PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(\cos(1-x))}{\sin^2(1-x)}$$
vale

   A: $-1/2$ B: $1/2$ C: N.A. D: N.E. E: -1

2. L'integrale
$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$$
vale

   A: N.A. B: $1-\log(4/3)$ C: 0 D: $\arctan(4/3)$ E: $-1/4+\log(4/3)$

3. Quante soluzioni ha l'equazione $\tan(x) = 1/x$ per $x \in]0, 2\pi[$?

   A: N.A. B: 1 C: 0 D: 3 E: 2

4. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{n^2+2^n}{n}(x-\pi)^n$$
vale

   A: 2 B: 0 C: $1/2$ D: π E: N.A.

5. Calcolare
$$\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   A: N.A. B: $\frac{25}{2}$ C: $\frac{9}{2}$ D: $\frac{3}{2}$ E: $+\infty$

6. Calcolare l'immagine di $f(x) = (x^2+1)e^{-2x}$, per $x \in [0, +\infty[$

   A: $[0,1]$ B: $[0,1[$ C: N.A. D: $]-\infty,1]$ E: $[1,+\infty[$

7. La soluzione particolare di $y^{(iv)} - y^{(iii)} = x\,e^{-x}$ è della forma

   A: axe^{-x} B: $x\,(a+bx)e^{-x}$ C: N.A. D: $ax(\sin(x)+\cos(x))$ E: $(a+bx)e^{-x}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \log(e^x+1) < 1\}$$
valgono

   A: $\{-\infty, 0, N.E., 0\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, e-1, N.E., 0\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., \log(e-1), N.E.\}$

9. Il polinomio di Taylor di grado 1 in $x_0 = 0$ della funzione $\log(1+\sin(x))$ vale

   A: $2x$ B: $-x$ C: $1+x-x^2$ D: $1+x$ E: N.A.

10. Data $f(x) = e^{\cos(x^3)}$, allora $f'(\sqrt[3]{\pi/2})$ vale

    A: $\sqrt{2\pi}$ B: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$ C: -3 D: N.A. E: $-3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$

CODICE=077844

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 gennaio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=077844

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 gennaio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$, il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2|}}{x - \lambda}, \qquad 0 < x \neq \lambda.$$

Soluzione. La funzione risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x - \lambda} & x \geq \sqrt{2}, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x - \lambda} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

e si tratta di una funzione continua in tutto il suo dominio $\{x > 0 : \ x \neq \lambda\}$. Inoltre agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to \lambda^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \lambda^-} f(x) = -\infty,$$

e pertanto el punto $x = \lambda$ c'è un asintoto verticale.

Studiando la derivata prima si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - x\lambda}{\sqrt{x^2 - 2}(x - \lambda)^2} & x > \sqrt{2}, \\[2ex] -\dfrac{2 - x\lambda}{\sqrt{x^2 - 2}(x - \lambda)^2} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

e si ha quindi che

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^\pm} f'(x) = \pm\infty, \qquad \text{se } \lambda < \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^\pm} f'(x) = \mp\infty, \qquad \text{se } \lambda > \sqrt{2}$$

CODICE=813093

e pertanto la funzione risulta non derivabile per $x = \sqrt{2}$ in quanto si ha una cuspide (a meno che $\lambda = \sqrt{2}$, dato che in tal caso il punto non fa parte del dominio).
Nel caso $0 < \lambda < \sqrt{2}$ studiando il segno della derivata otteniamo

$$\text{se } x > \sqrt{2} \text{ allora } f'(x) > 0 \ \leftrightarrow\ 2 - \lambda x > 0 \leftrightarrow\ x < \frac{2}{\lambda},$$

$$\text{se } x < \sqrt{2} \text{ allora } f'(x) > 0 \ \leftrightarrow\ \lambda x - 2 > 0 \leftrightarrow\ x > \frac{2}{\lambda}.$$

Dato che $\lambda < \sqrt{2}$ implica $\frac{2}{\lambda} > \sqrt{2}$ la funzione risulta decrescente negli intervalli $(0, \lambda)$, $(\lambda, \sqrt{2})$ e $(\frac{2}{\lambda}, +\infty)$ e crescente in $(\sqrt{2}, \frac{2}{\lambda})$. Si ha pertanto un massimo relativo per $x_0 = \frac{2}{\lambda}$ e il grafico approssimativo è il seguente

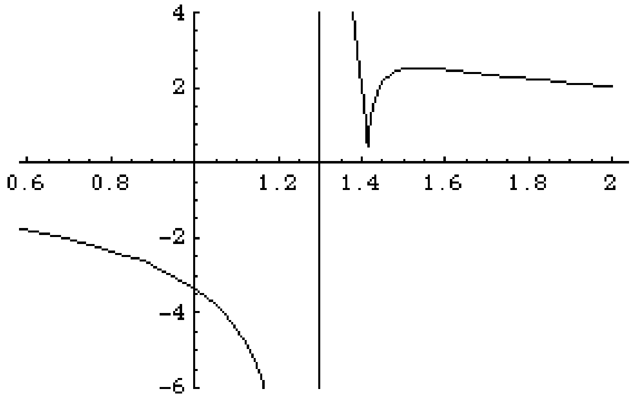

Figura 1: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < \sqrt{2}$.xs

Per $\lambda > \sqrt{2}$ si ha invece con calcoli simili che la funzione è crescente in $(\frac{2}{\lambda}, \sqrt{2})$ e decrescente in $(0, \frac{2}{\lambda})$, $(\sqrt{2}, \lambda)$ e $(\lambda, +\infty)$; il grafico approssimativo è il seguente

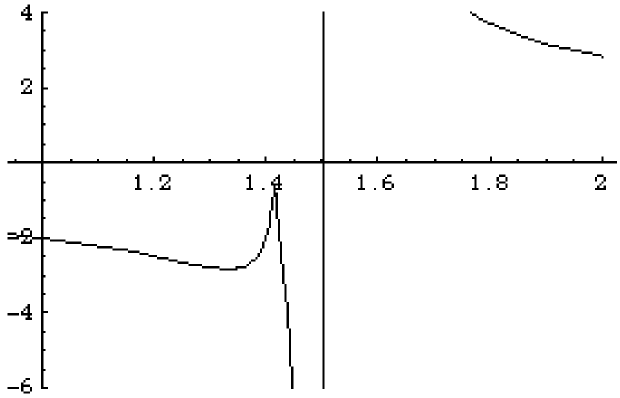

Figura 2: Andamento del grafico di f per $\lambda > \sqrt{2}$.

Nel caso $\lambda = \sqrt{2}$ la situazione è più semplice dato che la funzione risulta uguale a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}} & x \geq \sqrt{2}, \\ \\ -\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-x}} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

CODICE=813093

e quindi con calcoli espliciti della derivata prima risulta decrescente sia in $(0, \sqrt{2})$ che in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

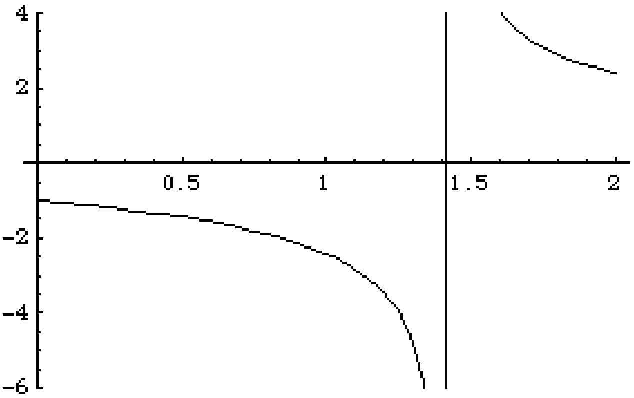

Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda = \sqrt{2}$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La soluzione del problema omogeneo associato $Y''(t) + Y'(t) + Y(t) = 0$ risulta essere

$$Y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right),$$

visto che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ sono $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}2$.

Non c'è pertanto risonanza e quindi la soluzione del problema non omogeneo va cercata della forma $y_f(t) = A \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2} + B \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t/2}$. Sostituendo otteniamo $A = -4$ e $B = 0$, quindi l'integrale generale risulta

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 4 \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2}.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo alla fine come soluzione

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\sqrt{3} \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 4 \mathrm{e}^{-t/2} \sin(t).$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\log(x)(x^3 + x^2 + x + 1)}\, dx.$$

Soluzione. L'integrando in questione è strettamente positivo per $x \geq \mathrm{e}$, quindi possiamo usare i teoremi del confronto e confronto asintotico.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+2x+3}{\log(x)(x^3+x^2+x+1)}}{\frac{x^2}{\log(x)x^3}} = 1$$

e quindi

$$\frac{x^2+2x+3}{\log(x)(x^3+x^2+x+1)} \sim \frac{x^2}{\log(x)x^3} = \frac{1}{x\log(x)}.$$

L'integrale della funzione $\frac{1}{x\log(x)}$ diverge perchè da un calcolo diretto

$$\int_{\mathrm{e}}^{b} \frac{1}{x\log(x)} = \log(\log(x))\Big|_{\mathrm{e}}^{b} \to +\infty \quad \text{per } b \to +\infty.$$

Pertanto anche l'integrale di partenza risulta divergente.

4. Esistono funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, integrabili secondo Riemann, tali che

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

e non identicamente nulle?
Soluzione. Basta considerare la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \neq \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & t = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

e con verifica diretta (tramite la definizione di integrale) si vede che il suo integrale tra 0 e x, con x qualsiasi è sempre identicamente nullo. In realtà possiamo prendere una funzione zero, eccetto che in un numero finito di punti. (Sarebbe molto più complesso da verificare, ma esistono funzioni non negative, non nulle su tutti i razionali e il cui integrale soddisfa la stessa proprietà).

CODICE=813093