PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{\log(|\sin(x)|) : \; x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}, \; k \in \mathbb{Z}\},$$

valgono

A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, 1, 1\}$ D: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ E: $\{0, 0, +\infty, N.E., \}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{per } x > 0, \\ \\ \sqrt{|x|} & \text{per } x \leq 0, \end{cases}$ è

A: né continua né derivabile. B: derivabile, ma non continua. C: N.A. D: continua, ma non derivabile. E: continua e derivabile.

3. Il polinomio di Taylor di ordine 3 per $f(x) = e^{x-2}$ nel punto $x_0 = 2$ vale

A: $1 + (x-2) + 2^{-1}(x-2)^2 + 6^{-1}(x-2)^3$ B: $(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3$ C: $1 + x + x^2/2 + x^3/3!$ D: $2^{-1} + 2^{-1}(x-2)^2$ E: N.A.

4. Sia dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\alpha n}}{n}$$

converge per

A: N.A. B: $\alpha > e$ C: $\alpha < 0$ D: $0 < \alpha < 1$ E: $\alpha \leq 0$

5. La funzione $f: \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sinh(x^2)$ è

A: concava B: surgettiva C: invertibile per $x \in [-1, 1]$ D: iniettiva E: N.A.

6. Il numero complesso $3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ vale

A: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B: -1 C: N.A D: $\frac{1}{2}$ E: $\frac{3}{2}$

7. La soluzione del problema di Cauchy $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ è

A: $y(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$ B: N.A. C: $y(t) = e^{2t} + te^{3t}$ D: $y(t) = 3\sin(2t) - 2\cos(3t)$ E: $y(t) = 1$

8. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+5)^{3/2}} \, dx$$

vale

A: $\frac{1}{\sqrt{6}}$ B: N.A. C: 1 D: 3 E: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

9. Il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(\sin(1/n))}{\log(n)}$$

vale

A: N.E. B: $+\infty$ C: N.A. D: -1 E: 1

10. Data $f(x) = (\log(x))^{\log(x)}$. Allora $f'(e)$ è uguale a

A: 1 B: e^{-1} C: $\sqrt{e}$ D: 0 E: N.A.

CODICE=411197

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 Gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=411197

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 Gennaio 2018

PARTE B

1. Si studi la funzione
$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}, \qquad x \neq \pm 1.$$

Soluzione. La funzione $f(x)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ ed è strettamente positiva per $x > 1$ e strettamente negativa per $x < 1$, $x \neq -1$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = 0.$$

Derivando la funzione una volta si ottiene

$$f'(x) = \left(\frac{x^3+x^2-3x-1}{(x-1)(x+1)^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}},$$

di conseguenza la derivata prima si annulla quando si annulla il polinomio di terzo grado $g(x) := x^3 + x^2 - 3x - 1$. Il polinomio g ammette al massimo 3 radici reali, ovvero esistono al massimo 3 zeri della derivata prima di f. Notiamo che

$$g(-3) = -10 < 0,\ g(-2) = 1 > 0,\ g(-1/2) = 5/8 > 0\, g(0) = -1 < 0,$$

$$g(1) = -2 < 0,\ g(2) = 5 > 0$$

e grazie al teorema degli zeri deduciamo che esistono tre punti $x_1 \in [-3, -2]$, $x_2 \in [-1/2, 0]$ e $x_3 \in]1, 2]$ in cui g e quindi f' si annullano. Dallo studio del segno di f' (che coincide con il segno di g se $x > 1$) possiamo concludere che la funzione f ammette un massimo relativo $x_1 \in [-3, -2]$, un minimo relativo $x_2 \in [-1/2, 0]$ ed un minimo relativo $x_3 \in]1, 2]$. Inoltre valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = 0,\ \lim_{x\to1^-} f'(x) = 0.$$

Infine la retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$ ed analogamente la retta $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per f quando $x \to -\infty$.

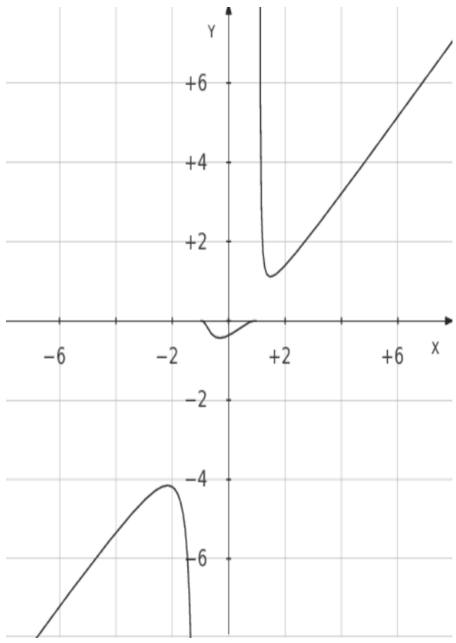

Figura 1: Grafico approssimativo di $f(x)$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}.$$

Si trovi la soluzione generale dell'equazione al variare del parametro $\alpha \geq 0$.

Soluzione. Consideriamo il caso $\alpha = 0$. In questo caso l'equazione differenziale si riduce a

$$y''(x) = 1$$

che possiamo risolvere per integrazione ed otteniamo la soluzione generale $y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$.

Studiamo ora il caso $\alpha > 0$. L'equazione omogenea associata risulta essere

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

Il polinomio caratteristico per questa equazione lineare a coefficienti costanti è $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha^2$ che ammette come radici $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = \alpha$. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è della forma

$$y_0 = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}.$$

Per cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea dobbiamo distinguere due casi: $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$, allora abbiamo risonanza e la soluzione particolare va cercata nella forma $y_P(x) = cxe^x$. Imponendo che y_P risolva l'equazione non omogenea per $\alpha = 1$, si ottiene $c = 1/2$. Quindi, se $\alpha = 1$, la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - y(x) = e^x.$$

è $y_1(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x} + \frac{1}{2}xe^x$.

Se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, allora non abbiamo risonanza e la soluzione particolare va cercata nella forma $y_f(x) = ce^{\alpha^2 x}$. Imponendo che y_f risolva l'equazione non omogenea otteniamo $c = \frac{1}{\alpha^4-\alpha^2}$ e infine la soluzione generale dell'equazione

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}.$$

per $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ è $y_\alpha(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^4-\alpha^2}e^{\alpha^2 x}$.

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\alpha - n\log(1+1/n)\Big]x^n$$

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che $0 < n\log(1+1/n) < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la quantità $\alpha - n\log(1+1/n)$ può essere negativa per $0 < \alpha < 1$. Calcoliamo intanto il raggio di convergenza studiando il limite

$$\sqrt[n]{\big|\alpha - n\log(1+1/n)\big|}$$

Osserviamo che $\big|\alpha - n\log(1+1/n)\big| \to |\alpha - 1|$ e quindi se $\alpha \neq 1$ si ha che $\big|\alpha - n\log(1+1/n)\big|$ è limitato e definitivamente lontano da zero, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\big|\alpha - n\log(1+1/n)\big|} = 1.$$

Nel caso critico $\alpha = 1$ si ha intanto che $1 - n\log(1+1/n) > 0$ e possiamo studiare il limite della radice n-esima come

$$\sqrt[n]{1 - n\log(1+1/n)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log\left(1-n\log(1+\frac{1}{n})\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log\left[1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\right]} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)\big]} \to 1,$$

quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\big|\alpha - n\log(1+1/n)\big|} = 1 \qquad \forall\, \alpha > 0,$$

e pertanto in raggio di convergenza risulta $R = 1$ e si ha convergenza assoluta per $|x| < 1$ e la serie non converge per $|x| > 1$.

Rimane da studiare il caso $x = \pm 1$.

Il termine generico risulta quindi

$$\Big[\alpha - n\log(1+1/n)\Big], \qquad \text{per } x = 1$$

$$\Big[\alpha - n\log(1+1/n)\Big](-1)^n, \qquad \text{per } x = -1$$

e se $\alpha \neq 1$ non sono infinitesimi e quindi la serie non converge. Nel caso $\alpha = 1$, se $x = 1$ la serie risulta a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[1 - n\log(1+1/n)\Big]$$

e dato che $1 - n\log(1+1/n) = O(1/n)$, non converge per il criterio del confronto asintotico.

Nel caso $\alpha = 1$, se $x = -1$ la serie risulta a termini alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[1 - n\log(1+1/n)\Big](-1)^n$$

e si verifica che il criterio di Leibniz è soddisfatto e quindi la serie converge. (Questa ultima affermazione di verifica osservando che la funzione $f(x) = 1 - x \log(1 + 1/x)$ soddisfa $f > 0$, $f'' > 0$ e che $f \to 0$ per $x \to +\infty$.) Pertanto riassumendo, l'insieme di convergenza C risulta

$$C = \begin{cases}]-1, 1[& \text{se } \alpha \neq 1 \\ \\ [-1, 1[& \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

4. Si risolva l'equazione a coefficienti non costanti

$$y''(x) - 4\frac{y'(x)}{x} + 6y(x) = 0$$

cercando delle soluzioni del tipo $y(x) = x^\gamma$, con $\gamma \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Cercando delle soluzioni della forma x^γ si ottiene

$$\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} - 4\gamma x^{\gamma-1} + 6x^\gamma = (\gamma^2 - 5\gamma)x^{\gamma-2} + 6x^\gamma = 0,$$

che non è verificabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, qualsiasi γ venga scelto, dato che il grado risulta diverso. Cercando però delle soluzioni come serie di potenze, cioè

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

e sostituendo si trova

$$\sum_{k}^{\infty} a_k(k^2 - 5k)x^{k-2} + 6\sum a_k x^k = 0$$

o in maniera più esplicita

$$a_1(1-5)x^{-1} + a_2(4-10) + a_3(9-15)x + \cdots + 6a_0 + 6a_1x + 6a_2x^2 + \cdots = 0.$$

Quindi uguagliando le potenze corrispondenti si ha intanto necessariamente $a_1 = 0$ e poi

$$a_2(4-10) = 6a_0 \qquad a_3(9-15) = 6a_1 \qquad \ldots$$

Si ottiene intanto che $a_3 = 0$ e con lo stesso ragionamento che

$$a_{2k-1} = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

mentre per i coefficienti pari abbiamo la relazione di ricorrenza

$$a_k = \frac{6}{5k - k^2} a_{k-2} \qquad k \geq 2 \qquad k \text{ pari},$$

che è ben definita dato che $5k - k^2$ non si annulla mai sui pari.