PARTE A

1. Sia y la soluzione di $y'(x) = \cos(\log(y(x)))$ con $y(1) = 1$, allora $y'(1)$ vale
A: N.A. B: 0 C: N.E. D: 1 E: $\sin(\log(y(x))$

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(3 + 3i\big)^{-2}$ sono
A: N.A. B: $(1/3, -\pi/2)$ C: $(1/9, \pi/4)$ D: $(1/(2\sqrt{2}), \pi)$ E: $(1/18, \pi/2)$

3. Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte
$$e^{-x^4-x^2} = \beta$$
A: Nessun valore di β B: $\beta \in]0, 1[$ C: N.A. D: $\beta \in (0, +\infty)$ E: $\beta \in \mathbb{R}$

4. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \big(\log(n)\big)^{\log(n)} (x-1)^n$$
vale
A: e B: 1/e C: N.A. D: $+\infty$ E: 0

5. L'integrale
$$\int_0^3 |1 - x^2|\, dx$$
vale
A: 2/3 B: N.A. C: 6 D: 22/3 E: 0

6. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{x}{x-3}} - 2)$$
A: $-\log(64)$ B: N.E. C: 3e D: 0 E: $6\log(2)$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \log(x^4) > 0\}$$
valgono
A: $\{-1, -1, +\infty., N.E\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{-\infty, N.E, +\infty, N.E.\}$
E: $\{-1, N.E, 1., N.E\}$

8. Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \begin{cases} b & \text{per } x = 2,\ x = 3 \\ 1 & \text{per } x \neq 2, 3. \end{cases}$
Allora i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \cos(\pi x/8) + \int_0^x \cos(g(t))\, dt$ è continua sono
A: $b \in \mathbb{R}$ B: N.A. C: $b \leq 1$ D: $b = 1$ E: $|b| \leq 1$

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\pi \log(x))$ nel punto $x_0 = \mathrm{e}$ vale
A: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ B: N.A. C: $-\frac{\pi(x-\mathrm{e})}{\mathrm{e}}$ D: $1 + x$ E: x

10. Data $f(x) = |x|^{|\log(x)|}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: $3\mathrm{e}^3$ B: 2 C: $\log(2\mathrm{e})$ D: 1 E: N.A.

CODICE=766053

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

17 luglio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=766053

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

17 luglio 2018

PARTE B

1. Si consideri la funzione
$$f(t) = \frac{1 + t^p}{(1 + t)^p} \qquad p > 1.$$
Cercare eventuali massimi e minimi di $f(t)$ per $t \geq 0$ e tracciare grafico qualitativo.

Soluzione. Calcolando la derivata prima si ha
$$f'(t) = \frac{p\left(t^{p-1} - 1\right)}{(t + 1)^{p+1}}$$
e quindi $f'(t) \geq 0$ per $t \geq 1$, dato che $p > 1$. Pertanto $t = 1$ risulta punto di minimo relativo e $f(1) = 1/2^{p-1}$. Dato che $f(0) = 1$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$ si ha massimo assoluto uguale a 1 per $t = 0$ e minimo assoluto in $t = 1$.

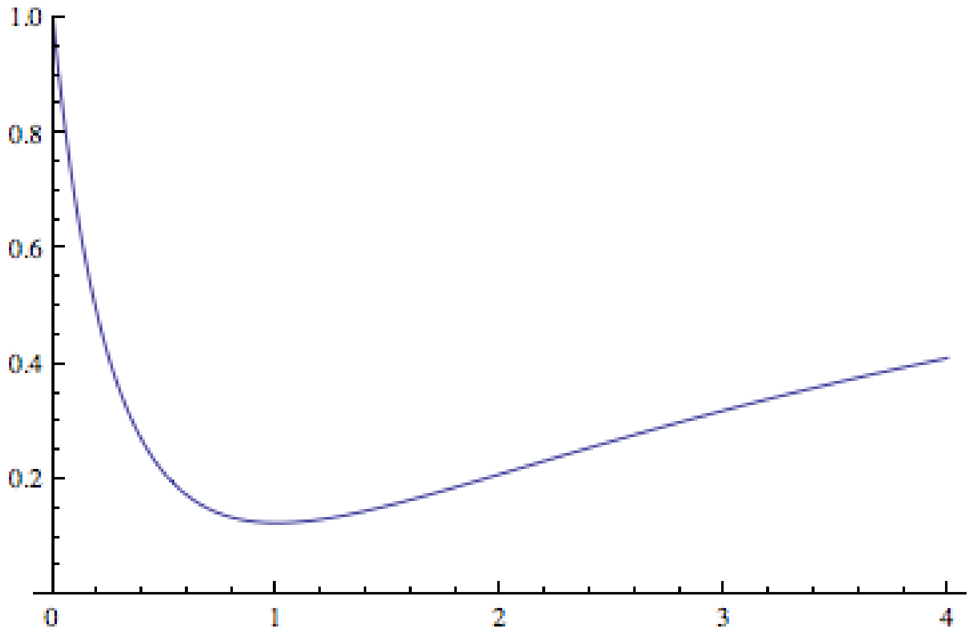

Figura 1: Grafico di $f(t)$ per $p = 4$

CODICE=204623

2. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos(x)}{x^\alpha}\, dx$$

Soluzione. Osserviamo che la convergenza va studiata sia vicino a zero, dato che la funzione diverge a $+\infty$ per $x \to 0$, sia per il fatto che il dominio non è limitato . Va studiata –separatamente– la convergenza dei due integrali

$$\int_0^{1} \frac{2+\cos(x)}{x^\alpha}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(x)}{x^\alpha}\, dx$$

Si ha subito che $1 \leq 2+\cos(x) \leq 3$, quindi

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{2+\cos(x)}{x^\alpha} \leq \frac{3}{x^\alpha}$$

e per il criterio del confronto asintotico è sufficiente studiare la convergenza di

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Il primo integral converge per $\alpha < 1$, mentre il secondo per $\alpha > 1$, quindi l'integrale di partenza non converge per nessuna scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dividendo per y^2 ed effettuando la sostituzione $z(x) = 1/y(x)$

Soluzione. Dividendo per y^2 otteniamo

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{y(x)} - x$$

e osservando che $z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$ si ottiene

$$\begin{cases} z'(x) + z(x) = x \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

che è lineare e a coefficienti costanti. Risolvendola si ottiene

$$z(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + x - 1.$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}^{-x} + x - 1}.$$

4. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é una funzione continua tale che

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0$$

con $a < b$, allora esiste $z \in (a, b)$ tale che $f(z) = 0$. La stessa affermazione è ancora vera se f è solo integrabile secondo Riemann?

CODICE=204623

Soluzione. Usando il teorema della media integrale per funzioni continue si ha che esiste almeno uno $z \in [a, b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

e quindi la tesi.

Nel caso di funzioni solo integrabili l'affermazione non è necessariamente vera, come si vede per esempio considerando la funzione $f(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{per } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Si ha $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, ma $f(x) \neq 0$.

CODICE=204623