PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+\sin(x))}{\log(x-\cos(x))}$$
vale
A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: 1/2

2. Il massimo e minimo della funzione $f(x)=x^3-x$ su $[-2,0]$ sono
A: max $=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, min $=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ B: max $=\frac{2}{9}\sqrt{3}$, min $=-6$ C: entrambi non esistono D: max $=\frac{2}{9}\sqrt{3}$, non esiste min E: N.A.

3. La retta tangente al grafico di $y(x)=\log(x-x^3)$ nel punto $x_0=1/3$ vale $\phi(x)=$
A: $-\log\left(\frac{8}{3}\right)+\frac{9}{4}x$ B: $\log\left(\frac{8}{27}\right)+2\left(x-\frac{1}{3}\right)$ C: N.A. D: $\log\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)$ E: $1-x$

4. L'integrale
$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$
vale
A: 1 B: 0 C: -1 D: N.E. E: N.A.

5. La funzione $f:[0,\mathrm{e}]\to[0,10]$ definita da $f(x)=\lambda\,x\,\mathrm{e}^{-x}$ è suriettiva per $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che
A: $\lambda=\log(10)$ B: per nessun λ C: $\lambda=10\mathrm{e}$ D: $\lambda=1$ E: N.A.

6. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+\log(n)}{n^3+2^n}x^n$$
A: $x=1/3$ B: $x=\pi$ C: $x=0.99$ D: $x=-1$ E: N.A.

7. La disequazione $|x|\leq|z|$, con $z\in\mathbb{C}$ e $x\in\mathbb{R}$ è vera se
A: mai B: $z=2i^3$ e $x=3$ C: $z=\frac{3}{i}-2i$ e $x=\pi$ D: $z=1+i$ e $x=-3$ E: N.A.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{Q}\cap[-10,10]:\sin(\pi x)=0\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{-10,N.E.,10,N.E.\}$ C: $\{-1,-1,1,1\}$ D: $\{-\infty,N.E.,+\infty,N.E.\}$ E: $\{-1,N.E.,1,N.E.\}$

9. Data $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
A: N.A. B: -1 C: 1 D: 0 E: $\log(2)$

10. L'integrale
$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$
vale
A: $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}$ B: N.A. C: $-\frac{2}{5}x^{-5/2}$ D: $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ E: N.E.

CODICE=510289

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=510289

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 febbraio 2016

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \int_2^x \frac{\cos(\pi t)}{2t+1}\, dt$$

in $[-1/2, 5/2]$, determinando in particolare punti di massimo e di minimo, intervalli di convessità e il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0 = 2$..

Soluzione. Osserviamo intanto che la funzione $\frac{\cos(\pi t)}{2t+1}$ è continua in $]-1/2, 5/2]$, quindi la funzione f risulta derivabile in tale intervallo e si ha

$$f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x+1} \qquad x \in]-1/2, 5/2].$$

Il punto $x = -1/2$ richiede particolare attenzione perchè in tale punto la funzione integranda non è definita. Si ha però che il limite

$$\lim_{t \to (-1/2)^+} \frac{\cos(\pi t)}{2t+1},$$

è una forma indeterminata del tipo $0/0$ che possiamo risolvere facilmente con lo sviluppo di Taylor o derivando e si ottiene

$$\lim_{t \to (-1/2)^+} \frac{\cos(\pi t)}{2t+1} = \frac{\pi}{2},$$

quindi la funzione integranda è limitata e l'integrale è convergente. La funzione $f'(x)$ si annulla nei punti $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/2$. In tali punti si ha un cambio si segno e si vede facilmente che x_1 è un punto di massimo relativo, mentre x_2 è un punto di minimo locale.

Vicino al punto $x_0 = 2$ si ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = \frac{x-2}{5} - \frac{1}{25}(x-2)^2 + O\left((x-2)^3\right).$$

La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{\pi(2t+1)\sin(\pi t) + 2\cos(\pi t)}{(2t+1)^2},$$

e quindi, dato che il denominatore è positivo la derivata seconda si annulla quando è risolta l'equazione

$$\tan(\pi t) = -\frac{2}{\pi(2t+1)}.$$

Dallo studio grafico si ha che ci sono due soluzioni in $]-1/2, 5/5]$ di cui una nell'intervallo $]1/2, 3/2[$ e l'altra nell'intervallo $]3/2, 5/2[$.

CODICE=237927

PARTE A

1. Il massimo e minimo della funzione $f(x) = x^3 - x$ su $[0, 2]$ sono
   A: non esiste max, min $= -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ B: max $= \frac{2}{9}\sqrt{3}$, min $= -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ C: N.A. D: entrambi non esistono E: max $= 6$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

2. L'integrale
   $$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$
   vale
   A: N.E. B: $-\frac{2}{5}x^{-5/2}$ C: $2 - \sqrt{2}$ D: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ E: N.A.

3. La disequazione $|x| \geq |z|$, con $z \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$ è vera se
   A: mai B: $z = 2i^3 - 2i$ e $x = 3$ C: $z = 1 + i$ e $x = -3$ D: N.A. E: $z = \frac{3}{i} - 2i$ e $x = \pi$

4. Data $f(x) = \sqrt{|x|}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
   A: 1 B: N.A. C: 0 D: $\log(2)$ E: -1

5. La funzione $f : [0, \mathrm{e}] \to [0, 10]$ definita da $f(x) = \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-x}$ è suriettiva per $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che
   A: $\lambda = 1$ B: $\lambda = \log(10)$ C: $\lambda = 10\mathrm{e}$ D: per nessun λ E: N.A.

6. L'integrale
   $$\int_0^1 \log(x)\, dx$$
   vale
   A: -1 B: N.E. C: N.A. D: 0 E: 1

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log(x - x^3)$ nel punto $x_0 = 1/2$ vale $\phi(x) =$
   A: $-\log\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{2}{3}x$ B: N.A. C: $\log\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ D: $1 - x$ E: $\log\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

8. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + \log(n)}{n^3 + 2^n} x^n$$
   A: N.A. B: $x = -1/2$ C: $x = \pi/2$ D: $x = -0.99$ E: $x = 1$

9. Il limite
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x + \sin(x))}{\log(x^2 - \cos(x))}$$
   vale
   A: N.A. B: N.E. C: 0 D: 1 E: 1/3

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
    $$A = \{x \in \mathbb{Q} \cap [-10, 10] : \sin(\pi x) = 1\}$$
    valgono
    A: $\{-10, N.E., 10, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-1, -1, 1, 1\}$ E: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$

CODICE=937658

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=937658

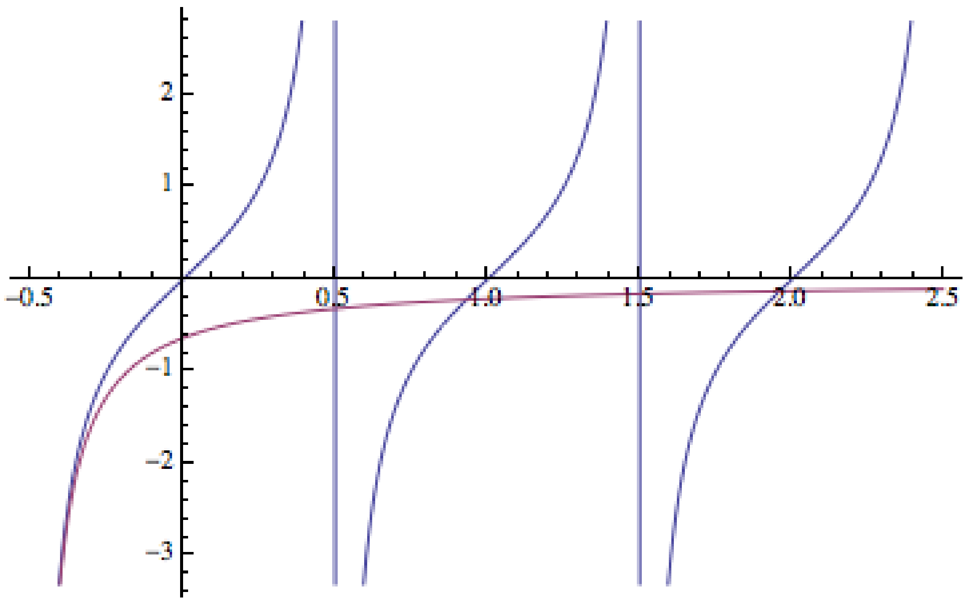

Figura 1: Equazione per studio punti a derivata seconda nulla

Il grafico approssimativo della funzione f risulta pertanto il seguente

2. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}.$$

Soluzione: Utilizziamo il criterio della radice. Se $|a| \leq 1$ abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4n^2}} = +\infty,$$

quindi se $|a| \leq 1$ non abbiamo convergenza. Se $|a| > 1$ invece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{a^{2n}} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/a^{2n} + a}} = \frac{3}{a^2}.$$

Abbiamo quindi convergenza per $a^2 > 3$ ovvero $|a| > \sqrt{3}$, e divergenza per $1 < |a| < \sqrt{3}$ ovvero $|a| < \sqrt{3}$. Per $a = \pm\sqrt{3}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4n^2 + 3^n\sqrt{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/3^n + \sqrt{3}}$$

e il termine n-esimo ha come limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/3^n + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0,$$

quindi la serie non converge non soddisfacendo la condizione necessaria che il termine generico deve essere infinitesimo.
Riassumendo la serie converge se e solo se $|a| > \sqrt{3}$.

CODICE=237927

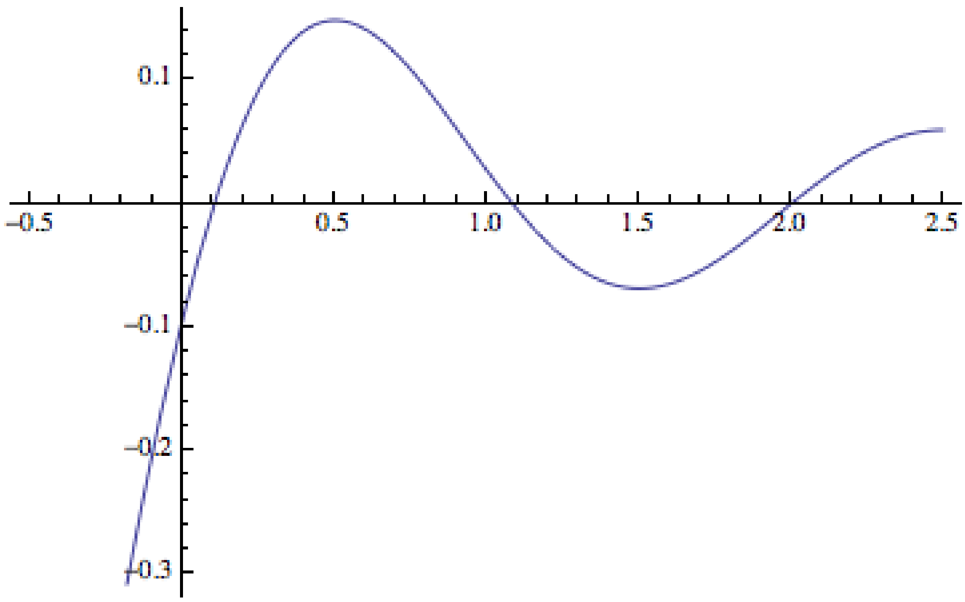

Figura 2: Grafico di $f(x)$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) - 8y(x) = 4$$

si trovino tra le soluzioni quelle che sono limitate su tutto $\mathbb{R}$. Fissato $y(0) = 0$ si determini $y'(0)$ in modo che la soluzione sia tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) < +\infty$.

Soluzione: Cerchiamo intanto la soluzione dell'omogenea. L'equazione associata è

$$\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = -2 + 2\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -2 - 2\sqrt{3}$. Si noti che $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$.

L'equazione omogenea ha come soluzione generale

$$y_0(x) = A\mathrm{e}^{(-2+2\sqrt{3})x} + B\mathrm{e}^{(-2-2\sqrt{3})x}.$$

Si vede immediatamente che una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è: $y_1(x) = -1/2$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale quindi ha la forma

$$y(x) = A\mathrm{e}^{(-2+2\sqrt{3})x} + B\mathrm{e}^{(-2-2\sqrt{3})x} - \frac{1}{2}.$$

Tra queste soluzioni l'unica limitata è $y(x) = -\frac{1}{2}$ (che si ha quando $A = B = 0$).

La condizione $y(0) = 0$ diventa

$$A + B - \frac{1}{2} = 0.$$

Perché valga $\lim_{x\to+\infty} y(x) < +\infty$ dobbiamo scegliere $A = 0$ dal momento che $-2-2\sqrt{3} < 0$. Concludendo abbiamo

$$A = 0,\ B = \frac{1}{2},$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{(-2-2\sqrt{3})x} - \frac{1}{2},$$

CODICE=237927

che ha come dato iniziale per la derivata prima

$$y'(0) = -1 - \sqrt{3}.$$

4. Data la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$ per $x \in [0, +\infty[$ dimostrare che ammette massimo. (Sugg. studiare preliminarmente il limite all'infinito)

   Soluzione: Osserviamo che $f(0) = 0$ e che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ dato che è prodotto di funzioni positive. Studiamo il limite all'infinito e scriviamo $f(x)$ nel modo seguente

$$f(x) = \frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

   in modo da avere una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Studiando pertanto il rapporto delle derivate con la regola di De L'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2} 2x} = 0.$$

   Queste due informazioni sono sufficienti a dimostrare che esiste il massimo. Sia infatti $x_0 > 0$ qualsiasi e scegliamo $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$. Dalla definizione di limite zero all'infinito abbiamo che esiste $K > 0$ tale che

$$f(x) < \epsilon \qquad \forall\, x > K.$$

   Considerando quindi l'intervallo limitato $[0, K]$ su tale intervallo la funzione continua $f(x)$ assume massimo assoluto $M \geq f(x_0)$ e essendo la funzione minore di $M/2$ fuori dall'intervallo $[0, K]$, il numero M risulta massimo assoluto della funzione su tutta la semiretta $x \geq 0$.

CODICE=237927