e argomento del numero complesso $z = \mathrm{e}^w$ valgono

   A: (e, π) B: $(\mathrm{e}^2, \pi/2)$ C: $(\mathrm{e}, \pi/2)$ D: $(1, \pi)$ E: N.A.

7. Il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}\, dx$ vale

   A: N.E. B: 1 C: 1/2 D: 0 E: N.A.

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = x\log(x)$ nel punto $x_0 = 1/\mathrm{e}$ vale

   A: $-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}\left(x - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$ B: $1 + x + x^2$ C: $\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}\left(x - \frac{1}{e}\right)^2$ D: $-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}\left(x - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ E: N.A.

9. Il limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin(x^3)}{\sin(x)}$$
   vale

   A: 0 B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

10. Data $f(x) = \log|\sin^3(x)|$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

    A: N.A. B: 3e C: $\log(3\sin^2(\pi/4))$ D: $3\tan(1)$ E: 3

CODICE=661479

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 661479

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=661479

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2014

PARTE B

1. Studiare, l'immagine della funzione
$$f(x) = \frac{\left|e^{x^2+1} - 3\right|}{e^{x^2}}$$
Soluzione: Per prima cosa osserviamo che la funzione $f(x)$ è pari, $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ solo per $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Inoltre
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+1} - 3}{e^{x^2}} & \text{per } |x| \geq \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \\ \\ -\dfrac{e^{x^2+1} - 3}{e^{x^2}} & \text{per } |x| < \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \end{cases}$$
pertanto
$$f'(x) = \begin{cases} 2ex - 2e^{-x^2}\left(-3 + e^{x^2+1}\right)x & \text{per } |x| > \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \\ \\ -2ex + 2e^{-x^2}\left(-3 + e^{x^2+1}\right)x & \text{per } |x| < \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \end{cases}$$
$f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Inoltre la funzione non risulta derivabile in $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Inoltre la funzione risulta essere decrescente per $0 < x < \sqrt{\log(\frac{3}{e})}$ e crescente per $x > \sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Si ha pertanto un punto massimo locale per $x = 0$, dove $f(0) = 3 - e$, mentre si hanno due punti di minimo assoluto per $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$, dove la funzione si annulla ma non è derivabile. L'estremo superiore della funzione (ma non massimo assoluto) si ha agli estremi del dominio, e
$$e = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|e^{x^2+1} - 3\right|}{e^{x^2}}$$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{y(x)} \\ \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$$

CODICE=976478

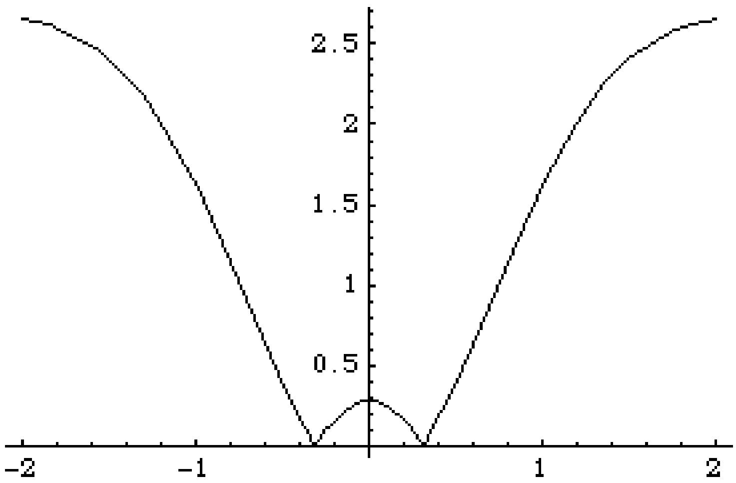

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{\left|e^{x^2+1}-3\right|}{e^{x^2}}$

Soluzione: Con separazione delle variabili si ottiene direttamente $\int y dy = \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$, da cui

$$y^2 = \frac{2}{3}\sin^3(x) + c.$$

Dato che $y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, solo la soluzione positiva della radice ha significato e imponendo la condizione iniziale si trova subito

$$y(x) = \frac{\sqrt{4\sin^3(x) - \sqrt{2} + 6}}{\sqrt{6}}$$

3. Studiare il limite

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\int_z^{z^2} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Soluzione: Con calcoli espliciti (dato che l'integrando è una funzione razionale)

$$\frac{1}{z}\int_z^{z^2} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\log\left(z^4+1\right) - \log\left(z^2+1\right) + 2\arctan\left(z^2\right) - 2\arctan(z)}{2z},$$

e pertanto, con i limiti notevoli, dato che il logaritmo cresce meno di ogni potenza di z, per $z \to +\infty$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\log\left(z^4+1\right) - \log\left(z^2+1\right) + 2\arctan\left(z^2\right) - 2\arctan(z)}{2z} = 0.$$

4. Dimostrare che se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste uno e uno solo $x_0 \in]a,b[$, tale che $f(x_0) = 0$.

Soluzione: Se per assurdo esistessero $a < x_1 < x_2 < b$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = 0$, allora per il teorema di Rolle esisterebbe $x_1 < \xi < x_2$ tale the $f'(\xi) = 0$. Essendo la funzione concava il punto ξ sarebbe di massimo assoluto e inoltre $f'(x) < 0$ in tutto l'intervallo $]\xi, b[$. Quindi la funzione sarebbe strettamente descrescente a destra di ξ ed essendo $f(x_2) = 0$ si avrebbe l'assurdo che

$$0 = f(x_2) > f(b) > 0.$$

CODICE=976478