PARTE A

1. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x\mathrm{e}^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva

   A: N.A. B: $]0, +\infty[$ C: N.E. D: $]0, 1[$ E: $]0, 1]$

2. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale

   A: N.A. B: $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

3. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa

   A: $z = 2i, -2i$ B: $z = -i$ C: $z = -2i$ D: N.E. E: N.A.

4. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\, 3^n}{\mathrm{e}^n(1+n)} x^n$$

   A: $x = \mathrm{e}$ B: $x = -1.87$ C: $x = \sqrt{\pi}$ D: $x = -\pi$ E: N.A.

5. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a

   A: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ B: N.A. C: 1 D: -2 E: 0

6. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x + 1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

   A: $(-\infty, 0)$ B: N.A. C: $\mathbb{R}$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: $(-1, +\infty)$

7. inf min sup e max dell' insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{0, N.E., \sqrt{\mathrm{e}^\mathrm{e}}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, \sqrt{\mathrm{e}^\mathrm{e}}, N.E.\}$ E: $\{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}, N.E., \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}, N.E.\}$

8. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\sin(x)\tan(2x)}$$

   vale

   A: N.A. B: 0 C: $\log(1/3)$ D: $1/2$ E: $1/3$

9. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale

   A: $1+2\cos(x^2)x+o(x^3)$ B: $1+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$ C: N.A. D: $1-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$ E: $x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

10. L'integrale

$$\int_0^1 x\, \mathrm{e}^{-x^2+2}\, dx$$

   vale

   A: $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$ B: $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ C: N.A. D: e^2 E: $\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}$

CODICE=514305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=514305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$$
Calcolare per $\lambda = 1$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f.
Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > -\lambda\}$, in tale insieme si ha
$$f(x) = \begin{cases} -\log(x+\lambda) - \lambda, & \text{se } -\lambda < x < 1-\lambda, \\ \\ \log(x+\lambda) - \lambda, & \text{se } x \geq 1-\lambda. \end{cases}$$
La funzione f risulta continua in D, in particolare $\lim_{x\to 1-\lambda} f(x) = -\lambda$ e si ha
$$\lim_{x\to -\lambda^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$
La funzione f è derivabile in $D \backslash \{1-\lambda\}$ e si ha
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+\lambda}, & \text{se } -\lambda < x < 1-\lambda, \\ \\ \dfrac{1}{x+\lambda}, & \text{se } x > 1-\lambda. \end{cases}$$
Quindi f risulta decrescente per $-\lambda < x < 1-\lambda$ e crescente per $x > 1-\lambda$, si ha un punto di mimino assoluto in $x = 1-\lambda$, anche se in tale punto f non è derivabile. Il minimo vale $f(1-\lambda) = -\lambda$. La funzione poi risulta convessa per $-\lambda < x < 1-\lambda$ e concava per $x > 1-\lambda$.
La regione di piano in questione è delimitata dai punti di intersezione con l'asse delle x che hanno ascissa $x_1 = \mathrm{e}^{-1} - 1$ e $x_2 = \mathrm{e} - 1$ e in tale intervallo f risulta negativa. Pertanto
$$A = \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{\mathrm{e}-1} \Big| |\log(x)+1| - 1 \Big|\, dx$$
$$= -\int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{\mathrm{e}-1} |\log(x)+1| - 1\, dx = \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{0} -\log(x+1) - 1\, dx - \int_{0}^{\mathrm{e}-1} \log(x+1) - 1\, dx$$
$$= (-\log(1+x) - x\log(1+x))\Big|_{\mathrm{e}^{-1}}^{0} + (-2x + \log(1+x) + x\log(1+x))\Big|_{0}^{\mathrm{e}-1}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1}{\mathrm{e}^2}.$$

CODICE=221019

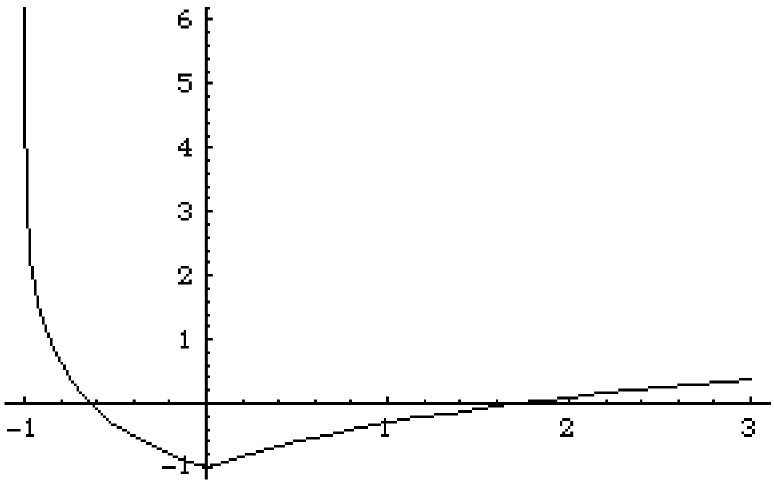

Figura 1: Grafico di $f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$, per $\lambda = 1$

Il grafico approssimativo è quindi il seguente, che non cambia in maniera qualitativa al variare di λ.

2. Data l'equazione
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x.$$
   (a) Si trovi lo spazio delle soluzioni dell'omogenea
   (b) Si trovi una soluzione dell'equazione differenziale con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (c) Si dica se esiste qualche soluzione dell'equazione differenziale tale che $\lim_{x\to\infty} y(x)$ esiste ed è minore o uguale a zero?

Soluzione: (a) L'equazione associata all'omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono
$$y_0(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^x \qquad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Il termine non omogeneo e^x è risonante. Cerchiamo allora una soluzione particolare della forma $y_p = cx\,\mathrm{e}^x$

Si trova facilmente che $c = -1$, quindi l'integrale generale dell'equazione completa è
$$y_f(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha $A + B = 1$, $2A + B - 1 = 0$ ovvero $A = 0$ e $B = 1$; la soluzione cercata è $y(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x$.

(c) Si ha che per $A < 0$ e B qualsiasi o per $A = 0$ e $B \leq 0$ vale $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

3. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)}(x - 1)^n$$

Soluzione: Si tratta di una semplice serie di potenze osservando che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)}(x - 1)^n = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log(\lambda)} \sum_{n=1}^{\infty}(x - 1)^n \quad \text{per } \lambda > 0,\ \lambda \neq 1.$$

CODICE=221019

La restruzione $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ serve per dare senso alla frazione, evitando che si annulli il denominatore.

Pertanto la serie converge se $|x-1| < 1$ e inoltre, usando la formula per la somma (se convergente) di una progressione geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}(x-1)^n = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)} \left[\frac{1}{1-(x-1)} - 1\right], \qquad \text{per } 0 < x < 2,\ \lambda > 0,\ \lambda \neq 1.$$

La serie non converge se $|x-1| \geq 1$. Per affermare questo osserviamo che tale risultato è vero per la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$ e dato che il fattore moltiplicativo $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}$ non si annulla mai, lo stesso vale anche per la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}(x-1)^n$.

4. Data la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{\arcsin(t/2)}{t+1}\, dt$$

si dimostri che è continua e derivabile su $(-1,2)$ e si scriva l'equazione della retta tangente a F nel punto $x = 1$.

Studiare gli intervalli di monotonia.

Soluzione: La funzione $\arcsin(t/2)$ è definita per $-1 < t/2 < 1$, ovvero per $-2 < t < 2$. La funzione $t+1$ è definita per $t \neq -1$, quindi scelto un $x \in (-1,2)$ sicuramente la funzione $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è definita e continua nell'intervallo $[1,x]$ ($[x,1]$ se $x < 1$). Dunque la funzione $F(x)$ è ben definita per ogni $x \in (-1,2)$. Inoltre, dato che $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo anche che $F(x)$ è derivabile su $(-1,2)$ con derivata $F'(x) = \frac{\arcsin(x/2)}{x+1}$. Pertanto la funzione derivata risulta positiva per $0 < x \leq 2$ e negativa per $-1 < x < 0$, e la funzione F ha un punto di minimo per $x = 0$.

Per $x = 1$ abbiamo $F'(1) = \frac{\arcsin(1/2)}{2} = \frac{\pi}{12}$ e $F(1) = 0$ quindi la retta tangente al grafico $y = F(x)$, che ha equazione $y = F(1) + F'(1)(x-1)$, diventa

$$y = \frac{\pi}{12}(x-1).$$

CODICE=221019