

PARTE A

1. La funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^{10!}$ è
A: invertibile B: concava C: surgettiva D: iniettiva E: N.A.
2. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Allora $y(\log(2))$ vale
A: $4\log(2)$ B: N.A. C: -4 D: $3e^4 - 2e^8$ E: 1

3. L'integrale

$$\int_2^\infty x e^{-x} dx$$

vale

A: $3e^{-2}$ B: $+\infty$ C: N.E. D: $2e$ E: N.A.

4. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

converge per

A: $|x| < e^{-1}$ B: $|x| < e$ C: $|x| \leq e^{-1}$ D: N.A. E: $-1 < x < 2$

5. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x^2)}{x(e^{2x} - 1)}$$

vale

A: 1 B: $+\infty$ C: N.A. D: -1 E: N.E.

6. Il coefficiente del termine di 4 grado per polinomio di Taylor di $f(x) = \cos(3x)$ relativo al punto $x_0 = 0$ vale

A: 0 B: $\frac{(-1)^3 3^4}{4!}$ C: $\frac{1}{4!}$ D: $\frac{27}{8}$ E: N.A.

7. Data $f(x) = \arctan(x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: $1/2$ B: 0 C: -1 D: $\pi/4$ E: N.A.

8. Quanti punti contiene $A \cap B \subset \mathbb{C}$ se

$$A := \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = z\bar{z}\} \quad B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ con } z \in A\}$$

A: N.A. B: Nessuno C: 2 D: 1 E: Infiniti

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{\sin(|\log(|x|)|) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

valgono

A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 1, 1\}$ C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$
E: N.A.

10. L'integrale

$$\int_1^{e^2} \log(x) dx$$

vale

A: N.A. B: 1 C: $e^2 - e + 1$ D: -1 E: 0

CODICE=343105

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 Gennaio 2018

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

CODICE=343105

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 Gennaio 2018

PARTE B

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}} \quad x \in \mathbb{R}$$

e si dica se esiste $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Soluzione. La funzione $f(x)$ è definita su tutto \mathbb{R} , è strettamente positiva per $-1 < x < 0$ e $x > 1$ e si annulla in $x = 0$ ed $x = \pm 1$. Inoltre la funzione è dispari poichè si verifica facilmente che $f(-x) = -f(x)$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio troviamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

La funzione è derivabile su tutto il suo dominio. Derivando la funzione una volta si ottiene

$$f'(x) = \frac{2x^6 + 3x^2 - 1}{(x^6 + 1)^{3/2}},$$

di conseguenza la derivata prima si annulla quando si annulla il polinomio di terzo grado $g(x) := 2x^6 + 3x^2 - 1$. Possiamo studiare il polinomio g tramite la sostituzione $t = x^2$ che fornisce $g(x) = G(t) = 2t^3 + 3t - 1$. Si nota facilmente che $G'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, da cui deduciamo che esiste un solo $0 < \bar{t} < 1/2$ tale che $G(\bar{t}) = 0$ e quindi due punti $x_{1,2} = \mp \sqrt{\bar{t}}$ tali che $g(x_{1,2}) = 0$. Concludiamo che $x_{1,2}$ sono due zeri della derivata prima di f con $-1 < x_1 < 0$ e $0 < x_2 < 1$. Dallo studio del segno di f' (che coincide con il segno di g) possiamo concludere che la funzione f ammette un massimo relativo x_1 ed un minimo relativo x_2 .

L'integrale $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ non esiste, poichè per definizione $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ esiste se esistono finiti i due limiti seguenti

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

per $c \in \mathbb{R}$. Ma nel caso di $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}}$ è violata la condizione necessaria affinché questi limiti possano convergere, infatti $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \neq 0$.

2. a) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \cos^2(y(t)) \sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b) La soluzione risulta periodica e di che periodo?

CODICE=635318

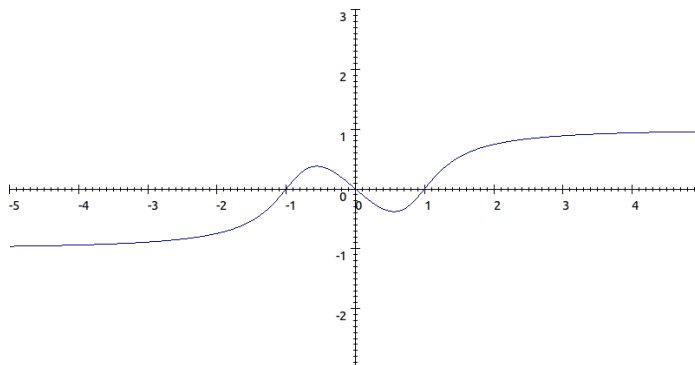


Figura 1: Grafico approssimativo di $f(x)$

c) Per quali valori $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ è risolubile il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \cos^2(y(t)) \sin(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Soluzione. a) L'equazione differenziale considerata è a variabili separabili. Separando le variabili ed integrando otteniamo

$$\int \frac{1}{\cos^2(y)} dy = \int \sin(t) dt$$

da cui

$$y(t) = \arctan(-\cos(t) + C).$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ troviamo la costante $C = 1 + \tan(1)$ da cui la soluzione

$$y(t) = \arctan(-\cos(t) + 1 + \tan(1)).$$

b) La soluzione risulta periodica di periodo $T = 2\pi$ perchè tale è il coseno.

c) Anche in questo caso, separando le variabili troviamo la soluzione

$$\tan y(t) = -\cos(t) + C.$$

CODICE=635318

e ci chiediamo per quali valori α si può trovare una soluzione tale che $y(0) = \alpha$. La condizione iniziale da imporre sarà $\tan(\alpha) = -1 + C$. I valori di α per i quali è risolubile il problema di Cayuchy sono dunque quelli per i quali posso invertire la relazione $\tan(\alpha) = -1 + C$, ovvero $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Il caso $\alpha = \pm\pi/2$ non può essere trattato nello stesso modo, ma osserviamo che le funzioni

$$y_1(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\frac{\pi}{2},$$

sono regolari e sono soluzioni del problema quando $y(0)$ è rispettivamente $\pi/2$ o $-\pi/2$.

3. Studiare la convergenza, ed eventualmente calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x(\log(x))^2 dx$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 x^\alpha (\log(x))^2 dx$$

Soluzione. Se $\alpha > -1$, possiamo integrare per parti successivamente ed otteniamo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha (\log(x))^2 dx &= \\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\log(x))^2 \right]_0^1 - \int_0^1 2x^\alpha \log(x) dx \\ &= -\frac{2}{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha \log(x) dx \\ &= \frac{2}{(\alpha+1)^2} \int_0^1 x^\alpha dx \\ &= \frac{2}{(\alpha+1)^3}. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale converge per $\alpha > -1$ e nel caso $\alpha = 1$ troviamo

$$\int_0^1 x(\log(x))^2 dx = \frac{1}{4}.$$

Se $\alpha = -1$ la primitiva di $\frac{(\log(x))^2}{x}$ è $(\log(x))^3/3$ perciò $\int_0^1 (\log(x))^2/x dx$ diverge. Per il criterio del confronto $\int_0^1 x^\alpha (\log(x))^2 dx$ diverge per ogni $\alpha < -1$.

4. Calcolare la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$$

Sugg. Derivare e moltiplicare per x una opportuna serie di potenze

Soluzione. Ricordiamo che se $|x| < 1$ la somma della serie geometrica esiste e vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Ora deriviamo questa serie, sotto l'ipotesi che essa converga, ed otteniamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

CODICE=635318

Moltiplichiamo la precedente uguaglianza per x ed abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Deriviamo ancora una volta ed abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

Notiamo ora che la serie a sinistra è proprio la somma che vogliamo calcolare per la scelta $x = 1/\pi$. Sostituendo quindi ad x $1/\pi$ concludiamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n} = \frac{\pi^2(1+\pi)}{(\pi-1)^3}$$