PARTE A

1. Dato il problema di Cauchy $y'(x) = \frac{x^2}{(y(x))^2}$ con $y(1) = 1$. Allora $y'(1)$ vale

   A: $1/2$ B: 1 C: 0 D: -1 E: N.A.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{\alpha+1}} < +\infty\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., -2, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{2, N.E., 2, 2\}$ E: $\{1, N.E., +\infty, N.E.\}$

3. Il limite

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(4x)}{e^{3x} - 1}$$

   vale

   A: N.A. B: 0 C: $\frac{3}{4}$ D: $-\frac{3}{4}$ E: N.E.

4. Il numero complesso $(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))^{2015}$ vale

   A: 1 B: $1 - i$ C: N.A. D: $-i$ E: i

5. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $x > -\frac{1}{2}$ B: $x \geq -\frac{1}{2}$ C: $x < -2$ D: N.A. E: $x > \frac{1}{2}$

6. Data $f(x) = e^{x^2}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

   A: $1/2$ B: N.A. C: 0 D: 1 E: 12

7. Per quali b, c la funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } x \leq 1 \\ x^2 - bx + c & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

   A: N.E. B: N.A. C: $(b, c) = (0, 1)$ D: $(b, c) = (1, 1)$ E: $(b, c) = (-1, 0)$

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{\pi + e}$ è

   A: iniettiva B: limitata C: monotona decrescente D: monotona crescente E: N.A.

9. Per $k \in \mathbb{R}^+$, la retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{k + x^2}$ in $x_0 = 0$ vale

   A: N.A. B: $y(x) = \sqrt{k}$ C: $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{k}} + \tan^2(k))x^2$ D: $-\frac{(\pi k)^2}{4}$ E: $1 + kx$

10. L'integrale

    $$\int_2^0 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$$

    vale

    A: $-\frac{\log(5)}{2}$ B: 0 C: $\log(2) - \log(1)$ D: $\frac{\log(5)}{2}$ E: N.A.

CODICE=903697

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=903697

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - x}{x - \lambda} \right|, \qquad x \neq \lambda.$$

Soluzione. Osserviamo subito che se $\lambda = 0$ allora $f(x) = \left| \frac{x^2-x}{x} \right| = |x-1|$, per $x \neq 0$; mentre se $\lambda = 1$ allora $f(x) = \left| \frac{x^2-x}{x-1} \right| = |x|$, per $x \neq 1$. Escludendo questi due casi in cui il grafico si traccia in maniera elementare osserviamo che per gli altri λ si ha

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Per avere altre informazioni serve preliminarmente studiare il segno di $\frac{x^2-x}{x-\lambda}$. Studiando le disequazioni si ha

$$\frac{x^2 - x}{x - \lambda} \geq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \lambda < 0 & \to \quad x \in A_1 :=]\lambda, 0] \cup [1, +\infty[\\ 0 < \lambda < 1 & \to \quad x \in A_2 := [0, \lambda[\cup [1, +\infty[\\ \lambda > 1 & \to \quad x \in A_3 := [0, 1] \cup]\lambda, +\infty[. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ si ha quindi, per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_1, \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_1. \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda + x^2 - 2\lambda x}{(x - \lambda)^2}, & x \in A_1, \\ -\dfrac{\lambda + x^2 - 2\lambda x}{(x - \lambda)^2}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_1. \end{cases}$$

Con calcoli espliciti si verifica che nei punti $x = 0$ e $x = 1$ la funzione non è derivabile e inoltre che la derivata si annulla per $x_{1/2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$ e dallo studio del segno si ha un punto di

CODICE=627874

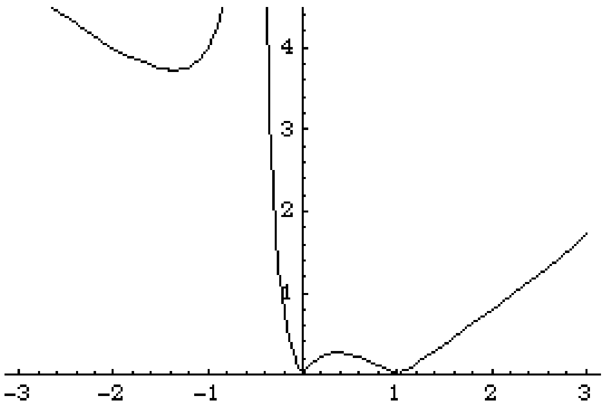

Figura 1: Andamento del grafico di f per $\lambda < 0$.

minimo relativo in $x_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$, e un punto di massimo relativo in $x_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$. (Se $0 < \lambda < 1$ allora $x_1 < 0$ e $0 < x_2 < 1$). Il grafico approssimativo risulta quindi il seguente, vedi Fig. 1.

Per $0 < \lambda < 1$ si ha quindi, per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_2, \\ \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_2. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata risulta lo stesso, ma in questo caso la derivata non si annulla mai perche' $\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$ non è reale. Il grafico approssimativo risulta il seguente, vedi Fig. 2.

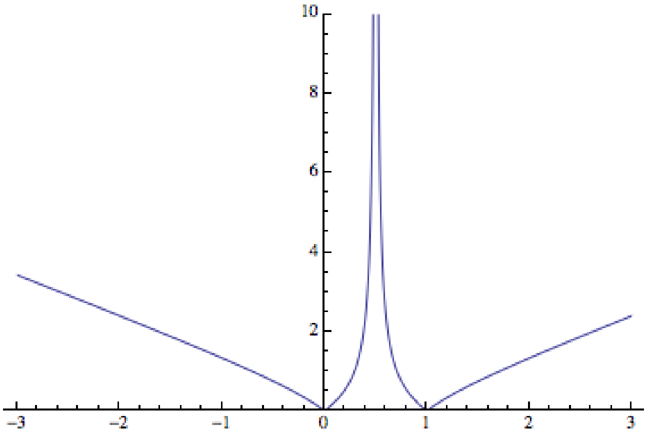

Figura 2: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < 1$.

Per $\lambda > 1$ si ha invece, sempre per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_3, \\ \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_3. \end{cases}$$

CODICE=627874

I calcoli sono simili, con due zeri della derivata prima $0 < x_1 < 1$ e $1 < \lambda < x_2$. il grafico approssimativo risulta il seguente, vedi Fig. 3.

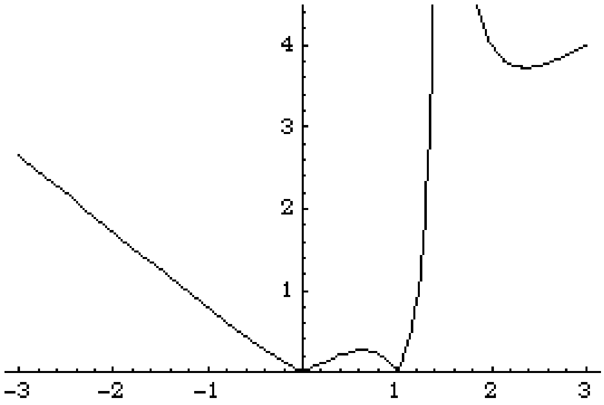

Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda > 1$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 3ty(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{-3t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti non costanti. Moltiplichiamo per il fattore integrante $\mathrm{e}^{\int 3t\,dt} = \mathrm{e}^{3t^2/2}$ e otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\mathrm{e}^{3t^2/2}\right) = \sin(t).$$

Integrando entrambi i membri tra 0 e t si ottiene

$$y(t)\mathrm{e}^{3t^2/2} - y(0) = \int_0^t \sin(\tau)\,d\tau = 1 - \cos(t),$$

da cui la soluzione

$$y(t) = (2 - \cos(t))\,\mathrm{e}^{-3t^2/2}$$

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza e eventualmente calcolare il valore dell'integrale

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+\alpha}{x(x^2-1)}\,dx$$

Soluzione. Si tratta di una funzione integranda non negativa e inoltre

$$\frac{x+\alpha}{x(x^2-1)} = \mathcal{O}(1/x^2) \quad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale risulta convergente per ogni $\alpha > 0$. Decomponendolo in fratti semplici si ottiene facilmente

$$\frac{x+\alpha}{x(x^2-1)} = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha+1}{2(x-1)} + \frac{\alpha-1}{2(x+1)}.$$

CODICE=627874

Pertanto, per ogni $b \geq 4$

$$\int_4^b \frac{x+\alpha}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}(\alpha+1)\log|x-1| - \alpha\log|x| + \frac{1}{2}(\alpha-1)\log|x+1|\Big|_4^b$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha-1)\log(5) + \alpha\log(4) - \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(3)$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha-1)\log(b+1) + \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(b-1) - \alpha\log(b).$$

Osserviamo ora che per $b \to +\infty$

$$\frac{1}{2}(\alpha-1)\log(b+1) + \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(b-1) - \alpha\log(b) = \log\frac{(b+1)^{\frac{\alpha-1}{2}}(b-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{b^\alpha} \to \log(1) = 0,$$

e quindi

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+\alpha}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\alpha\log\left(\frac{16}{15}\right) + \log\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

4. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Soluzione. Per studiare la diseguaglianza, osserviamo che se a 0 b sono nulli, allora è banalmente vera. Supponiamo pertanto che siano entrambi diversi da zero e dividiamo entrambi i termini per b^n ottenendo la diseguaglianza

$$(1+t)^n \leq 2^{n-1}(1+t^n) \quad \text{per la variabile } t = \frac{b}{a} > 0.$$

Il problema diventa pertanto quello di stabilire se vale la seguente diseguaglianza

$$\phi(t) = (1+t)^n - 2^{n-1}(1+t^n) \leq 0 \quad \forall\, t > 0$$

Osserviamo che $\phi(0) = 1 - 2^{n-1} \leq 0$ e che $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = -\infty$. Inoltre

$$\phi'(t) = n\left((t+1)^{n-1} - 2^{n-1}t^{n-1}\right)$$

che si annulla quando

$$(t+1)^{n-1} = 2^{n-1}t^{n-1} \quad \leftrightarrow \quad t+1 = 2t \quad \leftrightarrow \quad t = 1.$$

Dallo studio del segno di ϕ' si ha che $t = 1$ è un punto di massimo relativo e $\phi(1) = 0$, quindi la tesi dato che ϕ risulta sempre non positiva.

CODICE=627874