PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{x}}\ x \in]0,1]\}$$
valgono
A: $\{-\mathrm{e}, -\mathrm{e}, \mathrm{e}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{1, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ D: $\{0, N.E., \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\}$ E: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$

2. Sia $a > 0$. La serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\log(1+a)}$$
risulta convergente per
A: N.A. B: N.E. C: $e < a < 2e$ D: $a > \mathrm{e} - 1$ E: $a > 1$

3. Il massimo e minimo della funzione $f(x) = x - x^3$ su $(-1, 1)$ sono
A: non esiste max, min $= 0$ B: max $= 0$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ C: N.A. D: max $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ E: entrambi non esistono

4. Il polinomio di Taylor di ordine 2, relativo al punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione $y(x) = \sin(x)$ vale $P_2(x) =$
A: 1 B: N.A. C: $1 - x + \frac{x^2}{2}$ D: $-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{8} + 1$ E: $1 - \frac{x^2}{2}$

5. La soluzione dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' - 2y' = -2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$ è data da $y(x) =$
A: $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$ B: $e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} + \frac{x}{2}$ C: x D: N.A. E: $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + x$

6. L'integrale
$$\int_{-\infty}^{\sqrt{\mathrm{e}}} 4x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$
vale
A: $\log(\mathrm{e}^2)$ B: $-2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ C: N.A. D: $-\infty$ E: e^{e}

7. Il limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\sin(x)} - 1}{\tan(x)}$$
vale
A: $N.A.$ B: N.E. C: 1 D: $-\infty$ E: -1

8. L'integrale
$$\int_2^4 \frac{1}{1 - x^2}\, dx$$
vale
A: 1 B: $\arctan(4) - \arctan(2)$ C: 0 D: N.A. E: $\log(\sqrt{5}) - \log(3)$

9. La funzione $f(x) :]2, 10] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\mathrm{e}^{-x/\mathrm{e}}$ è
A: negativa o nulla B: iniettiva C: N.A. D: derivabile 15 volte E: surgettiva

10. Siano dati gli insiemi (complessi) $A := \{z \in \mathbb{C} : z = \mathrm{e}^{1+i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ e $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - i + 1| = 2\}$. Il numero degli elementi di $A \cap B$ è
A: 0 B: 2 C: infiniti D: 1 E: N.A.

CODICE=212714

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=367722

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	●	○
6	○	●	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=422758

CODICE=422758

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=526789

CODICE=526789

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=367722

CODICE=367722

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

PARTE B

1. a) Si studi la funzione $\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}$ per $x > 0$.
   b) Dimostrare che vale la seguente diseguaglianza per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x^{2n} + n^{n/2} > \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} \qquad \forall\, x > 0$$

Sugg: Cosa succede per $n = 1$*?*

Soluzione: La funzione è positiva e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0$$

dove in particolare il primo limite si calcola risolvendo la forma indeterminata $\infty \cdot 0$ tramite la sostituzione $x \to 1/x$.

Si ha poi

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = -\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}\left(x^2-1\right)}{x^4}$$

e quindi si ha un punto di massimo assoluto in $x_1 = 1$, dato che la derivata è strettamente positiva in $]0, 1[$ e strettamente negativa per $]1, +\infty[$. Quindi

$$\max_{\{x>0\}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\Big|_{x=1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

Nel caso di $\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}$ si ha di nuovo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0$$

e inoltre

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\left(\frac{1}{x^2} - n\right).$$

Le stesse considerazioni di prima portano dimostrare che si ha un punto di massimo assoluto in $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi

$$\max_{\{x>0\}} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\Big|_{x=1/\sqrt{n}} = n^{n/2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \leq n^{n/2}.$$

La diseguaglianza è verificata dato che

$$\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} < n^{n/2} < x^{2n} + n^{n/2}.$$

CODICE=367722

2. Si consideri l'equazione differenziale $y' = x\,y\log(y)$.

a) Si determinino eventuali soluzioni costanti

b) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,y\log(y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

c) sapendo che $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,y\log(y) \\ y(0) = 1/2 \end{cases} .$$

Detta $y(x)$ la sua soluzione, si calcoli $\lim_{x\to\infty} y'(x)$.

Soluzione: a) La funzione $y = 1$ è soluzione (attenzione: $y = 0$ non è soluzione costante perché il logaritmo non è definito in zero.)

b) La soluzione risulta $y = 3^{e^{x^2/2}}$, infatti, per separazione di variabili si ha

$$\int_3^Y \frac{dy}{y\log(y)} = \int_0^X x dx$$

quindi $\log|\log|y|| - \log\log 3 = \frac{x^2}{2}$ e, considerando che $y(x) > 1$ perché $y(0) > 1$ e la soluzione non può mai essere uguale ad 1 perché $y \equiv 1$ è una soluzione costante, possiamo togliere i moduli ottenendo

$$\log\log y - \log\log 3 = \frac{x^2}{2} \to \log\left(\frac{\log y}{\log 3}\right) = \frac{x^2}{2} \to \frac{\log y}{\log 3} = e^{x^2/2},$$

quindi $\log y = e^{x^2/2}\log 3 = \log 3^{(e^{x^2/2})}$ e concludendo $y = 3^{(e^{x^2/2})}$.

c) Procediamo come prima, considerando che in questo caso $0 < y < 1$ quando togliamo i moduli, ottenendo $y = 2^{e^{-x^2/2}}$. Usando l'equazione differenziale si ha

$$y' = x2^{e^{-x^2/2}}\log 2^{e^{-x^2/2}} = x2^{e^{-x^2/2}}e^{-x^2/2}\log(2)$$

da cui ricaviamo facilmente che $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

3. Considerato $\lambda \geq 0$, si determini il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} x^n.$$

Si dica qual è l'insieme di convergenza della serie per ogni $\lambda \geq 0$.

Soluzione. Iniziamo con $\lambda = 0$, in tal caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{1} x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

che converge se e solo se $|x| < 1$.

Studiamo ora li raggio di convergenza calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}} \sim \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\lambda} = 1 \text{ se } \lambda \leq 1 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{ se } \lambda > 1 \end{cases}$$

CODICE=367722

Pertanto si ha

$$R = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \leq 1 \\ \\ \lambda & \text{se } \lambda > 1 \end{cases}$$

Studiamo l'insieme di convergenza. Nel caso $\lambda \leq 1$ abbiamo che per $x = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} = +\infty,$$

mentre per $x = -1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}(-1)^n = N.E$$

e in entrambi i casi la condizione necessaria per la convergenza delle serie numeriche non è soddisfatta. Per $0 < \lambda \leq 1$, l'insieme di convergenza è $]-1, 1[$.

Per $\lambda > 1$ si ha per $x = \lambda$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}\lambda^n = +\infty,$$

e per $x = -\lambda$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}(-1)^n \lambda^n = N.E.,$$

come nel caso precedente si ha convergenza solo per $x \in]-\lambda, \lambda[$.

4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, tale che $f(x) > 0$ se $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

   Si dica se l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx$ è convergente.

   Soluzione. L'integrale improprio, se esistente è definito da

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{f(x)}\, dx$$

ed è importante studiare il comportamento di f per x in intorno destro di 0. Usando lo sviluppo di Taylor si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = x + o(x)$$

Pertanto si ha che $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x + o(x)}$ e dunque

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{x}} = 1$$

e per il teorema del confronto asintotico l'integrale è divergente perchè comparabile con quello di

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

CODICE=367722