PARTE A

1. Data $f(x) = |\sin(x)|25^{x^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

   A: N.E. B: 0 C: $\pi/2$ D: N.A. E: 1

2. L'integrale
$$\int_0^{\pi} (x-\pi)\sin(x)\,dx$$
   vale

   A: N.A. B: $\pi/2$ C: $\sqrt{2}$ D: 0 E: $-\pi$

3. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|\log(x)|)}{\log(x)}$$
   vale

   A: $+\infty$ B: N.A. C: 1 D: N.E. E: 0

4. La funzione $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin(x^2)$ è iniettiva per

   A: $a=\pi/2$ B: $a=4$ C: $a=\sqrt{\pi}$ D: $a=\sqrt{\pi/2}$ E: N.A.

5. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t\sin(t^2)$ è

   A: $\sin(t^2)+1$ B: $(t^2+\pi)/2+\cos(t)$ C: $t^3/2-\cos(t)$ D: N.A. E: N.E.

6. L'insieme dove converge la serie di potenze
$$\sum_{n=[\pi]}^{+\infty} \frac{n+2+\mathrm{e}^{\sin(n)}}{n} x^n$$
   è

   A: $|x|<8$ B: N.A. C: $0<x<1$ D: $|x|<1$ E: $0<x\le 1$

7. La retta tangente al grafico di $y(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}$ nel punto $x_0=3\pi/2$ vale $\phi(x)=$

   A: $1-x$ B: N.A. C: $\mathrm{e}+(x-3\pi/2)$ D: $\frac{1}{\mathrm{e}}$ E: $1+x$

8. Se esiste, il minimo di $f(x)=|\sin(x)-1|$ sull'insieme $A=\{x\in]-2\pi,0]\}$ vale

   A: N.A. B: N.E. C: 0 D: -1 E: 1

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{y=\frac{\mathrm{e}^x}{|-\mathrm{e}^x|},\ x\neq k\frac{\pi}{2}\ \text{ con } k\in\mathbb{Z}\}$$
   valgono

   A: $\{1,1,1,1\}$ B: $\{-1,-1,1,1\}$ C: $\{1,N.E.,+\infty,N.E.\}$ D: $\{0,0,1,N.E.\}$ E: N.A.

10. L'insieme definito da $\{x\in\mathbb{R}\ ,\ x<|4i-3|\}$ è

    A: N.A. B: Impossibile: non si confrontano numeri reali e complessi C: l'insieme vuoto
    D: $-\infty<x<5$ E: $|x|<4$

CODICE=703413

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=703413

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 febbraio 2016

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{1-\log(x^2)}{(\log(x))^2}.$$

Soluzione: L'insieme più grande dove può essere definita la funzione è $\{x > 0\}\setminus\{1\}$ e in tale insieme si ha
$$f(x) = \frac{1-2\log(x)}{(\log(x))^2} \qquad x \in D =]0,+\infty[\setminus\{1\}.$$
Agli estremi del dominio si hanno i seguenti limiti
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$
La funzione risulta derivabile in D e si ha
$$f'(x) = \frac{2(\log(x)-1)}{x\log^3(x)}$$
Pertanto
$$f' > 0 \ \text{ se e solo se } \ x \in]0,1[\cup]\mathrm{e},+\infty[$$
e la funzione risulta crescente in $]0,1[$ e in $]\mathrm{e},+\infty[$ e decrescente in $]1,\mathrm{e}[$ e nel punto $x = \mathrm{e}$ si ha un punto di minimo relativo con $f(\mathrm{e}) = -1$. Il valore -1 risulta anche essere il minimo assoluto della funzione. La derivata seconda vale
$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2(x)+\log(x)-3\right)}{x^2\log^4(x)}$$
e per trovare gli intervalli di convessità risolviamo, ponendo $y = \log(x)$, l'equazione biquadratica
$$y^2 + y - 3 > 0$$
da cui si ha
$$f''(x) > 0 \leftrightarrow \log(x) < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \vee \log(x) > \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \leftrightarrow x < \mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \vee x > \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$$
da cui si ha che f è convessa in $[\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}, 1[\cup]\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}, +\infty[$. Osserviamo infatti che dato che $-1-\sqrt{13} < 0$ il primo cambio di convessità si ha nell'intervallo $]0,1[$, mentre dato che $-1+\sqrt{13} > 2 > 0$ il secondo si ha per $x > \mathrm{e} > 1$.

CODICE=507670

PARTE A

1. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t\sin(t^2)$ è

   A: $(t^2+\pi)/2+\cos(t)$ B: $\sin(t^2)+1$ C: N.E. D: N.A. E: $t^3/2-\cos(t)$

2. Se esiste, il minimo di $f(x) = |\cos(x)-1|$ sull'insieme $A = \{x \in]-\pi/2, \pi/2]\}$ vale

   A: N.A. B: N.E. C: 0 D: 1 E: -1

3. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x+x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

   A: $x+5x^3/6+o(x^3)$ B: $x+O(x^4)$ C: $x+x^2/2!-x^3/3!+o(x^3)$ D: $x+x^3+o(x^3)$ E: N.A.

4. La funzione $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x^2)$ è iniettiva per

   A: $a = \sqrt{\pi}$ B: $a = \pi/2$ C: $a = \sqrt{\pi/2}$ D: N.A. E: $a = 4$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = \frac{1+\log(x)}{|1+\log(x)|},\ x > \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{-1,-1,+\infty, N.E.\}$ B: $\{1,1,1,1\}$ C: $\{-1, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = 3\pi/2$ vale $\phi(x) =$

   A: N.A. B: $1+x$ C: $\frac{1}{\mathrm{e}}$ D: $\mathrm{e}+(x-3\pi/2)$ E: $1-x$

7. L'insieme dove converge la serie di potenze

$$\sum_{n=[\mathrm{e}]}^{+\infty} \frac{n+2-\mathrm{e}^{\cos(n)}}{n} x^n$$

   è

   A: $0 < x < 1$ B: $|x| < 8$ C: $0 < x \le 1$ D: $|x| < 1$ E: N.A.

8. L'integrale

$$\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos(x)\,dx$$

   vale

   A: $\pi/2$ B: N.A. C: 0 D: $\sqrt{2}$ E: -2

9. Data $f(x) = |\cos(x)|25^{x^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

   A: $\pi/2$ B: N.A. C: N.E. D: 0 E: 1

10. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < |2i-2|\}$ è

    A: l'insieme vuoto B: N.A. C: $-\infty < x < 2\sqrt{2}$ D: $|x|^2 < 8$ E: Impossibile: non si confrontano numeri reali e complessi

CODICE=479804

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=479804

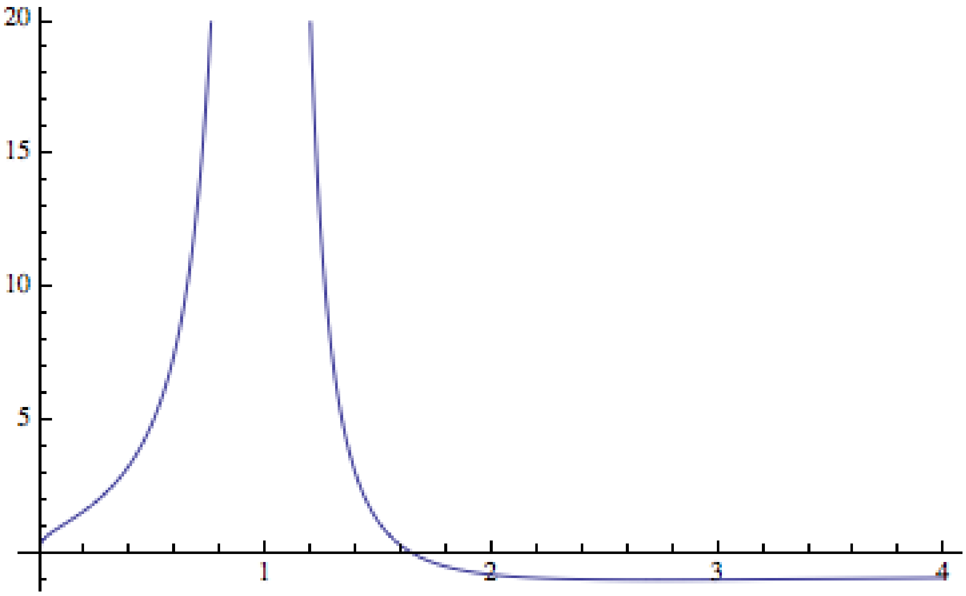

Figura 1: Grafico di $f(x)$

2. Studiare per $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3} x^n.$$
Soluzione: Utilizziamo il criterio della radice per le serie di potenze:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1+n^2}{n^3}\right|} = 1$$
Quindi serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$.
In $x = 1$ abbiamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3}$$
che non converge perché si comporta asintoticamente come la serie armonica.
In $x = -1$ abbiamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^2}{n^3}.$$
Questa serie converge perché a segno alterno e con termini decrescenti.

3. Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$$
con $\alpha \geq 0$ reale.
   (a) Calcolare l'integrale generale.
   (b) Esistono α per cui la soluzione non è limitata inferiormente?
   (c) Nei casi $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$ risolvere l'equazione con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$

Soluzione:

CODICE=507670

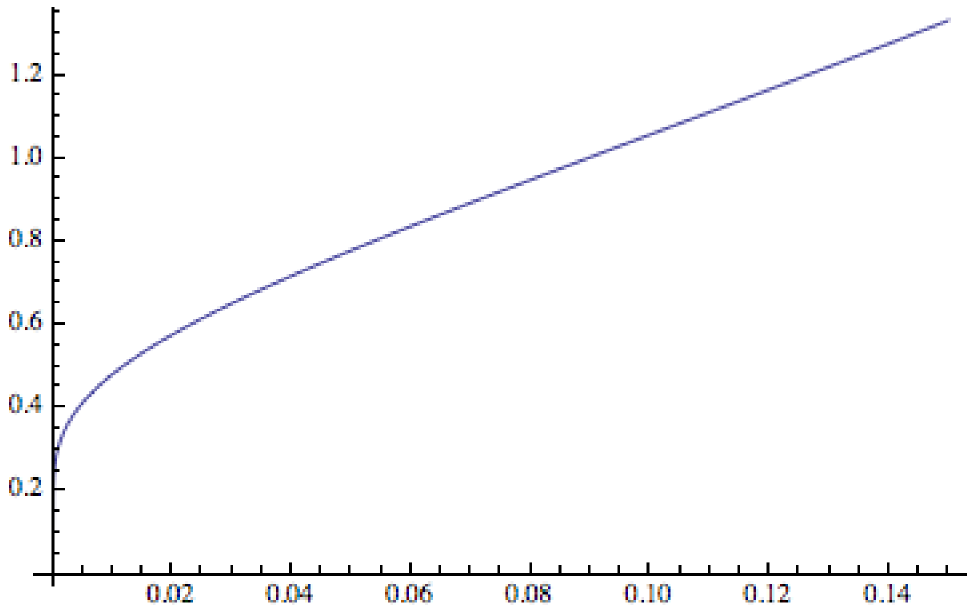

Figura 2: Grafico di $f(x)$ vicino al primo punto di flesso $x = \mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \sim 0.0999809$

(a) L'equazione associata all'omogenea è $\lambda^2+4=0$, con soluzione $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Per $\alpha = 0$, l'equazione si riduce ad un'omogenea, quindi la soluzione generale è

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Per $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 2$, siamo nel caso in cui non c'è risonanza. La soluzione particolare $y_1(x)$ sarà della forma

$$y_1(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$$

quindi

$$y_1''(x) = -a\alpha^2\cos(\alpha x) - \alpha^2 b\sin(\alpha x)$$

Vogliamo che

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = \sin(\alpha x)$$

quindi $a(4-\alpha^2) = 0$, $b(4-\alpha^2) = 1$ quindi una soluzione particolare ha la forma

$$y_1(x) = \frac{1}{4-\alpha^2}\sin(\alpha x)$$

La soluzione generale è

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4-\alpha^2}\sin(\alpha x)$$

Nel caso $\alpha = 2$ dobbiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$y_1(x) = ax\sin(2x) + bx\cos(2x)$$

abbiamo che

$$y_1''(x) = 4a\cos(2x) + 4ax\sin(2x) - 4b\sin(2x) - 4bx\cos(2x)$$

CODICE=507670

Vogliamo che

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = \sin(2x)$$

da cui ricaviamo che $a = 0$ e $b = -1/4$. Quindi la soluzione generale dell'equazione ha la forma

$$y_f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x).$$

(b) Tra queste soluzioni l'unica che non è limitata inferiormente è quella che si ottiene nel caso $\alpha = 2$, che ha il termine $x\cos(2x)$ che non è limitato né inferiormente né superiormente.

(c) Per $\alpha = 2$ la soluzione generale è stata determinata nel punto (a). Dalle condizioni iniziali otteniamo $A = 1$, imponendo che $y(0) = 1$, e $B = 5/8$ imponendo che $y'(0) = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y_f(x) = \cos(2x) + \frac{5}{8}\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x).$$

Per $\alpha = 4$ la soluzione generale è

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{1}{12}\sin(4x)$$

e per avere la soluzione cercata dobbiamo determinare A, B. Abbiamo che $A = 1$ imponendo che $y(0) = 1$ e $B = \frac{2}{3}$ imponendo che $y'(0) = 1$. La soluzione è quindi

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{2}{3}\sin(2x) - \frac{1}{12}\sin(4x).$$

4. Dimostrare che data $f \in C([a,b])$

(a) la funzione $F(x) = \max\{f(x), 0\}$ è continua in $[a,b]$;

(b) data $g \in C([a,b])$ la funzione $G(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è continua in $[a,b]$;

(c) può accadere che g non sia continua in tutto $[a,b]$ ma $G(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ sia ancora continua in $[a,b]$?

Soluzione. a) Osserviamo che dato $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $\frac{x+|x|}{2} = \max\{x, 0\}$. Pertanto

$$\max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

che essendo composizione e somma di funzioni continue è continua.

b) Con lo stesso ragionamento si ha che

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) - g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} + g(x)$$

e quindi essendo composizione di funzioni continue risulta continua.

c) Si, può accadere. Sia per esempio $f(x) = 0$ e sia g una funzione tale che $g(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Anche se g non è continua in qualche punto si ha che $\max\{f(x), g(x)\} = 0$ che è continua.

CODICE=507670