PARTE A

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log(1 + x + x^2)$ nel punto $x_0 = 2$ vale $\phi(x) =$

   A: N.A. B: $\log\left(\frac{8}{27}\right) + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$ C: $\frac{8}{7}x + \log\left(\frac{7}{4}\right)$ D: x E: $\log(7) + \frac{5(x-2)}{7}$

2. Data $f(x) = -2\frac{x}{|x|}$. Allora $f'(-2)$ è uguale a

   A: $\log(2)$ B: N.A. C: N.E. D: -1 E: 0

3. Quante sono le soluzioni reali del'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$

   A: nessuna B: N.A. C: 2 D: 3 E: 1

4. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n \log(n)}{1+n} x^n$$

   A: N.A. B: $x = 1/\mathrm{e}$ C: $x = 1.99$ D: $x = -\sqrt{2}$ E: $x = \pi$

5. Il numero complesso $i/(1+i) + (2i)^{-1}$ è uguale a

   A: N.A. B: $1 + i$ C: $\frac{1}{2}$ D: $i - 1$ E: $2 + i$

6. inf min sup e max della funzione $x - 2x^4$ per $x \in (-1, 1)$ valgono

   A: $\{-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, +\infty, N.E.\}$ B: $\{1, N.E., 3, N.E.\}$ C: $\{1, 1, 3, 3\}$ D: $\{-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, 3, 3\}$ E: N.A.

7. La soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = \frac{x^2}{|y(x)|}$ con $y(0) = 1$ nel punto $x = 1$ vale

   A: N.A. B: 0 C: $\sqrt{\frac{5}{3}}$ D: -1 E: 1

8. L'integrale

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\log(t))^3}{t} dt$$

   vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: N.A. C: $-\mathrm{e}^4$ D: 4 E: N.E.

9. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1 + x + x^{(10^9)}}$$

   vale

   A: 1 B: N.E. C: 1/2 D: 0 E: N.A.

10. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\pi \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\, dt\right)$$

   vale

   A: $+\infty$ B: 0 C: N.E. D: 1 E: N.A.

CODICE=772339

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

11 settembre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=772339

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

11 settembre 2018

PARTE B

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \qquad x \neq \pm 2.$$

Soluzione. La funzione risulta pari e positiva per $\{x < 2\} \cup \{x > 2\}$. agli estremi del dominio si hanno i seguenti limiti

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

La derivata prima risulta

$$f'(x) = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

e quindi la funzione è crescente in $]-\infty, -2[\cup]-2, 0]$. Nel punto 0 si ha un massimo relativo.

La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \frac{6\left(3x^2 + 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3}$$

e quindi la funzione è convessa per $\{x < 2\} \cup \{x > 2\}$ e concava per $\{-2 < x < 2\}$.

2. Studiare la convergenza del seguente integrale e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin(x)\, dx.$$

Soluzione. L'integrale improprio in questione risulta assolutamente convergente, dato che $|\mathrm{e}^{-x} \sin(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ e $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, dx < +\infty$.

Integrando per parti si ha che

$$G(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin(x) + \cos(x))$$

risulta essere una primitiva di $e^{-x} \sin(x)$ e quindi

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-x} \sin(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^b \right] = \frac{1}{2}.$$

CODICE=725713

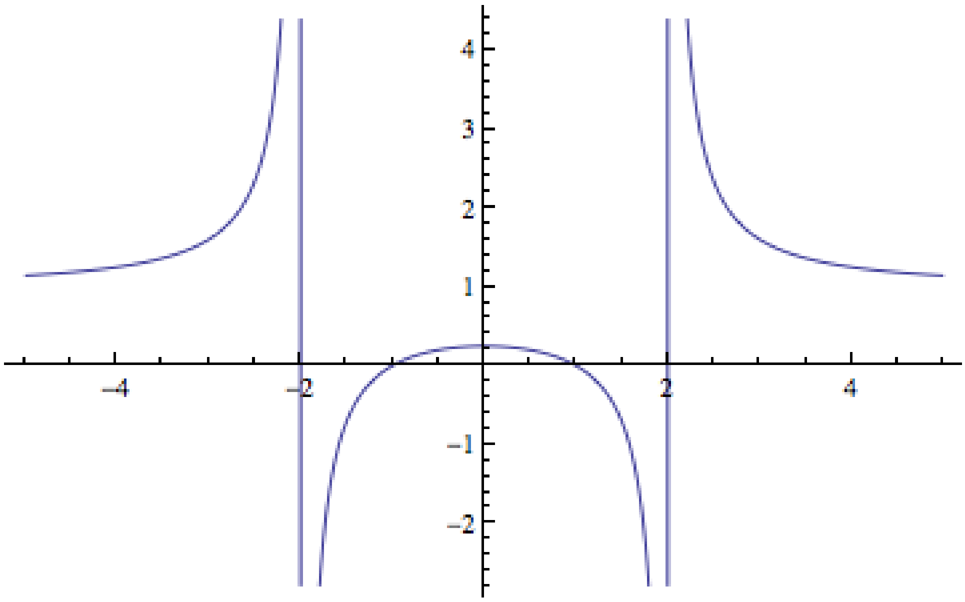

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

3. Risolvere, per $x > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+x}{x} y + x - x^2 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione é limitata inferiormente.

Soluzione. Si trtatta di un equazione lineare a coefficienti variaibli e un fattore integrante risulta essere

$$e^{A(x)} = e^{\int -\frac{1+x}{x}\,dx} = e^{-\log(x)-x} = \frac{e^{-x}}{x} \qquad x > 0.$$

Pertanto, moltiplicando per $\frac{e^{-x}}{x}$ si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\frac{e^{-x}}{x}\right] = y'(x)\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\frac{1+x}{x}y(x) = e^{-x}(1-x)$$

Si ha subito che $\int e^{-x}(1-x)\,x = x\,e^{-x} + c$ e quindi

$$y(x)\frac{e^{-x}}{x} = xe^{-x} + c,$$

da cui

$$y(x) = x^2 + cx\,e^{x}$$

e imponendo che $y(1) = \alpha$ si ha

$$y(x) = x^2 + \frac{\alpha - 1}{e}x\,e^{x}.$$

La funzione y risulta continuna per $\{x > 0\}$ e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0 \qquad \forall\,\alpha > 0 \qquad \begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty \quad \text{se } \alpha \geq 1 \\ &\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty \quad \text{se } \alpha < 1 \end{aligned}$$

quindi è limitata inferiormente solo per $\alpha \geq 1$.

CODICE=725713

4. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, con $f \geq 0$. Dimostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(c)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Soluzione. Dato che $f \geq 0$ e g è continua si ha che

$$f(x)\ \min_{[a,b]} g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x)\ \max_{[a,b]} g(x) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Pertanto

$$\min_{[a,b]} g\ \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \max_{[a,b]} g\ \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se $f \equiv 0$ allora la uguaglianza da dimostrare è banale. Se $f \not\equiv 0$, essendo continua si ha $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$ e quindi si può dividere ottenendo

$$\min_{[a,b]} g\ \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \leq \max_{[a,b]} g$$

e quindi dato che $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ sta tra il minimo e il massimo di g, che è continuna, per il teorema dei valore intermedi esiste almeno un $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = g(c),$$

da cui la tesi, molitplicando di nuovo per $\int_a^b f(x)\,dx$.

CODICE=725713