PARTE A

1. Data $f(x) = x\sin(2^{-x})$. Allora $f'(1)$ è uguale a
   A: $\cos(1/2)$ B: $\sin(1/2) - \frac{\log 2}{2}\cos(1/2)$ C: $-2\sin(2)$ D: π E: $\sin(1/2) + \frac{\log 2}{2}\cos(1/2)$
2. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1}$ sono
   A: $(1, \pi)$ B: N.A. C: $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ D: $(1, \pi/2)$ E: $(1, \pi/8)$
3. La funzione $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{per } x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2x} & \text{per } x < 0, \end{cases}$ definita su tutto $\mathbb{R}$ è
   A: continua ma non derivabile B: derivabile C: N.A. D: monotona E: invertibile
4. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 8x\cos(x^2)$ è
   A: $2\sin(x^2)$ B: $4\cos(x^2)$ C: $\pi/2 + 4\sin(x^2)$. D: $4\sin(2x)$ E: N.A.
5. L'integrale
   $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(t)\,\cos^3(t)\,dt$$
   vale
   A: $1/8$ B: $1/16$ C: 0 D: $-1/16$ E: N.A.
6. Dato $a > 0$, la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^a}$$
   A: converge per $a \geq 2$ B: converge per $a \geq 1$ C: N.A. D: diverge E: converge per $a > 1$
7. Il limite
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x - 1)} - 1}{x}$$
   vale
   A: 0 B: 1 C: N.A. D: N.E. E: $+\infty$
8. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è derivabile per
   A: $a < 0$ B: $a \in \mathbb{R}$ C: N.A. D: $a \geq 1$ E: $a > 1$
9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt[3]{1 + \tan^2(2\pi x)}$ nel punto$x_0 = 1/8$ vale
   A: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi x - \frac{\sqrt{2}}{6} + \sqrt[3]{2}$ B: $\frac{8\pi}{3\sqrt[3]{4}}x - \frac{\pi}{3\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$ C: N.A. D: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi x - \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi + \sqrt[3]{2}$ E: $\frac{8\pi}{3\sqrt[3]{4}}\left(x - \frac{1}{8}\right)$
10. Inf, min, sup e max dell'insieme
    $$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \log 2^x < 2\}$$
    valgono
    A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., 1/\log\sqrt{2}, N.E.\}$
    C: $\{-\infty, N.E., \sqrt{2}/\sqrt{\log(2)}, \sqrt{2}/\sqrt{\log(2)}\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., 1/\log\sqrt{2}, 1/\log\sqrt{2}\}$

CODICE=202336

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 202336

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=202336

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

28 gennaio 2014

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt$$

Soluzione: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha
$$f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x^2}$$
Dallo studio del segno di f' si ricava che f è strettamente decrescente per $x < 1$ e strettamente crescente per $x > 1$. Dunque $x = 1$ è l'unico punto di minimo assoluto e il minimo vale $\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt$.
Calcolando il limiti agli estremi del dominio otteniamo, rispettivamente, poiché f è illimitata (vedi Fig. 1).
$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt = +\infty$$

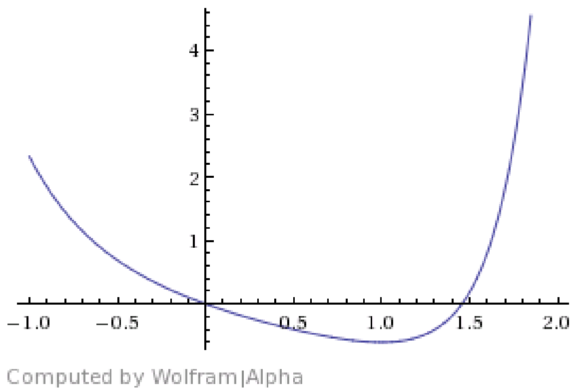

Figura 1: Andamento del grafico di f

Dallo studio del segno di $f''(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1 + 2x^2 - 2x)$ si ricava che $f'' > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, dunque f è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

CODICE=640703

2. Trovare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + \alpha^2 y(t) = \mathrm{e}^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione, $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$, ha radici $\pm i\,\alpha$. Se $\alpha \neq 0$ la soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)$$

Poiché 0 à secondo membro c'è un esponenziale, la soluzione particolare è del tipo

$$y_1(t) = ce^t$$

Sostituendo le derivate opportune di $y_1(t)$ all'equazione data otteniamo che $y_1(t)$ é soluzione se e solo se $c = \frac{1}{1+\alpha^2}$. Dunque la soluzione particolare è del tipo $y_1(t) = \frac{e^t}{1+\alpha^2}$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t) + \frac{e^t}{1+\alpha^2}$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo il sistema $\begin{cases} \dfrac{e^t}{1+\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}e^t = e^t \\ a + \dfrac{1}{1+\alpha^2} = 0 \\ b\alpha + \dfrac{1}{1+\alpha^2} = 1 \end{cases}$

con soluzioni $a = -\frac{1}{1+\alpha^2}$, $b = \frac{1}{1+\alpha^2}$.
Sostituendo tali valori nella soluzione generale otteniamo:

$$y(t) = -\frac{1}{1+\alpha^2}\cos(\alpha t) + \frac{1}{1+\alpha^2}\sin(\alpha t) + \frac{e^t}{1+\alpha^2}$$

.

Nel caso $\alpha = 0$, il problema omogeneo ha come soluzione $y_0(t) = c_0 + c_1 t$ e con lo stesso ragionamento si ottiene come soluzione

$$y(t) = 1 + \mathrm{e}^t - t.$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_1^2 \frac{x^4}{\sqrt{|1-x^5|}}\,dx.$$

Cosa si può dire di

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{|1-x^5|}}\,dx.$$

Soluzione: Dato che gli estremi di integrazione sono 1 e 2 e $|1-x^5| = x^5 - 1$ per $x > 1$, il primo integrale diventa

$$\int_1^2 \frac{x^4}{x^5-1}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5-1}\right]_1^0 = \frac{2}{5}\sqrt{31}$$

CODICE=640703

Per quanto riguarda il secondo integrale, bisogna innanzitutto spezzare spezzare l'integrale nella somma dell'integragle fra 0 e 1 (dove $|1-x^5| = 1-x^5$) e l'integrale fra 1 e $+\infty$ (dove $|1-x^5| = x^5-1$). Otteniamo dunque

$$\int_1^2 \frac{x^4}{x^5-1}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{1-x^5}\right]_0^1 + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x^4}{\sqrt{x^5-1}}\,dx = -\frac{2}{5} + \lim_{b\to+\infty}\sqrt{b^5-1}$$

Valendo il limite $+\infty$, l'integrale diverge.

4. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. È vero che se $(f(x))^2$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, allora f è continua su tutto $\mathbb{R}$?
b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $|f'(x)| \leq C_1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $(f(x))^2$ è derivabile, ma è vero che esiste $C_2 > 0$ tale che $\left|\frac{d}{dx}\frac{(f(x))^2}{2}\right| \leq C_2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?
Soluzione: a) L'affermazione è falsa. Infatti, presa la funzione discontinua in 0 definita da $f(x) = -1$, se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$, allora $(f(x))^2 \equiv 1$ continua
b) L'affermazione è falsa. Basta considerare $f(x) = x$, derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora$(f(x))^2$ è uguale a x^2 e dunque $\left|\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\right| = |2x|$ che è una funzione illimitata. Dunque non esiste $C_2 \geq 0$ tale che $|2x| \leq C_2$.

CODICE=640703