PARTE A

1. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sqrt{3})(n+\sqrt{5})^{\alpha}}$$

converge per

A: $\alpha > 0$ B: N.A. C: $\alpha \geq 1$ D: $\alpha > 1$ E: $3 < \alpha < \pi$

2. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(|x|)$ è

A: monotona crescente B: sempre non negativa C: N.A. D: iniettiva E: surgettiva

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: N.A.

4. Data $f(x) = \sin(2\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

A: N.A. B: $-\frac{\pi}{2}$ C: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D: $-\pi$ E: π

5. L'integrale

$$\int_{-1}^{2} |x^3|\, dx$$

vale

A: $\frac{\sqrt{\pi}^4}{2}$ B: $\frac{\pi^4-1}{4}$ C: N.A. D: 0 E: $\frac{17}{4}$

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq \frac{1}{\mathrm{e}^2}\}$$

valgono

A: $\{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{\log(2), \log(2), +\infty, N.E.\}$ C: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, +\infty, N.E.\}$

7. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^4}$ vale

A: $1 + x + x^2$ B: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ C: $1 + x$ D: N.A. E: $1 + x^2$

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

A: N.A. B: $(1, -\pi/6)$ C: $(1, 5\pi/6)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(2, 5\pi/3)$

9. Il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{(11!)}\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}}$$

vale

A: $+\infty$ B: 1 C: 0 D: N.E. E: N.A.

10. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è

A: N.A. B: $\log(\log(t) - t)$ C: $t^2(\log(t) - 1)$ D: $\sin(t) - t\cos(t) + \sqrt{\pi}$ E: $\frac{1}{2}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$

CODICE=621383

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=621383

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2015

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(x+1)$$

Soluzione: Si vede facilmente che la funzione passa per i punti $(0,1)$ e $(-1,0)$. Inoltre si annulla nel solo punto $x=-1$ quindi è negativa per $x<-1$ e positiva per $x>-1$. Si ha anche che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

ed inoltre $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(-2x^2-2x+1)$. Dallo studio della derivata prima si evince che la funzione è decrescente per $\left\{x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\} \cup \left\{x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$ ed è crescente per $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Si ha quindi un punto di minimo (assoluto) in $x_m = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ con $m = f(x_m) = -\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$; si ha un punto di massimo (assoluto) in $x_M = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ con $M = f(x_M) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Calcolando la derivata seconda si ha

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(4x^3+4x^2-6x-2),$$

che si annulla per $x=1$ e $x=\frac{1}{2}(-2\pm\sqrt{2})$. In tali punti la derivata seconda cambia segno e quindi abbiamo 3 punti di flesso.

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = \cos(t)$$

Se $y(0)=0$, esistono valori di $y'(0)$ in modo che la soluzione sia limitata per tutti i $t>0$?

Soluzione: L'integrale generale dell'omogenea è dato da

$$y(t) = a\,\mathrm{e}^{3t} + b\,\mathrm{e}^{-t} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

mentre una soluzione particolare della non-omogenea va cercata della forma $\alpha\cos(t)+\beta\sin(t)$. Sostituendo per determinare i valori dei parametri α e β si trova

$$y_p(t) = -\frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

CODICE=008460

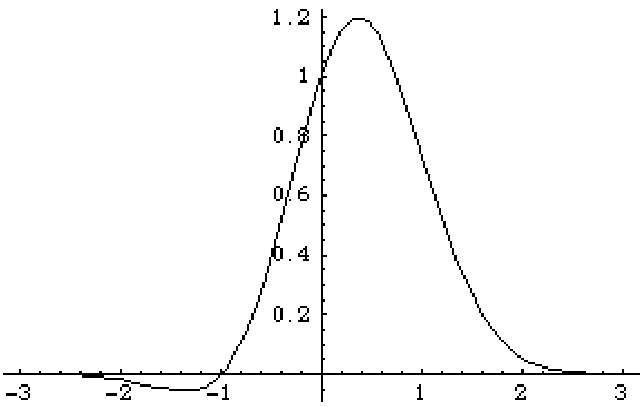

Figura 1: Andamento del grafico di $f(x)$.

e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(t) = a\,\mathrm{e}^{3t} + b\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t.$$

Per avere una soluzione limitata per $t > 0$ bisogna imporre che $a = 0$. Imponendo poi la condizione $y(0) = 0$ si trova $a + b - \frac{1}{5} = 0$ e quindi $b = \frac{1}{5}$. La soluzione risulta pertanto essere

$$y(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

e quindi

$$y'(t)_{|t=0} = (-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t)_{|t=0} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{10}.$$

3. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > -2$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)^{\alpha^2-2}}\,dx$$

Soluzione: La funzione integranda è non-negativa per $x \geq 1$ e continua su tutta la semiretta $[1, +\infty[$. Risulta pertanto integrabile su ogni intervallo della forma $[1, b]$, con $b \geq 1$. Essendo non-negativa possiamo usare i criteri per il confronto asintotico. Si ha

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)^{\alpha^2-2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^\alpha x^{\alpha^2-2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha-2}}\right),$$

e quindi la funzione risulta integrabile in senso generalizzato se e solo se

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1.$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado otteniamo

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1 \iff \alpha \in]-\infty, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13})[\, \cup\,]\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}), +\infty[.$$

Dato che ci interessano solo i valori di $\alpha > -2$, osserviamo ora che $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$, quindi

$$-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(-1-4) < \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) < \frac{1}{2}(-1-3) = -2,$$

e pertanto una delle radici dell'equazione di secondo grado non appartiene al dominio richiesto. Si conclude quindi che l'integrale converge se

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1 \quad \text{e} \quad \alpha > -2 \iff \alpha \in]\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}), +\infty[.$$

CODICE=008460

4. Calcolare

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

dove la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ è definita da

$$f(x) = \big\{\text{numero di volte in cui la funzione } \phi(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e} \text{ cambia segno per } t \text{ minori di } x\big\}$$

Soluzione: La funzione $\phi(t)$ si annulla per $t = 1$, ed è strettamente crescente dato che $\phi'(t) = \mathrm{e}^t > 0$. Pertanto si ha un cambio di segno solo per $t = 1$. Quindi $f(x) = 0$ se $x < 1$, dato che non ci sono cambi di segno di $\phi(t)$ per $t < x \leq 1$. Dato che c'è un unico cambio di segno $f(x) = 1$ per $1 < x \leq 2$. Otteniamo quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1.$$

CODICE=008460