PARTE A

1. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{x\log(x)}$$

vale

A: N.E. B: $+\infty$ C: 0 D: $-1/2$ E: N.A.

2. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

converge per

A: $0 \leq x \leq 1/2$ B: $1 < x$ C: $0 \leq x < 1/2$ D: $x > 0$ E: N.A.

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^{x^2} < 2\}$$

valgono

A: $\{-\sqrt{\log(2)}, N.E., \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ D: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$
E: $\{-\sqrt{\log(2)}, -\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}\}$

4. Data $f(x) = (\tan(x))^x$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

A: N.A. B: 0 C: $-\pi/2$ D: $\pi/2$ E: π

5. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^3\mathrm{e}^{x^4}$ è

A: e^{x^3} B: $2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ C: N.A. D: e^{x^2} E: $\frac{1}{\cos(x)}$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-3}$ sono

A: $(1/2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ B: N.A. C: $(\sqrt{2}/4, -3\pi/4)$ D: $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ E: $(1/2, -3\pi/4)$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\pi\log(\mathrm{e}x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

A: N.A. B: $1 + \pi(x-1)$ C: $\cos(\pi\log(\mathrm{e})(x-1)$ D: $-\pi x$ E: $-\pi(x-1)$

8. Dato $b < 0$, la funzione $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x > 0$ C: $x \neq 0$ D: $x \neq \pm 1$ E: N.A.

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{per } x < 1 \\ ax + b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: $(a,b) = (0, 1/\mathrm{e})$ C: $(a,b) = (1/\mathrm{e}, 0)$ D: $(a,b) = (1/(1+\mathrm{e}), \mathrm{e})$ E: N.A.

10. L'integrale

$$\int_0^{\pi/4} t\,\cos(2t)\,dt$$

vale

A: 0 B: $\pi/4 - 1/2$ C: 1 D: $-1/2$ E: N.A.

CODICE=620160

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 620160

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=620160

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2014

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^4 - \alpha\, x^3 + 1 = 0$$

Soluzione: Il problema si riduce a studiare la funzione

$$f(x) = x^4 - \alpha\, x^3 + 1$$

nel suo dominio $D = \mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

La derivata prima $f'(x) = 4x^3 - 3\alpha\, x^2$, si annulla in $x_0 = \frac{3}{4}\alpha$ e dallo studio del segno di f' si deduce che f è decrescente su $(-\infty, \frac{3}{4}\alpha\,)$ e crescente su $(\frac{3}{4}\alpha\,, +\infty)$.
Il punto $x_0 = \frac{3}{4}\alpha$ risulta essere un punto di minimo locale con valore uguale a $y_0 = 1 - \frac{27}{256}\alpha^{\,4}$.
Dall'andamento del grafico di f si deduce che se $y_0 > 0$, cioè se

$$1 - \frac{27}{256}\alpha^{\,4} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{3^{3/4}} < \alpha < \frac{4}{3^{3/4}}$$

allora f non si annulla mai, se $y_0 = 0$ allora f si annulla in un solo punto, se $y_0 < 0$ allora f si annulla in due punti distinti. Pertanto si ha:

- nessuna soluzione per $\alpha \in (-\frac{4}{3^{3/4}}\,, \frac{4}{3^{3/4}})$
- una soluzione per $\alpha = \frac{4}{3^{3/4}}$
- due soluzioni per $\alpha \in (-\infty, -\frac{4}{3^{3/4}} \cup (\frac{4}{3^{3/4}}\,, +\infty)$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - y'(t) = t - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = a \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

PARTE A

1. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-3}$ sono

   A: $(1/2\sqrt{2}, -3\pi/4)$ B: $(1/2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ C: $(1/2, -3\pi/4)$ D: $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ E: N.A.

2. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} t\,\cos(2t)\,dt$$
   vale

   A: N.A. B: $\pi/4 - 1/2$ C: $-1/2$ D: 0 E: $\pi/8 - 1/4$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^{x^2} < 2\}$$
   valgono

   A: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$ B: $\{-\infty, N.E., \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ C: $\{-\sqrt{\log(2)}, -\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}\}$ D: $\{-\sqrt{-\log(1/2)}, N.E., \sqrt{-\log(1/2)}, N.E.\}$ E: N.A.

4. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$
   converge per

   A: N.A. B: $x > 0$ C: $0 \leq x < 1/2$ D: $1 < x$ E: $0 \leq x \leq 1/2$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{per } x < 1 \\ ax+b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: $(a,b) = (0, 1/\mathrm{e})$ C: N.A. D: $(a,b) = (1/(1+\mathrm{e}), \mathrm{e})$ E: $(a,b) = (1/\mathrm{e}, 0)$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\pi \log(\mathrm{e}x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: N.A. B: $\pi(x-1)$ C: $1 + \pi(x-1)$ D: $\cos(\pi\log(\mathrm{e})(x-1)$ E: $-\pi x$

7. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{2x\log(x)}$$
   vale

   A: N.E. B: $-1/2$ C: 0 D: N.A. E: $+\infty$

8. Dato $b < 0$, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: N.A. B: $x \neq \pm 1$ C: $x \in \mathbb{R}$ D: $x \neq 0$ E: $x > 0$

9. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^3 \mathrm{e}^{x^4}$ è

   A: $2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ B: $\frac{\mathrm{e}^{x^4}}{\mathrm{e}^{2\log(2)}}$ C: e^{x^4} D: $\frac{1}{\cos(x)}$ E: N.A.

10. Data $f(x) = (\tan(x))^x$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

    A: $\pi/2$ B: $-\pi/2$ C: 0 D: π E: N.A.

CODICE=339372

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 339372

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=339372

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione, $\lambda^3 - \lambda = 0$, ha radici $0, 1, -1$ tutte con molteplicità uguale a 1. La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

Poiché 0 è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare va cercata dell forma

$$y_f(t) = t(bt + c)$$

Sostituendo le derivate opportune di $yf1(t)$ all'equazione data otteniamo che $y_f(t)$ é soluzione se e solo se $b = -1/2$ e $c = 1$. Dunque la soluzione particolare è $y_f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + t$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo il sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \\ c_2 - c_3 + 1 = a \\ \\ c_2 + c_3 - 1 = 0 \end{cases}$ che ha some soluzioni $c_1 = -1$, $c_2 = a/2$, $c_3 = 1 - a/2$.

Sostituendo tali valori nell'integrale generale otteniamo:

$$y(t) = -1 + \frac{a}{2}e^t + (1 - \frac{a}{2})e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + t$$

.

3. Calcolare

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{1 - x^4}\, dx.$$

Soluzione: Dopo aver fattorizzato il denominatore della funzione integranda possiamo porre

$$\frac{x}{1 - x^4} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} + \frac{Cx + D}{1 + x^2}$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Per determinare il valore delle costanti si puó procedere nel seguente modo.

Moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il primo denominatore di primo grado che si trova nel membro di destra e far tendere il limite dell'equazione a 1, annullando in questo modo i restanti due addendi.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(1 + x)(1 + x^2)} = \lim_{x \to 1} \left(A + \frac{B(1 - x)}{1 + x} + \frac{(Cx + D)(1 - x)}{1 + x^2} \right)$$

Dal calcolo del limite si ottiene $A = 1/4$. Seguiamo lo stesso procedimento per il secondo denominatore di primo grado, si moltiplicano ambo i membri per tale denominatore e si fa tendere il limite dell'equazione a -1, annullando in questo modo i restanti due addendi.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{(1 - x)(1 + x^2)} = \lim_{x \to -1} \left(\frac{A(1 + x)}{1 - x} + B + \frac{(Cx + D)(1 + x)}{1 + x^2} \right)$$

Dal calcolo del limite si ottiene $B = -1/4$. Infine per calcolare C e D basta moltiplicare per l'ultimo denominatore e fare tendere il limite a $\pm\imath$ in modo da annullare i primi due addendi. Si ottiene dunque $C = 1/2$ e $D = 0$.

Si ha pertanto che una primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{1-x^4}$ è

$$G(x) = -\frac{1}{4}\log|x^2 - 1| + \frac{1}{4}\log|x^2 + 1|$$

L'integrale di partenza viene dunque a essere

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{1-x^4}\,dx = G(x)\Big|_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$$

4. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non-negativi. Dimostrare che se $\sum_n a_n < +\infty$ allora

$$\sum_n a_n^2 < +\infty$$

Il risultato è ancora vero se non si richiede che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$?
Soluzione: Poiché $\sum_n a_n < +\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ne segue che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0$ risulta $a_n < 1$; dunque si ha

$$a_n^2 < a_n \quad \text{definitivamente.}$$

Da questa disuguaglianza, per il criterio del confronto, poiché $\sum_n a_n$ converge segue che $\sum_n a_n^2$ converge.
Se la successione non è a termini non negativi il risultato non è piú vero. Basta considerare la successione $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. La successione $\frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini non negativi, decrescente e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Per il criterio di Leibniz la serie $\sum_n a_n$ è convergente.

Ma allora $\sum_n a_n^2 = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.