- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | | - | | | (No | me) | | | = | ume | ro d | i ma | trice | ola) | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|-----|-----|--|--|---|-----|------|------|-------|------|--|--|

| 1 | 00000 |
|----|--|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | 00000 |
| 7 | $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ |
| 8 | |
| 9 | 00000 |
| 10 | 00000 |

1. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-4x}\log(x)}$$

vale

A: $+\infty$ B: 1/3 C: 0 D: N.E. E: N.A.

- 2. Per t > 1 le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = (t \log(t))^{-1}$ sono A: $\log(\log(t)) + c$ B: N.A. C: N.E. D: $t \log(t) + c$ E: $\frac{t^2}{\log(t^2)} + c$
- 3. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono A: N.A. B: $(2,-\pi/4)$ C: $(2,\pi/4)$ D: $(1,\pi/4)$ E: $(\sqrt{2},\pi/4)$
- 4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \log(x^2) - 1 < 0\}$$

valgono

A:
$$\{-\sqrt{e}, -\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}\}$$
 B: $\{-\sqrt{e}, N.E., \sqrt{e}, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, N.E.\}$ E: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, 0\}$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi + e}{\sqrt{2}}x^2 + 1 & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

- 6. La funzione $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x|)$ è

 A: surgettiva B: iniettiva C: monotona crescente D: N.A. E: convessa
- 7. Dato $\alpha \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=27}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

converge per

A:
$$\alpha > 0$$
 B: $\alpha \ge 0$ C: N.A. D: $0 < \alpha < 1$ E: $\alpha > 1$

- 8. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale A: $2x + \frac{\pi}{3}$ B: 3x C: $3\left(x \frac{\pi}{2}\right)$ D: N.A. E: $\frac{3}{2}\left(x \frac{\pi}{2}\right)$
- 9. Data $f(x) = (\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a A: $\log(3e)$ B: $\pi/2$ C: $\log(\pi/2)$ D: $2/\pi$ E: N.A.
- 10. L'integrale

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{(x+1)^2} \, dx$$

vale

A: 4 B: 0 C: N.A. D:
$$5/2$$
 E: -5

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | | - | | | (No | me) | | | = | ume | ro d | i ma | trice | ola) | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|-----|-----|--|--|---|-----|------|------|-------|------|--|--|

| 1 | 0000 |
|----|-------|
| 2 | 0000 |
| 3 | 0000 |
| 4 | 00000 |
| 5 | 00000 |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | 0000 |
| 9 | 0000 |
| 10 | 00000 |

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale A: $2x + \frac{\pi}{3}$ B: 3x C: $\frac{3}{2}(x - \frac{\pi}{2})$ D: $3(x - \frac{\pi}{2})$ E: N.A.

2. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono A: $(\sqrt{2},\pi/4)$ B: $(1,\pi/4)$ C: $(2,\pi/4)$ D: $(2,-\pi/4)$ E: N.A.

3. Per t>1 le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=(t\log(t))^{-1}$ sono A: $\log(\log(t))+c$ B: $t\log(t)+c$ C: $\frac{t^2}{\log(t^2)}+c$ D: N.A. E: N.E.

4. La funzione $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x|)$ è
A: iniettiva B: monotona crescente C: convessa D: N.A. E: surgettiva

5. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-4x}\log(x)}$$

vale

A: 1/3 B: 0 C: N.A. D: $+\infty$ E: N.E.

6. Dato $\alpha \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=27}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

converge per

A: N.A. B: $0 < \alpha < 1$ C: $\alpha \ge 0$ D: $\alpha > 0$ E: $\alpha > 1$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \log(x^2) - 1 < 0\}$$

valgono

A: $\{-\sqrt{e}, N.E., \sqrt{e}, N.E.\}$ B: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, N.E.\}$ C: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, 0\}$ D: N.A. E: $\{-\sqrt{e}, -\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}\}$

8. L'integrale

$$\int_{-2}^2 \sqrt{(x+1)^2} \, dx$$

vale

A: N.A. B: -5 C: 5/2 D: 4 E: 0

9. Data $f(x) = (\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a A: $2/\pi$ B: N.A. C: $\log(3e)$ D: $\pi/2$ E: $\log(\pi/2)$

10. La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi + e}{\sqrt{2}}x^2 + 1 & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$

A: è continua e derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: N.A. D: è derivabile, ma non continua. E: è continua, ma non derivabile.

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | | - | | | (No | me) | | | = | ume | ro d | i ma | trice | ola) | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|-----|-----|--|--|---|-----|------|------|-------|------|--|--|

| 1 | 00000 |
|----|-------|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | 0000 |

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \log(x^2) - 1 < 0\}$$

valgono

A:
$$\{-\sqrt{e}, -\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}\}$$
 B: $\{-\sqrt{e}, N.E., \sqrt{e}, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, 0\}$ E: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, N.E.\}$

2. Dato $\alpha \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=27}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

converge per

A: $0 < \alpha < 1$ B: N.A. C: $\alpha \ge 0$ D: $\alpha > 1$ E: $\alpha > 0$

3. La funzione
$$f(x)=\left\{ egin{array}{ll} \dfrac{\pi+\mathrm{e}}{\sqrt{2}}x^2+1 & \quad \mathrm{per}\ x<0 \\ & \quad \cos(x) & \quad \mathrm{per}\ x\geq0 \end{array} \right.$$

A: è derivabile, ma non continua. B: è continua e derivabile. C: N.A. D: non è né continua né derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

4. Data $f(x) = (\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a A: $2/\pi$ B: $\log(3e)$ C: $\pi/2$ D: $\log(\pi/2)$ E: N.A.

5. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-4x}\log(x)}$$

vale

A: N.E. B: N.A. C: 0 D:
$$1/3$$
 E: $+\infty$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono

A: N.A. B:
$$(2, -\pi/4)$$
 C: $(2, \pi/4)$ D: $(1, \pi/4)$ E: $(\sqrt{2}, \pi/4)$

7. Per t>1 le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=(t\log(t))^{-1}$ sono

A:
$$\frac{t^2}{\log(t^2)} + c$$
 B: N.A. C: $t \log(t) + c$ D: N.E. E: $\log(\log(t)) + c$

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\cos(3x)$ nel punto $x_0=\pi/2$ vale

A:
$$2x + \frac{\pi}{3}$$
 B: $3x$ C: $\frac{3}{2}(x - \frac{\pi}{2})$ D: $3(x - \frac{\pi}{2})$ E: N.A.

9. La funzione $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x|)$ è

A: iniettiva B: convessa C: N.A. D: monotona crescente E: surgettiva

10. L'integrale

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{(x+1)^2} \, dx$$

vale

A: N.A. B: 4 C: 0 D:
$$-5$$
 E: $5/2$

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | | - | | | (No | me) | | | = | ume | ro d | i ma | trice | ola) | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|-----|-----|--|--|---|-----|------|------|-------|------|--|--|

| 1 | 0000 |
|----|-------|
| 2 | |
| 3 | 0000 |
| 4 | 0000 |
| 5 | 00000 |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | 0000 |
| 9 | 0000 |
| 10 | 0000 |

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale A: $\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ B: $3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ C: $2x + \frac{\pi}{3}$ D: N.A. E: 3x

2. Dato $\alpha \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=27}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

converge per

A: $\alpha > 0$ B: $\alpha > 1$ C: $0 < \alpha < 1$ D: $\alpha \ge 0$ E: N.A.

3. La funzione $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x|)$ è
A: convessa B: monotona crescente C: N.A. D: iniettiva E: surgettiva

4. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono A: $(\sqrt{2},\pi/4)$ B: $(2,-\pi/4)$ C: $(1,\pi/4)$ D: $(2,\pi/4)$ E: N.A.

5. Data $f(x) = (\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a A: $\log(\pi/2)$ B: $\log(3e)$ C: $\pi/2$ D: N.A. E: $2/\pi$

6. Per t>1 le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=(t\log(t))^{-1}$ sono A: $t\log(t)+c$ B: N.E. C: $\frac{t^2}{\log(t^2)}+c$ D: N.A. E: $\log(\log(t))+c$

7. L'integrale

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{(x+1)^2} \, dx$$

vale

A: 5/2 B: N.A. C: 0 D: -5 E: 4

8. La funzione $f(x)=\left\{ egin{array}{ll} \dfrac{\pi+\mathrm{e}}{\sqrt{2}}x^2+1 & \quad \mathrm{per}\ x<0 \\ & \quad \cos(x) & \quad \mathrm{per}\ x\geq0 \end{array} \right.$

A: N.A. B: è continua, ma non derivabile. C: è continua e derivabile. D: è derivabile, ma non continua. E: non è né continua né derivabile.

9. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-4x}\log(x)}$$

vale

A: N.A. B: $+\infty$ C: 1/3 D: 0 E: N.E.

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \log(x^2) - 1 < 0\}$$

valgono

A: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, N.E.\}$ B: $\{-\sqrt{e}, N.E., 0, 0\}$ C: $\{-\sqrt{e}, N.E., \sqrt{e}, N.E.\}$ D: N.A. E $\{-\sqrt{e}, -\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}\}$

9 gennaio 2015

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di matricola) |
|-----------|--------|-----------------------|

| 1 | |
|----|--|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | | - | | | (No | me) | | | = | ume | ro d | i ma | trice | ola) | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|-----|-----|--|--|---|-----|------|------|-------|------|--|--|

| 1 | |
|----|--|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | | | | (Numero di matricola) | | | | | | | | | | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|-----------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

| 1 | |
|----|--|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

9 gennaio 2015

| (Cognome) | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | | | | (Numero di matricola) | | | | | | | | | | | |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|-----------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

| 1 | |
|----|--|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

9 gennaio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^6 + \alpha x^4 + 1 = 0$$

Soluzione: La funzione f è pari e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Per $\alpha\geq 0$ la funzione $f(x)=x^6+\alpha\,x^4+1$ è maggiore o uguale a 1, quindi non si annulla mai e non ci sono radici. Studiamo ora il caso $\alpha<0$. Si ha $f'(x)=2x^3(3x^2+2\alpha)$, che si annulla per x=0 per $x=\pm\sqrt{-2\alpha/3}$. Dallo studio del segno della derivata risulta che in x=0 si ha un punto di massimo locale, mentre in $x=\pm\sqrt{\alpha/3}$ si ha un minimo locale. Dato che f(0)=1 bisogna stabilire il segno del minimo. Calcolando $f(\pm\sqrt{\alpha/3})=1+4\alpha^3/27$ e pertanto, se $\alpha>-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, non ci sono soluzioni. Se $\alpha=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, ci sono 2 soluzioni e per $\alpha<-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ ce ne sono 4.

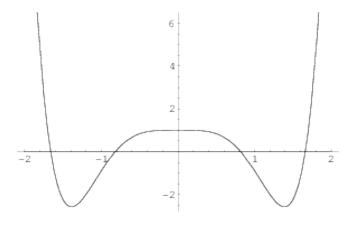


Figura 1: Andamento del grafico di f
 per $\alpha < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ ha come radici $\lambda = 0, 1$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x.$$

Dato che 0 risolve l'equazione caratteristica abbiamo risonanza e quindi la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(x) = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ derivando e sostituendo otteniamo il sistema

$$-\alpha + 2\beta = -1 \qquad -2\beta + 6\gamma = 0 \qquad -3\gamma = 1,$$

che ha come soluzione

$$\alpha = -1$$
 $\beta = -1$ $\gamma = -1/3$.

quindi l'integrale generale è

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x + c_1 + c_2 e^x$$

e imponendo le condizioni iniziali si trova la soluzione

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x - 2 + 2e^x.$$

3. Calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{1 - x^4} \, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge dato che la funzione integranda, sempre negativa nella semiretta considerata, si annulla come $-1/x^3$ per x che tende a più infinito. Scomponendola nella forma

$$\frac{x}{1-x^4} = \frac{1}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

si ottiene con facili calcoli che una primitiva è la funzione

$$G(x) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right|$$

da cui si ricava che

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{x}{1 - x^4} \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{3}^{b} \frac{x}{1 - x^4} \, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{4} \log \left| \frac{b^2 + 1}{b^2 - 1} \right| - \frac{1}{4} \log \left| \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} \right| = -\frac{1}{4} \log(5/4).$$

4. Sia per ogni $x \in \mathbb{R} \{a_n(x)\}_n$ la successione definita da

$$a_n(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n (e^{ix})^k\right).$$

Verificare che $a_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ e usarlo per calcolare

$$\lim_{x \to 0} a_n(x)$$

Soluzione. Osserviamo che usando la formula per la somma di una progressione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{ix/2} e^{ix/2} (e^{inx} - 1)}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})},$$

pertanto

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\cos(n+1/2)x + i\sin(n+1/2)x - \cos(x/2) - i\sin(x/2)}{2i\sin(x/2)},$$

e quindi

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^{k}\right) = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Sommando 1/2 si ottiene la formula cercata, da cui

$$\lim_{x \to 0} a_n(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2n+1)x/2 - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = n + \frac{1}{2}.$$