PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $a = 1$ B: mai C: N.A. D: $a = k\pi$ E: $a > \pi/3$

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

   valgono

   A: $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ E: N.A.

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \sinh(x)$ è

   A: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ B: N.E. C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: $\cosh(x) + 1$ E: N.A.

4. Data $f(x) = (\mathrm{e}^x)^x$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $3\mathrm{e}^3$ B: N.A. C: $2\mathrm{e}$ D: $\log(2\mathrm{e})$ E: e^2

5. L'integrale

   $$\int_1^{\mathrm{e}} \log(x) \frac{1}{x} \, dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\sqrt{\mathrm{e}} + 1$ C: 0 D: $2/\mathrm{e}$ E: $\frac{1}{2}$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale

   A: N.A. B: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$ C: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$ D: $1 + x + x^2$ E: $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

7. Il limite

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

   vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: $+\infty$ C: N.E. D: N.A. E: 0

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ è

   A: N.A. B: monotona crescente C: surgettiva D: iniettiva E: non derivabile in $x = 0$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$ sono

   A: $(27, 2\pi)$ B: $(3^4, \pi/2)$ C: $(3^5, 0)$ D: N.A. E: $(9^2, 0)$

10. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{n}$$

    converge per

    A: $x > 0$ B: $1 < x$ C: $x = 0$ D: $x \leq 1$ E: N.A.

CODICE=487106

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 487106

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=487106

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

PARTE B

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ della equazione

$$\lambda = \frac{2-|x|}{1+x}, \qquad x \neq -1.$$

Soluzione: Per risolvere l'esercizio basta tracciare il grafico di $f(x) = \frac{2-|x|}{1+x}$ e vedere quante volte interseca le rette orizzontali $y = \lambda$. Si ha immediatamente che i limiti agli estremi del dominio sono i seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-|x|}{1+x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-|x|}{1+x} = -1$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2-|x|}{1+x} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{2-|x|}{1+x} = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{(x+1)^2} & x > 0 \\ \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & x < 0,\ x \neq -1 \end{cases}$$

e la derivata non esiste per $x = 0$, anche se la funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. La funzione risulta decrescente in senso stretto in $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. Il grafico qualitativo è il seguente

da cui si ricava che esiste una sola soluzione se $\lambda \leq -1$ e $\lambda \geq 1$, e 2 soluzioni per $-1 < \lambda < 1$.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(\pi t) \\ \\ y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione Le soluzioni del problema omogeneo sono

$$Y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t),$$

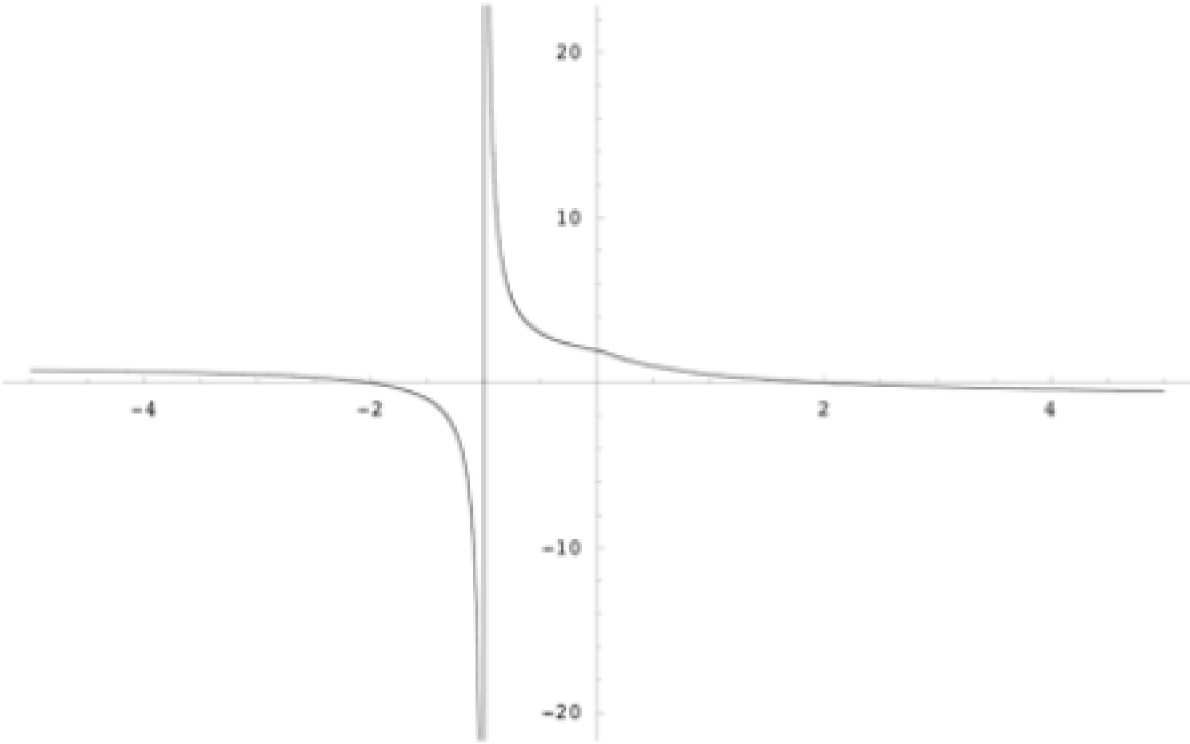

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{2-|x|}{1+x}$

e quindi non c'è risonanza e la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(t) = a\sin(\pi t)+ b\cos(\pi t)$. Sostituendo si trova che

$$y_f(t) = \frac{1}{1-\pi^2}\sin(\pi t)$$

e imponendo poi le condizioni iniziali

$$y(t) = \frac{\left(-1+\pi^2\right)\cos(t) + \pi\sin(t) - \sin(\pi t)}{-1+\pi^2}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\,dx.$$

Soluzione L'integrale in questione converge dato che la funzione integranda è non-negativa e inoltre

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \mathcal{O}(1/x^2).$$

Effettuando la scomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+9}$$

si trova che una primitiva è

$$G(x) = \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{10}\log(x-1) - \frac{1}{20}\log\left(x^2+9\right)$$

e quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\, dx = \lim_{b\to+\infty} G(x)\Big|_3^b = \frac{1}{40}\left(3\pi + \log\left(\frac{81}{4}\right)\right).$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx$$

dove $\{x\}$ è la parte frazionaria di $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione Per calcolare l'integrale basta osservare che $\{x\} = x - [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x. Nell'intervallo $]1, 2[$ si ha quindi $\{x\} = x - 1$ e pertanto

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx = \int_1^{3/2} (x-1)\log(x)\, dx$$

con una integrazione per parti si ha che

$$\frac{1}{2}\log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x$$

è una primitiva di $(x-1)\log(x)$ e dunque

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx = \frac{1}{2}\log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x\Big|_1^{3/2} = \frac{3}{16} - \frac{3}{8}\log\left(\frac{3}{2}\right).$$