PARTE A

1. La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
A: è a segni alterni B: diverge C: N.A. D: è indeterminata E: converge

2. Lo sviluppo di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale
A: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ B: $x^2 + o(x^5)$ C: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$ D: N.A. E: $1 + 2\sin(x^2)x + o(x^3)$

3. inf min sup e max dell' insieme
$$A = \{\log(x^2),\ x \leq -1\}$$
valgono
A: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., -1, -1\}$

4. Data $f(x) = (\sin(x^3))^{x^2}$ allora $f'(\sqrt[3]{\pi/2})$ è uguale a
A: -2 B: π C: 0 D: $\sin(\sqrt[3]{\pi/2})^{2(\frac{\pi}{2})^3}$ E: N.A.

5. La soluzione del problema di Cauchy $y''(t) = t^2$, $y(0) = y'(0) = 0$ è
A: $y(t) = \frac{t^3}{3}$ B: $y(t) = 0$ C: $y(t) = 1 + t + t^2$ D: N.A. E: $y(t) = \frac{t^4}{12}$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono
A: N.A. B: $(1, \frac{\pi}{6})$ C: $(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{5})$ D: $(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$ E: $(1, \frac{5\pi}{6})$

7. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\arctan(x))}{x}$$
vale
A: N.A. B: 1/2 C: 1 D: $-\infty$ E: 0

8. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da
$$A := \left\{\|z - \sqrt{2}e^{i\pi/4}\| = 1\right\| \qquad B := \left\{\|z - \sqrt{2}e^{i3\pi/4}\| = 2\right\}$$
A: 2 B: 4 C: 1 D: N.A. E: 0

9. L'integrale
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$
vale
A: 0 B: 2π C: N.A. D: 2 E: $\frac{\pi}{2}$

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^x$ è
A: N.A. B: monotona decrescente C: iniettiva D: monotona crescente E: non negativa

CODICE=201335

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=201335

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 settembre 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \geq 0$ la funzione

$$f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Soluzione: La funzione f risulta definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e inoltre, se $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = N.E. \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0.$$

(Nel caso $\lambda = 0$ la funzione da studiare è il coseno, il cui andamento è ben noto.) Osserviamo che per $x \to -\infty$ il limite non esite perchè la funzione compie oscillazioni sembre più grandi, infatti

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \inf_{x<0} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \sup_{x<0} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = +\infty.$$

La funzione f si annulla dove si annulla il coseno $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e ha lo stesso segno del coseno, dato che $\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$, per ogni $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Lo studio della derivata porta a

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda \cos(x) + \sin(x)$$

che si annulla quando $\tan(x) = -\lambda$, quindi si ha uno zero in ogni intervallo della forma $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi]$

2. Data l'equazione

$$y'(x) = y(x)(x^2 - 2x).$$

   (a) Si trovi la soluzione con dato iniziale $y(0) = 1$

   (b) Data la soluzione con $y(0) = \pi$ si calcoli il limite $\lim_{x\to\infty} y(x)$

   (c) Si trovi la soluzione con $y(2) = 0$.

Soluzione: (a) Procediamo per separazione di variabili. Si ha

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^2 - 2x)dx$$

quindi $\log|y(x)| = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$, dove C va scelta a seconda del dato iniziale. Detto x_0 l'istante iniziale, si noti che, visto che $y(x) \equiv 0$ è una soluzione, se il dato iniziale $y(x_0)$ è positivo,

CODICE=772643

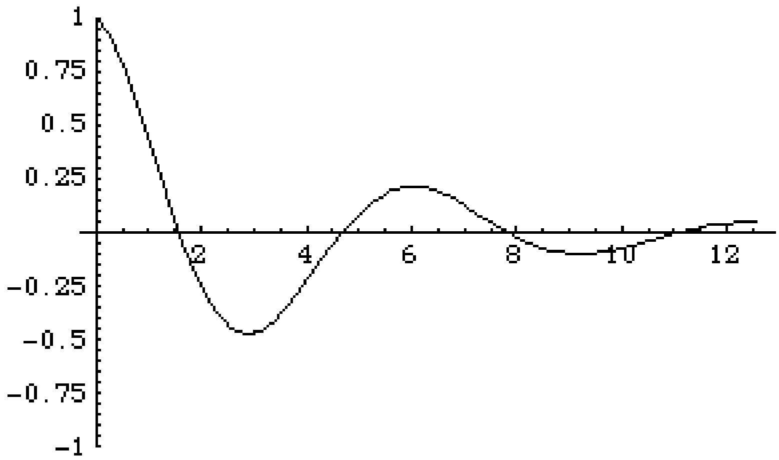

Figura 1: Grafico di f per $\lambda = 1/4$, tra 0 e 4π.

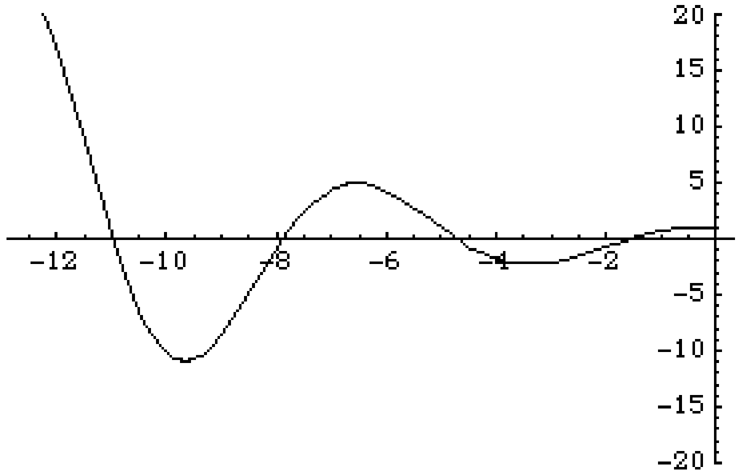

Figura 2: Grafico di f per $\lambda = 1/4$, tra -4π e 0.

CODICE=772643

allora $y(x)$ è positivo per ogni x (analogamente se $y(x_0) < 0$ allora $y(x) < 0$). Quindi, a seconda del dato iniziale, conosciamo il segno di $y(x)$, e possiamo gestire il valore assoluto. In questo caso il dato iniziale è $y(0) = 1 > 0$, quindi abbiamo $\log(y(x)) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$ ovvero

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3} - x^2 + C}$$

Per avere che $y(0) = 1$ basta scegliere $C = 0$.

(b) Si ripete la procedura di sopra; anche in questo caso $y(0) = \pi > 0$ quindi avremo $\log(y(x)) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$ ovvero

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3} - x^2 + C}$$

Con C scelta per avere $y(0) = \pi$. Qualsiasi sia il valore di C avremmo

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = +\infty.$$

(c) Si vede facilmente che in questo caso la soluzione richiesta è la soluzione costante $y(x) \equiv 0$.

3. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log|\lambda|)^n} (x-1)^n$$

Soluzione: Osserviamo intanto che la serie può essere scritta solo per $\lambda \neq -1, 0, 1$ Utilizziamo in criterio della radice per le serie di potenze:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log|\lambda|)^n} (x-1)^n \right|} = \left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right|$$

Quindi serie converge assolutamente per $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| < 1$ ovvero per $1 - |\log|\lambda|| < x < 1 + |\log|\lambda||$ e non converge per $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| > 1$.

Osserviamo anche che la serie poteva essere riscritta come una progressione geometrica

$$(\lambda^2 + \lambda + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{\log|\lambda|} \right)^n$$

da cui si dimostra la non convergenza agli estremi, cioè quando $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| = 1$.

4. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Fornire un esempio di f tale che

   (a) f ha sia il massimo che il minimo;

   (b) f ha massimo, ma non minimo;

   (c) f ha minimo ma non massimo

   Esiste una f soddisfacente a tali ipotesi che non ha né minimo né massimo?

Soluzione: (a) Basta scegliere una funzione che ha sia il massimo che il minimo nell'intervallo $]0,1]$. Esempi possono essere $f(x) = \sin(2\pi x)$ o $f(x) = (x - 1/2)^2$ o semplicemente $f(x)$ costante.

(b) Qui possiamo scegliere una funzione il cui minimo cadrebbe in $x = 0$ o che sia illimitata inferiormente, ad esempio $f(x) = 2x$ o $f(x) = \log(x)$.

(c) Si possono prendere gli esempi di sopra e cambiarne il segno, o trovarne di nuovi, come $f(x) = 1/x$.

Esistono anche funzioni che non hanno né minimo né massimo, ad esempio

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x},$$

che non è limitata né inferiormente né superiormente in ogni intorno dell'origine.

CODICE=772643