PARTE A

1. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ è

   A: N.A. B: iniettiva C: surgettiva D: non derivabile in $x = 0$ E: monotona crescente

2. L'integrale
$$3\int_1^{\mathrm{e}} \log^2(x)\frac{1}{x}\,dx$$
   vale

   A: 1 B: $\sqrt{\mathrm{e}}+1$ C: N.A. D: $\frac{1}{3}$ E: $\frac{1}{2}$

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ è

   A: N.A. B: $\frac{1}{\cos(x)}$ C: $2\mathrm{e}^{2x}$ D: $\frac{1}{\sin(x)}$ E: $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sin(x^2)}$$
   vale

   A: N.E. B: 1 C: $+\infty$ D: N.A. E: $\frac{1}{3}$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ x^a \sin\dfrac{1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ per

   A: $a > 0$ B: $a > 1$ C: mai D: N.A. E: $a \ge 1$

6. Data $f(x) = (\mathrm{e}^x)^x$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: e^2 B: $2\mathrm{e}$ C: N.A. D: $3\mathrm{e}^3$ E: $\log(2\mathrm{e})$

7. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^8$ sono

   A: $(3^5, 0)$ B: N.A. C: $(3^{-4}, \pi/2)$ D: $(27, 2\pi)$ E: $(9^{-2}, 0)$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R}:\ \mathrm{e}^{-x^4} > \frac{1}{2}\}$$
   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., \sqrt[4]{\log 2}, N.E.\}$ B: $\{-\frac{1}{2}, N.E., \frac{1}{2}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ D: N.A.
   E: $\{-\sqrt[4]{\log 2}, N.E., \sqrt[4]{\log 2}, N.E.\}$

9. Dato $x \ge 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+n^2x)}{n}$$
   converge per

   A: $x \le 1$ B: $x = 0$ C: $x > 0$ D: N.A. E: $1 < x$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin^2(4x)$ nel punto $x_0 = \pi/16$ vale

    A: N.A. B: $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ C: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$ D: $1 + \sin(3x)(x - \pi/12)$ E: $4x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

CODICE=427174

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2015

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=427174

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2015

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x - \log(x))$$

Soluzione: La funzione risulta definita se $x > 0$ (per definire il logaritmo "più interno") se inoltre $x - \log(x) > 0$. Osservando che il logaritmo è concavo e che il grafico è tangente a quello della retta $y = x$ per $x = 1$, si ha quindi che la seconda diseguaglianza è sempre verificata $x - \log(x) > 0$. Il dominio pertanto è $D = (0, \infty)$. La funzione f risulta continua in tutto il dominio e usando i limiti notevoli si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{x - 1}{x(x - \log(x))}$$

e dato che il denominatore risulta positivo per tutte le $x \in D$ si ha

$$f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

con un cambio di segno da negativo a positivo in $x = 1$, quindi tale punto è di minimo relativo.

La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \frac{x - \log(x) - (x - 1)^2}{x^2(x - \log(x))^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo, ma il segno del numeratore risulta complesso da studiare. Osserviamo però che

$$\lim_{x \to 0^+} x - \log(x) - (x - 1)^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x - \log(x) - (x - 1)^2 = -\infty,$$

quindi c'è almeno un cambio di concavità (in effetti ne ha uno solo).

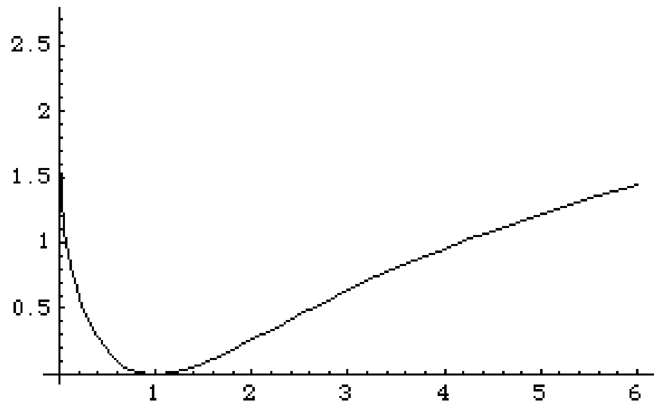

Figura 1: Andamento del grafico di f

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -1$ con molteplicità 2, quindi l'equazione omogenea associata $Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 0$ ha come soluzione

$$Y(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dato che non c'è risonanza la soluzione particolare va cercata della forma

$$y_f(t) = A\sin(t)\mathrm{e}^{3t} + B\cos(t)\mathrm{e}^{3t}.$$

Sostituendo si trova pertanto la forma dell'integrale generale

$$y(t) = Y(t) + y_f(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{289}e^{3t}(8\cos(t) - 15\sin(t)).$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha alla fine la soluzione

$$y(t) = -\frac{1}{289}e^{-t}\left(-306t + 8e^{4t}\cos(t) - 15e^{4t}\sin(t) - 297\right).$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{3/2} dx$$

Soluzione. La funzione integranda è per $x > 0$ continua e nonnegativa dato che $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x$, se $x > 0$. Inoltre la funzione integranda è limitata nell'intorno destro di 0, quindi risulta integrabile secondo Riemann su ogni intervallo della forma $(0, b)$, con $b > 0$.

Per studiare l'integrabilità in senso generalizzato su (b, ∞) possiamo quindi applicare il teorema del confronto asintotico. Moltiplicando e dividendo osserviamo che che

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}.$$

Pertanto

$$\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{3/2} = \mathcal{O}(x^{-3/2}) \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi risulta integrabile in senso generalizzato.

4. Sia k un numero reale maggiore di $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Dimostrare che

$$x^k \log(x) \geq -1 \qquad \forall\, x > 0$$

Soluzione. Per verificare la diseguaglianza studiamo la funzione $f_k(x) = x^k \log(x)$ al variare del parametro k. Dato che $k > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f_k'(x) = x^{k-1}(k\log(x) + 1).$$

Dallo studio del segno della derivata si ha che f_k decresce per $0 < x < \mathrm{e}^{-1/k}$, mentre è crescente per $x > \mathrm{e}^{-1/k}$. Il minimo assoluto vale pertanto

$$f_k(\mathrm{e}^{-1/k}) = -\frac{1}{\mathrm{e}\,k},$$

e $-\frac{1}{\mathrm{e}\,k} \geq -1$ se $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$.